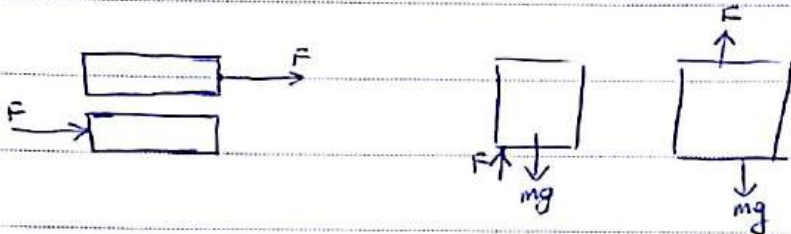


پیش نیازها ۱) کمیت ها را یک واحد و برداری:

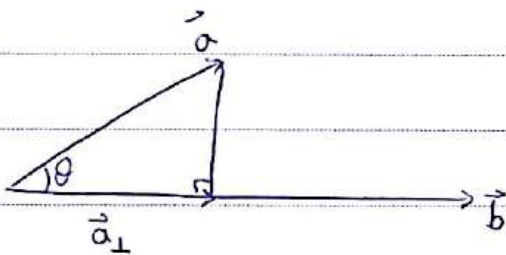
بردار } ۱- مقدار
۲- راستا
۳- جهت

دو مورد بردار نیرو و نقطه اثر نیز مهم است.



نشان: نقطه اثر نیرو و جهت نیست. جسم صلب است. استحکام داخلی بینهایت است. به فرض برای تفران بودن نیرو صلب بودن جسم است. این نیرو فقط در راستای اثر می تواند ایجاد شود.

بردار ثابت

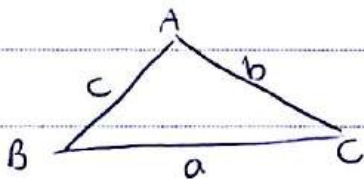


عملیات جبری بردارها:

- $\vec{a} \pm \vec{b}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a}_\perp = \boxed{} n_{\vec{b}}$$

$$|\vec{a}| \cos \theta n_{\vec{b}} = |\vec{a}| |n_{\vec{b}}| \cos \theta \quad n_{\vec{b}} = (\vec{a} \cdot \vec{n}_{\vec{b}}) n_{\vec{b}}$$



قانون سینوسها:

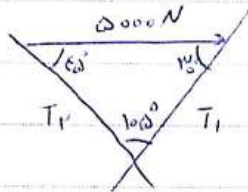
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

قانون کسینوسها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



$$\frac{5000}{\sin 105} = \frac{T_1}{\sin 15} = \frac{T_2}{\sin 15}$$

$$1 \text{ ft} = 305 \text{ mm}$$

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ inch}$$

$$1'' = 25,4 \text{ mm}$$

$$1 \text{ slug} = 14,61 \text{ kg}$$

$$1 \text{ lbm} = 454 \text{ gr}$$

$$1 \text{ slug} = 32,2 \text{ lbm}$$

$$1 \text{ lbf} = 4,45 \text{ N}$$

$$\text{N} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{و} \quad \text{lbf} = \text{slug} \times \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g = 32,2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$$

$$W(\text{lbf}) = m(\text{slug}) \times 32,2$$

گیت ها:

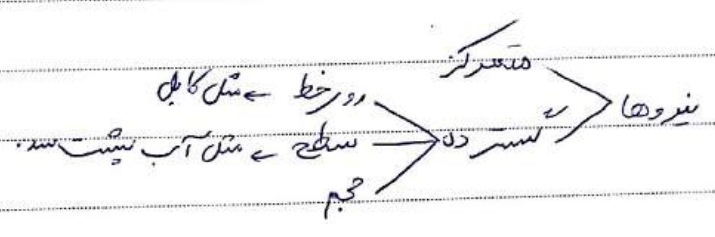
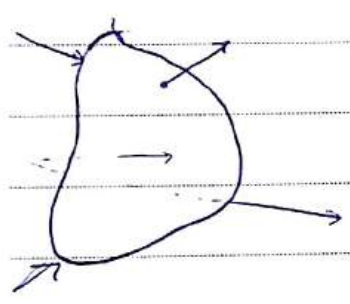
این لازم است
باید اینجا را بدینیم.

اصول کلی حل مسائل در استاتیک: (۱) تعیین مسئله و درک فیزیکی آن
(۲) ترسیم (۳) دیگرام آزاد (۴) نظم و ترتیب

سیستم های نیروی: مقدمه، نیرو، دسته بندی نیرو، فرض صلب بودن اجسام در استاتیک
برای سیستم های نیروی دویجی {۱- ساده ترین سیستم نیروی، لنگر (تستاور)، کوبل، سیستم نیرو کوبل}

نیروی یک بردار ثابت است.

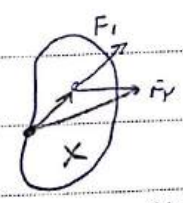
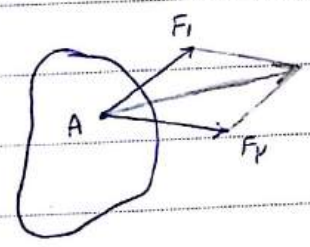
آلده فقط تعادل مد نظر باشد و فقط علاقه مند به نیروها خارجی باشیم در این صورت نیرو می تواند در هر خط اثر خود بلند از اصل اثر
در این صورت در تعادل تأثیر نخواهد داشت ولی بر عکس العمل ها داخلی تأثیر دارد.



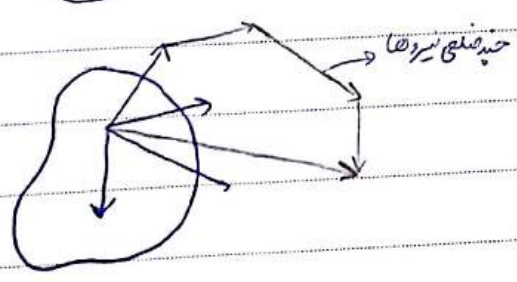
هدف: یافتن برگشت:

اندازه جهت نقطه اثر یا خط اثر

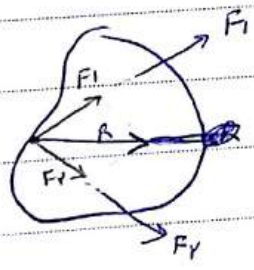
حالت ساده I: سیستم نیروها همس (مقارب)

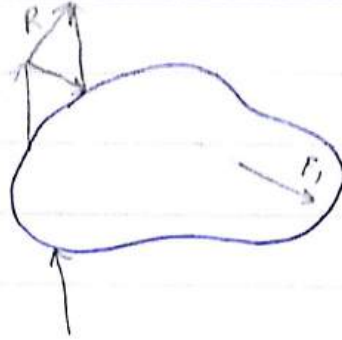


غلط است زیرا نقطه اثر تغییر کرده.

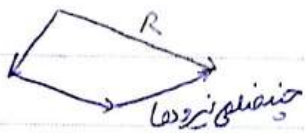
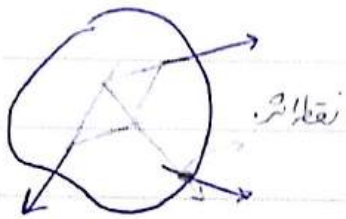


حالت II: سیستم نیرویی شامل ۲ نیرو

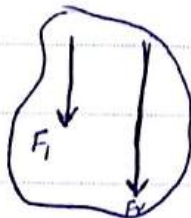




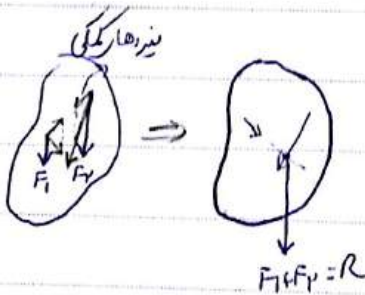
بیشتر از دو نیرو:



دو نیرو در موازتی:



روش حل مسئله: استفاده از نیروی گمگی:



لشتاور نیرو: - اثر چرخانندگی نیرو:

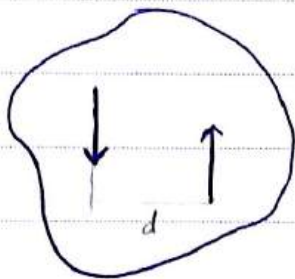
$$M = F \times d$$

$$M = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \text{از مرکز دوران به خط اثر}$$

لشتاور برابر است با: اندازه جهت $\rightarrow$ نقطه اثر

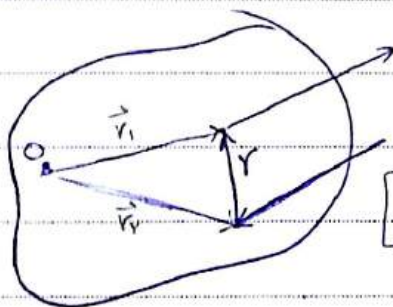
$$|\vec{M}| = r F \sin \theta \Rightarrow |\vec{M}| = F \times (r \sin \theta) = F \times d$$

کویل: برآیند دو نیرو موازی هم اندازه خلاف جهت هم:



$$M = F d$$

بردار کویل بردار آزاد هست نسبت به هر نقطه مقدار $F d$ لشتاور ایجا می کند.

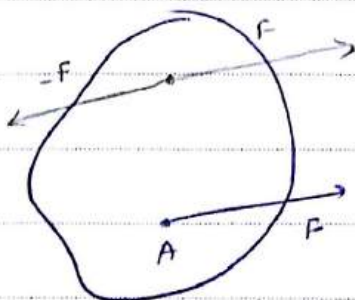


$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F})$$

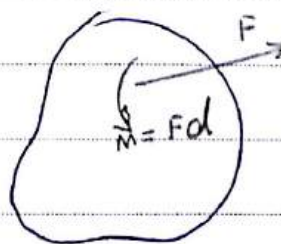
$$\vec{M}_O = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = F \times d$$

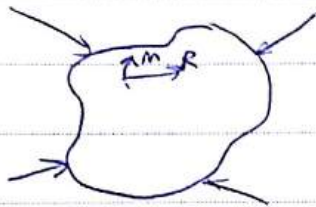
قضیه انتقال موازی نیرو: اگر نیروی که به موازات محور انتقال یابد باید لشتاور حاصل از انتقال موازی در نظر گرفته شود.



$\equiv$



مقدمه - شرایط لازم و کافی برای تعادل - شناخت انواع تکیه گاه ها - رسم دیاگرام آزاد - حالت خاص و گام برداری - معادلات تعادل حاکمین



$$\left. \begin{aligned} R = \sum F_i &= 0 \\ M = \sum M_i &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{شرط لازم و کافی} \\ \text{شرط کافی هم هست} \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{R} = 0 \Rightarrow \sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j} + \sum F_z \hat{k} = 0$$

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

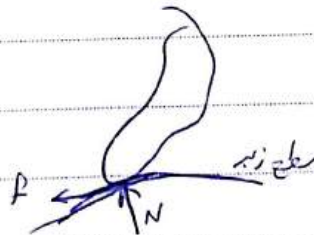
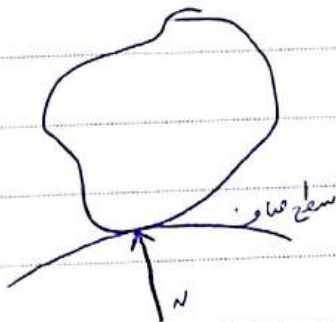
در حالت دو بعدی: سه معادله زیر برای تعادل داریم:

$$\sum F_x = 0$$

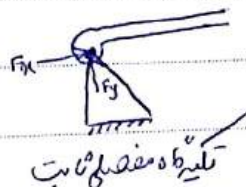
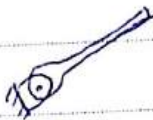
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

انواع ممانعتان بنی یا انواع می گیرین یک سازه:



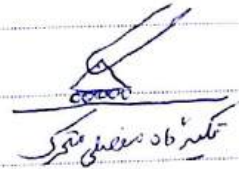
لولا یا تکیه گاه مفصلی:



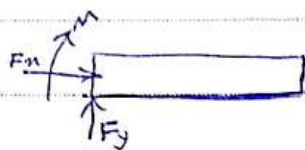
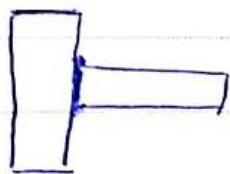
تکیه گاه مفصلی ثابت



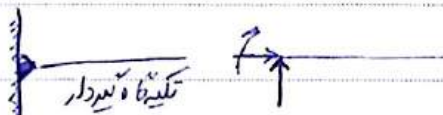
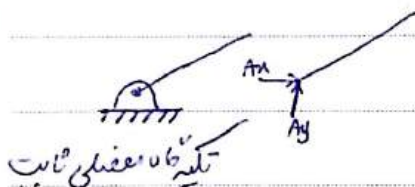
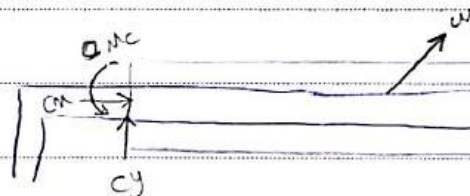
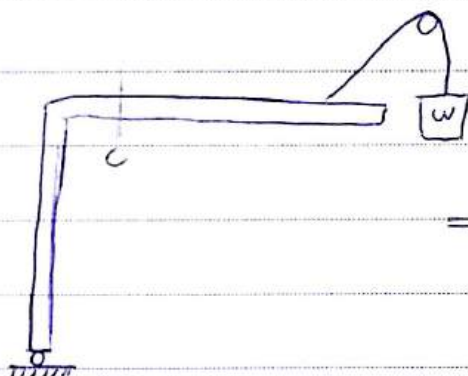
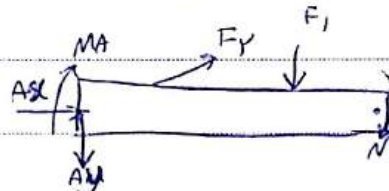
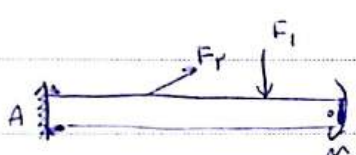
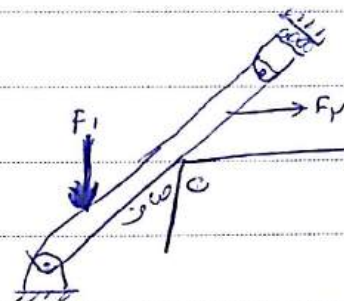
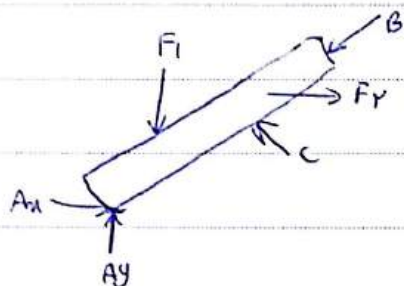
تکیه گاه مفصلی متحرک



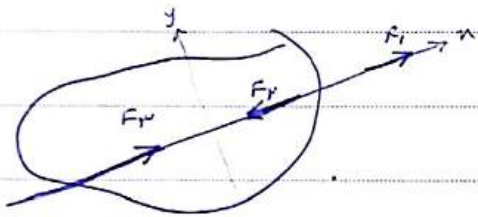
تکیه گاه مفصلی متحرک



تکيه و سواردار



حالات خاص: هم نیروها را در یک راستا باشند:

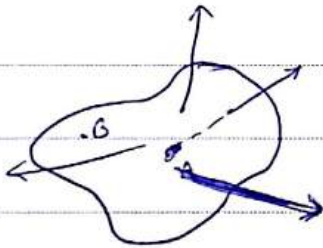


در این حالت $\sum F_y = 0$ و $\sum M = 0$ برقرار است و

فقط یک معادله مستقل $\sum F_x = 0$ موجود است.

۲- هم نیروها هم موازی باشند. در این حالت $\sum M = 0$ به خود خود به خود برقرار است و دو معادله مستقل

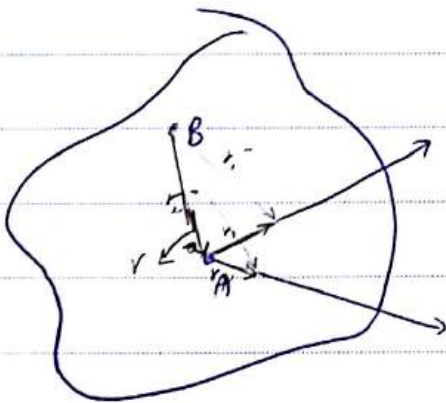
$\sum F_x = 0$ خواهیم داشت و $\sum F_y = 0$



آل نیروها در حال تعادل باشند (برآیند صفر باشد)

- و آنرا نسبت در حول یک نقطه سردی خواهیم صفر باشد

حول هر نقطه دیگری نسبتاً در صفر است.



$$\sum M(A) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

$$\sum M(B) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

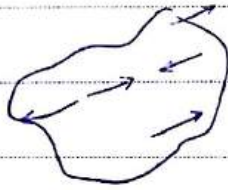
$$\sum M(B) = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) \times \vec{F}_2 + \dots + (\vec{r}_n + \vec{r}_1) \times \vec{F}_n$$

$$\sum M(B) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n + \sum M(A)$$

$$\sum M(B) = \vec{r}(\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n) + \sum M(A)$$

$$\sum M(B) = ?$$

حالت ۳: کلیه نیروها موازی باشند:



در حالت $\sum F_x = 0$ خود به خود برقرار است. اما دو معادله مستقل $\sum F_x = 0$

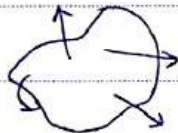
و $\sum M = 0$ برابر است.

حالت کلی:

$$\sum F_x = 0$$

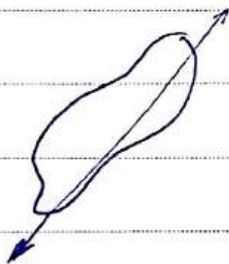
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$



نکته ۱: جسم دوتیرویی: به جسمی که فقط دوتیر دارد می‌گویند. شرط لازم برای تعادل جسم دوتیرویی

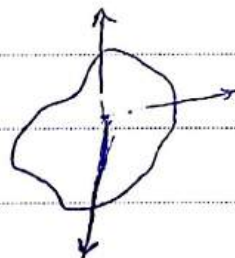
هم راست بودن نیروهاست.



منیت این دوتیری: در محل ده برپا نش

جسم ۳ تیرویی: شرط لازم برای تعادل جسم ۳ تیرویی این است که

هر ۳ نیرو در یک نقطه متقارب باشند.



روش‌ها ساده کردن حل می‌شود:

(۱) انتخاب جهات مناسب x و y :

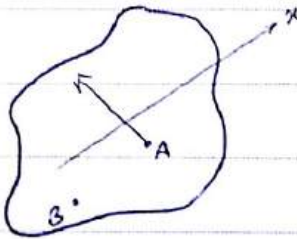
(۲) انتخاب نقطه مناسب برای ستادگیری: اغلب نیروها نسبتاً دور از هم قرار می‌گیرند.

معادلات تعادل جاذبه:

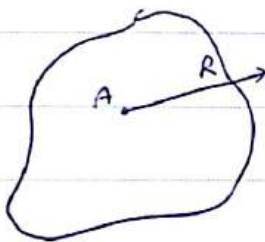
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{array} \right. \text{ معادلات تعادل اصلی}$$

معادله جاذبه ①: $\sum F_x = 0$ و $\sum M_A = 0$ و $\sum M_B = 0$

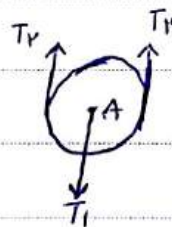
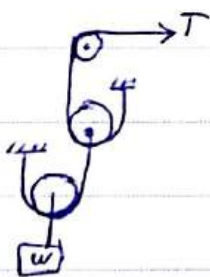
AB $\perp$ x



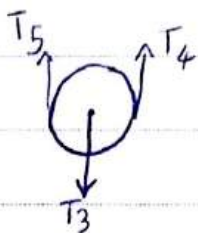
معادله جاذبه ②: $\sum M_A = 0$ و $\sum M(B) = 0$ و $\sum M(C) = 0$
بر سه طاق که A و B و C روی یک خط باشند.



