

Subject:

Year: 92 Month: 11 Date: ()

جیب الرصاص

محاسبات عددی (دکتر کیا پور)

ترمین ۲+۲*

سکتا (میان ترم) حفته آخر فروردین دوکتبه ۸ نمره

۵ شنبه ۱۴۸۱/۹۳

رایان ترم ۱۰ نمره

M. Kiyanpour@yahoo.com

بروره ۳ نمره

رشدین نادر

نوسنده (دفعان)

سج ، محاسبات عددی

استادان مشاوران

سرفصل ۱

خطا

مستوق

اشکال

برازش مختن

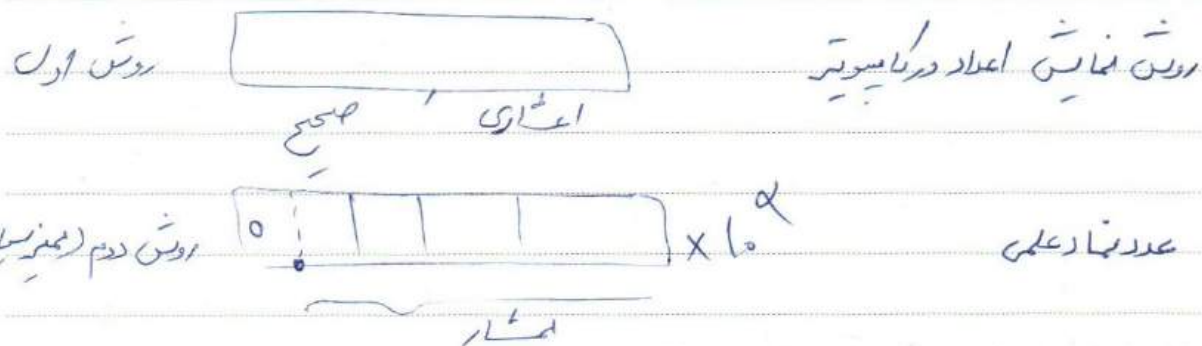
غير خطی عددی

حل معادله

پنج جمله ای عددی

دفعه نین عددی

کتاب Matlab منبرای محاسبات عددی Numerical methods نوسنده JAAN
KIVSALAAS with Matlab



$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{از سری استفاوه شود})$$

برای ذخیره‌ی یک عدد در سیستم دقتی داریم دو عدد قرار دارد دوروش داریم

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قطع کردن} \xrightarrow{\text{دقت ۳ رقم}} 1,4734 \rightarrow 1,473 \\ \text{رند کردن} \xrightarrow{\text{رند و دقت ۳ رقم به بالا}} 1,4734 \rightarrow 1,474 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} d_e \geq 5 \\ d_e < 5 \end{array}$$

$$54734 = 5 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

$$0,53 = 5 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2}$$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ \hline 28 & 12 \\ 0 & 12 \\ & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 7 & 2 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$28 = (11100)_2$$

$$0/3 = (?)_2$$

$$a = r^{-1} \times a_1 + a_2 \times r^{-2} + a_3 \times r^{-3} + \dots + a_n \times r^{-n}$$

$$r \times a = a_1 + a_2 \times r^{-1} + \dots + a_n \times r^{-n+1}$$

$$2 \times 0/3 = 0/4 \rightarrow a_1 = 0$$

$$2 \times 0/4 = 1/2 \rightarrow a_2 = 1$$

$$2 \times 0/2 = 0/4 \rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow 0/3 = (0/0/001)_2$$

$$2 \times 0/6 = 0/8 \rightarrow a_4 = 0$$

$$2 \times 0/8 = 1/4 \rightarrow a_5 = 1$$

$$2 \times 1/4 = 1/2$$

در روشی همزیستار بیتی دارد چند رقم را می تواند ذخیره کند مثلاً برای ۳ رقم داریم

$$472000000V = \underbrace{472}_{\text{۳ رقم با صفا}} \times 10^8$$

$$0/000734000V = 7,34 \times 10^{-4}$$

مثلاً دو عدد $472000000V$ و 4729000000 را می بینیم تقریباً مثل هم اند. (تفاوتش ناچیز است)
مطلع کردن) ولی در روشی که می گویند فرق می کنند

منابع خطا:

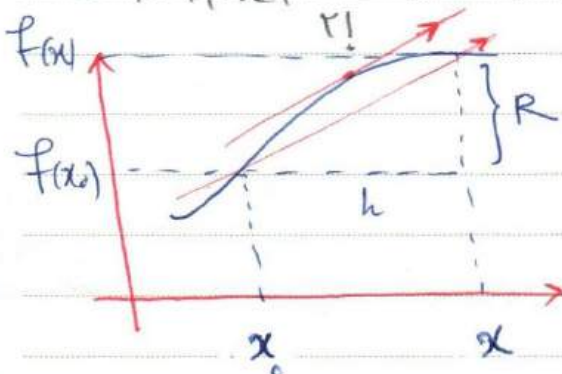
۱- خطای مدل و داده ها:

در جاهایی که مقدار محدودی نقطه روی نمودار داریم

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \left. \begin{array}{l} \text{۱- گسسته سازی} \\ \text{۲- خطای برش تقریب} \end{array} \right\}$$

۲- مناهنی سازی در نقطه‌ای که به نسبت در واقع یک عدد نسبتاً بزرگ است مثلاً برای تقریب زدن از چند جمله‌ای اول سری تیلور استفاده می‌کنند.

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$



تقریب بسط تیلور

$$f(x) - f(x_0) = R = h f'(c)$$

c نقطه بین x_0 و x

$$\frac{R}{h} = f'(c) \Rightarrow R = h f'(c)$$

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$\Delta \text{ خطا} = f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

$$x_0 < c_n < x$$

 $\tilde{f}$
 f
 $\downarrow$

$$(x-x_0)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(c_n)$$

↑
در ثابت

$$|f(h) - \tilde{f}(h)| \leq M h^n$$

(x - x_0)

$$f(h) = \tilde{f}(h) + O(h^n)$$

↑
order

رتبه خطای برشی

مثال

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + O(h^3)$$

$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + O(h^5)$$

جمع آنها

$$e^h + \sin(h) = 1 + 2h + \frac{h^2}{2!} + O(h^3) \quad \checkmark$$

نکته

$$\begin{cases} f(x) = \tilde{f}(x) + O(h^n) \\ g(x) = \tilde{g}(x) + O(h^m) \end{cases}$$

$$n < m \Rightarrow f(x) + g(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x) + O(h^n)$$

۴- خطای نمایش اعداد

word length

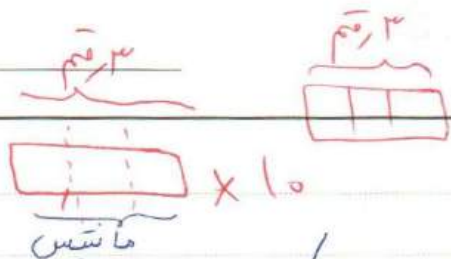


۱- ممیز ثابت (Fixed point)

مثلاً اولین عدد صفر که می توان نشان داد ۰۰۰۰۰/۰۰۰۰۰ که مسلمان اولین عدد

نسبت و بین آن و صفر هنوز هم عدد وجود دارد.

بزرگترین عدد هم ۹۹۹۹۹,۹۹۹۹۹ است!



۲- ممیز سیار (Floating point)

لکن از بزرگترین عددی که می توان نمایش داد $4,99 \times 10^{100}$ که خیلی بزرگ است در این

روش هر چه به صفر نزدیک شویم مقدار خطا کمتر است ولی هر چه بزرگ تر شود خطا

بیشتر می شود. $9,99 \times 10^{100} < 9,98 \times 10^{100}$

با مثال) کوچکترین عدد با ممیز بزرگتر از صفر با فرض آنکه بین 10^{-100} و 10^{-1} باشد

۱۰۰- 1100×10^{-100} جواب ۲

8.3520005^7

روش نمایش عدد در مایکروسافت

8.35×10^7

۱- روش قطع کردن

$\begin{cases} 8.35 \times 10^7 & ۲۵ رقم ۴۴ \\ 8.132 \times 10^7 & ۲۵ رقم ۴۵ \end{cases}$

۲- روش گرد کردن

β $\alpha = 0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots$

$\tilde{\alpha} = 0.d_1 \dots d_k$

قطع کردن

$\begin{cases} 0.d_1 \dots d_k & d_{k+1} < B/2 \\ 0.d_1 \dots (d_k+1) & d_{k+1} \geq B/2 \end{cases}$

مگرد کردن

تحلیل خطا

$$e_x = |x - \tilde{x}| \quad \text{خطای مطلق}$$

$$r_x = \frac{e_x}{x} \quad \text{خطای نسبی}$$

مثال) $x = 100000$, $\tilde{x} = 100001 \rightarrow e_x = 1$, $r_x = \frac{1}{100000}$

$y = 0.0001$, $\tilde{y} = 0.00011 \rightarrow e_y = 1$, $r_y = \frac{1}{0.0001} = 10^4$

نکته: وقتی x در دسترس نیست $\rightarrow \frac{e_x}{\tilde{x}}$ خطای نسبی حدی

e_x در کامپیوتر ذخیره شده است و آن را داریم و $\tilde{x}$ را خودمان تقریب می‌زنیم مثلاً

فرض کنیم کامپیوتر $e_x = |12 - 11.4|$ دارد و $\frac{e_x}{11.4}$ مقدار خطای نسبی می‌شود.

گران خطا: $x = 0.1 d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1}$

در مبای β هیم با ماشین k رقمی

* قطع کردن $\tilde{x} = 0.1 d_1 d_2 \dots d_k$

در حالتی که x لا اعشاری باشد $e_x = |x - \tilde{x}| \leq \beta^k$

در حالتی که n رقم صحیح و اعشاری باشد $e_x \leq \beta^{n-k}$ (لا تعداد ارقام صحیح)

* روش گرد کردن $e_x = |x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{2} \beta^{n-k}$

خطای نسبی برای قطع کردن

$$r_x = \frac{e_x}{x} \leq \frac{B^{-k}}{B^{-1}} = B^{-k+1}$$

فرض کنیم $d \neq 1$ که حداقل ۲ است
که $d=1$ باشد

برای گرد کردن

$$r_x \leq \frac{1}{2} B^{-k+1}$$

نکته! اگر $\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \leq \frac{1}{2} 10^{-n+1}$ باشد $\tilde{x}$ تا n رقم با معنای درست است.

$$\frac{1 - 7.999}{1} < \frac{1}{2} \times 10^{-3} \rightarrow \text{پس عدد } 7.999 \text{ تا } 3 \text{ رقم درست است}$$

$$\frac{1 - 8.001}{1} < \frac{1}{2} \times 10^{-1} \rightarrow \text{یعنی } 8.001 \text{ یک رقم با معنای درست است یعنی } 100$$

خطای جمع کردن

فرض کنیم ماشین ۳ رقمی است
mantis

$$0.1 + 0.1 + \dots + 0.1 + 2.52 \times 10^{-2}$$

جمع از این و

$$\underbrace{1 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-1}}_{1 \times 10^{-1}}$$

جمع از این و

$$\begin{array}{r} 2.52 \\ 0.1 \\ \hline 2.52 + 0.1 = 2.62 \end{array} \rightarrow 2.54 \times 10^{-2} \checkmark$$

$$100 \times 1 \times 10^{-1} + 2.52 = 2.57 \rightarrow 2.57 \times 10^{-2} \checkmark$$

باید در کامپیوتر وارد کردن اعداد را توجه کرد ۲ محیط Macro و Micro داریم

که باید برای جمع وقت کرد در فضای ماکرو از مقدار خیلی کوچک در جمع صرف نظر می شود و در میکرو

اگر خطا و انحراف

$$\begin{aligned} x &\approx \tilde{x} & e_x \\ y &\approx \tilde{y} & e_y \end{aligned}$$

خطای جمع

$$x+y \approx \tilde{x}+\tilde{y}$$

$$e_{x+y} = x+y - (\tilde{x}+\tilde{y}) = \underbrace{x-\tilde{x}}_{e_x} + y-\tilde{y}_{e_y}$$

$$e_{x-y} \leq e_{x+y}$$

$$\begin{aligned} r_{x-y} &= \frac{e_{x-y}}{x-y} = \frac{(x-y) - (\tilde{x}-\tilde{y})}{x-y} \\ &= \frac{x-\tilde{x}}{x-y} - \frac{y-\tilde{y}}{x-y} \\ &= \frac{x}{x-y} \cdot \left(\frac{x-\tilde{x}}{x} \right) - \frac{y-\tilde{y}}{y} \times \frac{y}{x-y} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{x}{x-y} r_x + \frac{y}{x-y} r_y$$

در این روش اگر x و y بسیار به هم نزدیک باشند دچار خطای شدید !!

خطای بزرگ می شود !! اووه !!

خطا در محاسبه توابع

$$x = 0.43734 \rightarrow \tilde{x} = 4.3734 \times 10^{-2}$$

$$f(\tilde{x}) \leftarrow f(x)$$

$$e_f = |f(x) - f(\tilde{x})| = e_x f'(\tilde{x}) \quad \leftarrow \text{اگر } e_x \text{ کوچک باشد}$$

$$f(x + e_x) = f(x) + e_x f'(x) + \frac{e_x^2}{2!} f''(x) + \dots$$

$$r_{f(\tilde{x})} = \left| \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{f(x)} \right| = \left| \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{x} \right|$$

$$= \left| \frac{x}{f(x)} \right| \frac{e_x}{x} \cdot f'(\tilde{x}) = \left| \frac{x}{f(x)} \right| r_x f'(\tilde{x}) \leq \left| \frac{x f'(\tilde{x})}{f(x)} \right| r_x$$

$\left. \begin{array}{l} K \text{ عدد است} \\ K \text{ نزدیک خورش است} \end{array} \right\} K \text{ نزدیک بد است}$

برای حالت در مقعره

$$r_{f(x,y)} \leq \left| \frac{f_x(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot x}{f(x,y)} \right| r_x + \left| \frac{f_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot y}{f(x,y)} \right| r_y$$

ملاک کمی محاسبی بهتر

۱- خطای کمتر (دقیق تر)

۲- سریع تر - ۳- حجم حافظی کمتر

ملاک برای سرعت همگرایی

$$e_k = |x_k - x|$$

برای یک دنباله $\{x_n\}$ که به x همگراست.