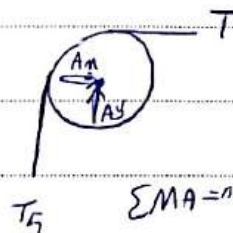
مثال ①:



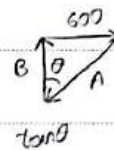
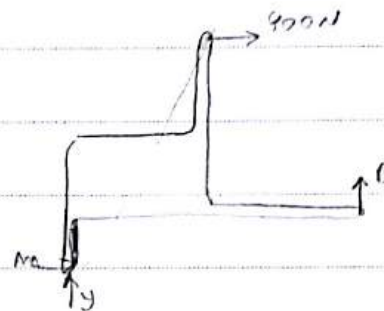
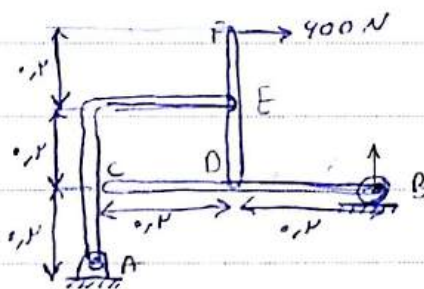
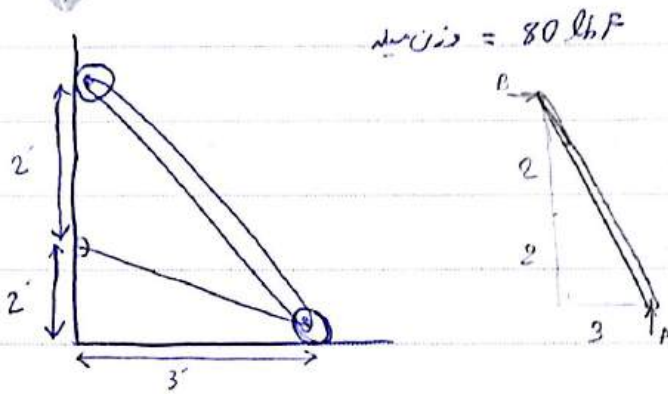
$$\left. \begin{array}{l} \sum M_A = 0 \Rightarrow rT_1 - rT_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = T_3 = W \end{array} \right\} \Rightarrow T_1 = T_2 = \frac{W}{2}$$



$$T_4 = T_5 = \frac{1}{2} T_3 = \frac{W}{4}$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow rT - rT_5 = 0 \Rightarrow T = T_5 = \frac{W}{4}$$



$$\tan \theta = \frac{900}{400} = \frac{9}{4}$$

ردیف

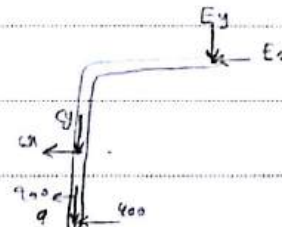
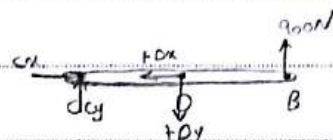
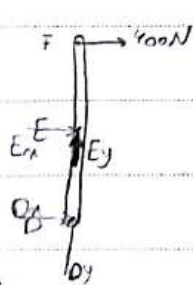
$$\sum M_A = 0$$

$$900(3) - B(3) = 0 \Rightarrow B = \frac{900 \times 3}{3} = 900$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 400 + A_x = 0 \Rightarrow A_x = -400 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 900 + A_y = 0 \Rightarrow A_y = -900 \text{ N}$$

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{400^2 + 900^2} = 1000 \sqrt{1.9} = 1000 \sqrt{11}$$

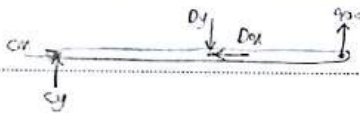


$$\sum M_D = 0$$

$$400(3) + E_y(3) = 0 \Rightarrow E_y = -1100 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 400 + E_x + D_x = 0 \Rightarrow -400 + D_x = 0 \Rightarrow D_x = 400$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow E_y + D_y = 0$$

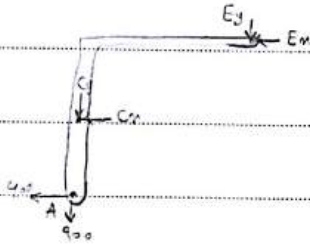


$$\Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow C_x - 400 = 0 \Rightarrow C_x = 400 \text{ N}$$

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow 400 \times 2 - 900 \times 2 = 0 \Rightarrow 400 = 900 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y - 400 + 900 = 0 \Rightarrow C_y = 1100 \text{ N}$$

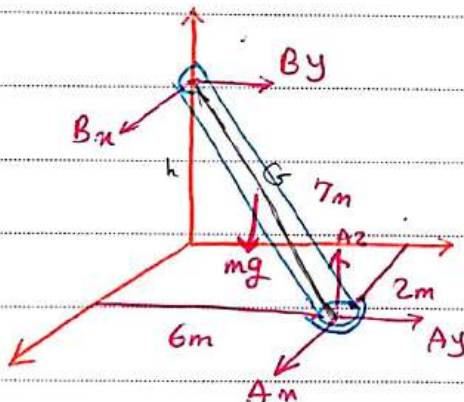
$$E_y + D_y = 0 \Rightarrow E_y + 1100 = 0 \Rightarrow E_y = -1100$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -400 - C_x - E_x = 0 \Rightarrow -400 - 400 + 1100 = 0 \checkmark$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -900 - C_y - E_y = 0 \Rightarrow -900 - 900 + 1100 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -C_x \times 2 - E_x \times 2 + E_y \times 2 = -400 \times 2 - (-1100) \times 2 + (-1100) \times 2 = -1100 + 1100 - 1100 = 0 \checkmark$$



$$\vec{r}_{AB} = -x\hat{i} - y\hat{j} + h\hat{k}$$

$$|\vec{r}_{AB}|^2 = (-x)^2 + (-y)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 8^2 + 4^2 = 80 \Rightarrow h = 8.94$$

$$h = 8.94$$

$$\vec{r}_{AB} = -x\hat{i} - y\hat{j} + h\hat{k}$$

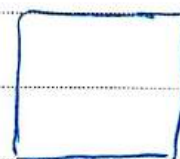
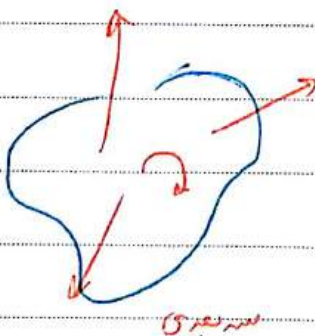
$$\vec{r}_{AG} = -x\hat{i} - y\hat{j} + h\hat{k}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \sum M_A = \vec{r}_{AB} \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) + \vec{r}_{AG} \times (-mg\hat{k})$$

$$\sum M_A = (-x\hat{i} - y\hat{j} + h\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) + (-x\hat{i} - y\hat{j} + h\hat{k}) \times (-mg\hat{k})$$

$$-xB_y\hat{k} + yB_x\hat{k} + hB_x\hat{j} - hB_y\hat{i} - mg\hat{j} + hmg\hat{i} = -x(B_y + hB_x)\hat{k} + h(B_x + mg)\hat{j} + h(B_y + mg)\hat{i}$$

روش تبدیل بردار به مختصات دوتایی:



$$x-y$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_G = 0$$

$$x-z$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_G = 0$$

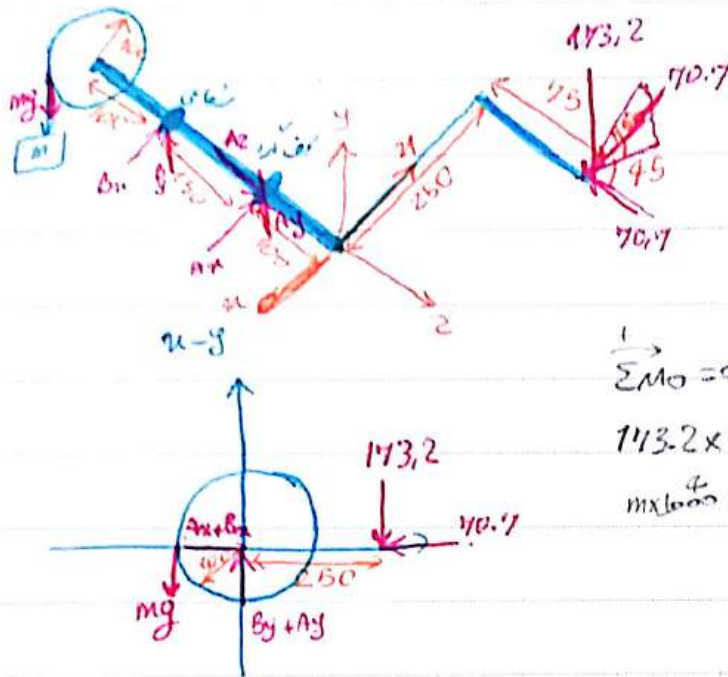
$$y-z$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_G = 0$$

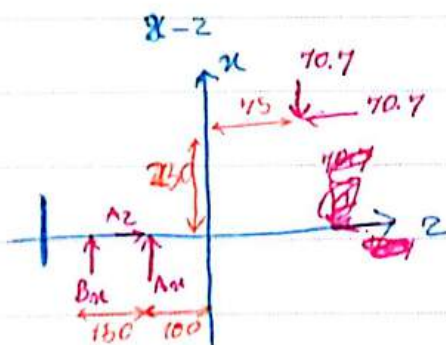
Classic



$$\sum \vec{M}_O = 0$$

$$113.2 \times 250 - mg \times 100 = 0$$

$$m \times 100 = 250 \times 113.2 \Rightarrow m = 44.1$$

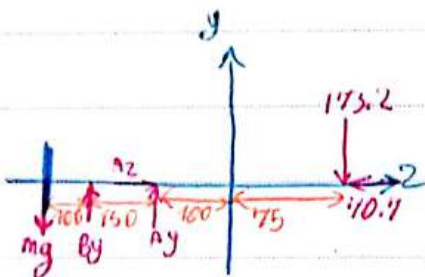


$$\sum \vec{M}_A = 0$$

$$B_x \times 150 - 113.2 \times 250 + 113.2 \times 175 = 0$$

$$B_x = 35.4$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x + A_x - 113.2 = 0 \Rightarrow A_x = 35.4$$



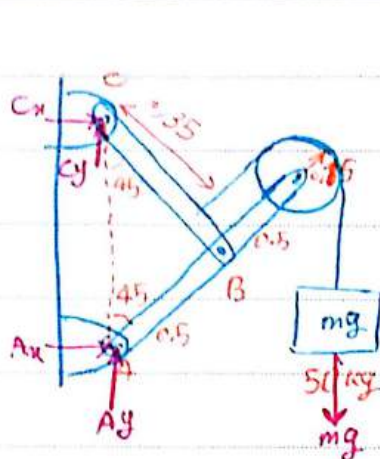
$$\sum F_2 = 0 \Rightarrow A_2 - 113.2 = 0 \Rightarrow A_2 = 113.2$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow -mg \times 250 + B_y \times 150 + 113.2 \times 175 = 0$$

$$B_y = 520 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + A_y - mg - 113.2 = 0$$

$$A_y = 86.8 \text{ N}$$



$$\sum M_A = 0$$

$$C_x \times 0.5\sqrt{2} + 50 \times 9.8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} (1) + 0.15$$

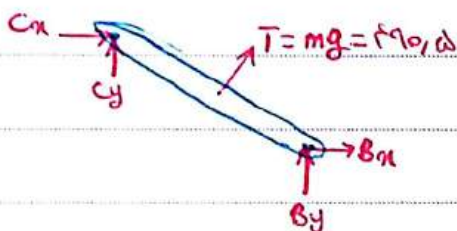
$$\rightarrow C_x = -595 N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x + A_x = 0$$

$$A_x = 595 N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y + A_y - mg = 0$$

$$C_y + A_y = mg = 50 \times 9.8 = 490 N$$



$$\sum M_B = 0$$

$$-C_x \times 0.5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - C_y \times 0.5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - T \times 0.5$$

$$C_y = 1384 N$$

آن مفصل آزاد داشته باشیم نتیجه می شود که مثلدر دو عددی یک معادله را اضافه نمی شود نه حل می شود

نقل گفتم سازدها

مقدمه - نام گذاری اجسام در مکانیک - تعریف خراب، قاب و ماشین، تحلیل خراب به روش تقارن مفصل - حالات خاص
تحلیل خراب به روش مقاطع - تحلیل قاب و ماشین

نام گذاری اجسام: تیر - میل - ستون - شافت - ورق - پوسته - دیسک

میل: عضو باریک تحت نیرو محوری

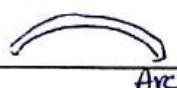
شافت: عضو باریک تحت پیچش (لست و در در استای میل)

تیر: عضو باریک تحت خمش (لست و در در استای میل)

Beam

ستون: عضو باریک تحت بار محوری فشاری (عضو غشایی که کمره که در برایش تیر باشد) column

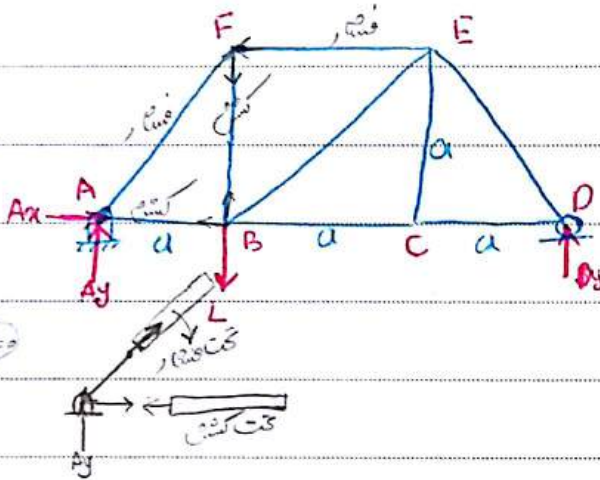
Classic



Arc

کمان: عضو باریکی که محور آن مستقیم نیست

خیزا بر یکب : با به درونیکه کانهایت باشند در خیزا بر یکب لولای داخلی داریم:



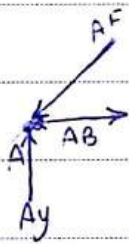
تحلیل خیزا به روشی تعادل مفصلی:

تعادل در هر تیر یا مفصل بررسی نشود:

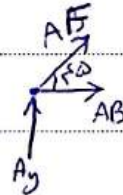
$$\sum F_{Ax} = 0 \quad \sum F_{Ay} = 0$$

$$\sum F_{Ax} = 0 \Rightarrow A_{Ax} = 0$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow A_{Ay} \cdot a - L \cdot a = 0 \Rightarrow A = \frac{L}{a}$$



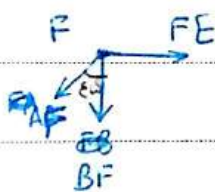
بتر است همه کشش بگیریم
اگر منفی شد فشاری است.



$$\sum F_{Ay} = 0 = AF \cos \alpha + A_{Ay} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} AF + \frac{L}{a} = 0 \Rightarrow AB = -\frac{\sqrt{2}}{2} L$$

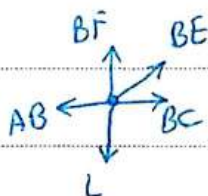
$$\Rightarrow AF \frac{\sqrt{2}}{2} + AB = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} L + AB = 0 \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2}}{2} L$$



$$AF = -\frac{\sqrt{2}}{2} L \quad \Rightarrow \sum F_{Ax} = 0 \Rightarrow FE + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} L \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$FE = -\frac{L}{2}$$

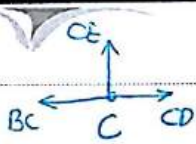
$$+\uparrow \sum F_{Ay} = 0 \Rightarrow -AF \cos \alpha + BF = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} L + BF = 0 \Rightarrow BF = \frac{\sqrt{2}}{2} L$$



$$+\uparrow \sum F_{Ay} = 0 \Rightarrow BF + BE \cos \alpha - L = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} L + \frac{\sqrt{2}}{2} BE - L = 0$$

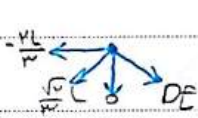
$$BE = \frac{\sqrt{2}}{2} L$$

$$\Rightarrow \sum F_{Ax} = 0 \Rightarrow BC + BE \cos \alpha - AB = 0 \Rightarrow BC + \frac{L}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} L \Rightarrow BC = \frac{L}{2}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow CD - BC = 0 \Rightarrow CD = BC = \frac{1}{\sqrt{3}} L$$

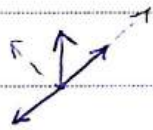
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow CE = 0$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +\frac{VL}{3} + DE \cos 60^\circ - \frac{\sqrt{3}L}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow DE = -\frac{\sqrt{3}}{3} L$$

حالات خاص در مفصل: ① در یک مفصل سه نیرو داریم که دو تا هم راست هستند و سومی غیر هم راست

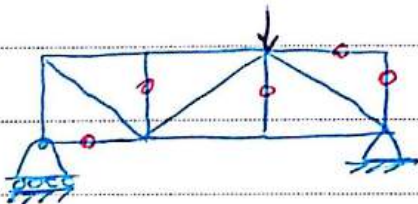
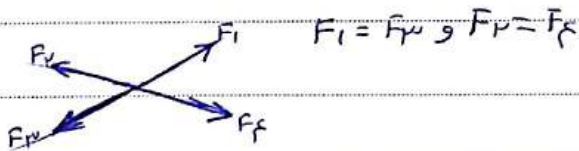
← سومی صفر است



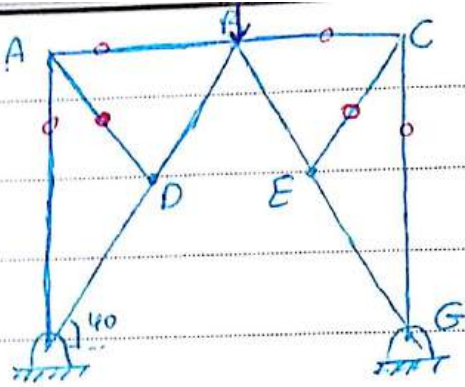
② اگر دو نیرو غیر هم راست در یک مفصل داشته باشیم، هر دو صفر هستند.

⇒ هر دو صفرند.

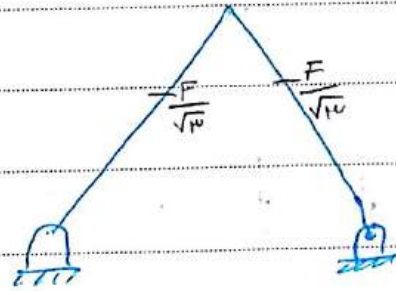
③ اگر در یک مفصل ۴ نیرو داشته باشیم که دو به دو هم راست باشند، آن نگاه باید دو به دو برابر باشند.



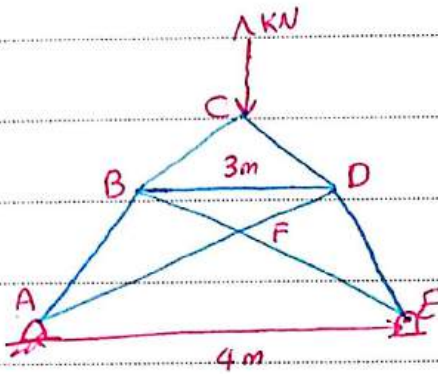
اعضای صفر نیروی را مشخص کنید.



⇒



مثال:



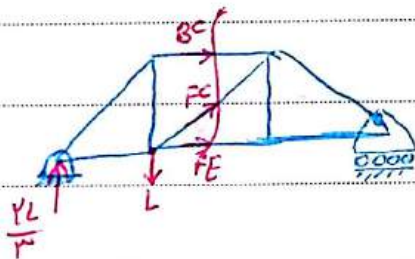
نیروی BF را فقط با بررسی تعادل نقطه A به دست

آوریم: نیروی BF = FD به دلیل تقارن

نیروی FD = AF به دلیل هم راستایی آن‌ها:

روش مقاطع: قسمت از غبار را برش می دهیم و تعادل آن را بررسی می کنیم. در نتیجه می توانیم نیروها را بدون

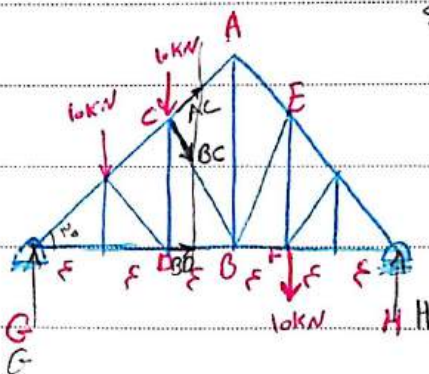
هی سبب برش نیروها به دست آوریم:



$$\sum M_F = 0 \Rightarrow BC \times \alpha + \frac{PL}{3} \times \alpha = 0$$

$$BC = -\frac{PL}{3}$$

sect. left:



$$\sum M_H = 0 \Rightarrow G \times \frac{10}{\sqrt{3}} - 10 \times \frac{10}{\sqrt{3}} - 10 \times \frac{10}{\sqrt{3}} + 10 \times \frac{10}{\sqrt{3}} = 0$$

$$10G - 100 - 100 + 100 = 0$$

$$10G = 100 \Rightarrow G = 10$$

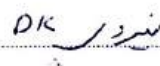
$$H = 11.55$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow AG \times BD \times \tan 30 - 10 \times 10 = 0$$

$$BD = \frac{10 \times 11.55 - 100}{10 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = 23 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

Classic



$$\sum_i M_i = 0 \Rightarrow$$

$$P \times A \times Y - 10 \times P - 10 \times P - 10 \times K = 0$$

$$944 - 100 - 80 = 0 \Rightarrow Ay = 105N \quad By = 100N$$

$$\overset{t}{\Sigma} M_I = 0 \Rightarrow AY \times \Delta - MK^9 = ?$$

$$4 \times MK \Rightarrow MK = 10^8 N$$

$$\xrightarrow{+} \{F_{\eta} = 1 \Rightarrow MK + ID = 0 \Rightarrow ID = -K\alpha N$$

$$\sum \vec{M}_G = 0 \Rightarrow 11k \times 4 - 6y \times 1 = 0 \Rightarrow 11k = \frac{6y \times 1}{4} = \frac{12y}{4} = 3y$$

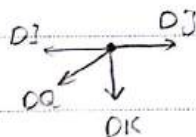
$$ED = - \frac{10}{\mu} \text{ kJ}$$

$$\text{sec 3-left} \Rightarrow \overset{+}{\rightarrow} \Sigma M_R = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 = 0 \Rightarrow D_x^2(1) + D_x \frac{e^{2x}}{2} - \omega x^2 + \omega x^4 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{A_0}{P} \times Y + \frac{VE}{P} \times DR - Y_0 + I_0 = 0 \Rightarrow DR = 0$$

$$RK=0$$

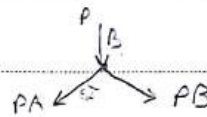
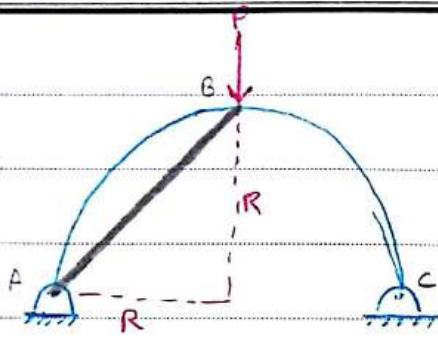


$$\Rightarrow \Sigma F_n = 0 \Rightarrow DJ - DZ - DQ \times \frac{r}{\omega} = 0$$

$$-\frac{\dot{A}_0}{N} + P_0 - \frac{F}{\omega} \times DQ = 0$$

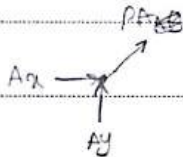
$$-\frac{P_0}{\mu} \times \frac{1}{r} = DQ \Rightarrow DQ = -\frac{P_0}{\mu}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{W}{2} - \frac{W}{2} \right) - DK \rightarrow 0 - DK = 0 \Rightarrow DK = 0 \text{ KN}$$



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -P - PA \cos 45^\circ - PB \cos 45^\circ = 0$$

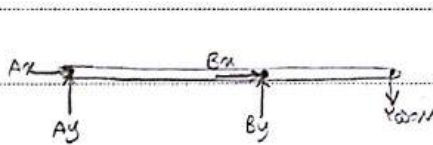
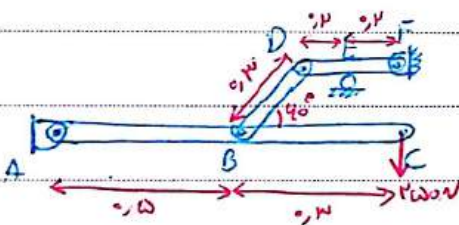
$$\frac{PA=PB}{\Sigma F_x = 0} \Rightarrow -P - 2PA \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow PA = -\frac{P}{\sqrt{2}}$$



$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow Ax + PA \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow Ax - \frac{P}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow Ax = \frac{P}{2}$$

$$Ay = \frac{P}{2}$$

التي على شكل 45 درجات



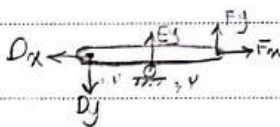
$$+\rightarrow \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 1000 \times 2 - By \times 2 = 0$$

$$By = \frac{1000 \times 2}{2} = 1000N$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow Ay + By - 1000 = 0 \Rightarrow Ay = 0$$

$$\frac{By}{Bx} = \tan 45^\circ \Rightarrow \frac{1000}{Bx} = \frac{1000}{\sqrt{2}} \Rightarrow Bx = 1000\sqrt{2}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow Ax + Bx = 0 \Rightarrow Ax = -1000\sqrt{2}$$

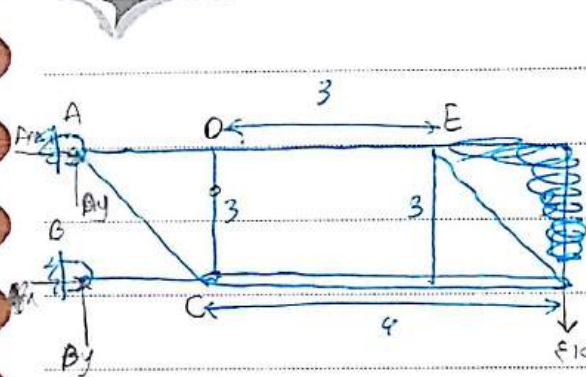


$$Dx = Bx = 1000\sqrt{2}, Dy = By = 1000N$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow Fx - Dx = 0 \Rightarrow Fx = 1000\sqrt{2}$$

$$+\rightarrow \Sigma M_F = 0 \Rightarrow Ey \times 2 - Dy \times 2 = 0 \Rightarrow Ey = 1000N$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow Ey + Fy - Dy = 0 \Rightarrow 1000 + Fy - 1000 = 0 \Rightarrow Fy = 0$$



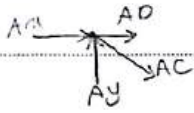
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow B_y \times 3 = 0 \Rightarrow B_y = 3$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - F = 0 \Rightarrow A_y = 12 \text{ kN}$$

$$\pm \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x + A_x = 0 \Rightarrow B_x = -A_x$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_x \times 3 + F \times 9 = 0 \Rightarrow A_x = -12 \text{ kN}$$

$$B_x = 12 \text{ kN}$$



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - AC \cos 45^\circ = 0$$

$$A_y = AC \cos 45^\circ \Rightarrow AC = 12\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\pm \sum F_x = 0 \Rightarrow AD + A_x + AC \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow AD - 12 + 12 = 0$$

$$AD = 0 \text{ kN}$$

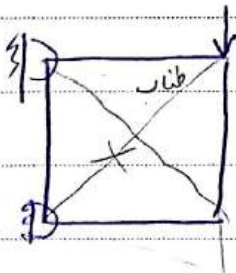
$$DE = 12 \text{ kN}$$



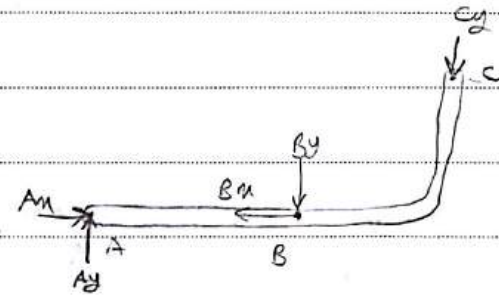
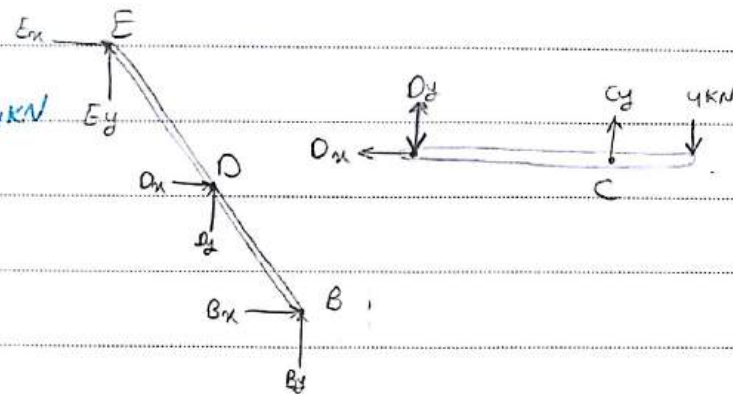
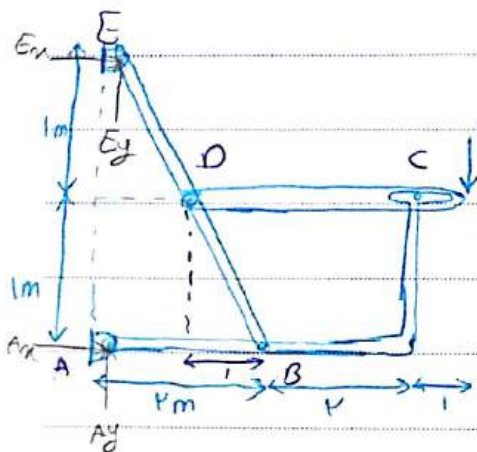
① اعضا بر روی گابل هستند و لذا فقط می توانند کشش را تحمل کنند و در حالتی که فشار را نخواهد تحمل شود شل شده و عملاً نیروی موثر بوده و عملاً می توان فرض کرد وجود ندارد.

② اگر با تحلیل ساده ای بتوان متوجه شد که کدام گابل در کشش قرار دارد آن گابل را در نظر گرفته و گابل دیگر عملاً حذف می شود.

③ اگر نتوان تشخیص داد که کدام یک از آن ها در کشش قرار می گیرند می توان فرضی کرد در نهایت صحت آن را بررسی کرد.



السؤال



DC

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$$

$$\sum \vec{M}_D = 0 \Rightarrow 4 \times 2 - C_y \times 2 = 0 \Rightarrow C_y = 4$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y - D_y - 4 = 0 \Rightarrow D_y = 4$$

ABC $\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow B_y \times 2 + C_y \times 4 = 0 \Rightarrow B_y = -4$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - B_y - C_y = 0 \Rightarrow A_y + 4 - 4 = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

EDB $\sum \vec{M}_E = 0 \Rightarrow -D_y \times 1 - B_x \times 2 - B_y \times 2 = 0 \Rightarrow -4 - 2B_x + 8 = 0$

$$B_x = 2 \text{ kN}$$

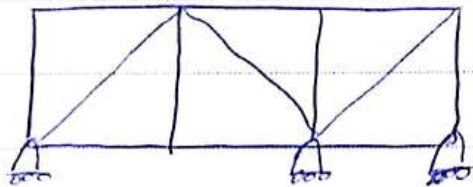
ABC $\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - B_x = 0 \Rightarrow A_x = 2 \text{ kN}$

EDB $\sum F_x = 0 \Rightarrow E_x + D_x + B_x = 0 \Rightarrow E_x = -4 \text{ kN}$

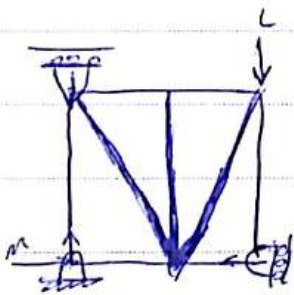
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow E_y + D_y + B_y = 0 \Rightarrow E_y + 4 - 4 = 0 \Rightarrow E_y = 0$$

Classic

آنگاه عملیات یکسانی می‌تواند با هم عکس العملها در یک نقطه مد پذیرا واقع کنند
تکلیفها نامناسب اند.



این مسئله از نظر استاتیکی نامعین است به علاوه
آیند نیروی در راستای m به آن وارد شود سازه حرکت
می‌کند.



این تکلیفها نامناسب اند زیرا همی عکس العملها
در یک نقطه مد پذیرا واقع می‌کنند زیرا نیروی عمل نقطه m
گشتا وارد می‌تواند چیزی آن را خنثی کند.

۲: تعداد معادلات n مفصل

$m+3$: تعداد مجهولات m میله

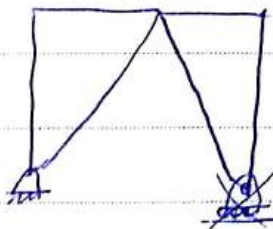
در فراموشی ساده هر صفتی ای را به هم زیر قرار است. آنگاه برقرار نباشد باید تکلیفها را تغییر دهیم.
در این صورت ۳ در معادله $m+3$ به ۲ تبدیل می‌شود و آن تعداد نیروها را خارجی خواهد بود.

Fine Elements: نرم افزار

$$r_j = m+3$$

$$j=10$$

مثال:



$$10 \neq 4+3$$

تکلیفها را جبرانی نمی‌کنیم که معادله برقرار شود



$$10 = 4+6$$

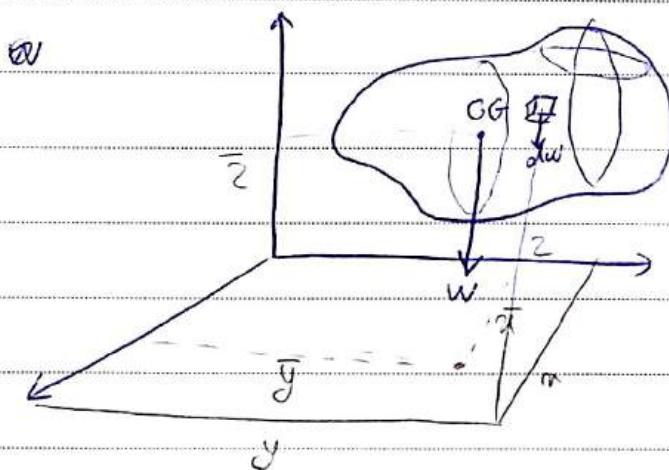
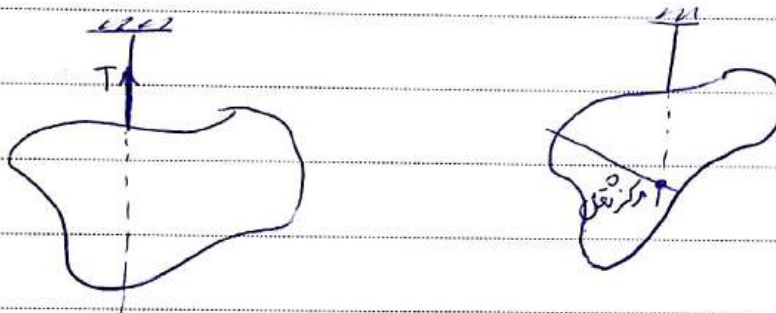
برای فراموشی $r_j = m+6$

بارها تست شده؛
نیروی متغیر

هدف: یافتن نیروی متغیر معادل بار تست شده
فقط از نظر مقدار
از نظر عکس العمل داخلی متفاوت است.

خواص هندسی:

برای یافتن مرکز ثقل حجم را یک بار آویزان می کنند و بار دیگر از جای دیگری آویزان می کنند:



$$\bar{y}W = \int y dW$$

$$\bar{x}W = \int x dW$$

$$\bar{z}W = \int z dW$$

$$\vec{r}W = \int \vec{r} dW$$

را راهکار شده :

- خواص هندسی سطوح (مرکز هندسی) - لنگر سطح (پیش نیاز درین مقاومت مصالح)
- تحلیل تیر - تحلیل کابل - تحلیل استاتیکی سیالات

$$\bar{x} = \frac{\int x dw}{w} \rightarrow \bar{x} = \frac{\int x dm}{m}$$

مرکز ثقل :

$$\bar{y} = \frac{\int y dw}{w}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{m}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dw}{w}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dm}{m}$$

(مرکز ثقل)

مرکز جرم

مرکز جرم :

$$\bar{x} = \frac{\int x dv}{v}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dv}{v}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dv}{v}$$

مرکز جرم : (مرکز هندسی جسم، مرکز دار، centroid)

مرکز جرم صرفاً یک کمیت هندسی است و ربطی به جنس اجسام مقدار جرم جسم ندارد *

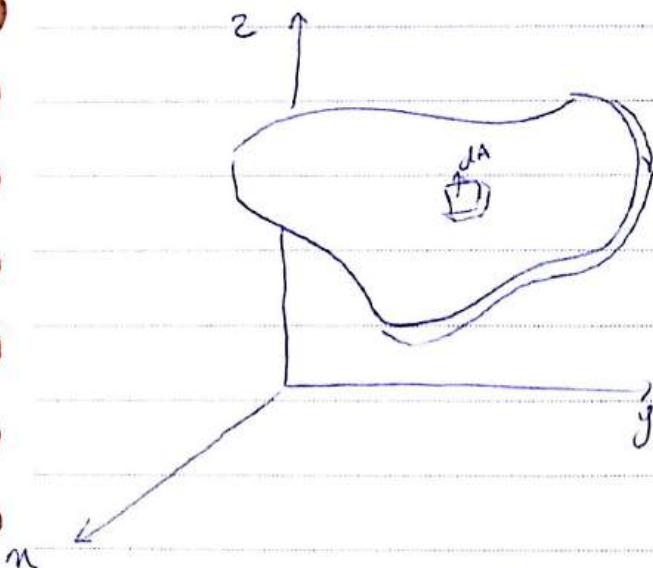
✍

مرکز سطح :

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$



$$\bar{x} = \frac{\int x dv}{v}$$

$$dv = dA \cdot t$$

آنها نسبت به ثابت دارند :

$$\bar{x} = \frac{\int x t dA}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

مرکز خطا (مرکز جرمی):

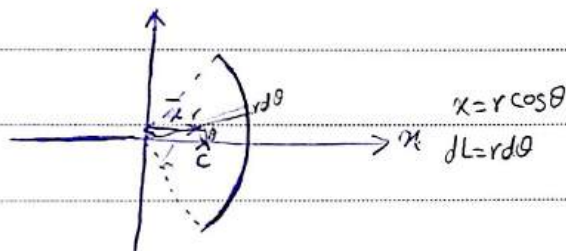


$$\bar{x} = \frac{\int x dl}{L}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dl}{L}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dl}{L}$$