یک $\lambda > 0$ و P موجود باشد که

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^P} = \lambda$$

P مرتبه‌ی همگرایی ، $\lambda =$ ثابت خطای مجانبی

$$e_{k+1} \approx \lambda |e_k|^P$$

$$e_{k+2} = 10^{-1} \quad e_{k+1} = 10^{-1} \quad e_k = 10^{-2} \quad \lambda = 1, P = 2$$

$P = 1$: همگرایی خطی ، $P = 2$: همگرایی مرتبه‌ی دوم

مثال ۱ $\left\{ \frac{1}{k^2} \right\}$ به صفر همگراست با چه نرخی؟ خطی

$$e_k = \frac{1}{k^2} - 0 = \frac{1}{k^2}$$

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 = 1 \rightarrow \lambda = 1$$

مثال $\left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^k \right\} \leftarrow$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^{k+1}}{\left(\left(\frac{1}{3} \right)^k \right)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^{k+1}}{\left(\frac{1}{3} \right)^{2k+1}} = 1$$

همگرایی مرتبی دوم

اگر $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ و r_k یک دنباله با نرخ همگرایی مشخص $\leftarrow$ ؟ رابطنی زودتر دادیم

$$\Rightarrow \left| \frac{x_k - x}{r_k} \right| < c \quad c > 0 \text{ وجود داشته باشد}$$

$$x_k = x + O(r_k)$$

مثال $r_k = \frac{1}{k^2}$, $\frac{\cos k}{k^2}$

$$\left| \frac{\frac{\cos k}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} \right| = |\cos k| \leq 1$$

$$\frac{\cos k}{k^2} = 0 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

بایداری

با خطای اولیه کم ، نتیجه‌ی نهایی هم خطای کمی داشته باشد.

رشد خطا ، E_n بعد از n مرحله E_0

$$\left. \begin{aligned} |E_n| &\leq (c \cdot n) E_0 \text{ رشد خطی} \\ |E_n| &\leq c^n E_0 \text{ رشد نمایی} \end{aligned} \right\} c \text{ یک عدد ثابت مثبت}$$

$\left. \begin{aligned} c < 1 \end{aligned} \right\}$ خطای نهایی کم می‌شود

$c > 1$ خطای نهایی افزایش می‌یابد

رنگ و حافظه

سجیدگی محاسبه

مرتبه‌ی سجیدگی و شمارش کلمه‌ی عملیات (عمل)

$$O(n^3)$$

$$f(n) = n^3 + 7n^2 + \dots$$

$$g(n) = n^3$$

محاسبه‌ی سجیدگی محاسبه چند جمله‌ای

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

ساده‌ترین روش برای محاسبه‌ی چند جمله‌ای انجام همی محل گشت. در این روش هر

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنابراین محاسبه‌ی چند جمله‌ای از مرتبه‌ی سجیدگی n^2 است. $(O(n^2))$

ضرب همی یک بار انجام شده را دوباره تکرار می‌کنیم و ضرب همی تکرار انجام شده را در تعداد

عملیات منظور نمی‌کنیم یعنی برای مثال وقتی x^2 را حساب کردیم برای محاسبه‌ی x^3

$$\text{ضرب } x^2 \cdot x \text{ را انجام می‌دهیم. در این صورت } 2 + 2 + \dots + 2 = 2n - 1$$

در این حالت مرتبه‌ی سجیدگی n است. $(O(n))$

روش سوم: $a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\dots + x(a_{n-1} + xa_n))) \dots)$

در این روش تعداد عملیات برابر n است. $(O(n))$

مثال) برای محاسبه دترمینان چند ضریب انجام می شود؟

۲ ضریب $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

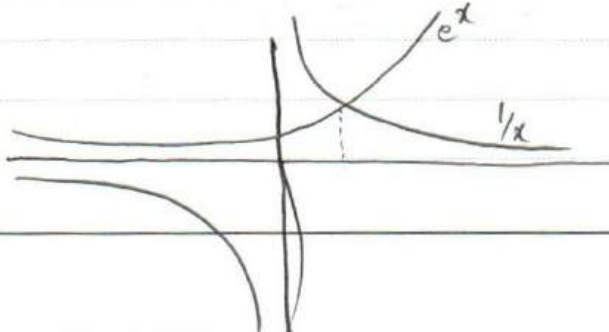
۳ ضریب $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

نکته: برای ماتریس $n \times n$ ، $n!$ ضریب لازم است. $O(n!)$

حل معادلات غیر خطی

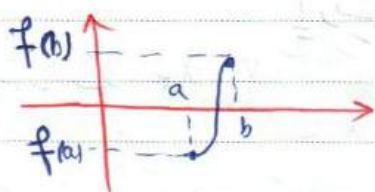
واضح است که برای حل معادله‌ی فوق نمی توان $x = e^x$ از روش های معمولی استفاده کرد پس باید از قضیه‌ی بولتزانو استفاده کنیم

مثال) $f(x) = xe^x - 1 = 0 \rightarrow xe^x = 1 \rightarrow e^x = \frac{1}{x}$



۱- قضیه بولتزانو

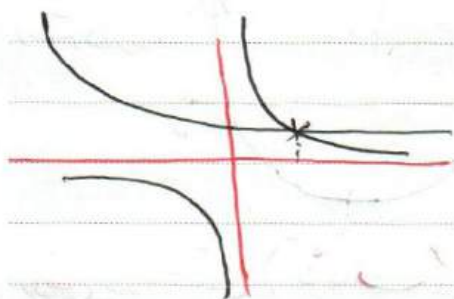
اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) \cdot f(b) < 0$ باشد آنگاه f روی (a, b) حداقل یک ریشه دارد



مثال $\sqrt{x^2 - 3}$ را تقریب کنید

$$f(x) = \sqrt{x} \quad f(1) = \sqrt{1}$$

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$



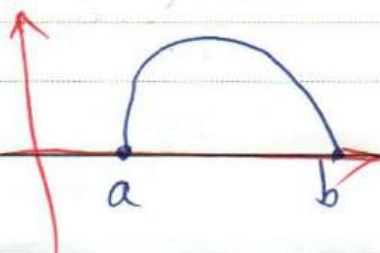
حل معادلات

۱) روش نموداری $xe^{-x} - 1 = 0$

۲) روش بی‌پایه‌ای (برائتی)

قضیه بولتزانو ۲: بالایی صفحه ۱

قضیه رول: اگر f روی $[a, b]$ پیوسته و f مشتق پذیر روی (a, b) باشد و $f(a) = f(b)$ آنگاه f' روی (a, b) حداقل یک ریشه دارد. (این قضیه در مورد تعداد ریشه تابع فاکتور می‌کند)



$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(x) = xe^x - 1 = 0 \quad \text{مثالی}$$

$$f(1) = 1 \times e^1 - 1 = e - 1 > 0 \rightarrow \text{در بازه‌ی } [0, 1] \text{ حداقل یک ریشه دارد.}$$

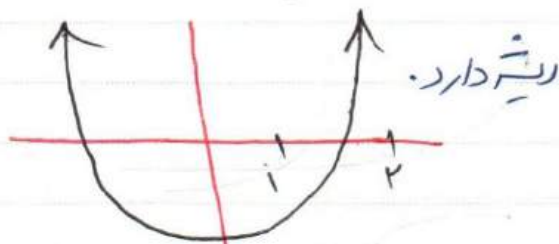
اگر ۲ ریشه داشته باشد α_1, α_2 آنگاه $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$ می‌باشد.

$$f'(x) = e^x + xe^x \geq 1 \rightarrow f \text{ روی } [0, 1] \text{ دقیقاً یک ریشه دارد.}$$

تعمیم قضیه رول

اگر f n ریشه روی $[a, b]$ داشته باشد. $f^{(k)}$ در صورت وجود حداقل $n-k$ ریشه دارد.

$$f(x) = x^2 - 2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(2) = 2 \end{array} \right.$$



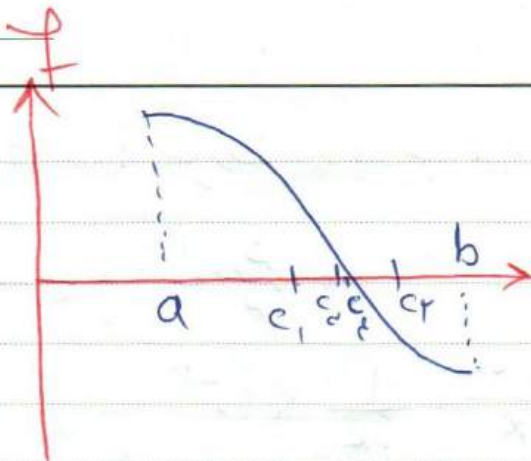
ریشه دو بخشی (تلفیف)

اگر $f(a)f(b) < 0$ آنگاه $f(\frac{a+b}{2})$ را حساب می‌کنیم $(c = \frac{a+b}{2})$

اگر $f(a)f(c) < 0$ نتیجه می‌شود ریشه در بازه‌ی (a, c) است.

اگر $f(b)f(c) < 0$ ~ ~ ~ ~ ~ (c, b) است.

در غیر این صورت $f(c) = 0$ است.



معیاری که توقف :

جواب اصلی معادله

در هر مرحله که جواب باشد یا خیلی بزرگ باشد.

(۱) خطای کمتر از ϵ

و مطابق کلام

$$(۲) |c_k - c_{k+1}| < \epsilon \text{ و } \left| \frac{c_{k+1} - c_k}{c_k} \right| < \epsilon$$

(۳) تا N مرحله $|e_k| < 0 < \epsilon$

اثبات کنیم آیا این c_k به جواب میل می کند یا نه ؟

$$e_k = |c_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{\mu^k}$$

$$e_1 = |c_1 - \alpha| \leq \frac{b-a}{\mu} \rightarrow e_2 = |c_2 - \alpha| \leq \frac{b-a}{\mu^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |c_k - \alpha| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b-a}{\mu^k} = (b-a) \times 0 = 0$$

بنابراین قضیه فشرده $\lim_{k \rightarrow \infty} |c_k - \alpha| = 0$ پس $c_k = \alpha$ است و c_k به α میل می کند

خطا $\epsilon = 10^{-4}$ و f' یک ریشه دارد باید چند مرحله روش نصف را باید کرد.

در بازه $[a, b]$ یک ریشه دارد.

$$e_k = |c_k - \alpha| \leq \frac{1-0}{2^k} = \frac{1}{2^k} < 10^{-4}$$

$$\Rightarrow 10^{-4} < 2^k \rightarrow k=10 \checkmark$$

ϵ داده شده است در بازه $[a, b]$ یک ریشه داریم تعداد کسری لازم چند

$$e_k = |c_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^k} < \epsilon \quad \text{است؟}$$

$$\frac{b-a}{\epsilon} < 2^k \rightarrow \log_2 \frac{b-a}{\epsilon} < k$$

$$\xrightarrow{\text{جزء صحیح بگیریم}} k = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\epsilon} \right\rceil + 1$$

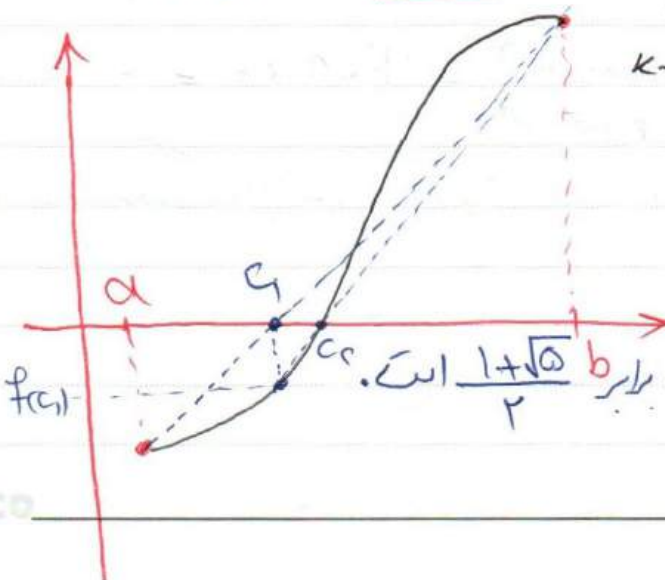
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \lambda \quad \text{و } \lambda > 0$$

مرتبه همگرایی روش دو بخشی

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{1}{2} > 0 \quad \text{و} \quad e_{k+1} = \frac{e_k}{2}$$

$p=1$ (همگرایی خطی است)

روش نابجایی



نیم همگرایی به جواب داریم ریشه برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نسبت آوردن c

$$y - f(a) = m(x - a) \rightarrow y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

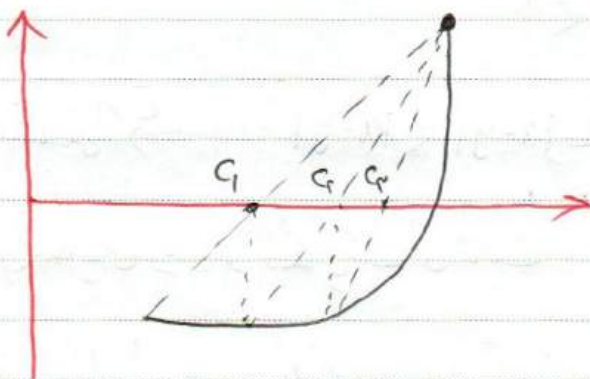
$$0 - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (c - a)$$

$$c = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

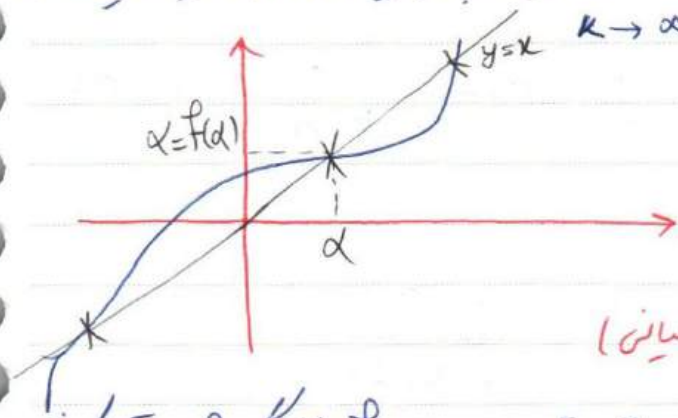
$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$c_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$

این روش طایقی ایجاد نمی‌دهد حالت کلی خاص است مثلاً در مثال زیر باید این کار را چندین مرتبه تکرار کنیم.