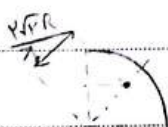
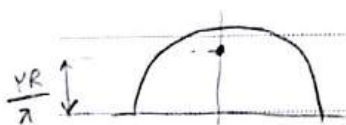
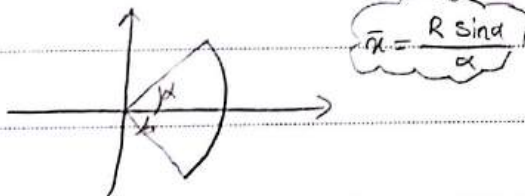
مرکز هندسی یک کمان:



$$y = 0 \quad \text{و} \quad \bar{y} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dl}{L} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} x \cos \theta \cdot r d\theta}{L} \Rightarrow \bar{x} = \frac{r^2 (\sin \theta) \big|_{-\alpha}^{\alpha}}{L} \Rightarrow \bar{x} = \frac{r^2 \sin \alpha}{L \alpha}$$

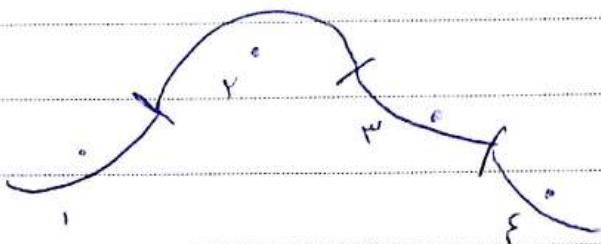
$$\Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}}$$



$$\frac{R \times \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}R}{\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{\sqrt{3}R}{4}, \quad \bar{x} = \frac{\sqrt{3}R}{\pi}$$

آنگاه برای یک جسم، مرکز هندسی چند قسمت آن را بدانییم، مجموع این مرکز هندسی مطابق رابطه زیر است:

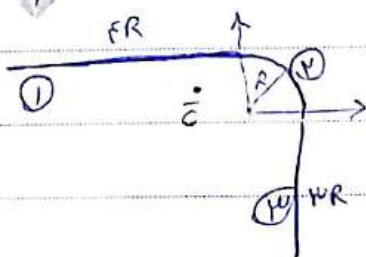


$$\bar{x} = \frac{\int x dl}{L}$$

$$= \frac{\int_1 x dl + \int_2 x dl + \dots + \int_n x dl}{L}$$

$$= \frac{\bar{x}_1 l_1 + \bar{x}_2 l_2 + \dots + \bar{x}_n l_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} = \frac{\sum \bar{x}_i l_i}{L}$$

مثال: مرکز هندسی جسم دایره را حساب کنید:



i	Li	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{x}_i L_i$	$\bar{y}_i L_i$
1	πR	$-R$	R	$-R^2$	R^2
2	$\frac{\pi R}{2}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{R}{2}$	R^2	R^2
3	$\frac{\pi R}{2}$	R	$-R$	R^2	$-R^2$
$\Sigma L_i = \pi R$				$-R^2$	R^2

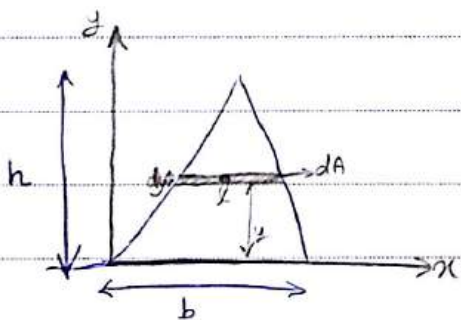
$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}_i L_i}{\Sigma L_i} \Rightarrow \bar{x} = \frac{-R^2}{\pi R} = -\frac{R}{\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}_i L_i}{\Sigma L_i} \Rightarrow \bar{y} = \frac{R^2}{(\pi/2)R} = \frac{R}{1.57}$$



مرکز سطح:

مرکز هندسی مثلث را بجواب:

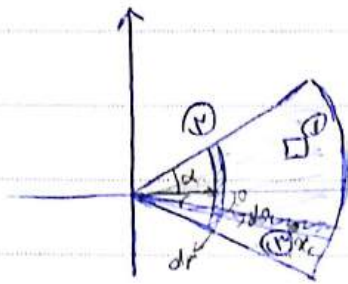


$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A} = \frac{\int_0^h y l dy}{A} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int_0^h y \times \frac{b}{h} (h-y) dy}{A} = \frac{\frac{b}{h} \left[h \times \frac{h^2}{2} - \frac{1}{3} h^3 \right]}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{bh^2}{2} - \frac{bh^3}{3}}{\frac{1}{2}bh} \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{3}h$$

مرکز هندسی مثلث برابر محل برخورد میانخطهاست.



$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$\text{وحيث } \bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$dA = r \alpha r dr$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^R \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \times r dr}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{r \sin \alpha \left(\frac{r^2}{2} \right)_0^R}{\frac{\alpha}{2} \times R^2} = \frac{r \sin \alpha \times \frac{R^2}{2}}{\alpha R^2} = \frac{r}{\alpha} R \frac{\sin \alpha}{2}$$

$$x_c = \frac{r}{\alpha} R \cos \alpha$$

وحيث

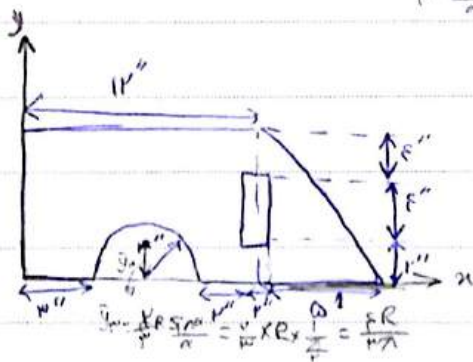
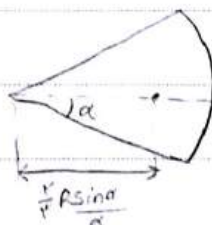
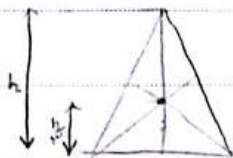
$$\text{وحيث } \bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\alpha R \cos \theta \times \frac{R^2}{2} d\theta}{\alpha R^2}$$

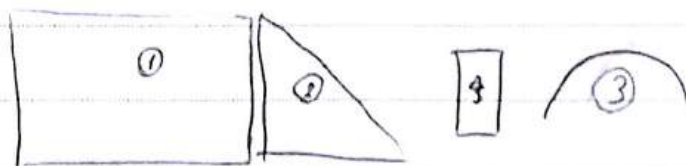
$$\frac{r}{d\theta} \Rightarrow dA = \frac{R^2}{2} d\theta$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{R^2}{2} \int_0^\alpha \cos \theta d\theta}{\alpha R^2} = \frac{\frac{R^2}{2} \times \sin \alpha}{\alpha R^2} = \frac{r}{\alpha} R \frac{\sin \alpha}{2}$$

مركز هندسي سطح مركب:



مركز سطح المركب:



$$A' = -A$$

$$\int x dA = \int_1 x dA + \int_2 x dA + \int_3 x dA + \int_4 x dA = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3 + \bar{x}_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

Classic

المركز

i	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	A_i	$\bar{x}_i A_i$	$\bar{y}_i A_i$
1	4	6	100	400	600
2	12	10	50	600	500
3	8	15	100	800	1500
4	11	12	100	1210	1320
			350	2010	3920

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2010}{350} = 5.74 \text{ in}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} \Rightarrow \bar{y} = \frac{3920}{350} = 11.2 \text{ in}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \Rightarrow \int x dA = \bar{x} A$$

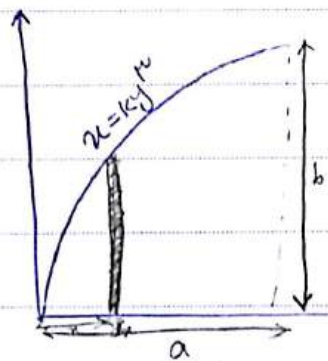
لنناول

First Area moment لنناول

$$Q_y = \int x dA = \bar{x} A$$

$$Q_x = \int y dA = \bar{y} A$$

$$a = kb^{\frac{1}{n}} \Rightarrow k = \frac{a}{b^{\frac{1}{n}}}$$



$$dA = dx \times \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$A = \int_0^a y dx = \int_0^a \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{k^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{\frac{1}{n}+1} a^{\frac{1}{n}+1}$$

$$= \frac{1}{k^{\frac{1}{n}}} \times \frac{b}{a^{\frac{1}{n}}} \times a^{\frac{1}{n}+1} \Rightarrow A = \frac{1}{k^{\frac{1}{n}}} ab$$

$$\int x_c dA = \int_0^a x y dx = \int_0^a \frac{1}{k^{\frac{1}{n}}} x^{\frac{1}{n}+1} dx$$

$$= \frac{b}{a^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{\frac{1}{n}+2} \times a^{\frac{1}{n}+2} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{n}} b$$

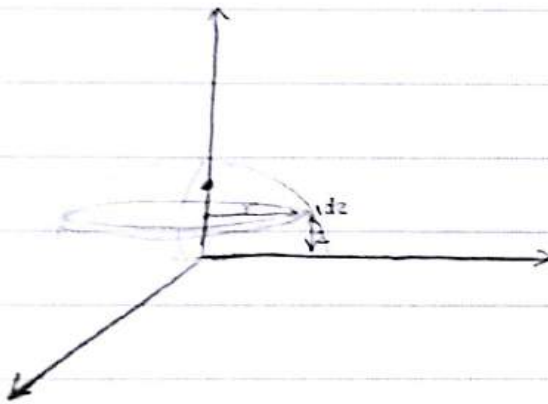
$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A} = \frac{\frac{1}{2} a^{\frac{1}{n}} b}{\frac{1}{k^{\frac{1}{n}}} ab} = \left(\frac{1}{2}\right) a^{\frac{1}{n}}$$

$$\oint y_c \, dA = \int y_c x \, dx \, dy = \int \frac{y}{r} \cdot y \, dx = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\frac{r}{r}} \int x^{\frac{r}{r}} \, dx$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{b^r}{a^{\frac{r}{r}}} \cdot \frac{1}{\frac{a}{r}} a^{\frac{r}{r}} \Rightarrow \frac{10}{10} b^r a$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c \, dA}{A} = \frac{\frac{10}{10} b^r a}{\frac{10}{10} a b} = \frac{r}{10} b$$

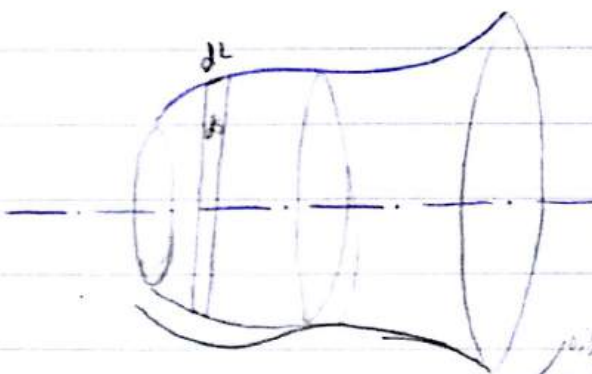
برای محاسبه جرم: مرکز جرم نیم کره:



$$\bar{z} = \frac{\int z \, dV}{V} = \frac{\int z \cdot r^2 \, dz}{V} = \frac{\int z \pi (R^2 - z^2) \, dz}{V} = \frac{\pi}{V} \int_0^R z R^2 \, dz - \int_0^R z^3 \, dz$$

$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2} = R^2 \Rightarrow r^2 \cdot z = R^2 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\pi}{V} \times \left(\frac{z^2 R^2}{2} \right) \Big|_0^R - \left(\frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^R \\ \frac{\pi}{V} \times \frac{R^4}{2} = \frac{\pi}{\frac{2}{3}\pi R^3} \times \frac{R^4}{2} \Rightarrow \frac{3}{4} R \end{aligned} \right\}$$

تقارن برای پاره پوس:

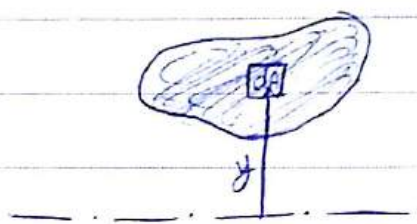


$$dS = 2\pi r \, dL = 2\pi y \, dL$$

$$S = \int 2\pi y \, dL = 2\pi \int y \, dL = 2\pi x \bar{y} \times L$$

$$S = 2\pi \bar{y} L$$

$$\Rightarrow S = 0.8 L$$

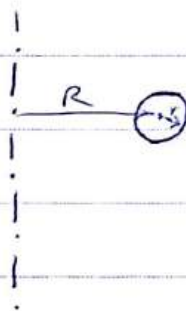


$$d\phi = v \pi y dA$$

$$\phi = \int v \pi y dA = v \pi y A$$

$$v = \frac{\phi}{\pi A}$$

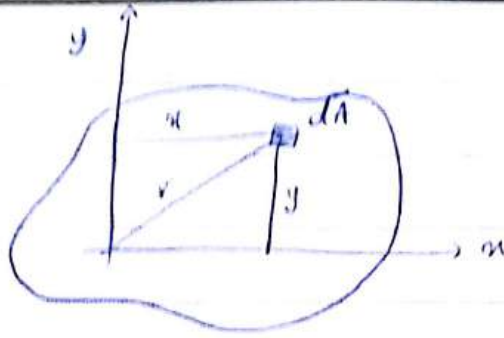
به دست آوردن سطح و حجم تیوب :



$$S = 12R \times (2\pi r)$$

$$S = 4\pi R r$$

$$v = 12R \times \pi r^2 \Rightarrow v = 12r^2 R$$

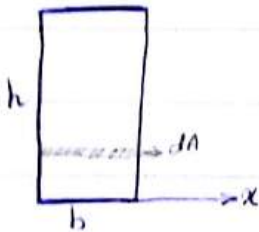


$$r^2 = x^2 + y^2$$

گنریه گنتی :

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_z = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

گنریه گنتی قائم گنریه گنتی قطبی (تعریف)

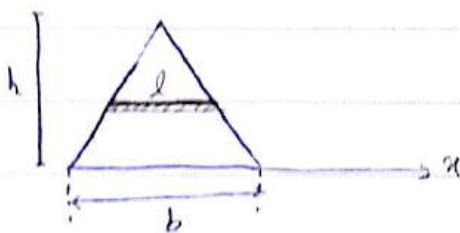


گنریه گنتی مستطیل :

$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 \times b \times dy \Rightarrow I_x = b \int_0^h y^2 dy \Rightarrow I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} h b^3$$

$$I_z = I_x + I_y \Rightarrow I_z = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2)$$



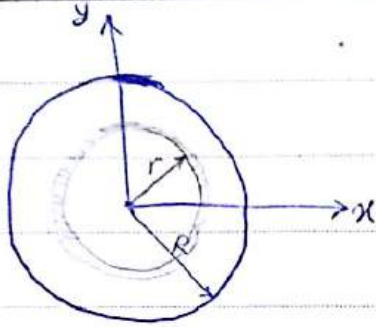
$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = \int_0^h y^2 (l dy)$$

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow l = \frac{b(h-y)}{h}$$

$$I_x = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy \Rightarrow I_x = \frac{b}{h} \times \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \right)$$

$$I_x = \frac{1}{12} b h^3$$



$$I_z = \int r^2 dA = \int_0^R r^2 (\pi r dr)$$

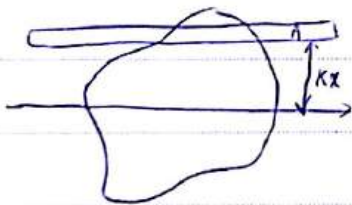
$$I_z = \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{1}{4} \pi D^4$$

$$I_z = I_x + I_y$$

$$\rightarrow I_x = I_y = \frac{1}{4} I_z \Rightarrow I_x = I_y = \frac{1}{8} \pi R^4 = \frac{1}{8} \pi D^4$$

$$\begin{cases} I_x^D = \frac{1}{4} I_x^O \\ I_y^D = \frac{1}{4} I_y^O \\ I_z^D = \frac{1}{4} I_z^O \end{cases}$$

مقاومت چرخش یا زبری:

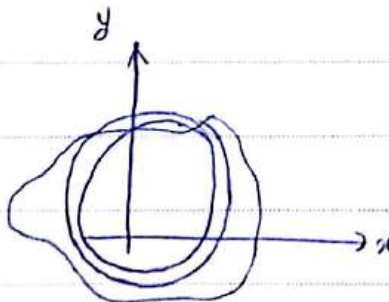


$$I_x = \int y^2 dA = k_x^2 A$$

$$k_x^2 = \frac{1}{A} \int y^2 dA = \frac{I_x}{A}$$

$$I_x = k_x^2 A$$

$$I_y = k_y^2 A$$



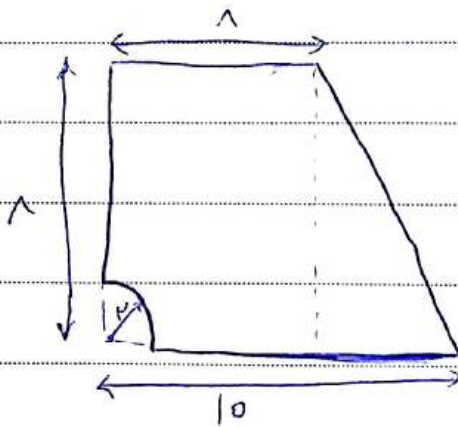
$$I_z = k_z^2 A$$

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$$

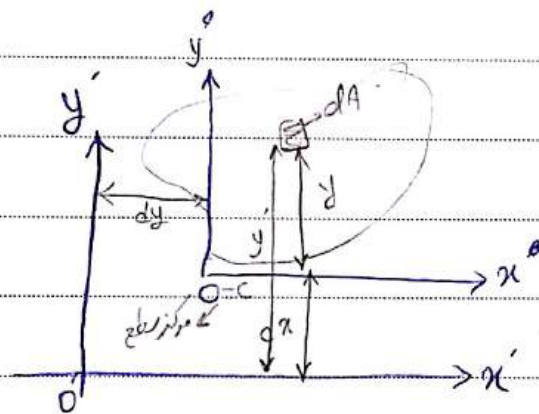
مقاومت چرخش یا زبری:

$$I_2 = \frac{1}{12} \pi R^4 \quad A = \pi R^2$$

$$k_2^2 = \frac{I_2}{A} \Rightarrow k_2^2 = \frac{\frac{1}{12} \pi R^4}{\pi R^2} \Rightarrow k_2 = \frac{\sqrt{12}}{2} R$$



نسبت ارتفاع / شیب = عرض / شیب

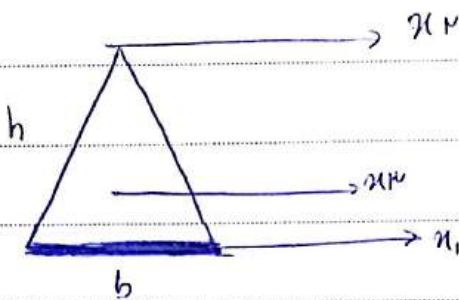


تفسیر انتقال موازی محورها:

$$I_{x'} = \int y'^2 dA \Rightarrow I_{x'} = \int (y + d)^2 dA \Rightarrow I_{x'} = \int (y^2 + 2yd + d^2) dA$$

$$= I_x + 2d \int y dA + d^2 \int dA$$

$$I_{x'} = I_x + d^2 A$$



$$I_{x_u} = \frac{1}{12} b h^3$$

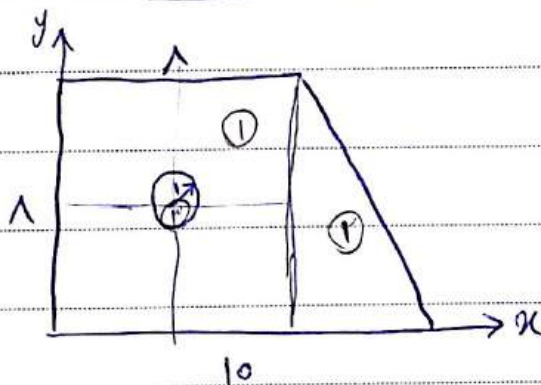
$$I_{x_c} = I_{x_u} + A \left(\frac{h}{3} \right)^2$$

$$I_{x_v} = I_{x_u} + A \left(\frac{2h}{3} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} b h^3 = I_{x_u} + \frac{b h^3}{12} \Rightarrow \frac{1}{12} b h^3 = I_{x_u}$$

$$I_{x_v} = \frac{1}{12} b h^3 + A \left(\frac{2h}{3} \right)^2 \Rightarrow I_{x_v} = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{b h}{1} \times \frac{4h^2}{9} \Rightarrow I_{x_v} = \left(\frac{1}{12} + \frac{4}{9} \right) b h^3$$

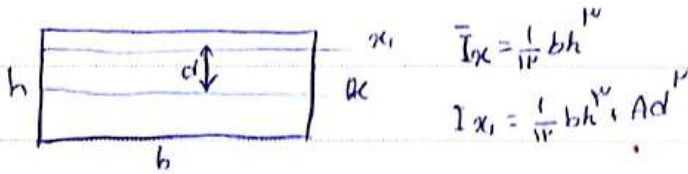
$$I_{x_v} = \frac{1}{8} b h^3$$



$I_x, I_y, I_z, k_x, k_y, k_z$.

i	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$	d_x	d_y	A	I_x	I_y
1	$\frac{1}{12} 10(10)^3$	$\frac{1}{12} 10(10)^3$	10	10	100	$10000, 10000$	$10000, 10000$
2	$\frac{1}{12} (10)(10)^3$	$\frac{1}{12} (10)(10)^3$	$(\frac{10}{3})$	$(10 + \frac{10}{3})$	10	$100, 100$	$10000, 10000$
3	$-\frac{1}{2} 10(10)^3$	$-\frac{1}{2} 10(10)^3$	10	10	$-10(10)^3$		

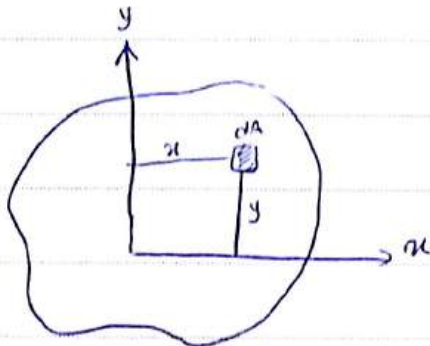
لنگرگشتی نسبت به محور دوران یافته :



$$\bar{I}_{x_1} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{x_1} = \frac{1}{12} b h^3 + A d^2$$

لنگرگشتی ضربی :

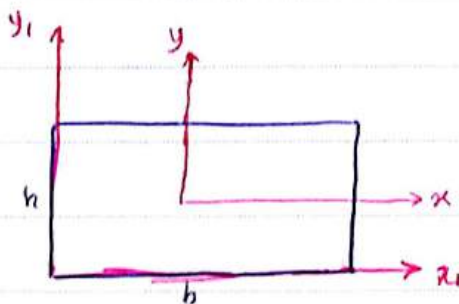
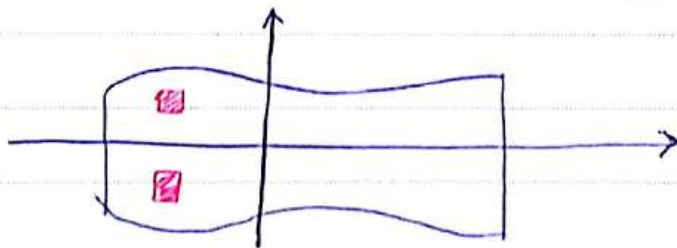


$$I_{x_1} = \int y^2 dA$$

$$I_{y_1} = \int x^2 dA$$

$$I_{x_1 y_1} = \int x y dA \rightarrow \text{می توان نوشت هم باشد}$$

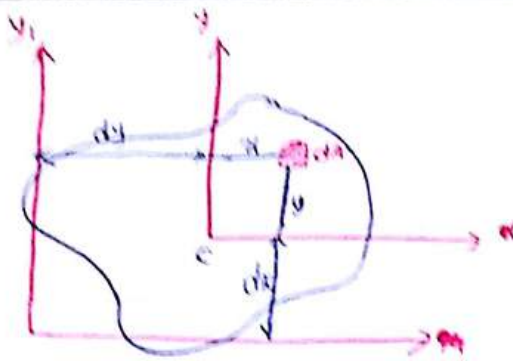
* اگر محوری ، محور تقاطع سطح باشد : $I_{x_1 y_1} = 0$



$$I_{x_1 y_1} = 0$$

$$I_{x_1 y_1} = \int x_1 y_1 dA = \int x_1 y_1 dx_1 dy_1 = \int_0^h \int_0^b x_1 y_1 (dx_1 dy_1) = \int_0^b x_1 dx_1 \times \int_0^h y_1 dy_1$$

$$= \frac{1}{2} b^2 \times \frac{1}{2} h^2 = \frac{1}{4} b^2 h^2$$



$$I_{x_1 y_1} = \int x_1 y_1 dA = \int (x + dy)(y + dx) dA$$

$$= \int xy dA + dx \int x dA + dy \int y dA + \int dy dx \int dA$$

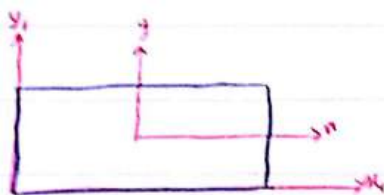
$$= I_{xy} + dx dy A$$

$$I_x = \bar{I}_x + A d\bar{x}^2$$

$$I_y = \bar{I}_y + A d\bar{y}^2$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A d\bar{x} d\bar{y}$$

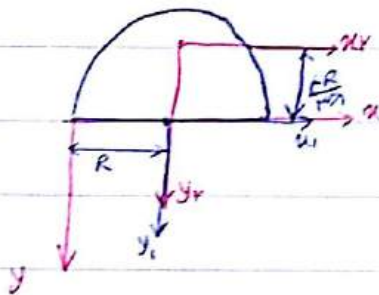
نمونه تعیین علامت dx و dy : اگر انتقال موازی مورد جهت مثبت داشته باشد مقدار مثبت را آورد خلاف جهت باشد مقدار d مثبت خواهد بود.



برابر مستقل صفره قبیل داریم:

$$I_{x_1 y_1} = \bar{I}_{xy} + dx dy A = 0 + \frac{h}{2} \times \frac{b}{2} \times b h = \frac{1}{4} b^2 h^2$$

$I_{xy} = 0$ (توازن است)

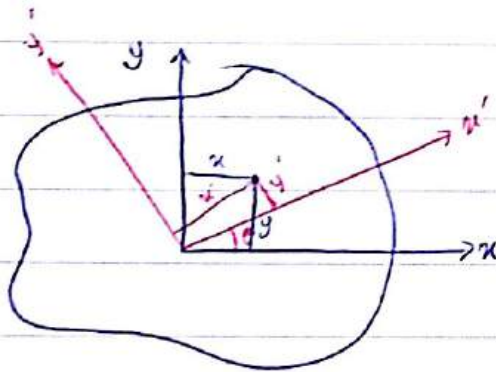


نمودار یک دایره از مرکز سطح باشد $I_{xy} = I_{xy} + A dx dy$ (غلط غلط) به همین خاطر غلط است.

$I_{xy} = 0$ (توازن)

$I_{xy} = I_{xy} + A dx dy$

$I_{xy} = 0 + \frac{\pi R^2}{2} \times \left(-\frac{4R}{3\pi}\right) \times (R) \Rightarrow I_{xy} = -\frac{\pi R^3}{6}$



$I_x = \int y^2 dA$

$I_y = \int x^2 dA$

$I_{x'} = \int y'^2 dA$

$I_{y'} = \int x'^2 dA$

$I_{xy} = \int xy dA$

$I_{x'y'} = \int x'y' dA$

$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{Bmatrix}$

$I_{x'} = \int (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 dA = \int (x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta) dA = I_y\sin^2\theta + I_x\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta I_{xy}$

$I_{x'} = \left(\frac{1-\cos^2\theta}{2}\right) I_y + \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right) I_x + \sin\theta\cos\theta I_{xy}$

$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos^2\theta + I_{xy} \sin\theta\cos\theta$

$I_{y'} = \int y'^2 dA = \int (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 dA = \int (x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta) dA$

$= \cos^2\theta I_x + \sin^2\theta I_y + 2\sin\theta\cos\theta I_{xy} = \frac{1+\cos^2\theta}{2} I_y + \frac{1-\cos^2\theta}{2} I_x + I_{xy} \sin\theta\cos\theta$

$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos^2\theta + I_{xy} \sin\theta\cos\theta$

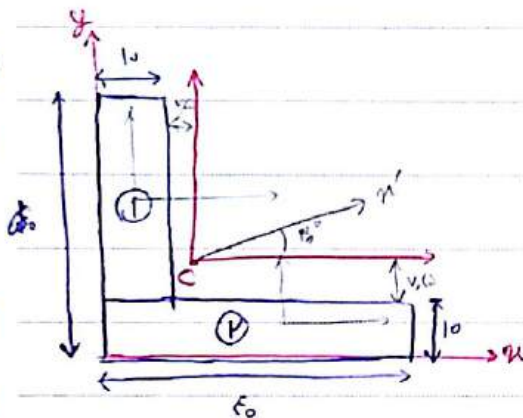
Classic

$$\bar{I}_{x'y'} = \int x'y' dA = \int (x \cos \theta - y \sin \theta)(-x \sin \theta + y \cos \theta) dA$$

$$= \int (-x^2 \sin \theta \cos \theta + xy \cos^2 \theta - xy \sin^2 \theta + y^2 \sin \theta \cos \theta) dA$$

$$= -\frac{1}{4} \sin^2 \theta \bar{I}_x + \bar{I}_{xy} \cos^2 \theta - \bar{I}_{xy} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \bar{I}_y$$

$$= \frac{1}{4} \sin^2 \theta \bar{I}_x - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \bar{I}_y + \bar{I}_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \Rightarrow \bar{I}_{x'y'} = \frac{1}{4} \sin^2 \theta \bar{I}_x - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \bar{I}_y + \bar{I}_{xy} \cos^2 \theta$$



$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{b_1 x_{c1} + b_2 x_{c2}}{b_1 + b_2} = \frac{1}{2} b$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{h_1 y_{c1} + h_2 y_{c2}}{h_1 + h_2} = \frac{1}{2} h$$

i	A	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$d\bar{x}$	$d\bar{y}$	$A d\bar{x}^2$	$A d\bar{y}^2$	$A d\bar{x} d\bar{y}$	$\bar{I}_{x_i y_i}$
①	$b_1 h_1$	$\frac{1}{2} b_1$	$\frac{1}{2} h_1$	$\frac{1}{2} b_1$	$\frac{1}{2} h_1$				0
②	$b_2 h_2$	$\frac{1}{2} (b_1 + b_2)$	$\frac{1}{2} h_2$	$\frac{1}{2} b_2$	$\frac{1}{2} h_2$				0

$$\bar{I}_x = \sum \bar{I}_{x_i} + \sum A d\bar{x}^2 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_1 \bar{x}_1^2 + A_2 \bar{x}_2^2$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} b_1^3 h_1 + \frac{1}{12} b_2^3 h_2 + A_1 \bar{y}_1^2 + A_2 \bar{y}_2^2$$

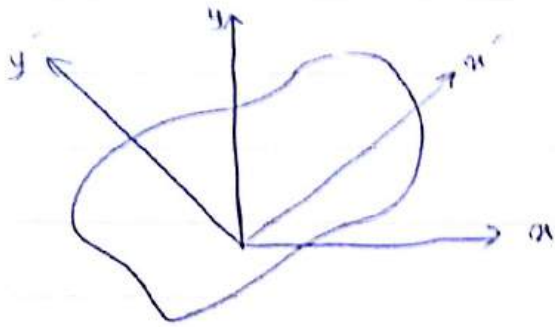
$$\bar{I}_{x'y'} = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_1 \bar{x}_1^2 + A_2 \bar{x}_2^2 - (b_1 h_1 \bar{x}_1 \bar{y}_1 + b_2 h_2 \bar{x}_2 \bar{y}_2) \cos^2 \theta$$

$$\bar{I}_{x'y'} = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_1 \bar{x}_1^2 + A_2 \bar{x}_2^2 - (b_1 h_1 \bar{x}_1 \bar{y}_1 + b_2 h_2 \bar{x}_2 \bar{y}_2) \cos^2 \theta$$

$$I_{x'} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{r} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{r} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{r} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{r} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{xy'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{r} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$



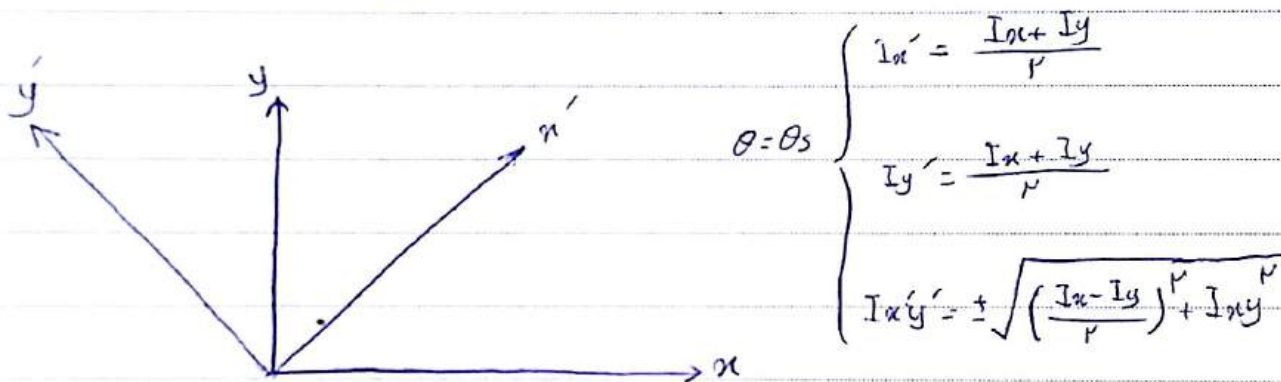
۱) اگر دستگاه $x'y'$ به اندازه θ دوران پیدا کند، نسبت به مختصات قائم xy مقدار ماکزیمم و $\min$ را خواهد داشت. در این حالت نسبت $I_{x'}$ به $I_{y'}$ ماکزیمم و $\min$ خواهد بود.

$$\bar{J} = \underbrace{I_{x'} + I_{y'}}_{\substack{\text{invariant} \\ \text{ناورد} \\ \text{لا بتغیر}}} = I_x + I_y = I_{max} + I_{min} \quad (5)$$

مقدار است که هم تغییر نمی کند:

$$\frac{dI_{xy}}{d\theta} = 0 \Rightarrow (I_x - I_y) \cos 2\theta_s - 2I_{xy} \sin 2\theta_s = 0$$

$$\tan 2\theta_s = \frac{I_x - I_y}{2I_{xy}}$$



(4) به ازای دوران θ_s ، تغییراتی در $I_{x'}$ ، $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$ خواهد شد و در این حالت $I_{x'}$ و $I_{y'}$ ثابت می مانند و برابر بوده و مقدار $I_{x'y'}$ متنوعاً تغییراتی قائم است.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\tan 2\theta_p = -\frac{1}{\tan 2\theta_s} = -\cot 2\theta_s \Rightarrow \cot(-2\theta_s) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta_s\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\theta_p = \frac{\pi}{2} + 2\theta_s \Rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{4} + \theta_s \\ 2\theta_p = \pi + \frac{\pi}{2} + 2\theta_s \Rightarrow \theta_p = \frac{3\pi}{4} + \theta_s \end{array} \right.$$

⑦ موارد اختلاف θ و θ' برابر 90° خواهد بود.

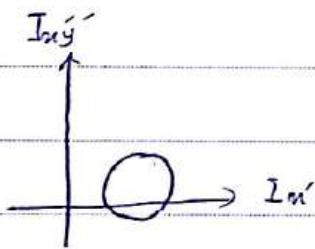
آقای برادر مور (Mohr): روش ترسیمی:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'} - I_{avg} = \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

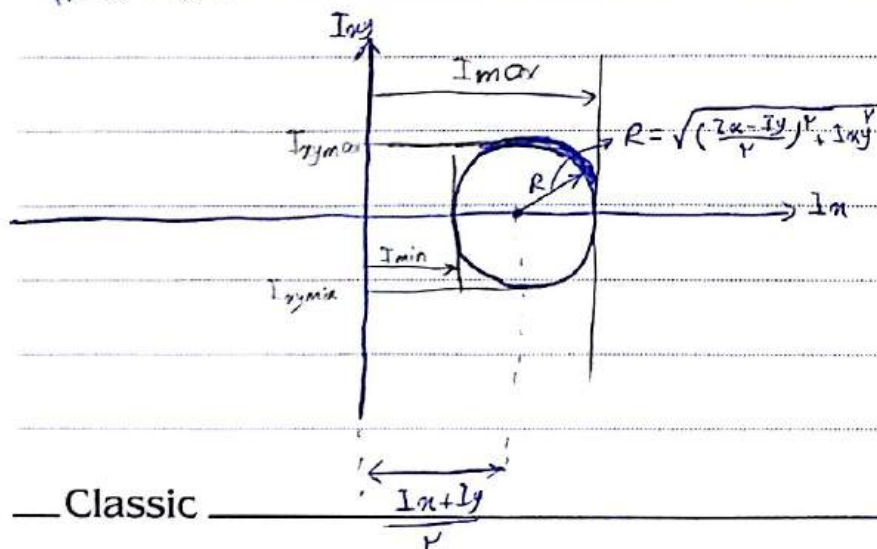


مقدار $I_{x'y'}$ بر حسب I_{xy} :

$$\Rightarrow (I_{x'} - I_{avg})^2 + (I_{x'y'})^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \right)^2 + \left(\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \right)^2$$

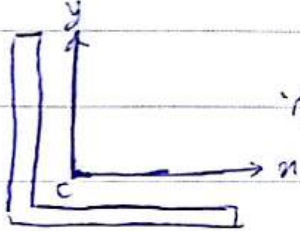
$$(I_{x'} - I_{avg})^2 + (I_{x'y'})^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \sin^2 2\theta + I_{xy}^2 \cos^2 2\theta$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



مرحله رسم دایره محور (۱) در سطح مورد نظر مبدأ دستگاه را انتخاب می کنیم:

(۲) جهت دستگاه xy را طوری انتخاب می کنیم که محاوره I_x و I_y ساده باشد.



(۳) با تشکیل جدول نندختی سطوح مرکب I_x و I_y و I_{xy} را می سنجیم.

(۴) برابر رسم دایره کافی است یک قطر آن را بیاییم.

مختصات در هر قطر عبارتند از:

$$A = \begin{vmatrix} I_x \\ I_{xy} \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} I_y \\ -I_{xy} \end{vmatrix}$$

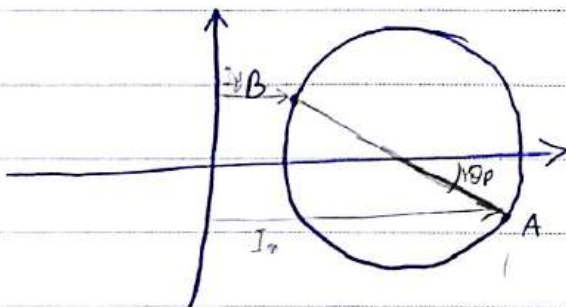
(۵) نقاط A و B را بر دستگاه $I_{xy} - I_x$ رسم می کنیم.

(۶) خط AB را رسم می کنیم. محل تقاطع AB مرکز دایره (C) می باشد.

(۷) حال دایره ای به مرکز C و شعاع AC رسم کنید.

(۸) هر قطر دایره متناظر با یک دستگاه مختصات است.

(۹) مقدار زوایای دایره دو برابر زوایای دستگاه مختصات ~~است~~ است.