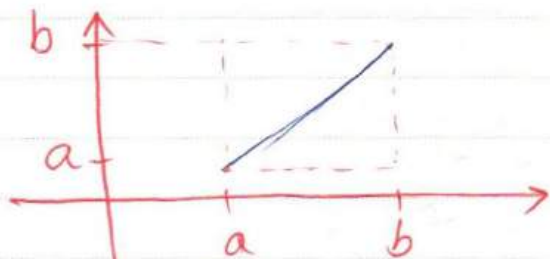


ثابت f است. $x_{k+1} = f(x_k)$ و $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$ و در نهایت $\alpha = f(\alpha)$ (نقطه نقطه)



فصل وجود و یکتایی (تعمیم قضیه مقدار میانی)

اگر f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و $f([a, b]) \subset [a, b]$ آنگاه f حداقل یک نقطه ثابت دارد.



اگر f' موجود باشد و $\max |f'(x)| \leq L < 1$ و $a \leq x \leq b$ آنگاه نقطه نقطه ثابت

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L < 1$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < |x - y|$$

شرط معادل برای قضیه وجود و یکتایی نقطه ثابت

قضیه: اگر f در شرایط وجود و یکتایی نقطه ثابت صدق کند آنگاه دنباله $\{x_k\}$

$x_{k+1} = f(x_k)$ با هر نقطه شروع x_0 در $[a, b]$ به نقطه ثابت $\alpha = \alpha$ همگرا می شود.

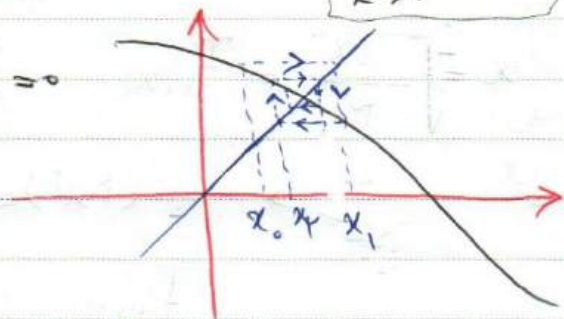
$$|x_1 - \alpha| = |f(x_0) - f(\alpha)| \leq L |x_0 - \alpha|$$

$$|x_2 - \alpha| = |f(x_1) - f(\alpha)| \leq L |x_1 - \alpha| \leq L^2 |x_0 - \alpha|$$

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|$$

$$\boxed{L^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \alpha| = 0$$



$$e_k = |x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|$$

برای حفظ در این روش

$$e_k = |x_k - \alpha| \leq \frac{L^k |x_1 - x_0|}{1 - L}$$

اثبات توسط نامساوی مثلثی

$$|x_n - x_k| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_{k+1} - x_k|$$

$$|x_n - x_k| \leq L^n |x_1 - x_0| + L^{n-1} |x_1 - x_0| + \dots + L^k |x_1 - x_0|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^n L^i |x_1 - x_0| = \sum_{i=k}^{\infty} L^i |x_1 - x_0|$$

$$f(x) = x \Leftarrow \underbrace{x + g(x) = x}_{f(x)} \Leftarrow g(x) = 0$$

(مثال)

$$x^2 - e^x = 0 \rightarrow x^2 = \frac{e^x}{1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{e^x}{1}} = f_1(x) \xrightarrow[\text{است}]{\text{تکرار}} f_1([0, 1]) \\ x = \sqrt{\frac{e^x}{1}} = f_2(x) \end{cases}$$

$$\text{در } x=0, \quad x^2 = e^x \xrightarrow[\text{تکرار}]{\text{Ln}} \text{Ln}(x^2) = \text{Ln} e^x = x$$

$$f_2(x) = \text{Ln}(x^2) = x$$

$$f(x) = \left(\frac{e^x}{1}\right)^{1/2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \left(\frac{e^x}{1}\right)^{-1/2} \xrightarrow{\text{نوی}} f'(0) < 1$$

بررسی ابتدا و انتهای بازه مشخص داریم $f'(0) < 1$ نزولی است.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \lambda \quad \text{هر چه } \lambda \text{ کمتر باشد خطا کمتر و سرعت بیشتری داریم.}$$

$p, \lambda > 0$

سرعت (نسبت) همگرایی $\{x_k\}$ دنباله‌ی تکراری برای تابع f باشد

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f(x_k) - f(\alpha)|}{|x_k - \alpha|} \leq L \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_k - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = L$$

$$e_{k+1} = |x_{k+1} - \alpha|$$

روش تکرار نقطه ثابت با همگرایی مرتبه بالا

اگر f در شرایط وجود و یکنایی نقطه ثابت صدق کند و مشتق $m+1$ -ام f در

$$f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(m)}(\alpha) = 0$$

همان α موجود و یکتا باشد.

آنگاه مرتبه همگرایی دنباله تکرار نقطه ثابت حداقل $m+1$ است.

از رابطه تیلور استفاده می‌کنیم $\rightarrow$

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^{m+1}} = \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{m+1}} = \frac{|f(x_k) - f(\alpha)|}{|x_k - \alpha|^{m+1}} = \frac{|x_k - \alpha|^{m+1} f^{(m+1)}(c_k)}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{|x_k - \alpha|^{m+1}}$$

$$= \frac{f^{(m+1)}(c_k)}{(m+1)!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{f^{(m+1)}(\alpha)}{(m+1)!}$$

مثال) جواب $f(x) = x^2 - 2 = 0$ را بیابید. $[1, 2]$

$$\alpha = \frac{1}{r} \left(\alpha + \frac{r}{\alpha} \right)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{r} \left(x + \frac{r}{x} \right)$$

$$f_r(x) = \frac{x+r}{x+1}$$

$$\alpha = \frac{1}{r} \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

$$f'_1(x) = \frac{1}{r} - \frac{1}{x^2}$$

$$f'_r(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{r} \alpha = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = r$$

$$f'_1(\pm\sqrt{r}) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 0$$

$$f'_r(\pm\sqrt{r}) \neq 0$$

همگرایی مرتبه دوم

همگرایی خطی

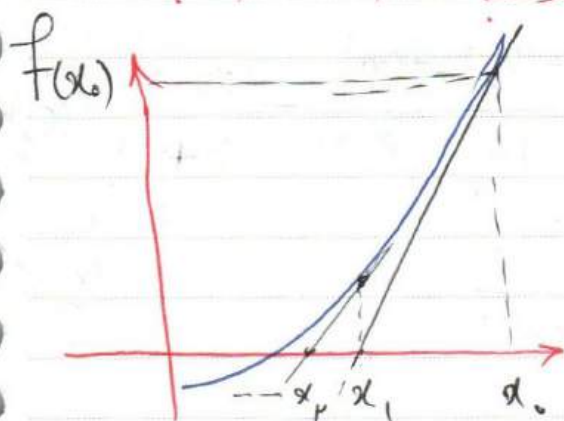
۲۴ فصل سوم { او ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ }
موسم ۱ شنبه دو هفته بعد از ۱۱/۲۲

فصل ۱ { او ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ }

فصل ۲ { او ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ }

سه شنبه ۳ هفته بعد از ۱۱/۲۲

کلاس های حل تمرین
خانم قربان شنبه ۳ به ۵ سالار
آقای مرادی دو شنبه ۱-۳ الف



روش نیوتن - رافسون

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

مرتبه همگرایی روش نیوتن - رافسون

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \lambda$$

$$p, \lambda > 0$$

$$|e_{k+1}| = |x_{k+1} - \alpha|$$

$$= \left| x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \alpha \right|$$

$$f(x) = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k) + \frac{(x - x_k)^2}{2!}f''(c_k)$$

$$x \rightarrow a \\ f(a) = 0$$

$$0 = f(x_k) + (a - x_k)f'(x_k) + \frac{(a - x_k)^2}{2!}f''(c_{x_k})$$

$$\div f'(x_k) \Rightarrow \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)} - (a - x_k) = \frac{(a - x_k)^2}{2!} \frac{f''(c_{x_k})}{f'(x_k)} \quad (*)$$

$$|e_{k+1}| = \frac{(x_k - a)^2}{2!} \frac{f''(c_{x_k})}{f'(x_k)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^{1/2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x_k - a)^2}{2!} \frac{f''(c_{x_k})}{f'(x_k)}}{(x - a)^2} = \frac{1}{2!} \left| \frac{f''(a)}{f'(a)} \right|$$

نقشه:

اگر f, f', f'' موجود و پیوسته و موجود باشند در بازه $[a, b]$ ، $f \in C[a, b]$

آنکه همگرای روش نیوتون - رافسون حداقل از مرتبه ۲ است.

(و وقتی دقیقاً مرتبه ۲ است که $f''(a) \neq 0$)

نکته: روش نیوتون رافسون حالت خاص از نقطه ثابت است.

$$x = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

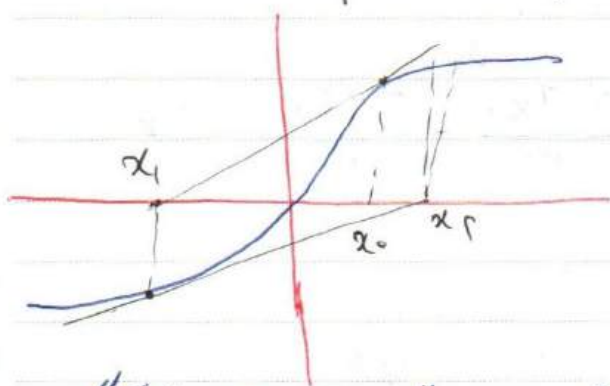
$$g(x) = 1 - \left[\frac{f(x)f'(x) - f''(x)f(x)^2}{(f'(x))^2} \right] = 1 - 1 + \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

در نقطه a مقدار $f(a) = 0$ است پس $g(a) = 0$ می گردد.

$$g(a) = f(a) \cdot x \dots = 0 \quad \checkmark$$

* شرط همگرایی در جواب $\left| f(x) \cdot f'(x) \right| < |f'(x)|^2$

توجه: باید دقت کنیم که $f'(x_k)$ نباشد زیرا



دایم مثل روشن نبودن به $f'(x) \approx 0$

ریشه همگرا نیست.

نکته: اگر $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(k-1)}(x) = 0$ باشد آنگاه $f(x) = (x-\alpha)^k h(x)$

α ریشه‌ی مرتبه‌ی k -ام f است $f(x) = (x-\alpha)^k$ مثلاً $f(x) = (x-\alpha)^2$ $f(\alpha) = 0$ $f'(x) = 2(x-\alpha)$ $f'(\alpha) = 0$

روشن نبودن رافسون اصلاح شده

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^{(m)}(x_k)}{f^{(m)}(x_k)}$$

$$(f^{(m)}(\alpha) \neq 0, f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0)$$

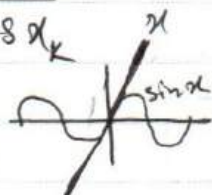
$$f(\alpha) = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$$

مرتبه‌ی همگرایی روشن اصلاح شده ۲ است.

مثال) $f(x) = x - \sin x = 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \sin x_k}{1 - \cos x_k}$$

$$f(\alpha) = 0 \text{ همگرایی خطی می شود}$$



بوضوح جواب این سوال $\alpha = 0$ است

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots = x^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots \right)$$

همون با ۳ بار مشتق گرفتن به جواب رسیدیم مرتبه‌ی همگرایی ۳ است.

$$\text{از (11) } f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$$

نکته

آنکه

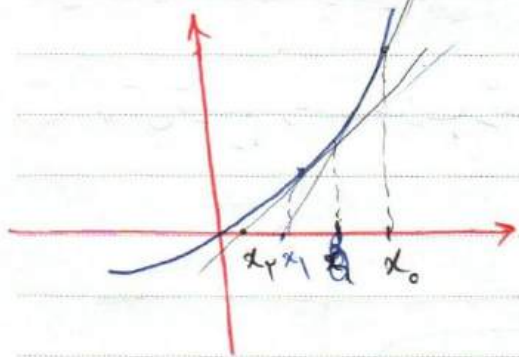
همگرایی خطی می شود و $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = \frac{m-1}{m}$ (مرتبه همگرایی در روش نیوتون)

رافتون و نیز شرط (11) برقرار باشد، خطی است پس از اصلاح شده استفاده می شود

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} = \frac{m-1}{m} \quad (\text{تا مرتبه همگرایی حداقل 2 باشد})$$

$$\text{اصلاحات} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^{(m-1)}(x_k)}{f^{(m)}(x_k)}$$



از این ترتیب ریشه به روش نیوتون رافتون

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}}}$$

روش درخت

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1}))}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

⇔

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1}))}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

در روش وتری x_0 و x_1 (دستگاه اولیه)

در روش ناجایی باید x_0 و x_1 در دو طرف ریشه باشند در روش وتری الزامی نیست.

مرتبه همگرایی روش وتری $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

نکته: اگر در روش نیوتون با حدس اولیه منطبق شروع کنیم به یک ریشه منقطع برسیم.