Subject:

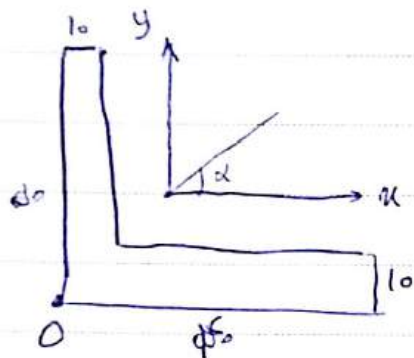
Year. Month. Date. ()

روابط انزوزی

$$I_{max} = C + R \quad I_{min} = C - R$$

روابط انزوزی را میسر:

$$I_{xy \max} = R \quad \tan \varphi_p = \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{r I_{xy}}{I_x - I_y}$$



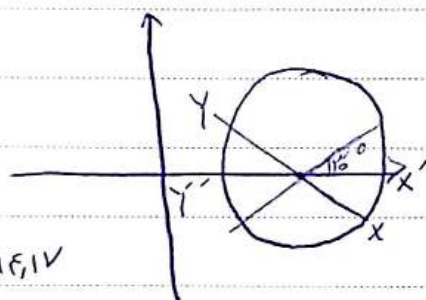
$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_{xy} = -\frac{bh^2}{4}$$

$$X = A \begin{cases} I_x = 18,14 \\ I_{xy} = -4,5 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} I_y = 10,14 \\ -I_{xy} = 4,5 \end{cases}$$



$$C = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{18,14 + 10,14}{2} = 14,14$$

$$r = \sqrt{(18,14 - 14,14)^2 + (-4,5 - 0)^2} = 4,5 \quad R = 4,5$$

$$\sin \varphi_p = \frac{r}{I_x - I_y} = \frac{4,5}{18,14 - 10,14} \Rightarrow \varphi_p = 41,9^\circ \Rightarrow \alpha = 20,9^\circ$$

$$I_{max} = C + R = 14,14 + 4,5 = 18,64$$

$$I_{min} = C - R = 14,14 - 4,5 = 9,64$$

$$I_{x'} = 18,64 \times 10^6$$

$$I_{y'} = 9,64 \times 10^6$$

آنها را در جدول

$$I_{x''} = C + R \cos 2\varphi_p = 14,14 + 4,5 \cos 43,8^\circ = 11,54$$

$$I_{y''} = C - R \cos 2\varphi_p = 14,14 - 4,5 \cos 43,8^\circ = 16,74$$

$$I_{x''y''} = R \sin 2\varphi_p = 4,5 \sin 43,8^\circ = 3,15$$

مهم:

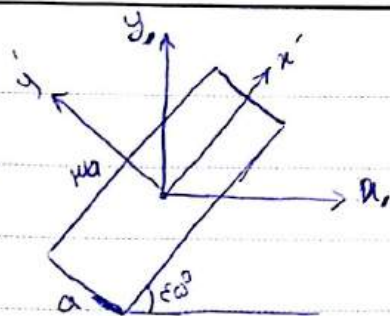
★

(۱۲) مقدار گشتاور ضربه نسبت به محورها از ۰ تعیین کنید. ابتدا دستگاه را به نقطه ۰ دوران می دهیم

(۱۳) بعد دایره ی محور را رسم می کنیم و می آید ابتدا مقدار ماکزیمم را به دست می آوریم و بعد محور را انتقال می دهیم یا سطح را به دست می آوریم.

Subject:

Year. Month. Date. ()

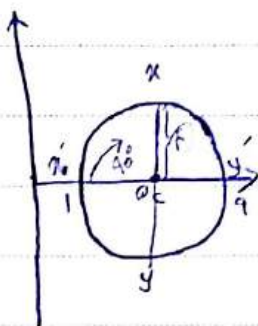


$$I_{x'} = \frac{1}{12} (ba)(a)^3 = \frac{1}{12} a^4$$

$$I_{y'} = \frac{1}{12} a (ba)^3 = \frac{1}{12} b^4$$

$$I_{x'y'} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

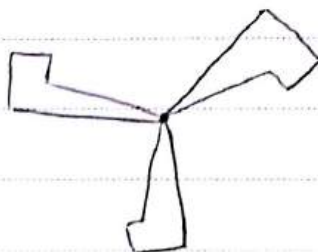
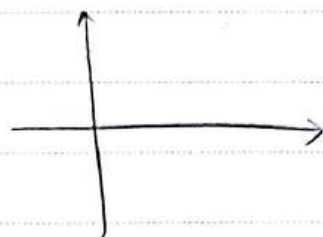


$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$I_{x'y'} = \frac{\pi}{4} r^4 \cos 2\theta = 0$$

برای مربع، زاویه‌ی دوران هیچ فرقی نمی‌کند.

$$I_{x'} = \frac{1}{12} a^4 \quad I_{y'} = \frac{1}{12} b^4 \quad I_{x'y'} = 0$$



$$I_{x'} = \bar{I}_x$$

$$I_{y'} = \bar{I}_y$$

$$I_{x'y'} = 0$$

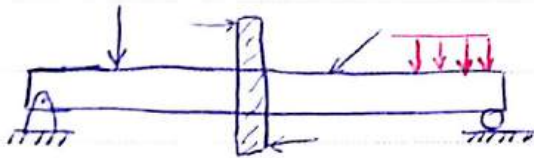
Subject :

Year . Month . Date . ()

کلیه تیرها : Beam Analysis :

مقدمه انواع تیرها تعیین عکس العمل های خارجی تعیین عکس العمل ها داخلی > کلیه رسم دیاگرام

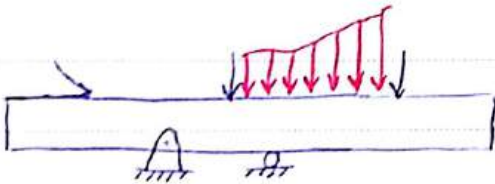
تیر عینوی است که تحت تنش است. یک تیر می تواند تحت بکشی یا کشش هم باشد اما مهم ترین بارش تنش است



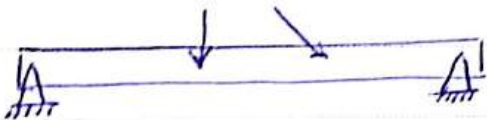
تیر دوسو بر مفصل تیر خنثی است



تیر یکسر گیردار (cantilever)



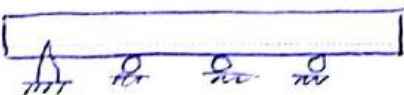
تیر پل



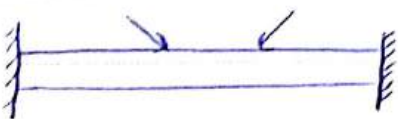
تیر نامعین درجه یک



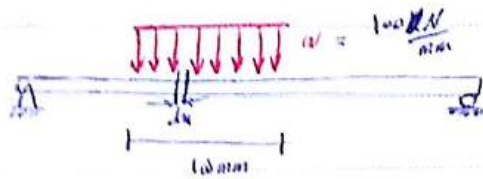
تیر نامعین درجه ۱



تیر نامعین درجه ۲



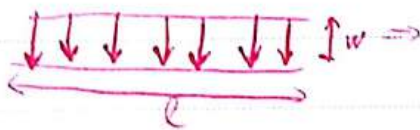
تیر نامعین درجه ۳



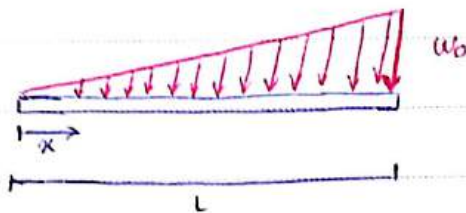
$$w = \frac{dF}{dx} \Rightarrow dF = w dx$$

$$F = \int dF = \int w dx$$

$$F = w \cdot l \Rightarrow F = 1000 \text{ N}$$



$$w \cdot l = \text{مجموع بارها}$$

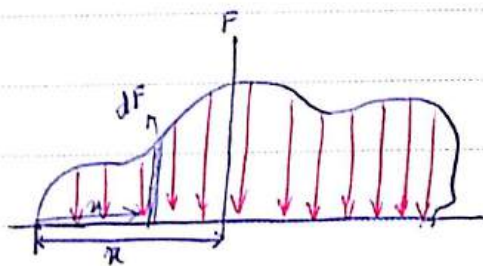


$$w = \frac{x}{l} \times w_0$$

$$F = \int dF = \int_0^l w dx = \frac{1}{2} w_0 l$$

* اندازه نیروی گسترده همیشه با مساحت سطح برابر است.

$$\bar{x} F = \int x dF \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x dF}{F}$$



آب بار دارد بر تیر کاملاً دایره‌ای باشد.

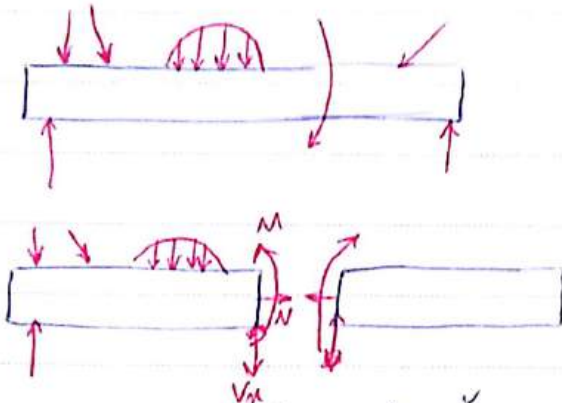
① مقدار نیرو برابر مقدار سطح است.

② برای پیدا کردن مرکز هندسی سطح عبور می‌کند.

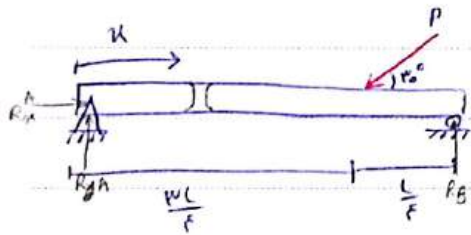
N : نیرو در محوری (عمود بر سطح)

V : نیرو در شیب (موازی سطح)

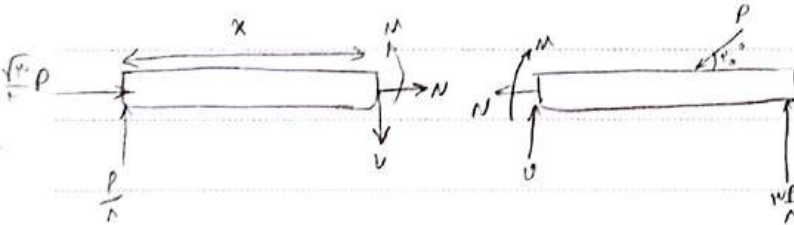
M : ممان



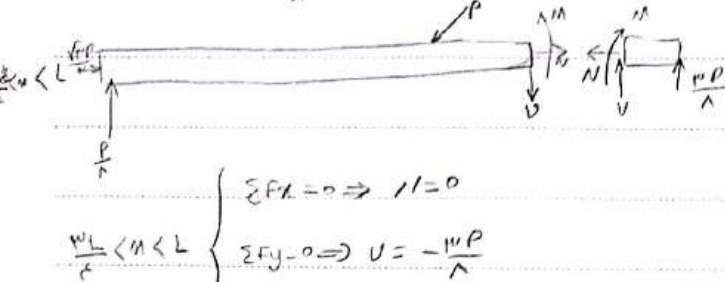
V : گشتا در آن شیب به نقطه داخلی جسم مایل (مثبت) باشد.
 N : نیرو در محوری گشتی مثبت و فشاری منفی است.
 M : اگر گشت به سمت بالا باشد مثبت و آنگاه به پایین باشد منفی است.



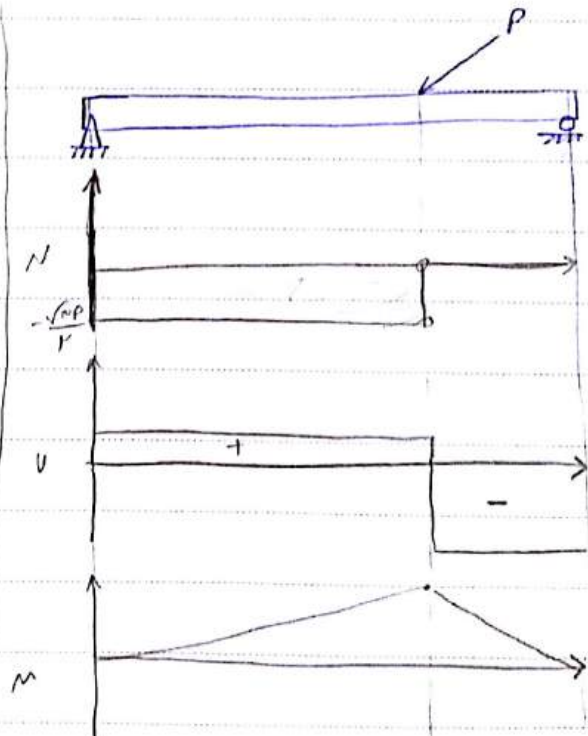
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_A = P \cos 30^\circ = P \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow R_A = \frac{L}{\frac{L}{2}} P \sin 30^\circ = \frac{P}{2} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_B = \frac{wL}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N = -\frac{\sqrt{3}}{2} P \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow \frac{P}{2} - V = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{2} \\ \sum M = 0 &\Rightarrow \frac{P}{2} x - M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{P}{2} x \end{aligned}$$

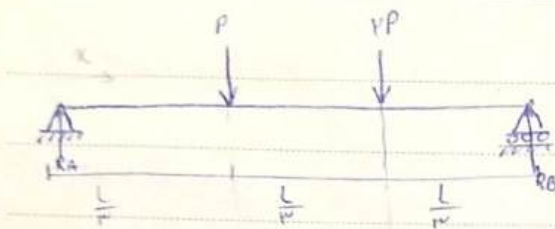


$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V = -\frac{wL}{2} \\ \sum M = 0 &\Rightarrow M = \frac{wL}{2} (L - x) \end{aligned}$$



Subject:

Year. Month. Date. ()



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A \times L - P \times \frac{L}{3} - P \times \frac{2L}{3} = 0$$

$$R_A = \frac{EP}{3}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_B = \frac{2P}{3}$$

$$\frac{EP}{3}x - P\left(\frac{L}{3} - x\right) = \frac{VPx}{3} - \frac{PL}{3}$$

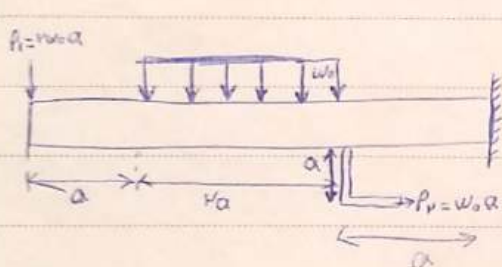
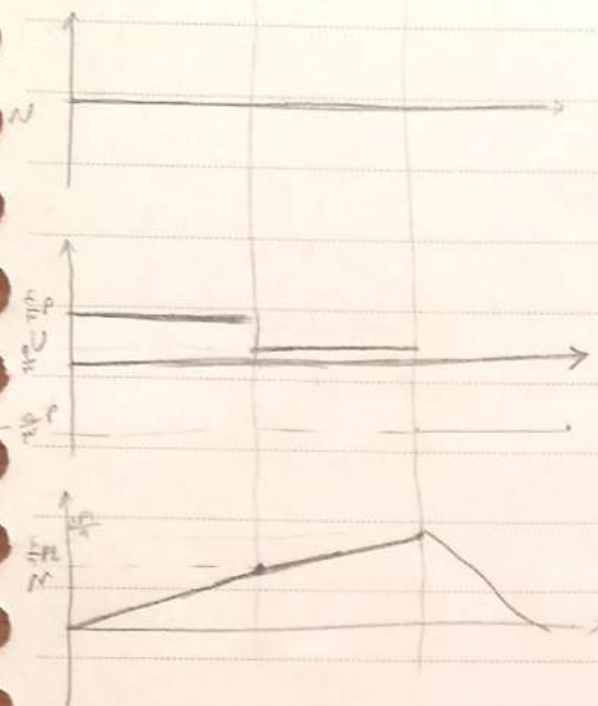
$$x = \frac{L}{3} \quad \frac{VPL}{3} - \frac{PL}{3} = \frac{EP}{3}$$

$$x = \frac{L}{3} \quad \frac{1}{3}PL - \frac{PL}{3} = \frac{11PL}{9}$$

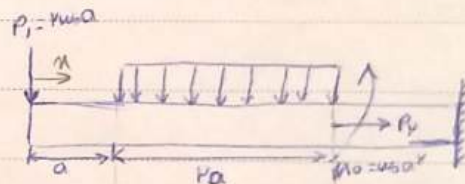
$$\frac{PL}{3} < M < L \Rightarrow N = 0$$

$$V = -\frac{2P}{3}$$

$$M(x) = \frac{11}{9}P(L-x)$$



$\Rightarrow$



$$a < x < L$$

$$V(x) = -w_0a - w_0(x-a)$$

$$M(x) = -w_0a x - \frac{w_0}{2}(x-a)^2$$

$$V(L-a) = -2w_0a$$

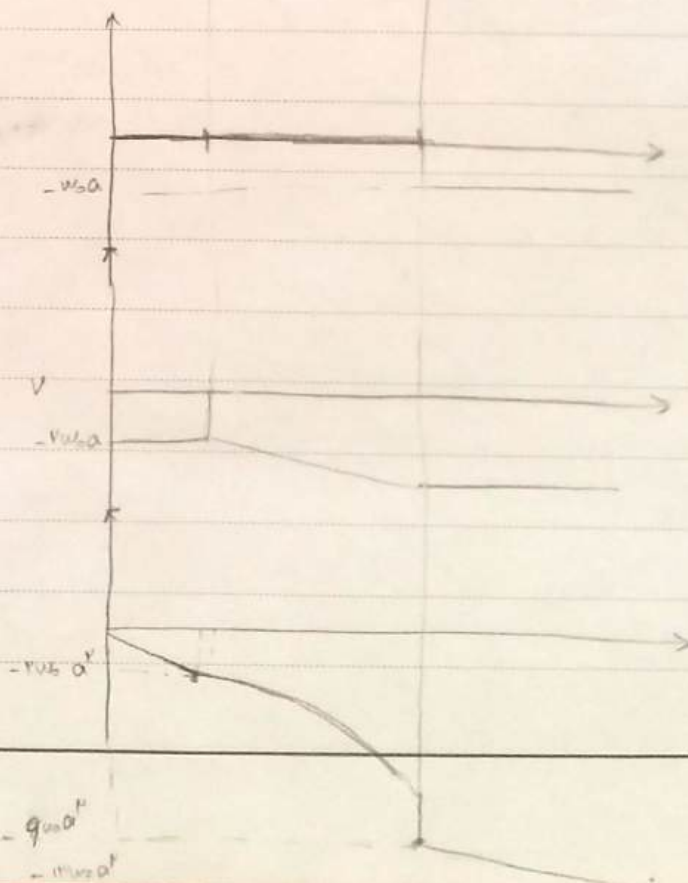
$$M(L-a) = -w_0a^2 - w_0a(L-a) = -w_0aL$$