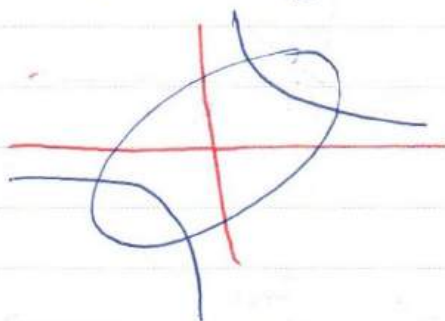
$$f(z) = 0 \quad z = x + iy$$

$$f_1(x, y) + i f_2(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

حل دستگاه معادلات غیر خطی

① روش تریسم (حدود جواب و تعداد آنها)

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 - 11xy + y^2 = 9 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{x}$$



$$\begin{cases} x_{k+1} = g_1(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = g_2(x_k, y_k) \end{cases}$$

② روش نقطه ثابت

$$(a, b) \text{ یک نقطه ثابت دستگاه است اگر } \begin{cases} a = g_1(a, b) \\ b = g_2(a, b) \end{cases} \Leftrightarrow \text{دورنمایی } \{x_k\} \text{ و } \{y_k\}$$

پایان

شرط کافی برای همگرایی $| \nabla g_p(x, y) | < 1$ و $| \nabla g_q(x, y) | < 1$

قضیه ۲: اگر g_p و g_q مشتق های جزئی آنها در ناحیه D (نزدیک نقطه ثابت) پیوسته و

(α, β) نزدیک (α, β) باشند و $\otimes$ برقرار باشد آنگاه دنباله تکرار نقطه ثابت به (α, β)

همگراست. $| \nabla g | = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \leq |g_x| + |g_y|$ توجه

اگر $| \frac{\partial g_1}{\partial x} | + | \frac{\partial g_1}{\partial y} | < 1$ و $| \frac{\partial g_2}{\partial x} | + | \frac{\partial g_2}{\partial y} | < 1$ برقرار باشد شرط قضیه قبل برقرار است.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ y - (x-1)^2 = -0.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4y = -x^2 - 4y^2 + 1 + 4y \\ y = \frac{-x^2 - 4y^2 + 1 + 4y}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{-y + x^2 + 0.5}{4} g_1 \\ y = \frac{x^2 - 4y^2 + 1 + 4y}{4} g_2 \end{cases} \quad D = (-0.5, 0] \times [0.5, 1] \quad \text{ناحیه } D \text{ نزدیک نقطه سوال}$$

$$\begin{cases} g_1 : |x| + |-\frac{1}{4}| < 1 \\ g_2 : |-\frac{x}{4}| + |1-y| < 1 \end{cases}$$

(۳) روش نیوتون

برای متغیره $\Delta f = f_{b,2}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_{b,2}(x_0, y_0)$

$$= \frac{\partial f_{b,2}}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f_{b,2}}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y$$

$$\begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}}_{D(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta F = D(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$\times D^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = D^{-1}(x_0, y_0) \Delta F$$

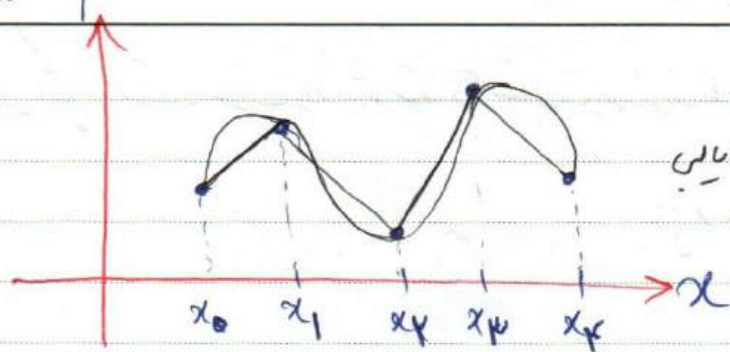
$$\Rightarrow X_1 - X_0 = -D^{-1}(x_0, y_0) F(x_0, y_0)$$

$$X_1 = X_0 - D^{-1}(X_0) F(X_0)$$

$$\xrightarrow{x_D} -F(X_k) = D(X_k) \Delta X$$

فصل سوم: درون‌یابی، برون‌یابی

Subject _____
Date _____



اگر همی نقاط به هم وصل شوند درون‌یابی خطی است.

$$f(x) = (x - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + f(x_0)$$

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$P_n(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + \dots + (x - x_0)^n a_n$$

x_i	---
y_i	---

$$P(x_i) = y_i$$

درون‌یابی بوییدنی چند جمله‌ای

$$P_n(x_i) = \underbrace{f(x_i)}_{y_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

اگر دنبال $n+1$ درون‌یابی باشیم (چون n درجه داریم) و اگر y خارج بازه باشد برون‌یابی کرده ایم.

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad P_n(x_i) = y_i$$

$$\begin{cases} x = f_1(x, y) \\ y = f_2(x, y) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ماتریس کوآنزمووند

برای اینکه دستگاه جواب داشته باشد درجه n و اندر شوند باید مخالف صفر باشد یعنی ۸

$$\prod_{i=0}^n (x_i - x_j)$$

یا چند جمله ای درجه n وجود دارد $f_i = P_n(x_i)$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$P_n(x) = \underbrace{a_0}_{?} + \underbrace{a_1 x}_{?} + \dots + \underbrace{a_n x^n}_{?}$$

روش های بدست آوردن ضرایب

۱) روش درونیابی لاگرانژ

۲) روش درونیابی نیوتون

تصنیه ۲: اگر f معلوم باشد و $f^{(n+1)}$ روی بازه $[x_0, x_n]$ موجود باشد برای هر x یک

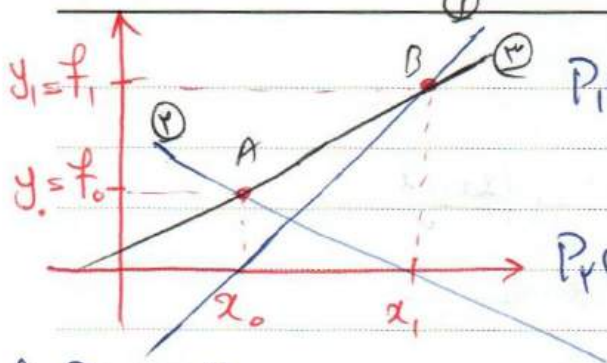
$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{داریم: } \xi \in [x_0, x_n]$$

$$|E_n(x)| \leq \frac{|x_n - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

$$M = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$|E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |(x-x_0)\dots(x-x_n)|$$

لا تتركت. مع خط 1 و 2 خطي 3 است كما في نقاط A, B, C



$$P_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} y_1 - \frac{(x-x_1)}{(x_1-x_0)}$$

$$P_r(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_r-x_0)(x_r-x_1)} y_r + \frac{(x-x_1)(x-x_r)}{(x_0-x_1)(x_0-x_r)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_r)}{(x_1-x_0)(x_1-x_r)} y_1$$

$$\begin{cases} P_r(x_0) = y_0 \\ P_r(x_1) = y_1 \\ P_r(x_r) = y_r \end{cases}$$

$$L_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k \cdot y_k$$

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

x_i	-1	0	1
y_i	1	1	1

$$L_0 = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$L_1 = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1}$$

$$L_r = \frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{(x+1)x}{2}$$

$$P_r(x) = 1x \cdot \frac{x(x-1)}{2} + 1x \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{-1} + 1x \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - x^2 + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

$$P_r(x) = x^2 + x + 1$$

x_i	-1	0	1
y_i	3	2	1

$$P_2(x) = 3x \frac{(x)(x-1)}{2} + 2 \frac{(x+1)(x-1)}{-1} + 1 \frac{(x+1)x}{2}$$

$$P_2(x) = 0 - 2x + 2$$

$P_n(x)$ انزما چندجمله ای از درجه n می دهد مثلاً ممکن است هر نقطه مثل مثال فوق روی یک خط قرار گیرند که معادله ی یک خط درجه ۱ را دارد.

توجه: درجه ی P_n حداکثر n است.

مثلاً ۱: اگر y_i ها تغییر کنند یا متوجه اشتباه شویم خیلی سریع می توان تصحیح کرد.
لازم نیست

عیب ۲: با اضافه کردن یک نقطه همی حساب ها به هم می ریزد.

روش دوم نیابتی نیوتون

نیوتون برای رفع عیب روش قبلی روشی را ابداع کرد که بتوان با n نقطه هم معادله حفظ گذرند را

$$P_1(x) = P_0(x) + S(x)$$

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{ایجاد کرد}$$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + S(x)$$

$$\begin{cases} P_1(x_0) = y_0 \\ P_1(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$P_r(x) = P_1(x) + S(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + S(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_r(x_0) = y_0 \\ P_r(x_1) = y_1 \\ P_r(x_r) = y_r \end{array} \right.$$

$$S(x) = \frac{\frac{f_r - f_1}{x_r - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_r - x_0} (x - x_0)(x - x_1)$$

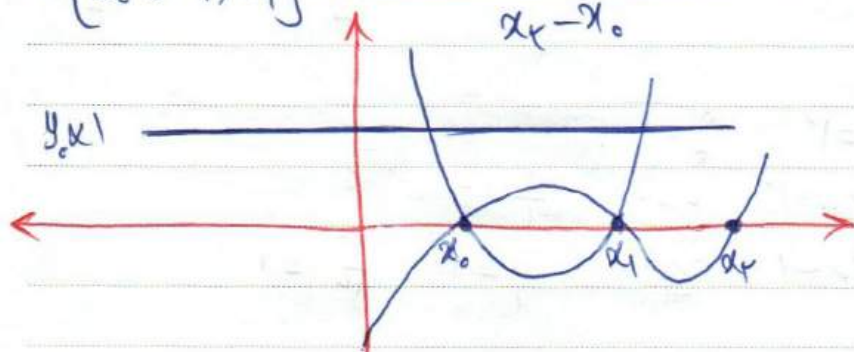
$a_r \leftarrow$

$$P_r(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_r(x-x_0)(x-x_1)$$

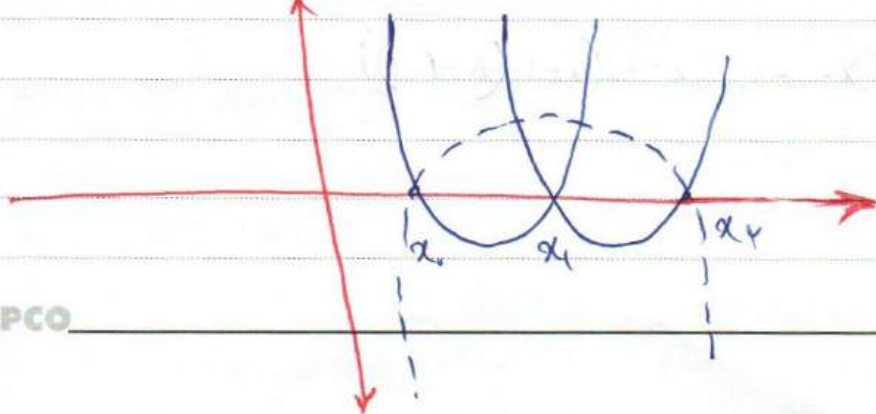
$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_r(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$$a_n = f[x_0, \dots, x_n] \quad f[x_0] = f(x_0) \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_r] = \frac{f[x_1, x_r] - f[x_0, x_1]}{x_r - x_0}$$



روشن شود



روشن لا سرائر

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$
1	0	
۲	۲	$\frac{۲-0}{۲-1} = 1$
۳	۵	$\frac{۵-۲}{۳-۲} = 3$
۴	۱۱	$\frac{۱۱-۵}{۴-۳} = 6$
۱۰	۲۰	$\frac{۲۰-۱۱}{۱۰-۴} = 2$

		$\frac{۲-1}{۳-1} = \frac{1}{2}$	$\frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۳} = \frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{6} - \frac{1}{۲} = \frac{-2}{3}$
		$\frac{۲-۳}{۴-۳} = -1$	$\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} = \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6} - (-\frac{2}{3}) = \frac{11}{6}$
		$\frac{۲-۱۱}{۱۰-۴} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$	$\frac{1}{۲} - \frac{1}{۳} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} - (-\frac{3}{2}) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

				$\frac{10}{۶} - (-\frac{11}{۶}) = \frac{21}{۶} = \frac{7}{2}$
--	--	--	--	---

$$P_4(x) = 0 + (1)(x-1) + \frac{2}{3}(x-1)(x-2) - \frac{11}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$+ \frac{7}{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

x_i	y_i
-۲	۴
۰	۲
۲	۱
-۱	-۱
۱	۱

$$\begin{aligned} \frac{4-2}{0-(-2)} &= 1 \\ \frac{2-1}{2-0} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1-(-1)}{2-(-1)} &= \frac{2}{3} \\ \frac{1-1}{1-(-1)} &= 0 \\ \frac{1-(-1)}{1-0} &= 2 \\ \frac{1-1}{1-2} &= 1 \end{aligned}$$

ترتیب نقاط مهم نیست.

$$P_5(x) = 4 + (-1)(x-(-2)) + 1(x-(-2))(x-0) + (-1)(x-(-2))(x-0)(x-2)$$

$$+ 1(x-(-2))(x-0)(x-2)(x-(-1))$$

$$E_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

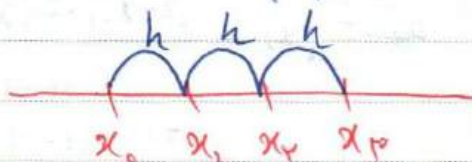
$$x_0 \leq \xi \leq x_n$$

حالت خاص:

طول گام ثابت (فاصله x_i ها ثابت و مساوی است)

$$x_k = x_0 + k\Delta x$$

$$x_k = x_0 + kh$$



$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

عملگر مسبق نیوتون

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$$\Delta^K f_i = \Delta^{K-1} f_{i+1} - \Delta^{K-1} f_i$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

$$x = x_0 + rh, \quad 0 \leq r \leq n, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{\Delta f_0}{h}$$

$$P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h} rh + \frac{\Delta^2 f_0}{2! h^2} rh(r-1)h + \dots$$

$$a_n = \frac{\Delta^n f_0}{h^n n!}$$

$$P_n(x) = f_0 + \Delta f_0 r + \frac{r(r-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \dots$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \Delta^k f_0$$

$$r = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

$$a_n = \frac{\Delta^n f_0}{h^n n!}$$

$$\Rightarrow E_n(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$E_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} r(r-1)(r-2)\dots(r-n) f^{(n+1)}(\xi)$$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	1			
1	-1	-2		
2	-1	-1	+2	
3	-1	-2	-2	-2

$$P_3(x) = 1x \binom{r}{0} + (-1) \binom{r}{1} + (-1) \binom{r}{2} + (-1) \binom{r}{3}$$

$$= 1x - 1r + \frac{r(r-1)}{2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{6}$$

$$\Rightarrow \xi_{1/2} = x_0 + rh \rightarrow r = 1/2$$

$$P(\xi_{1/2}) = 1 - 1(1/2) - (1/2)(-1/2) - \frac{1}{6}(1/2)(-1/2)(-3/2)$$

$$= 0.0833$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad \nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1} \quad \nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

$$x = x_n + sh \quad -n \leq s \leq 0 \quad f[x_n, \dots, x_{n-k}] = \frac{\nabla^k f_n}{k! n^k}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n$$

x_i	f_i	
x_0	f_0	∇f
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-1}	f_{n-1}	$\nabla f_{n-1}, \nabla^2 f_{n-1}$
x_n	f_n	$\nabla f_n, \nabla^2 f_n, \dots, \nabla^n f_n$

$O(h^{n+1})$ خطای

تفاضلات مرکزی

$$\Delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}$$

x_i	
x_{-1}	f_{-1}
x_0	$f_0, \Delta f_{-1/2}$
x_1	$f_1, \Delta f_{1/2}, \Delta f_0, \Delta f_{1/2}$
x_2	$f_2, \Delta f_{3/2}, \Delta f_1, \Delta f_{1/2}$
$\vdots$	$\vdots$

f_i	x_i	Δx_i	Δx_i^*
-------	-------	--------------	----------------

f_0	x_0
$\vdots$	$\vdots$
f_{n-1}	x_{n-1}
f_n	x_n

f_i	y_i	x_i	Δx_i
π	$\ln(\pi) = 1.0986$		
$\pi/2$	$\ln(\pi/2) = 1.1447$		
$\pi/4$	$\ln(\pi/4) = 1.1398$		
$\vdots$			

درون یابی معلوم

$e^x = \pi$ (مثال)
 $\downarrow$
 π
 $\pi/2$
 $\pi/4$
 $\vdots$

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) = P_n(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

برای بسط درون خطی $(x-x_0)\dots(x-x_n)$ را می بینیم پس بسط

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

حاصل
 $n=0, 1, 2, \dots$

$$T_2 = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3 = 2x(2x^2 - 1) - x$$

$$x_k = \cos\left(\frac{k+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

ریشه های چندجمله ای حسیف در $[a, b]$

$[a, b]$ در $k=0, 1, 2, \dots, n$

$$-1 < x_k < 1 \rightarrow 0 < \frac{k+1}{n} < 1 \rightarrow 0 < \frac{k+1}{n} < 1$$

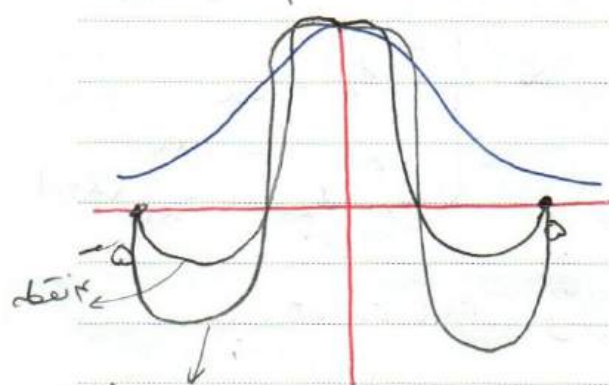
41. $x \rightarrow \infty$ نوسان های بسیار بزرگی در نموداری درجه n و $n=1$ تقریبی ایجاد می گردد که مقدار خطا را افزایش می دهند.