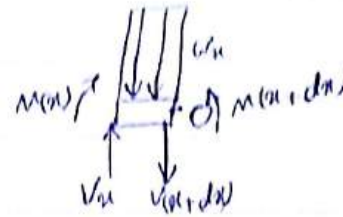
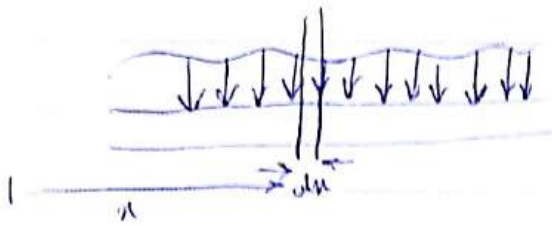
$$M(a) = -w_0a^2$$

$$V = -w_0a - w_0a$$

$$M(x) = -w_0a x - w_0a(x-a) - w_0a^2$$

$$M(a) = (-1-1)w_0a^2$$





و م و V

$$\sum F_y = 0$$

$$V(x) - w(x) dx - V(x+dx) = 0$$

$$w(x) = \frac{V(x) - V(x+dx)}{dx} \Rightarrow w(x) = -\frac{dV}{dx}$$

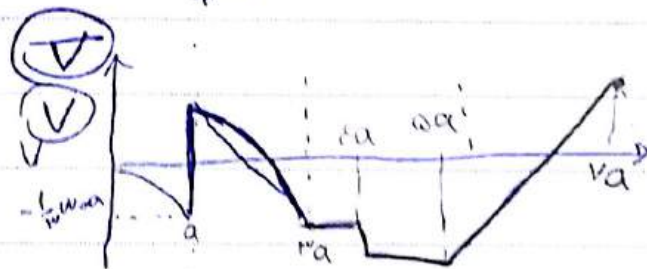
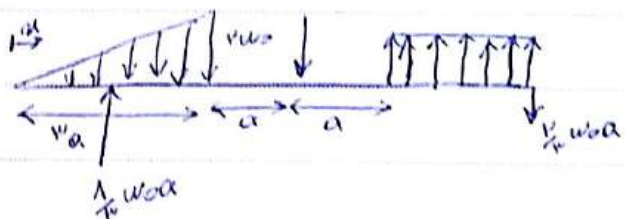
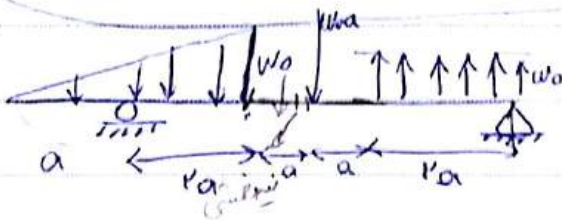
$$\int_{x_0}^x w(x) dx = \int_{x_0}^x -\frac{dV}{dx} dx \Rightarrow V(x) - V(x_0) = -\int_{x_0}^x w(x) dx$$

$$\sum M(x) = 0 \Rightarrow M(x) + V(x) dx - (w(x) dx) \frac{dx}{2} - M(x+dx) = 0$$

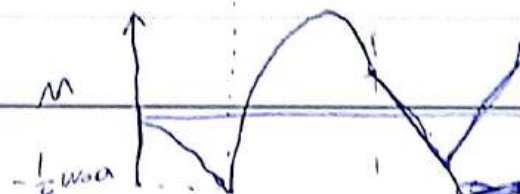
$$V(x) = \frac{M(x) - M(x+dx)}{dx} + w(x) \frac{dx}{2}$$

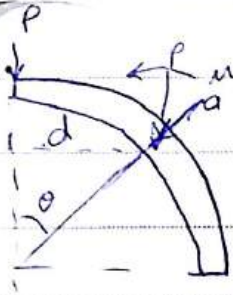
$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow \left(V(x) = \frac{dM}{dx} \right) \Rightarrow M = \int V dx \Rightarrow M(x) - M(x_0) = \int_{x_0}^x V dx$$

$$w(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = -\frac{d^2 M}{dx^2}$$



Classic

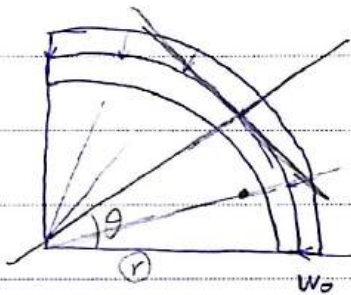




$$N(\theta) = -P \sin \theta$$

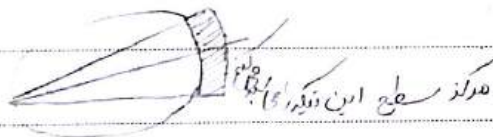
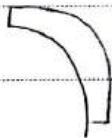
$$V(\theta) = -P \cos \theta$$

$$M = -Pd = -PR \sin \theta$$



$$S = \mu r \omega_0 + \frac{r \omega_0}{v}$$

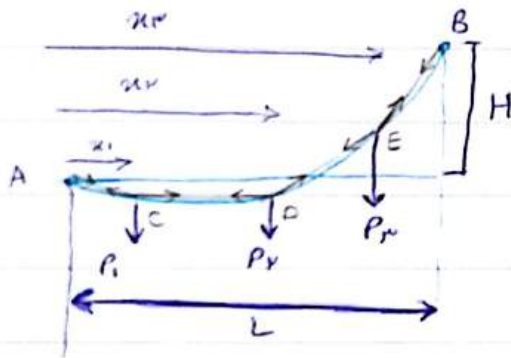
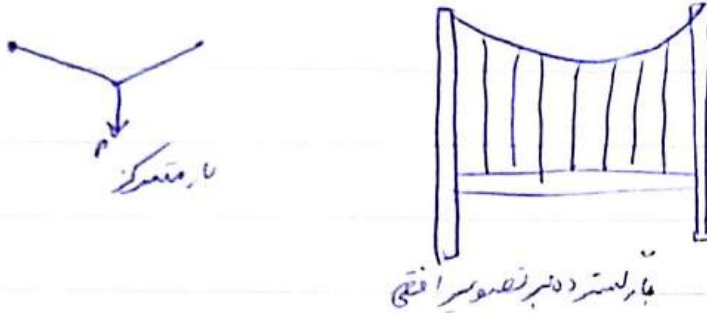
تمرین:



$$r \sin \theta$$

کابل ها:

کابل عضو سست که فقط قادر به تحمل کشش است. فشار و تنش در بخش می تواند تحمل کند.



آنگاه می توانیم بگوییم که به صورت کلی اگر ما تعداد نشیمن داده خواهیم شد.

تعیین معکوس العمل نکته مهمی:

* چنانچه با نسبت یکی از نقاط کابل مقدار λ معلوم باشد تا بتوان معکوس العمل ها را نکته P_1 را به دست آورد.

$$\sum M_B = 0$$

معادله کابل حول نقطه B:

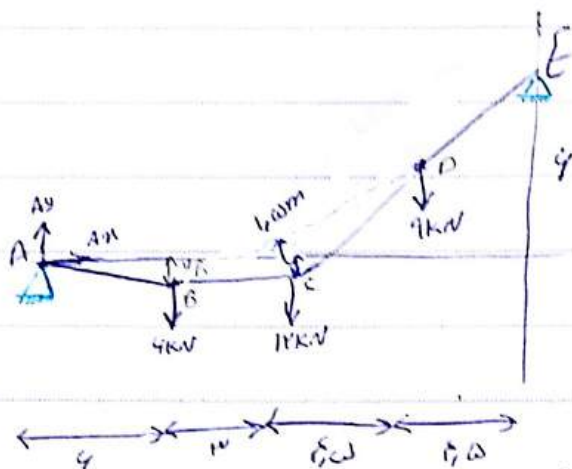
$$A_y \times L = A_x \times H - P_1 \times x_1 + P_2 \times x_2 + P_3 \times x_3$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow A_y \times x_1 + A_x \times y_1 = P_1 \times (x_2 - x_1)$$

نسبت درجهت چپ نسبت به D صفر باشد:

$$L = \sum L_i = \sum \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

نکته: اگر چه کشش کابل تغییر می کند ولی مولفه افقی کشش ثابت باقی می ماند.



$$\sum M_E = 0 \Rightarrow Ay \times 4 - Ax \times 4 - 4 \times 4 - 12 \times 4 = 0$$

$$4Ay - 4Ax = 160$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Ay(4) + Ax(4) - 4 \times 2 - 12 \times 4 = 0$$

$$4Ay + 4Ax - 52 = 0$$

$$4Ay = -4Ax + 52$$

$$-4Ax = 12 \Rightarrow -4Ax = 12$$

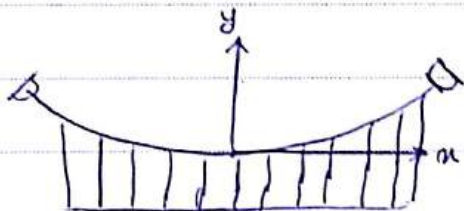
$$Ax = -3 \text{ kN}$$

$$4Ay \times 4 = 12 \times 4 \Rightarrow Ay = 3 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow Ay \times 4 + Ax \times y_B = 0 \Rightarrow y_B = -\frac{4 \times 4}{-4} = 4 \text{ m}$$

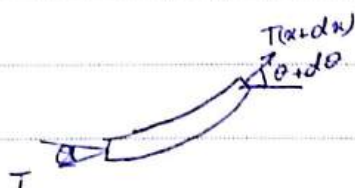
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow Ay \times 12 - Ax \times y_D - 4 \times 4 - 12 \times 8 = 0$$

$$44 - 4 \times y_D = 12 \times 8 \Rightarrow y_D = \frac{44 - 96}{-4} = 11 \text{ m}$$



انتخاب مبدأ دستگاه مختصات:

مبدأ مختصات وارد درجه مسبق در نظر می آید:



$$T \cos \theta = (T + dT) \cos(\theta + d\theta)$$

$$T \cos \theta = (T + dT) (\cos \theta \cos d\theta - \sin \theta \sin d\theta)$$

$$T \cos \theta = T \cos \theta - T \sin \theta + \cos \theta dT - \sin \theta dT$$

$$T \sin \theta = \cos \theta dT \Rightarrow d(T \cos \theta) = 0$$

$$T \cos \theta = T_0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (T + dT) \sin(\theta + d\theta) = T \sin \theta + w dL$$

$$(T + dT) (\sin \theta \cos d\theta + \cos \theta \sin d\theta) = T \sin \theta + w dL$$

$$T \sin \theta + \sin \theta dT + T \cos \theta d\theta + \cos \theta dT d\theta = T \sin \theta + w dL$$

$$d(T \sin \theta) = w dL$$

تغییرات نیرو را برای برابر w dL است.

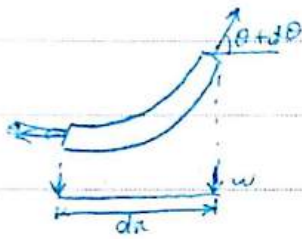
$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

د. م. ب. ن.

Year: _____ Month: _____ Date: _____

NOTE BOOK

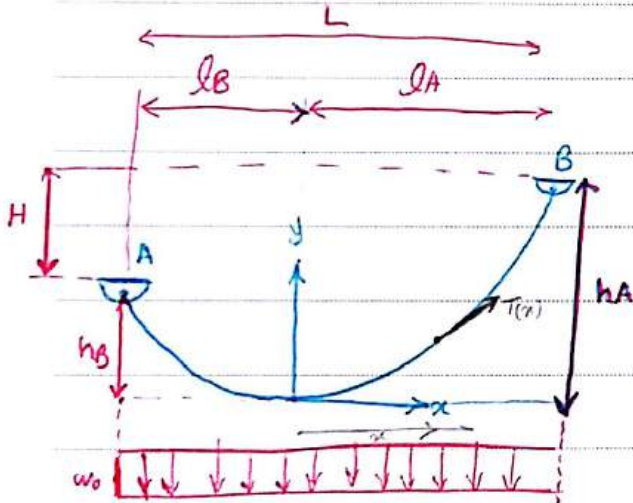


$$d(T \cos \theta) = 0 \Rightarrow T \cos \theta = T_0 \quad \text{و. ب.}$$

تحليل كابل ها:

$$d(T \sin \theta) = w dx \Rightarrow T_0 \frac{d \tan \theta}{dx} = w$$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)' = \frac{w}{T_0}$$



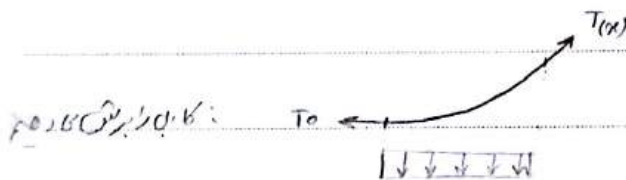
کابل تحت بار گسترده w ثابت:

$$y'' = \frac{w_0}{T_0} \Rightarrow y' = \frac{w_0}{T_0} x + C_1 \quad x=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow C_1=0$$

$$y = \frac{w_0}{2T_0} x^2 + C_2 \Rightarrow x=l \Rightarrow y=0 \Rightarrow C_2 = -\frac{w_0}{2T_0} l^2 \Rightarrow y = \frac{w_0}{2T_0} x^2 - \frac{w_0}{2T_0} l^2$$

$$A = \begin{bmatrix} l_A \\ h_A \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} l_B \\ h_B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} h_A = \frac{w_0}{2T_0} l_A^2 \\ h_B = \frac{w_0}{2T_0} l_B^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{h_A}{h_B} = \left(\frac{l_A}{l_B} \right)^2$$

$$T_0 = \frac{w_0 l_A^2}{2 h_A}$$



$$T = \sqrt{T_0^2 + (w_0 x)^2}$$

$$T_{max} = T(x=l_A) = \sqrt{T_0^2 + w_0^2 l_A^2}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 x}{T_0} \right)^2} dx \quad S_A = \int_0^{l_A} \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 x}{T_0} \right)^2} dx$$

$$S_B = \int_{-l_B}^0 \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 x}{T_0} \right)^2} dx$$

Classic

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots = \dots$$



$$\mu = \frac{dF}{ds}$$



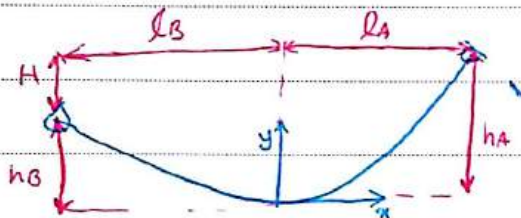
$$w = \frac{dF}{dx}$$

$$\Rightarrow dF = w dx = \mu ds$$

$$\mu = \frac{dF}{ds}$$

$$w = \mu \frac{dx}{ds} = \mu \sqrt{1+y'^2}$$

$$y'' = \frac{w(x)}{T_0} \Rightarrow y'' = \frac{\mu \sqrt{1+y'^2}}{T_0} \Rightarrow y' = \frac{\mu}{T_0} \sqrt{1+y'^2}$$



میتونی زنجیری:

$\mu_0 = \text{وزن واحد طول}$

$$y'' = \frac{\mu_0}{T_0} \sqrt{1+y'^2} \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{\mu}{T_0} \sqrt{1+y'^2}$$

$$y' = p \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\mu}{T_0} dx \Rightarrow \ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{\mu}{T_0} x + C$$

$$x=0 \Rightarrow y'=p=0 \Rightarrow \ln(0 + \sqrt{1+0}) = 0 + C \Rightarrow C=0$$

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{\mu x}{T_0}} \Rightarrow \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{\mu x}{T_0}} - p \Rightarrow 1+p^2 = e^{\frac{2\mu x}{T_0}} - 2pe^{\frac{\mu x}{T_0}} + p^2$$

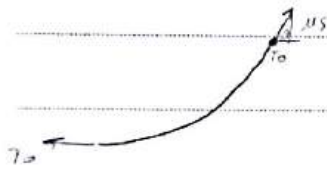
$$p = \frac{e^{\frac{\mu x}{T_0}} - 1}{e^{\frac{\mu x}{T_0}}} = \frac{e^{\frac{\mu x}{T_0}} - 1}{e^{\frac{\mu x}{T_0}}} = y' \Rightarrow y' = \sinh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right)$$

$$y = \frac{T_0}{\mu} \left(\cosh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) \right) + C_1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$$

$$0 = \frac{T_0}{\mu} (\cosh(0)) + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{T_0}{\mu}$$

$$y = \frac{T_0}{\mu} \left[\cosh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) - 1 \right]$$

$$A: \Rightarrow h_A = \frac{T_0}{\mu} \left[\cosh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) - 1 \right]$$



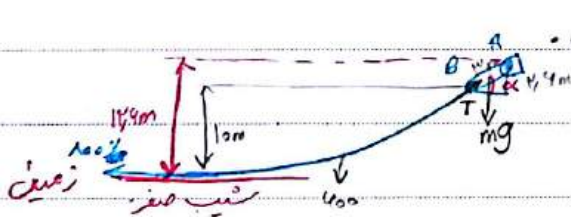
$$\tan \theta = y' = \frac{\mu s}{T_0}$$

$$\frac{\mu s}{T_0} = \sinh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) \Rightarrow S = \frac{T_0}{\mu} \left(\sinh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) \right)$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + (\mu s)^2} \Rightarrow T = \sqrt{T_0^2 + T_0^2 \sinh^2\left(\frac{\mu x}{T_0}\right)} = T_0 \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{\mu x}{T_0}\right)} = T_0 + \mu y$$

$$T = T_0 + \mu y$$

$$y = \frac{T_0}{\mu} \left[\cosh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) - 1 \right] \quad S = \frac{T_0}{\mu} \left(\sinh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) \right) \quad T = T_0 + \mu y$$



• میله سبب AB دارای طول ۴ متر می باشد و آن را ۱۰۰۰ نیوتن است.

• طول ۱.۴ متر در پایین و ۱.۰ متر در بالا است.

m و α

$$T_0 = 1000 \text{ N} \quad T = T_0$$

$$T = \sqrt{400^2 + 1000^2} = 1000 \Rightarrow T = T_0 + \mu y \Rightarrow 1000 = 1000 + \mu y \Rightarrow y = 1.0 \text{ m}$$

$$\sin \alpha = \frac{1.4}{4} \Rightarrow \alpha \approx 20^\circ$$

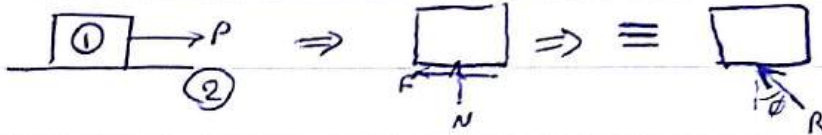
$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow 1000 \times 4 - 400 \times 4 \cos \alpha - mg(\cos \alpha \times 1.4) = 0$$

$$mg = 1000 \text{ N}$$

$$m \approx 100 \text{ kg}$$

- زاویه اصطکاک: حداکثر زاویه ای است که نیروی کس العمل سطح با خود نمود بر سطح داشته باشد.

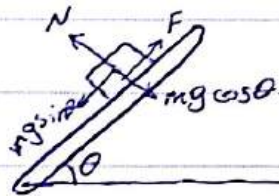
- مخروط اصطکاک



$$\tan \phi = \frac{F}{N} \leq \frac{\mu N}{N} \leq \mu \Rightarrow \tan \phi \leq \mu$$

ϕ_s : زاویه اصطکاک $\tan \phi_s = \mu$ در آستانه حرکت

اندازه تیری مقدار μ :

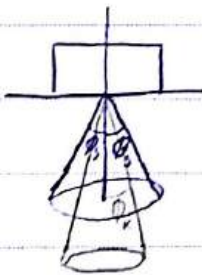


$$N = mg \cos \theta$$

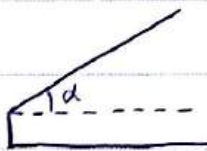
$$f = mg \sin \theta$$

$$\mu mg \cos \theta = mg \sin \theta \Rightarrow \mu = \tan \theta$$

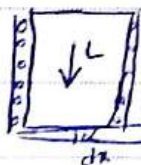
مخروط اصطکاک:



کاربرد اصطکاک در مکانیک: لوله



کاربرد لوله: ۱- تنظیمات دقیق:



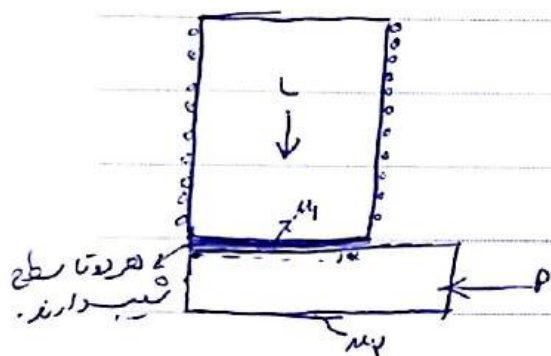
$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha \Rightarrow dy = dx \tan \alpha$$

$$کار درودی = ndx$$

$$کار فرعی = Ldy$$

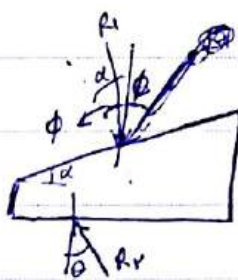
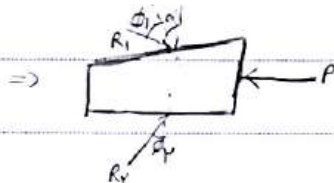
(۲) جایابی بار سنگین: به راحتی:

$$کار درودی = کار فرعی \Rightarrow Pdx = Ldy \Rightarrow P = L \frac{dy}{dx} = L \tan \alpha$$



کود در آستانه حرکت: فرض

$$\phi = \tan^{-1}(\mu)$$



شرط خود قفل بودن کود: در این حالت $P = \infty$:

کود زمانی خواهد لغزید که هر دو سطح بالایی و پایینی در آستانه لغزش باشند.

$$\alpha - \phi = \phi$$

$$\boxed{\mu \phi = \alpha}$$

$\alpha < \mu \phi$ لغزش رخ نمی دهد

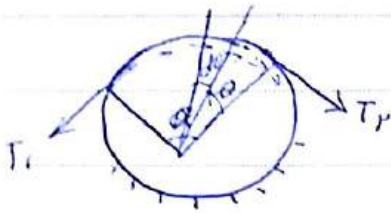
$\alpha = \mu \phi$ جسم در آستانه لغزش است

$\alpha > \mu \phi$ متادل ندارد.