Subject
Date

$$a \leq \frac{(b-a)}{2}(t+1) + a \leq b$$

با فاصله مساوی
نقطه 2 با افزایش نقاط خطا الزاماً کم نمی شود.

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad \text{درجه 1 رانگ} \\ -5 \leq x \leq 5$$



برای درونایی، هر چه تعداد نقاط درونایی را افزایش دهیم با توجه به نمودار

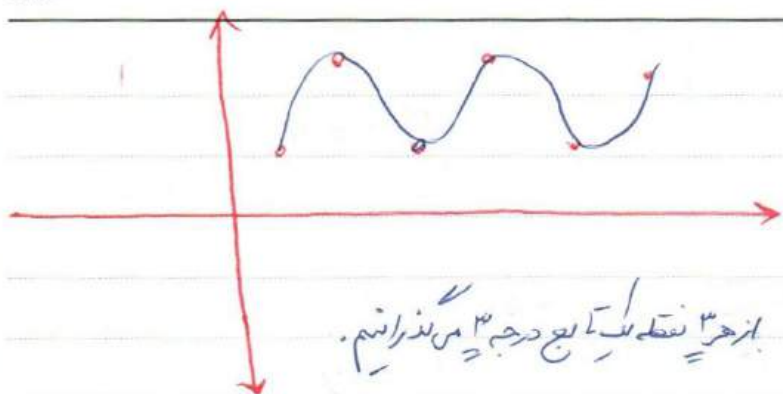
$$n \rightarrow \infty \quad E_n(x) \rightarrow \infty \quad \text{مقدار خطا افزایش می یابد یعنی:}$$

$$n \rightarrow \infty \quad E_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{ولی اگر } x \text{ ریشه های چندجمله ای چیست باشند}$$

$$\text{مثال } f(x) = \sin(\pi/x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \left| \frac{(x-x_0) \dots (x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\pi/2)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$



اسپلاین: نقطه درجه ۳ =

$$\begin{cases} S(x_k) = y_k \\ S_K^m(x_{k+1}) = S_{K+1}^m(x_{k+1}) \end{cases}$$

از هر ۳ نقطه یک تابع درجه ۳ می گذرانیم.

$$K = 0, 1, 2, \dots \quad \text{و} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & x_0 \leq x < x_1 \\ S_2(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ S_n(x) & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} S'(x_0) = m_n \text{ : مقید} \\ S''(x_n) = 0 \text{ : طبعی} \end{array} \right\} \text{ اسپلاین}$$

n متغیر داریم و $n-2$ معادله داریم

هریت:

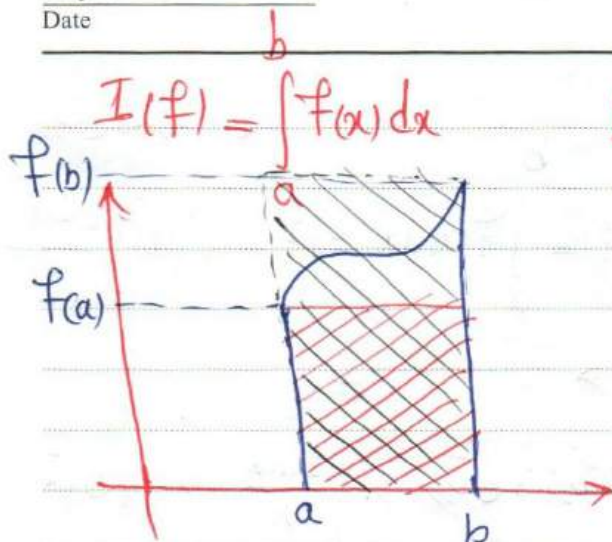
$$P_n(x_k) = y_k$$

$$P_n'(x_k) = f'(x_k)$$

$$P_n^m(x_k) = f^m(x_k)$$

x_0	
$\vdots$	f_0
$\vdots$	f_1
$\vdots$	$\vdots$

انتگرال



$$? = \int_0^a e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = ?$$

تابع اولیه ندارند.

$$\int_a^b f(x) dx \approx f(a)(b-a) \approx f(b)(b-a)$$

$$c = \frac{a+b}{2} \longrightarrow \approx f(c)(b-a)$$

مثال) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ را بروش نقطه میانی بیاید.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} (\pi - 0) = 2$$

$$I_0(f) = f(c)(b-a) \quad R_0(f) = I(f) - I_0(f) \quad \leftarrow \text{خطای اندازه گیری}$$

روش نقطه میانی برای توابع ثابت و خطی ($y = mx + b$) درست است. (خطا ندارد)

$$R_0(f) = C f'(\xi) \quad \text{خطا}$$

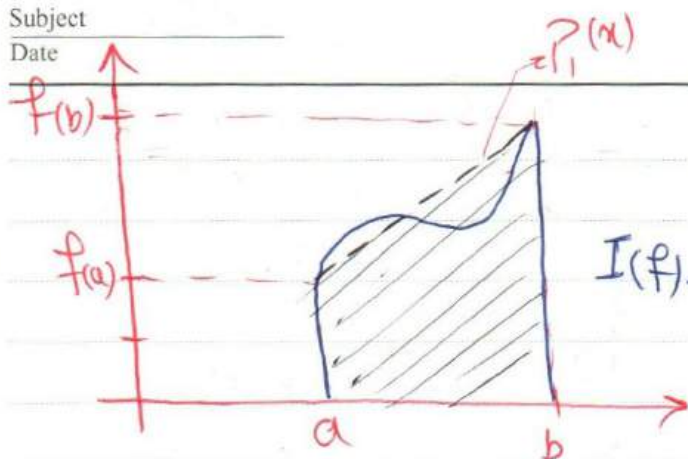
C برای هر تابعی در عبارت دو برابر مقدار ثابت است
برای بدست آوردن آن f را به طور دلخواه x^2 می گیریم.

$$f(x) = x^2 \quad \text{برای بدست آوردن C}$$

$$\int_a^b x^2 - 2 \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 (b-a) = C x^2$$

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi) \quad \frac{b^3 - a^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-a) = C$$

$$\Rightarrow C = \frac{(b-a)^3}{24} \checkmark$$



روش ذوزنقه‌ای

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \left[f(a) + f(b) \right] \frac{b-a}{2}$$

مثال: $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ را به روش ذوزنقه‌ای بسازید.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(0+\varepsilon)}{0+\varepsilon} + \frac{\sin \pi}{\pi} \right) \left(\frac{\pi-0}{2} \right) = (1+0) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

خطای این روش: روش ذوزنقه‌ای برای توابع ثابت و خطی برقرار است؟

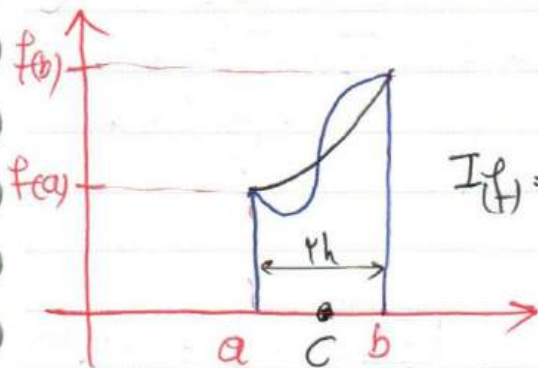
$$R_0(f) = C f''(\xi) \quad \int_a^b x^2 - \left[\frac{b^2+a^2}{2} (b-a) \right] = C x^2$$

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} \right] (b-a) = \frac{(b-a)^2}{12} f''(\xi)$$

$$\frac{b^3-a^3}{3} - \left(\frac{a^2+b^2}{2} \right) (b-a) = 2C$$

$$-\frac{(b-a)^3}{6} = 2C \rightarrow -\frac{(b-a)^3}{12} = C$$

روش سیمسون



$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

مثال

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

رابر روشن لیمسون باید

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{\pi-0}{4} \left[\frac{\sin 0}{0} + 4 \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sin \pi}{\pi} \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{4}{\pi} \right) = \frac{\pi+4}{4}$$

خطای روشن لیمسون

روشن لیمسون برای توابع ثابت و خطی و درجه ۲ درست است، چون عیناً برابر تابع است.

$$R_n(f) = C f^{(n)}(\xi) \quad (f=x^4) \rightarrow C=0$$

$$R_n(f) = C f^{(n)}(\xi)$$

$$R(f) = I(f) - \frac{h}{3} (f(a) + 4f(c) + f(b)) = -\frac{(h)^3}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$I(f) = \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k), \quad O(h^2)$$

روشن کلا

معمولاً فرض می‌کنیم $x_0, x_1, \dots, x_n$ دارای فاصله ثابت h است. وزن weight

$$I(f) \approx \underbrace{\int_a^b P_n(x)}_{I_n(f)} + \int_a^b E_n \omega dx$$

$L_k(n)$

این از روش لایبزنیت اومد

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} f(x_k)$$

$$w_k = \int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} dx$$

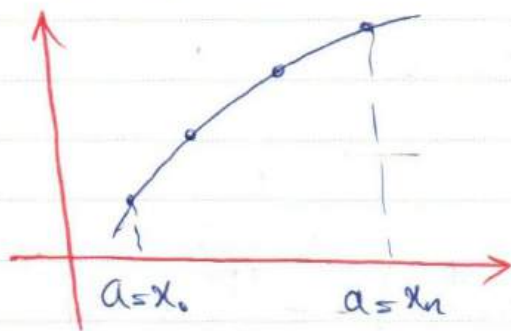
$$R_n(x) = I(f) - I_n(f) = \mathcal{O}(f^{(n+1)})$$

خطای روش کس

اگر $f(x) = x^{n+1} \rightarrow$ بدست می آید (اگر C صفر بود $f(x) = x^{n+1}$ و $f'(x) = (n+1)x^n$)

نویس - کاتس

$x_0, \dots, x_n$ و x_{n+1} فاصله $[a, b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می کنیم.



بسته : اگر $x_0 = a$
 $x_n = b$

باز : اگر ابتدا و انتهای فاصله
نقاط x_i نباشند.

نویس / کاتس

b

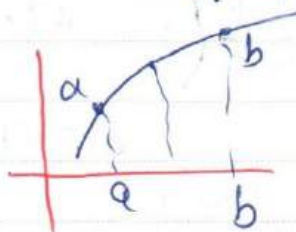
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n h x_i f(x_i)$$

$$\frac{b-a}{n}$$

$$\frac{a+b}{2}$$

$$x_0 = a$$

$$x_1 = b$$



مثال : نقطه میانی

$$w_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k! (n-k)!} h \int_0^n r(r-1)(r-2) \dots (r-k+1) \dots (r-n) dr$$

ضرایب

$$p(x) = f_0 + r \Delta f_0 + \frac{r^2}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots \rightarrow x = x_0 + rh$$

$$r = \frac{x-x_0}{h}$$

مثال ۱ نقطه (فوزیفه‌ای)
 x_0, x_1

برای $n=1$

$$w_0 = \frac{(-1)^{1-0}}{0! (1-0)!} h \int_0^1 (r-1) dr = -1 \times h$$

$$w_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{1! 0!} h \int_0^1 r dr = 1 \times h \times \frac{1}{2} = \frac{h}{2}$$

مثلاً روشن فوزیفه‌ای $\rightarrow \frac{h}{2} [f(a) + f(b)]$

هم ضریب $f(a)$ و هم ضریب $f(b)$

برای $n=2$

$$w_0 = \frac{(-1)^{2-0}}{0! (2-0)!} h \int_0^2 (r-1)(r-2) dr = \frac{h}{3}$$

$$w_1 = \frac{(-1)^{2-1}}{1! (2-1)!} h \int_0^2 r(r-2) dr = \frac{4h}{3}$$

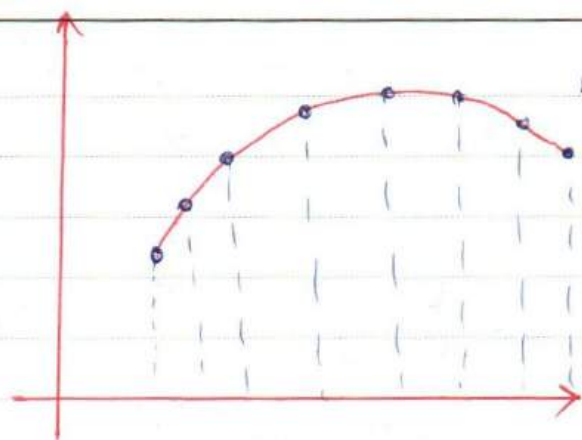
ضرایب موجود در
 روش همسوس

$$w_2 = \frac{(-1)^{2-2}}{2! (2-2)!} h \int_0^2 r(r-1) dr = \frac{h}{3}$$

n	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
فوزیفه‌ای ۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
همسوس ساده ۲	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$		
همسوس $\frac{3}{8}$ ۳	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$	
بول ۴	$\frac{14}{45}$	$\frac{44}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{44}{45}$	$\frac{14}{45}$

نکته: برای n کمی زیاد این روش، روشن خوبی نیست زیرا ضرایب به صورت منفی ایجاد می‌شود که مقدار خطا را تا حد زیادی افزایش می‌دهد ($n > 8$) ولی برای n کمی کوچک مناسب است.

روش ای مرکب



به جای این تابع را با یک چند جمله ای n درجه ای

تقریب میزنیم که فرض است تعدادی نقطه روی بازه مشخص

کرده و سپس به کمک روش ذوزنقه ای هر قسمت را

محاسبه می کنیم.

$$x - x_{k-1} = h \Rightarrow x_k = x_0 + kh$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

$$= \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_1) + \frac{h}{2} (f_1 + f_2) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_2) + \dots + \frac{h}{2} (f_{n-1} + f_n) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_n)$$

فرض کنید $f''(x)$ پیوسته است.

روش ذوزنقه ای مرکب:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) - \frac{(b-a)^2}{12} h^2 f''(\xi)$$

$$x_0 \leq \xi \leq x_n$$

$$\frac{1}{b-a} \times \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = f''(\xi) \quad \frac{b-a}{n} = h$$

مثال ۱) $\int \frac{1}{x^2+1} dx$ به روش دوزنهای مرکب با طول $\frac{1}{n}$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx \approx \frac{1}{n} \times \left[\frac{1}{0 \times 1} + 2 \times \frac{1}{(\frac{1}{n})^2+1} + 2 \times \frac{1}{(\frac{2}{n})^2+1} + 2 \times \frac{1}{(\frac{3}{n})^2+1} + \frac{1}{1^2+1} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[1 + 2 \left(\frac{14}{17} + \frac{4}{5} + \frac{14}{25} \right) + \frac{1}{2} \right]$$

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

خطای کمتر از ϵ شود تعداد نقاط چندتا باشد؟

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

$\int e^{-x^2} dx$ تا شش رقم اعشار دقیق باشد.

$$f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2} \quad \left| \frac{(b-a)}{12} h^2 x f''(\xi) \right| \leq \omega x 10^{-7} \Rightarrow \frac{1}{12} x h^2 x^2 \leq \omega x 10^{-7}$$

$$f''(x) = 4x(1-2x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \checkmark \text{ ق ق} \\ x = \left| \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| \geq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} h^2 &\leq \frac{12}{x} \times 10^{-7} \\ &= 2 \times 10^{-6} \\ h &\leq \sqrt{2} \times 10^{-3} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \text{نق} \\ \text{ق} \end{matrix}$$

$$\max \Rightarrow |f''(x)| = 2 \Rightarrow \frac{1}{12} x h^2 x^2 < \omega x 10^{-7}$$

$$\Rightarrow h \leq \sqrt{2} \times 10^{-3} \Rightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{2} \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow n \geq 577 \checkmark$$

روش همیسون مرکب: در دو بار استفاده از همیسون ۳ نقطه لازم است. لذا در مرحله اول

به x_0, x_1 و x_2 نیاز داریم و در مرحله باید دو نقطه اضافه کنیم لذا n زوج است و داریم:

$n = m$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x) dx$$

$$= \frac{h}{r} [f_0 + r f_1 + f_r] - \frac{h^2}{4} f''(z_1) + \frac{h}{r} [f_r + r f_r + f_r] - \frac{h^2}{4} f''(z_2) + \dots + \frac{h}{r} [f_{m-1} + r f_{m-1} + f_m] - \frac{h^2}{4} f''(z_m)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{r} [f_0 + r f_1 + r f_r + r f_r + r f_r + \dots] - \frac{h^2}{4} \sum_{i=1}^m f''(z_i)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{r} \left[f_0 + r \sum_{k=1}^m f_{rk-1} + r \sum_{k=1}^{m-1} f_{rk} + f_m \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(z)$$

(فوق سم (x) یو سټ اټ)

پیسون مرکب

 $\sqrt{r}$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{\pi/r}{r} \left[1 + r \frac{\sin \frac{\pi}{r}}{\frac{\pi}{r}} + r \frac{\sin \frac{2\pi}{r}}{\frac{2\pi}{r}} + r \frac{\sin \frac{4\pi}{r}}{\frac{4\pi}{r}} + \frac{\sin \pi}{\pi} \right]$$

$$= \frac{\pi}{12} \left[1 + r \left(\frac{\sqrt{r}}{\pi} \right) + \frac{r}{\pi} + r \left(\frac{2\sqrt{r}}{3\pi} \right) + \dots \right]$$

$$\left(h = \frac{\pi}{r} \right) \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{\pi}{12} \left[1 + \frac{r}{\pi} + \frac{2\sqrt{r}}{3\pi} + \dots \right]$$

(تعداد نام لازم برای رسیدن خطای کمتر از ϵ در روش بسجین)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

مثال ۱: $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ (میانگین) $\epsilon = 5 \times 10^{-9}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left| \frac{b-a}{n} h^2 x f''(\xi) \right| < 5 \times 10^{-9} \quad \left| \frac{2 \times h^2}{n^2} x \frac{2}{x^3} \right| < 5 \times 10^{-9}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\max |f''(\xi)| \leq f''(\xi) = \frac{2}{\xi^3} = \frac{2}{\frac{b-a}{n}} = \frac{2n}{b-a} \quad h^2 \leq 2 \times 10^{-9}$$

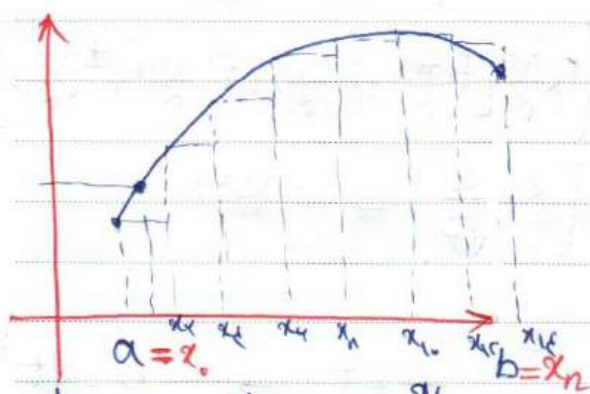
$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$h \leq \sqrt{2 \times 10^{-9}}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

$$\frac{b-a}{h} = 2h \rightarrow 2n \geq \frac{5}{\sqrt{2 \times 10^{-9}}} \times 10^4 \rightarrow n \geq \frac{5 \times 10^4}{2 \sqrt{2 \times 10^{-9}}}$$

از آنجا که n در این روش زوج است $n = 112$ مقبل قبول است.



روش نقطه میانی مرکب

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = 2hf_1 + \frac{h^3}{3} f''(\xi_1) + 2hf_2 + \frac{h^3}{3} f''(\xi_2) + \dots + 2hf_n + \frac{h^3}{3} f''(\xi_n)$$

فرض کنید $f(x)$ پیوسته باشد.

$$\int_a^b f(x) dx = rh \sum_{k=1}^m f_{r_{k-1}} + \frac{h^2}{4}(b-a)f'(z)$$

$$x_0 < \dots < x_m$$

روش نقطه میانی مرکب

$$n=1 \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin t \end{cases} \quad \text{مطابقین}$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\sin^2 t + \frac{9}{14} \cos^2 t} dt$$

$$h = \frac{2\pi}{1} = \frac{\pi}{2}$$

نقطه میانی در وسط بازه را بنویسیم

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2 \times \frac{\pi}{2} \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f\left(\frac{5\pi}{4}\right) + f\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right] \right] \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[2 \times \frac{5}{\sqrt{2}} \right] \approx 5.89 \end{aligned}$$

$$\text{مثال) } I = \int_0^{\infty} x^{-1/2} \sin \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{x} = t \rightarrow \frac{-1}{x^2} dx = dt$$

$$I = \int_0^{\infty} t^{-1/2} \sin t dt = \text{تقریب با روش نقطه میانی}$$

روشهای اصلاح شده

- روش ذوزنقه‌ای اصلاح شده

$$f''(z) = \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}$$

فرض کنیم f' موجود است و قابل محاسب

$$\rightarrow (b-a)f''(z) = f'(b) - f'(a)$$

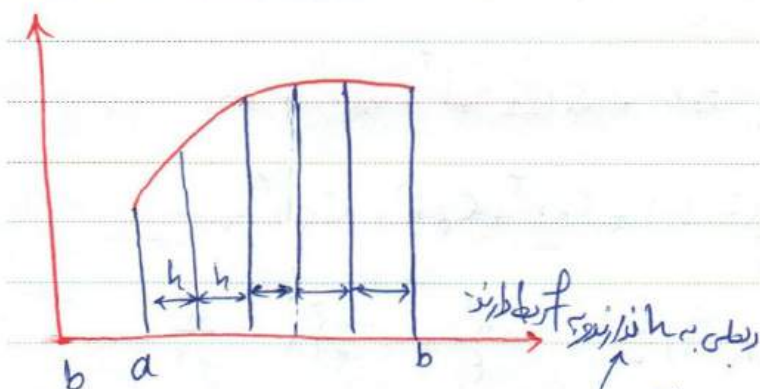
ذوزنقه
اصلاح شده

$$CT_n \approx n \text{ ذوزنقه‌ای با } T_n(f) - \frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)]$$

- سیمپسون اصلاح شده

$$I_n = S_n - \frac{h^4}{180} [f'''(b) - f'''(a)]$$

$O(h^4)$ خطا



$$\int_a^b f(x) dx = T_n(f, h) + C_1 h^2 + C_2 h^4 + C_3 h^6 + \dots$$

ذوزنقه‌ای با n و طول h

این فرمول از سری تیلور در نقطه a و حدیث ایجاد می‌گردد که جملات فرد بدلیل متناهی بودن جملات، جملات فرد حذف می‌گردند و زوج‌ها در فرمول باقی می‌مانند.

$$T_n(f, h) = \frac{T_n(f, h)}{r} + \frac{h}{r} \sum_{k=1}^n f_{rk-1}$$

T_n, T_r, T_f, T_y رابطہ بنیں۔ مثال: $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln x = 1.4026$

$$T_1 = \frac{r-0}{r} [f(0) + f(r)] = 1.1 \checkmark$$

$$T_r = \frac{T_1}{r} + \frac{r}{r} x f(x) = 1.1 + r x \frac{1}{x} = 1.18444 \checkmark$$

$$T_f = \frac{T_r}{r} + \frac{h}{r} [f(1) + f(r)] = 0.18444 + 1 \times \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] = 1.14888 \checkmark$$

$$T_n = \frac{T_f}{r} + \frac{h}{n} (f(\frac{1}{r}) + f(\frac{r}{r}) + f(\frac{2}{r}) + f(\frac{r}{r})) = 0.18444 + \frac{1}{r} \left[\frac{r}{r} + \frac{r}{r} + \frac{r}{r} + \frac{r}{r} \right] = 1.429$$

تقریباً $\int_a^b f(x) dx = S_n(f, h) + d_1 h^1 + d_2 h^2 + d_3 h^3 + \dots$

$$I(f) = T_n(f, h) + c_1 h^1 + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots$$

$$I(f) = T_n(f, \frac{h}{r}) + c_1 \frac{h^1}{r} + c_2 \left(\frac{h}{r}\right)^2 + c_3 \frac{h^3}{r^3} + \dots$$

$$rI = rI - I = rI_n(f, \frac{h}{r}) - T_n(f, h) - \frac{r}{r} c_1 h^1 - \frac{r}{r^2} c_2 h^2 - \dots$$

تقسیم $\rightarrow I = \frac{rT_n(f, \frac{h}{r})}{r} - \frac{c_1 h^1}{r} - \frac{c_2 h^2}{r^2} + \dots$

$$S_n = \frac{rT_n(f, \frac{h}{r}) - T_n(f, h)}{r}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} dx =$$

به روش لیمیت همان مثال صفحه قبل را حل

در لیمیت و من به خطا کمتر شد

$$S_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{3} = \frac{2 \times 11822 - 212}{3} = 11288.9$$

$$S_2 = \frac{(T_3 - T_2)}{3} = \frac{2 \times 11283.3 - 11822.4}{3} = 11222.2$$

$$S_3 = \frac{(T_4 - T_3)}{3} = \frac{2 \times 11224.9 - 11283.3}{3} = 11210.9 \quad \checkmark$$

روش	n				
ذوزنقایی	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
لیمیت	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{3}{8}$ لیمیت	3	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$
بول	4	$\frac{14}{45}$	$\frac{44}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{44}{45}$

$$B_n = \frac{14S_n - S_n}{15}$$

$$X_n = \frac{R^k - 1}{R^k - 1}$$

امتحان تا آخر روش های مرکب

تمرینات فصل ۱: { ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ و ۲۴ }

توجه: باید داشتن T_1 و T_2 و T_4 و T_8 می توان:

$$S_2 = \frac{4T_2 - T_1}{3}$$

$$S_4 = \frac{4T_4 - T_2}{3}$$

$$S_8 = \frac{4T_8 - T_4}{3}$$

$$S_{2^n} = \frac{4T_{2^n}(f, \frac{h}{2^n}) - T_n(f, h)}{3}$$

رابطه‌ی مورد استفاده

$$I = \int_a^b f(x) dx = S_{2^n}(f, \frac{h}{2^n}) + d_4 h^4 + d_6 h^6 + \dots \quad (I)$$

$$= S_{2^n}'(f, \frac{h}{2^n}) + d_4 (\frac{h}{2^n})^4 + d_6 (\frac{h}{2^n})^6 + \dots \quad (II)$$

$$14(II) = 14 S_{2^n}'(f, \frac{h}{2^n}) + 14 \times \frac{d_4 h^4}{14} + 14 d_6 \frac{h^6}{2^6} + \dots$$

$$(II - I) = 15 I = 2^n S_{2^n}'(f, \frac{h}{2^n}) - S_{2^n}(f, \frac{h}{2^n}) + d_4 h^4 + \dots$$

$$\Rightarrow I = \frac{2^n S_{2^n}'(f, \frac{h}{2^n}) - S_{2^n}(f, \frac{h}{2^n})}{15} + d_4 h^4 + \dots$$

خطا از درجه ۲ و مقدار کمتری دارد.

$$\Rightarrow B_{2^n} = \frac{14 S_{2^n} - S_n}{15}$$

مرتبه‌ی خطا h^2 می شود.

$$\xrightarrow{\text{ارتقاء بعدی}} \frac{2^4 B_{2^n} - B_n}{2^4 - 1}$$

خطا از مرتبه‌ی h^2 می شود.