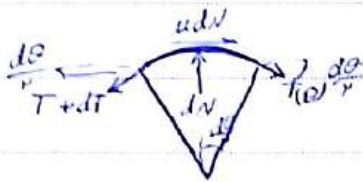
دینامیک (کلاسیک)

آستانه لغزش:



$$\theta = 0 \Rightarrow T_P$$

$$\theta = \alpha \Rightarrow T_L$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow dN - T \sin \frac{d\theta}{r} - (T + dT) \sin \frac{d\theta}{r} = 0$$

$$dN - T \frac{d\theta}{r} - (T + dT) \frac{d\theta}{r} = 0$$

$$dN - T d\theta - \frac{dT d\theta}{r} = 0$$

$$dN = T d\theta$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \mu dN + T \cos \frac{d\theta}{r} - (T + dT) \cos \frac{d\theta}{r} = 0$$

$$\mu dN + T - (T + dT) = 0 \quad (dT = \mu dN)$$

$$dT = \mu dN = \mu T d\theta \Rightarrow dT = \mu T d\theta$$

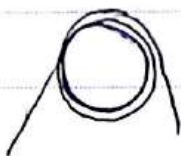
$$\int_{T_L}^{T_P} \frac{dT}{T} = \int \mu d\theta \Rightarrow \ln \frac{T_P}{T_L} = \mu \alpha \Rightarrow \left[\frac{T_P}{T_L} = e^{\mu \alpha} \right] \Rightarrow$$

(۳)

چند نکته: (۱) α کل زاویه تماس است که بر حسب رادیان می باشد.

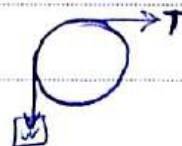
(۲) رابطه لزوماً برابر سطح کششی نباشد و برابر هر سطح انحنایاری بهر قرار است.

(۳) زاویه α می تواند بسیار بزرگ باشد.



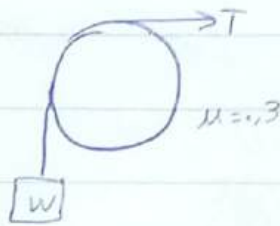
$$\alpha = r \cdot \omega \times 2\pi = \omega 2\pi$$

$$\frac{T_P}{T_L} = e^{\mu \alpha} \quad (۴)$$



$$\frac{T_P}{T_L} = e^{\mu \times 2\pi} = 1.4$$

$$T_L = 1.1 T_P \Rightarrow e^{\mu \times 2\pi} =$$



فرد و نیرو کشش ایجاد شده تا وزن را ثابت بماند.

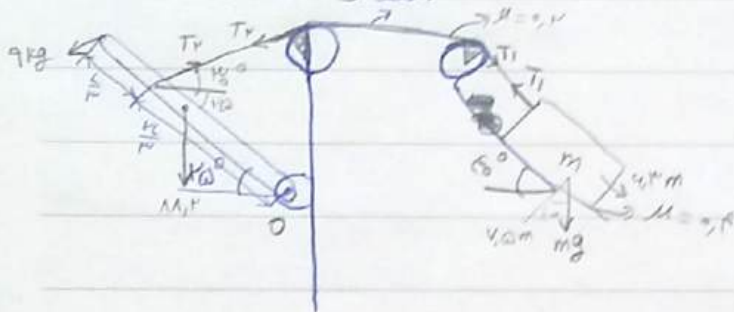
حرکت به بالا: $\frac{T}{W} \leq e^{\mu\alpha}$

حرکت به پایین: $\frac{W}{T} \leq e^{\mu\alpha}$

① $\frac{T}{W} \leq 1.4 \Rightarrow T \leq 1.4W \Rightarrow \boxed{\frac{W}{1.4} \leq T \leq 1.4W}$

② $\frac{W}{T} \leq 1.4 \Rightarrow T \geq \frac{W}{1.4}$

ارتباط بین نیروی کشش و وزن.



$\sum M_O = 0 \Rightarrow \frac{W}{1.4} \times T \times \sin 60^\circ - 11.7 \times \cos 30^\circ = 0$

$T = \frac{11.7}{\sin 60^\circ} \times \frac{W}{1.4} = 10.25$

$\alpha = \frac{\pi}{180} \times (180^\circ + 30^\circ) = \frac{\pi}{1.8}$

حرکت در جهت سمت بالا (جداقت m)

$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu \times \frac{\pi}{1.8}} \Rightarrow T_1 = 0.57 \times 10$

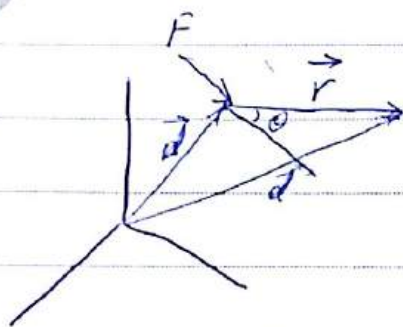
$T_1 - mg \sin 60^\circ = \mu N \Rightarrow 0.57 \times 10 - 9.1 \times \sin 60^\circ = \mu \times 10 \times \cos 60^\circ \Rightarrow m = 1.19$

$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu \times \frac{\pi}{1.8}} = 1.274$

حرکت در جهت سمت پایین (جداقت m)

$T_1 = 1.274 \times T_2 \Rightarrow T_1 = 1.274 \times 10.25 = 13.05$

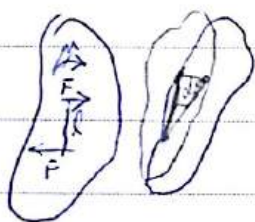
$13.05 + 9.1 \times \sin 60^\circ = 9.1 \times \cos 60^\circ \Rightarrow m = 1.19$



فصل هفتم: اصل کار مجازی: روش جدید حل مسائل متوازن

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = Fr \cos \theta$$

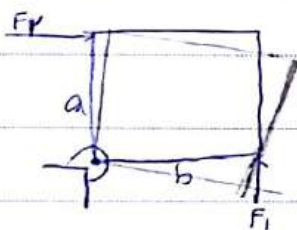
کار کوچک:



$$F dx = M$$

$$dW = F_r d\theta = M d\theta$$

$$dW = F dx$$



حالت مجازی مجازی: اگر جسمی در حالت متوازن باشد، از ضوابط متوازن می‌توانی استفاده کنی

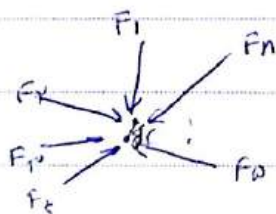
به نحوی که حالتی با مقیدها هندسی سازگار باشد، آن را حالت مجازی مجازی می‌گویند.

این حالتی که کوچک بودن و نیروها در حین حالتی مجازی تغییر نمی‌کنند.

کار مجازی: کار انجام شده در طی حالتی مجازی!

$$F_1 b d\theta - F_2 a d\theta = 0$$

$$F_1 b = F_2 a$$



اصل کار مجازی: ذره جسم صلب
احتمال صلب متصل به هم

فرض: ذره در حالت متوازن است!

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$$

$$\delta W = \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot \delta \vec{r}$$

$$\Rightarrow \delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}$$

کار مجازی:

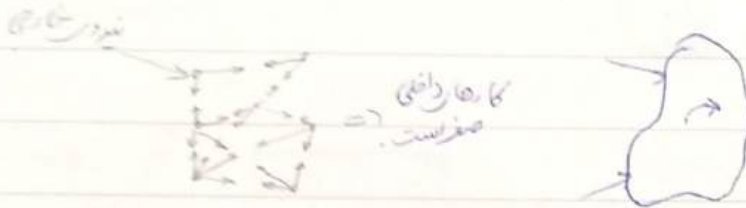
$$= (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n) \cdot \delta \vec{r}$$

Classic

کار می از صفر است $\rightarrow$ آنرا جسم در حال تعادل است $\delta W = \sum F \times \delta r$

جسم در حال تعادل است $\rightarrow$ کار می از برابر حرکت های مجاری و نگاه صفر است

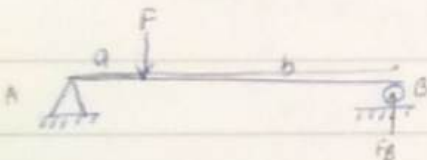
* جسم صلب: تشکیل شده است از تعداد زیادی ذره:



$$\delta W = \delta W_{in} + \delta W_{ext} \Rightarrow \boxed{\delta W_{ext} = 0}$$

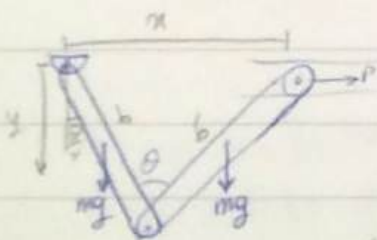
آنرا اصل کار می برای یک جسم صلب نیز قرار می دهد زیرا این جسم صلب متشکل از ذرات می باشد و هر ذره از خود جدا نیست و حرکت آن با حرکت کل جسم یکی است. (سیستم ایده آل) باشد.

دیاگرام آزاد: $\begin{matrix} \text{نیروهای داخلی} \times \\ \text{نیروهای فعال} \\ \text{نیروهای غیر فعال} \end{matrix} \rightarrow$ کار صفر: نگه داشتن ثابت، عکس العمل عمود بر سطح
دیاگرام آزاد نیروهای فعال



$$\delta W = F_B(a+b)\delta\theta - F a \delta\theta = 0$$

$$F_B = \frac{a}{a+b} F$$



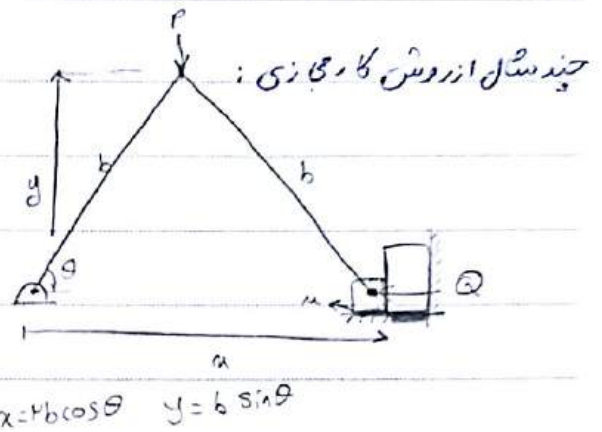
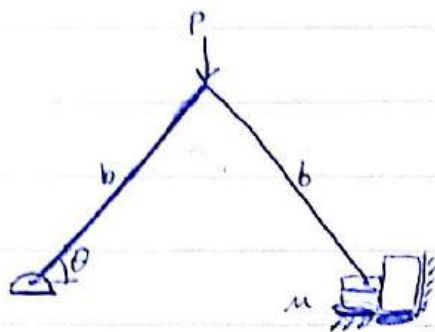
$$x = b \sin \theta_1 \Rightarrow \delta x = b \cos \theta_1 \delta \theta_1$$

$$y = \frac{b}{r} \cos \theta \Rightarrow \delta y = \frac{b}{r} \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta W = P \delta x + m g \delta y = 0$$

$$(P \cos \theta_1 - \frac{m g b}{r} \sin \theta_1) \delta \theta = 0$$

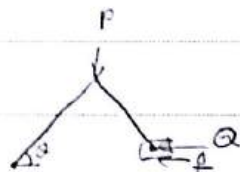
$$P \cos \theta_1 = \frac{m g b}{r} \sin \theta_1 \Rightarrow \boxed{\tan \theta_1 = \frac{r P}{m g}}$$



$$\delta W = -Q \delta x - P \delta y = 0$$

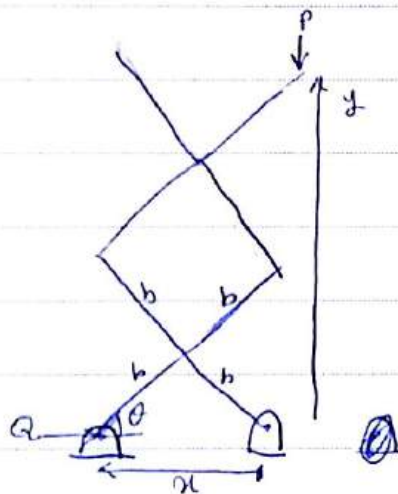
$$= -Q(-b \sin \theta \delta \theta) - P(b \cos \theta \delta \theta) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{b} P \cot \theta}$$

بهره نظر نکات



نارسیه نکات

$$\delta W = -(Q+f) \delta x - P \delta y = 0 \Rightarrow Q+f = \frac{1}{b} P \cot \theta \Rightarrow Q + \mu P = \frac{1}{b} P \cot \theta \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{b} P (\cot \theta - \mu)}$$



$$x = b \cos \theta$$

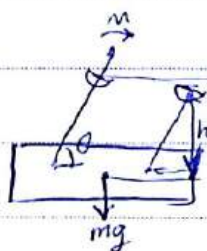
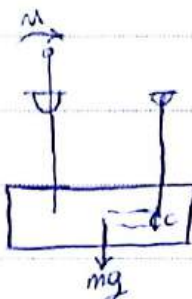
$$y = b \sin \theta$$

در وضعیت تعادل

$$\delta W = -Q \delta x - P \delta y = 0$$

$$\Rightarrow -Q(-b \sin \theta \delta \theta) - P(b \cos \theta \delta \theta) = 0$$

$$\tan \theta = \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}$$



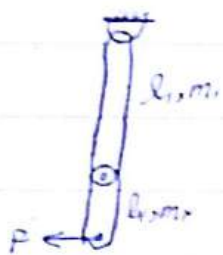
$$h = b \sin \theta + c$$

$$\delta W = M \delta \theta - mg \delta h$$

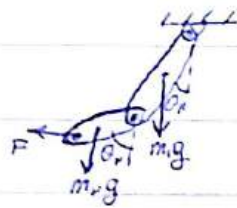
$$= M \delta \theta - mg(b \cos \theta \delta \theta)$$

$$= mg b \cos \theta$$

$$\boxed{\cos \theta = \frac{M}{mg h}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{M}{mg h} \right)$$



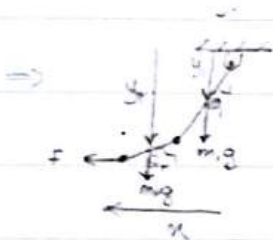
=>



$$y_1 = \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1$$

$$y_2 = \frac{1}{2} l_2 \cos \theta_2 + l_1 \cos \theta_1$$

$$x = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

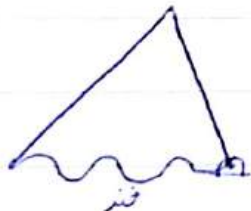


$$\delta W = m_1 g \delta y_1 + m_2 g \delta y_2 + F \delta x = 0$$

$$m_1 g \left(-\frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 \right) + m_2 g \left(-l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 - \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 \right) + F (l_1 \cos \theta_1 \delta \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2) = 0$$

$$\delta W = \left(-\frac{1}{2} m_1 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_1 \sin \theta_1 + F l_1 \cos \theta_1 \right) \delta \theta_1 + \left(-\frac{1}{2} m_2 g l_2 \sin \theta_2 + F l_2 \cos \theta_2 \right) \delta \theta_2 = 0$$

$$\begin{cases} \tan \theta_1 = \frac{F}{(m_1 + \frac{1}{2} m_2) g} \\ \tan \theta_2 = \frac{\frac{1}{2} F}{m_2 g} \end{cases}$$



$$\delta W = 0$$

$$\delta W = \delta W_{\text{فند}} + \delta W_{\text{بلاستیک}} = 0$$

$$\delta W = \delta W_e + \delta W_g = 0$$

$$W_e = \frac{1}{2} k x^2 \quad \delta W_{\text{فند}} = -\delta W_e$$

$$W_g = mgh \quad \delta W_{\text{بلاستیک}} = -\delta W_g$$

$$\delta W = \delta (W_e + W_g)$$

کار نیروهای وارد بر جسم به صورت انرژی پتانسیل درجسم ذخیره می شود.

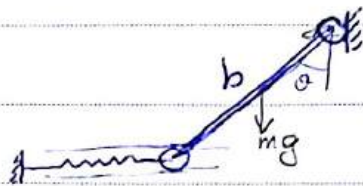
اگر غیر از جرمی زمین نیرو دیگری به سیستم انعطاف پذیر وارد نشود:

$$\delta W = 0 \Rightarrow \delta (W_e + W_g) = \delta (W) = 0$$

$$\delta W = 0 \Rightarrow \frac{dW}{dx} \delta x = 0$$

تبادل طبیعی جسم زمانی رخ می دهد که انرژی پتانسیل آن کم شود.

$$\frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{تعادل} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2W}{dx^2} > 0 \quad \text{تعادل پایدار} \\ \frac{d^2W}{dx^2} < 0 \quad \text{تعادل ناپایدار} \end{cases}$$



$$v = v_e + v_g$$

$$= \frac{1}{r} k (b \sin \theta)^r + mg \frac{b}{r} \cos \theta$$

$$\delta v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{d\theta} = 0 \Rightarrow kb^r \sin \theta \cos \theta - mg \frac{b}{r} \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta (kb^r \cos \theta - mg \frac{b}{r}) = 0$$

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\cos \theta = \frac{mg}{r b k}$$

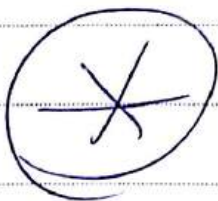
$$\frac{dv}{d\theta} = kb^r \cos \theta - mg \frac{b}{r} \cos \theta = 0$$

$$r \cos \theta = 1$$

$$\left. \frac{dv}{d\theta} \right|_{\theta=0} = kb^r - mg \frac{b}{r} > 0 \quad \text{لا يوجد توازن}$$

$$\frac{dv}{d\theta} = kb^r \times (r \cos \theta - 1) - mg \frac{b}{r} \cos \theta \quad \cos \theta = \frac{mg}{r b k}$$

$$kb^r \left(\frac{m g r}{r b k} - 1 \right) - mg \frac{b}{r} \times \frac{mg}{r b k} = 0 \quad \frac{m^2 g^2}{r k} - \frac{m^2 g^2}{r k} - kb^r$$



$$k > \frac{mg}{rb} \quad \text{لا يوجد}$$

$$k < \frac{mg}{rb} \quad \text{لا يوجد}$$