در حالت کلی جمله‌ای از $O(h^{2n})$ می گیرند و عبارت آن از $O(h^{2n+2})$ می دهند

به این روش رابرت می‌تواند که با $R(j, k)$ نشان می‌دهند

$$R(j, 1) = \frac{k R(j, 0) - R(j-1, 0)}{k-1}$$

$$R(j, 2) = \frac{k^2 R(j, 1) - R(j-1, 1)}{k^2-1} \quad \text{و} \quad R(j, 3) = \frac{k^3 R(j, 2) - R(j-1, 2)}{k^3-1}$$

در حالت کلی

$$R(j, k) = \frac{k^k R(j, k-1) - R(j-1, k-1)}{k^k-1}$$

ج	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$
$R(0,0)$					
$R(1,0)$ $R(1,1)$					
$R(2,0)$ $R(2,1)$ $R(2,2)$					
$R(3,0)$ $R(3,1)$ $R(3,2)$ $R(3,3)$					
$R(4,0)$ $R(4,1)$ $R(4,2)$ $R(4,3)$ $R(4,4)$					

نکته: $R(k, k)$ از مرتبه $O(h^{k+2})$ است.

مثال: $R(4, 4)$ را برای $\int_0^2 1.0 x^9 dx$ حساب کنید.

چون $R(4, 4)$ دارای خطای از مرتبه $O(h^6)$ است و انتگرال از چند جمله‌ای درجه‌ای کمتر از

۱ است دقیقاً برابر مقدار انتگرال است و مقدار انتگرال برابر است با ۰

$$\int_0^2 1.0 x^9 dx = x^{10} \Big|_0^2 = 2^{10} \rightarrow R(4, 4) = 1024 \checkmark$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

اگر چای سطر و وزن که دلخواه باشد $x_k = x_0 + hK$ و $I = \int w_i f(x_i)$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_0 f(x_0) \xrightarrow{f(x) \equiv 1} \int_{-1}^1 1 dx = w_0 (1) \rightarrow w_0 = 2$$

$$0 = \int_{-1}^1 x dx = w_0 x_0$$

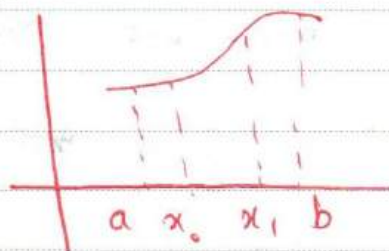
$$\begin{cases} 2 = w_0 \\ 0 = w_0 x_0 \rightarrow x_0 = 0 \end{cases}$$

روش نوس $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 f(0)$

روش نقطه میانی $\int_a^b f(x) dx = 2 \times \frac{b-a}{2} \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

توجه: اگر نخواهیم به کمک یک تابع درجه یک یا نزدیک به ترین بهترین نقطه نقطه میانی است.

$n=1$ دو نقطه ای



$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) \rightarrow \text{معمول ترین}$$

$$f(x) = 1 \quad 2 = w_0 + w_1$$

$$f(x) = x \quad 0 = w_0 x_0 + w_1 x_1$$

$$f(x) = x^2 \quad 2 = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2$$

$$f(x) = x^3 \quad 0 = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3$$

$$w_0 = w_1 = 1 \quad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R(f) = C_f(f)$$

 C_f

$$f! \times C_f = \int_{-1}^1 x^f dx - (w_0 x_0 + w_1 x_1) = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

مقدار اندازشده مقدار واقعی

$$C = \frac{8}{45 \times 4!}$$

$$k = 1, 2, \dots, m \quad \sum_{i=0}^{k+1} w_i x_i^k = C_k$$

برای بدست آوردن C_k از رابطه‌ی

$$P_n(x) = \frac{1}{r^n n!} \left((x^2 - 1)^n \right)^{(n)}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{r^2 2!} \left((x^2 - 1)^2 \right)' = \frac{1}{8} (x^4 - 2x^2 + 1)' = \frac{4}{8} x^3 - \frac{4}{8} x = \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

روش دو نقطه‌ای نوس را نوس - لگژند دو نقطه‌ای هم می‌گویند.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} = \ln(x+2) \Big|_{-1}^1 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3 \approx 1.09861$$

$$G_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = 1 \times \frac{1}{-\sqrt{3}/2 + 2} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}/2 + 2} = 1.0909$$

$$\begin{cases} w_0 = w_1 = 1 \\ x_1 = x_0 = \sqrt{3}/2 \approx 0.8660254 \end{cases}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

فورييه $T_1(f, 2) = f(-1) + f(1) = 1 + 1/333333$

سيكون $S_r(f, 1) = \frac{1}{3} [f(-1) + f(0) + f(1)] = \frac{1+2+1/3}{3} = 1.1111$

n	x_i	w_i	$R G_n(f)$
0	0	2	$f(0)$
1	$\pm 1/222222$	1/2	$\frac{f(1/3)}{1/2}$
2	0	$1/111111$	$\frac{f(1/3)}{1/2}$
	$\pm 1/111111$	$1/222222$	$\frac{f(1/3)}{1/2}$
3	$\pm 1/111111$	$1/333333$	$\frac{f(1/3)}{1/2}$
	$\pm 1/333333$	$1/444444$	$\frac{f(1/3)}{1/2}$
4	0	$1/222222$	$\frac{f(1/3)}{1/2}$
	$\pm 1/222222$	$1/333333$	$\frac{f(1/3)}{1/2}$
	$\pm 1/333333$	$1/444444$	$\frac{f(1/3)}{1/2}$

تقريباً

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(x+\pi)}{(x+\pi)} dx$$

$$= 1/222222 f(1/111111) + 1/111111 f(0) + 1/222222 f(1/111111)$$

$$\approx 1/444444$$

حل عددی معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه (initial value problem) ^{مقدار}

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m}$$

قانون دوم نیوتن

$$\left(\begin{array}{l} q \text{ شار حرارتی} \\ k' \text{ رسانش گرایی} \end{array} \right) q = -k' \frac{dT}{dx}$$

قانون حرارت

$$\left(\begin{array}{l} J \text{ شار جرم} \\ D \text{ ضریب نفوذ} \\ c \text{ غلظت} \end{array} \right) J = -D \frac{dc}{dx}$$

قانون Fick
نفوذ

قانون فرایدری (قانون افت ولتاژ در الکترولیت)

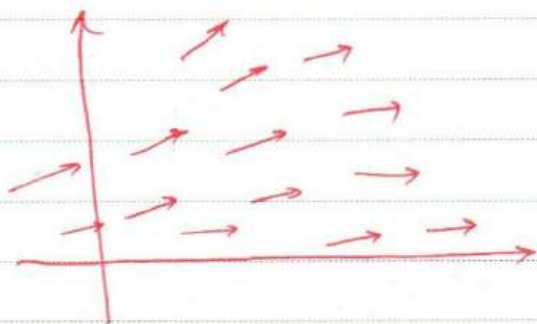
$$\Delta V_L = L \frac{di}{dt} \quad \left(\begin{array}{l} \Delta V_L \text{ افت ولتاژ} \\ L \text{ ضریب الکترا} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} i \text{ جریان} \end{array} \right)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \left(\begin{array}{l} m \text{ جرم} \\ c \text{ ضریب میرایی} \\ k \text{ ثابت فنر} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ارتعاشات مکانیکی} \end{array} \right)$$

Subject :

Year . Month . Date . ()

حل $y' = f(x, y)$ ← y را بیایم $y = 3$ (ثابت برابر ۳) $y' = 3$ $y = \int y' = 3x + C$
 مثال ۱



قضیه (وجود و یکتایی)

فرض کنیم $f(x, y)$ و $f_y(x, y)$ در تمام نقاط همسانی نقطه شروع (x_0, y_0) پیوسته باشد، آنگاه سائل (۱) دارای جواب یکتا در بازه $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ خواهد بود.
 از قضیه بالا بدست نمی آید که جواب پیوسته است. (مثال ۱ کتاب را بخوانید)

پیوستگی f برای وجود جواب
 پیوستگی f_y برای یکتایی جواب

شرط لیب-شیش

$f(x, y)$ در ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ در شرط لیب-شیش نسبت به متغیر y صدق می کند و یا نه
 ۱) (ثابت لیب-شیش) موجود باشد به طوری که برای همه $(x, y_1), (x, y_2) \in D$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L |y_1 - y_2|$$

اگر f روی D تعریف شده و $M > 0$ بطوریکه برای هر $(x, y) \in D$ ، $|f_y(x, y)| \leq M$ ، آنگاه f Lip است. (برابری مشتق نسبت به y ، لیب شیتز بودن را نتیجه می‌دهد)

مثال: وجود یکتایی جواب $y' = \frac{x-y}{2}$ را بررسی کنید
 $y(0) = 1$

جواب در $\mathbb{R}$ وجود دارد و یکتا است. $\Rightarrow |f_y| = \left| -\frac{1}{2} \right| \leq M$ (مثلاً $M = 1$ می‌گیریم)

بایداری جواب

خطای شرط اولیه باعث خطای خیلی زیاد در جواب نشود.

$$\max_{a \leq x \leq b} |y_\epsilon(x) - y(x)| \leq k\epsilon$$

کتابت

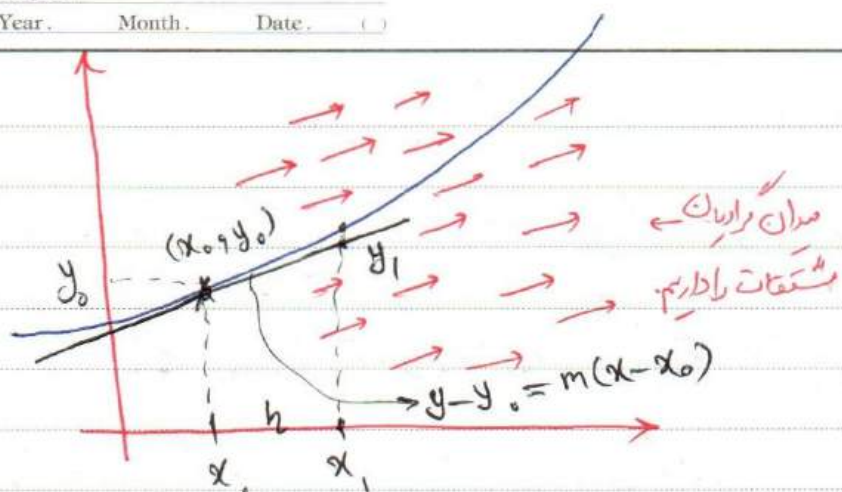
$$\begin{cases} y'_\epsilon = f(x, y_\epsilon) \\ y_\epsilon(x_0) = y_0 + \epsilon \end{cases} \leftarrow \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$a \leq x \leq b$

Subject:

Year: Month: Date: ()

روش اولی



$$x_1 = x_0 + h$$

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + m(x_1 - x_0)$$

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

$$\rightarrow y(x_r) \approx y_r = y_1 + h f(x_1, y_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

مثال ۱

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = 0.1\sqrt{y} + 0.1x^2 \\ y(1) = 1 \end{array} \right.$$

$$y_1 = y_0 + 0.1 f(x_0, y_0)$$

برند

$$y_{(1.1)} \approx y_1 = 1 + 0.1 (0.1\sqrt{1} + 0.1(1)^2) = 1.11$$

$$y(1.2) \approx y_2 = 1.11 + 0.1 (0.1\sqrt{1.11} + 0.1(1.1)^2) = 1.2248$$

$$y(1.3) \approx y_3 = 1.2248$$

$$y(1.4) \approx y_4 = 1.2248 \quad y(1.5) \approx y_5 = 1.2248$$

① خطای نمایش اعداد. (بررسی نمی شود) از روش استفاده کنیم که محاسبات کمتری دارد.

② خطای برشی روش $y_1, y_2, \dots, y_n$ برابر $y(x_n)$ نیست.

در روش اویلر در هر گام با یک خطا y_1 بدست می آید: $y(x_{n+1})$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$$

$$y(x_{n+1}) = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$$

* خطای برشی روش اویلر $\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$ از مرتبه $O(h^2)$

اگر $[a, b]$ را به N قسمت تبدیل کنیم.

$$\frac{b-a}{2} y''(\xi) h = \frac{Nh}{2} y''(\xi) h = N y''(\xi) \frac{h^2}{2} = N \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y''(\xi_k) \right) \frac{h^2}{2}$$

خطای انباشته شده بعد از N گام [خطای برشی مجانبی (جامع)]

خطای برشی جامع (مجانبی) از مرتبه $O(h)$ است.

* اگر طول گام را نصف کنیم:

خطای برشی موضعی h برابر می شود.
خطای برشی جامع h برابر می شود.

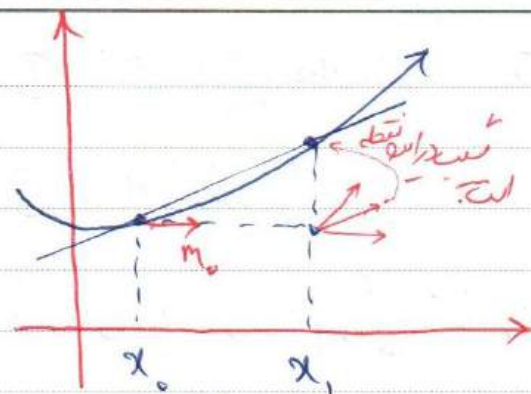
مزیای و معایب

خطای مجانبی از مرتبه $O(h)$ است در حالی که خطای موضعی (در نقطه جواب) باید

محاسبات زیاد انجام دهد.

Subject :

Year . Month . Date . ()



روش اولر اصلاح شده

$$m_0 \rightarrow y_1$$

$$m_r = f(x, y, t)$$

$$y_1 = y_0 + h \left(\frac{m_0 + m_1}{2} \right)$$

$$= y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1))$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (f(x_1, y_0) + f(x_1, y_0 + h f(x_0, y_0)))$$

اولر عادي

مثال ۱ با طول گام $h = 0.5$ جواب تقریبی $y' = \begin{cases} x - 2x + \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ و $y(0) = 0$ را بیابید.

روش اولر $y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$

$$y_1 = 0 + 0.5 f(0, 0) = 0.5 \times 1 = 0.5$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1))$$

$$y_1 = 0 + \frac{0.5}{2} \left(1 + 0.5 \left(-2 \times 0.5 + \frac{1}{0.5} \right) \right)$$

$$= 0 + 0.375 = 0.375$$

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))] \quad \text{فورتسای}$$

$$y_1 \approx y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)]$$

↑ روش ذوزنقه‌ای در اینجا همان روش اولی‌شد!

خطای روش اولی اصلاح شده همان خطای فورتسای است یعنی از مرتبه $O(h^3)$ و $\frac{-h^3 y'''(\xi)}{12}$

$$\Rightarrow \text{خطای مجانبی} \rightarrow O(h)^2 \rightarrow -\frac{b-a}{12} y'''(\xi) h^2 = -\sum_{k=1}^N \frac{h^3}{12} y'''(\xi_k)$$

با نصف کردن طول گام خطای مجانبی $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود

(خطایه طور تقریبی)

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots + \frac{h^K}{K!} y^{(K)}(x_n) \quad \text{روش تیلور}$$

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \dots + \frac{h^K}{K!} y_n^{(K)}$$

$$y' = f(x, y) \rightarrow y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} x y' = \frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = f_x + f \cdot f_y$$

$$y''' = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f \cdot f_y)$$

خطای مرتبه $O(h^{K+1})$ ، خطای مرتبه جامع (مجاانبی) $O(h^K)$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$y''' = f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f' + f_{yy} \cdot f'^2 + f_y (f'_x + f'_y f')$$

توجه: تیلور مرتبه اول $y_{n+1} = y_n + h y'_n$ همان اولیه است: $y_n + h f(x_n, y_n)$

مثال: $y' = x + y$ و $y(0) = 2$ روی $[0, 1]$ روش تیلور مرتبه سوم با $h = 0.25$

را حل کنید. $f(x, y) = 1 + x + y$

$$y'' = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$y''' = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} y'''_n$$

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n + y_n) + \frac{h^2}{2}(1 + x_n + y_n) + \frac{h^3}{6}(1 + x_n + y_n)$$

$$y_1 = y_0 + 0.25(x_0 + y_0) + \frac{(0.25)^2}{2}(1 + x_0 + y_0) + \frac{(0.25)^3}{6}(1 + x_0 + y_0)$$

$$y_1 = 2 + 0.25(0 + 2) + \frac{(0.25)^2}{2}(1 + 2) + \frac{(0.25)^3}{6}(1 + 2) \approx 2.4014 \checkmark$$

$$y_2 = 2.6649$$

$$y_3 = 2.9189$$

$$y_4 = 3.1502$$

دینا ثابت α و β و a و b ہستیم کہ

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta K_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \alpha K_1 + \beta K_2$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} [f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n, y_n)]$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

برای بدست آوردن α و β و a و b یک دستگاه نیاز داریم :

این دستگاه دو پروپنٹیٹ جواب دارد. عبارت $\alpha K_1 + \beta K_2$ می‌باشد

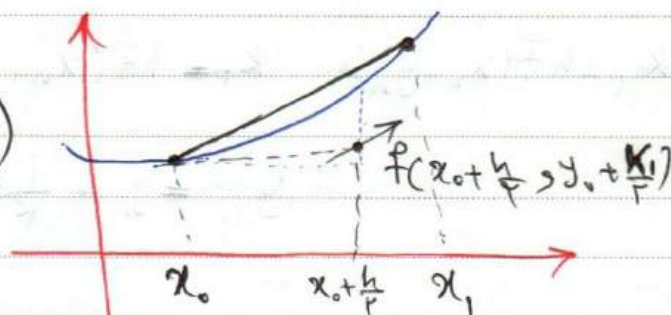
وزن دار K_1 و K_2 است. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ و $a = b = 1$

اگر $a = 0$ ، $b = 1$ و $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + K_2$$



$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2})$$

Subject: _____

Year: _____ Month: _____ Date: _____

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad y_{x_{n+1}} - y_{x_n} \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} y' dx$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \\ &= h f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

روش هیون: (روش بهینه رانگ کوتاه)

$$b = \frac{r}{r} \quad a = \frac{1}{r} \quad , \quad d = \beta = \frac{r}{r}$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n) \quad k_r = h f(x_n + \frac{r}{r} h, y_n + \frac{r}{r} k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{r} k_1 + \frac{r}{r} k_r$$

روش رانگ کوتاه مرتبه چهارم:

$$y_{n+1} = y_n + a k_1 + b k_r + c k_r + d k_r$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_r = h f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1)$$

$$k_r = h f(x_n + \alpha_r h, y_n + \beta_r k_1 + \beta_r k_r)$$

$$k_r = h f(x_n + \alpha_r h, y_n + \beta_r k_1 + \beta_r k_r + \beta_r k_r)$$

به طوری که با فرمول تیلور مرتبه چهارم مطابقت داشته باشد. $\leftarrow$ یک دستگاه معادله مجهول

$$\beta_r = 0 \text{ و } \alpha_1 = \frac{1}{r}$$

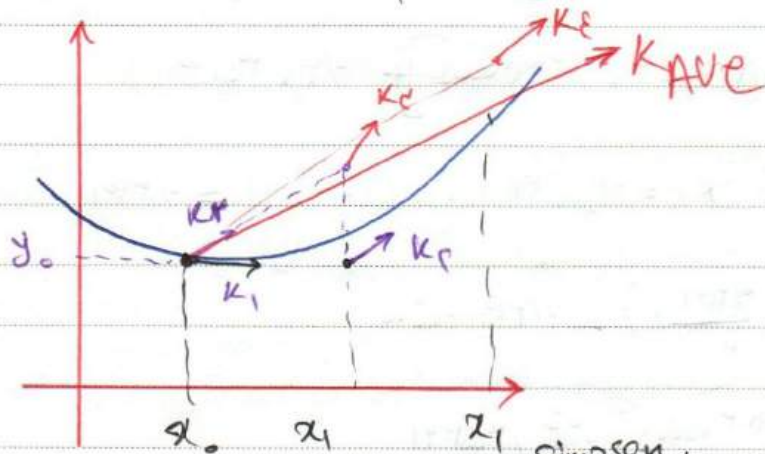
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

$$K_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = h f(x_n + h, y_n + K_3)$$



$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx \stackrel{\text{Simpson}}{\approx} \frac{h}{4} [f_0 + 4f_{1/2} + f_1]$$

$$\frac{h}{4} \left[f(x_0, y_0) + 4 \left(\frac{K_2 + K_3}{4} \right) + f(x_1, y_1) \right]$$

$$f\left(x + \frac{h}{2}, y\left(x_0, \frac{h}{2}\right)\right) \approx f_{1/2} = \frac{K_2 + K_3}{4}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

Subject :

Year : Month : Date : ()

مثال (۱۱۵) با رابطه طول گام $h = 0.1$ برای معادله $y' = 2xy$ با روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم تقریب ببرید.

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 1$$

$$k_1 = 0.1 (2x_n y_n)$$

$$k_2 = 0.1 (2(x_n + \frac{0.1}{2})(y_n + \frac{k_1}{2}))$$

$$k_3 = 0.1 (2(x_n + \frac{0.1}{2})(y_n + \frac{k_2}{2}))$$

$$k_4 = 0.1 (2(x_n + 0.1)(y_n + k_3))$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0.1}{4} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{4} [0.1 + 2 \times 0.131 + 2 \times 0.23455 + 0.2735241]$$

$$k_1 = 0.1 (2 \times 1 \times 1) = 0.2 \quad k_2 = 0.1 (2 (1.05) (1 + 0.1)) = 0.231$$

$$k_3 = 0.1 (2 (1.05) (1 + \frac{0.231}{2})) = 0.23455$$

$$k_4 = 0.1 (2 (1.1) (1.23455)) = 0.2735241$$

بهبود روش $\rightarrow y_2, y_3, y_4 \rightarrow y_5 = 449.2$

خطای برشی روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم

$$\sum_{n=0}^N \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(\xi_n) = \frac{b-a}{r} \times \frac{1}{5!} \times y^{(5)}(\xi) h^4 \quad \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(\xi_n)$$

مرتبه خطای مجانبی (جامع) $O(h^4)$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

حل معادلات مرتبة بالاتر ودرستگاه

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2) \\ f_2(x, y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$Y' = f(x, Y)$$

$$Y(x_0) = Y_0$$

$$Y \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + h Y_n'$$

مثال / روش لاپلاس

$$Y_{n+1} = Y_n + h f(x_n, Y_n)$$

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$y' = u \rightarrow y'' = u'$$

$$\begin{cases} y' = u \\ u' + xu + y = 0 \end{cases} \rightarrow u' = -xu - y$$

روش لاپلاس

$$\begin{bmatrix} y' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ -xu - y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ u_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} u_n \\ -xu_n - y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ u_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} u_0 \\ -xu_0 - y_0 \end{bmatrix}$$

 $y(0.1) \quad h = 0.1$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \\ -0.1 \times 2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

$$y(0.1) \approx y_1 = 1.2$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + 0.11 \begin{bmatrix} u_1 \\ -x_1 y_1 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.9 \end{bmatrix} + 0.11 \begin{bmatrix} 1.9 \\ -0.11 \times 1.9 - 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.19 \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$y_2 = 1.2 + 0.19 = 1.39$$

$$h = 0.1$$

محل با استفاده از روش رانگ کوپله مرتبی چهارم

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y & x(0) = -1 \\ y' = -x + 2y & y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

$$K_1 = h f(x_n, y_n) \rightarrow K_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) \rightarrow K_4 = h f(x_n + h, y_n + K_2)$$

$$K_1 = 0.12 A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad K_2 = 0.12 A \begin{bmatrix} x_n + \frac{K_1}{2} \\ y_n + \frac{K_1}{2} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = 0.12 A \begin{bmatrix} x_n + \frac{K_1}{2} \\ y_n + \frac{K_1}{2} \end{bmatrix} \quad K_4 = 0.12 A \begin{bmatrix} x_n + h \\ y_n + K_2 \end{bmatrix}$$

اصلاح شود

✓

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$K_1 = 0.12 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = 0.12 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 + \frac{1.6}{4} \\ 4 + \frac{1.6}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.12 \\ 1.12 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = 0.12 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 + 1.12 \times 2 \\ 4 + 1.12 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01408 \\ 1.01408 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = 0.12 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 + 1.01408 \times 2 \\ 4 + 1.01408 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.91376 \\ 1.91376 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.12 \\ 1.12 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.01408 \\ 1.01408 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.91376 \\ 1.91376 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 9.128 \\ 19.128 \end{bmatrix} \checkmark$$

Q.1) $\begin{cases} x'' - 4x + 4y = e^t \\ -x + y'' + 4y = t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'' + 4y = x' + e^t \\ y'' = t^2 - 4y + x \end{cases}$

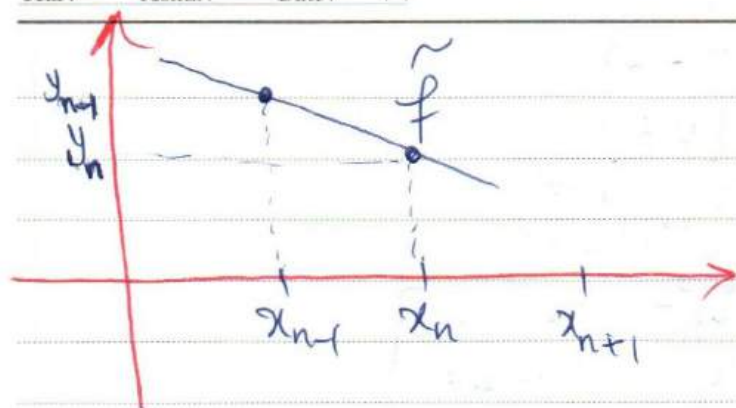
$$\begin{cases} x'' = x' - 4x + 4y - 4t^2 + e^t \\ y'' = t^2 + 4y + x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y' = u \\ x' = v \\ v' = v - 4x + 4y - 4t^2 + e^t \\ w' = t^2 + 4y + x \end{cases}$$

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y' = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx$$

← محاسبات

Subject:

Year: Month: Date: ()



$$\tilde{f} = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} x(x - x_n) + f_n$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} \tilde{f} dx$$

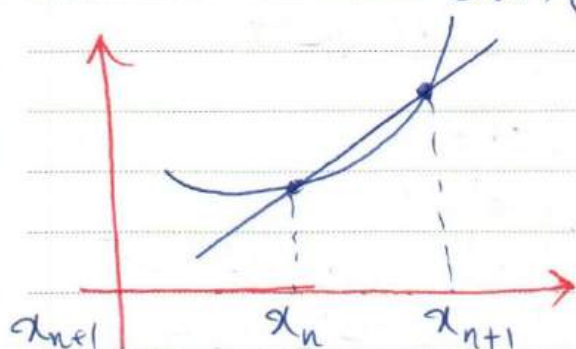
آرامر سفورت ۲ و $z_{n+1} = y_n + \frac{h}{r} \left(-f_{n+1} + r f_n \right)$

$$y(x_{n+1}) - z_{n+1} = \frac{\omega}{12} y'''(\xi_n) h^3$$

$$y(x_{n+1}) = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} y'''(\xi_n)$$

$$\left(\frac{y'_n - y'_{n+1}}{r} + O(h^2) \right)$$

خطای برشی موضعی $O(h^3)$ و خطای جامع $O(h^2)$



آرامر - مولتون

از درونهای خطی $\{x_n, x_{n+1}\}$

استفاده می شود.

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{r} (f_n + f_{n+1})$$

$$f_{n+1} = f(x_{n+1}, z_{n+1})$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{1}{12} y'''(\eta_n) h^3$$

اگر h کوچک باشد می توان فرض کرد y''' ثابت است.

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} \approx -\frac{1}{6}(y_{n+1} - z_{n+1})$$

روش آدامز-بشفت-مولتون $O(h^4)$ مرتبه چهارم $\{x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$

$$z_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (-9f_{n-3} + 19f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n)$$

$$y(x_{n+1}) - z_{n+1} = \frac{r_{61}}{720} y^{(6)}(\xi_n) h^6$$

$$\{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{-19}{720} y^{(6)}(\xi_n) h^6$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (f_{n-2} + 5f_{n-1} + 19f_n - 9f_{n+1})$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{-19}{720} (y_{n+1} - z_{n+1})$$

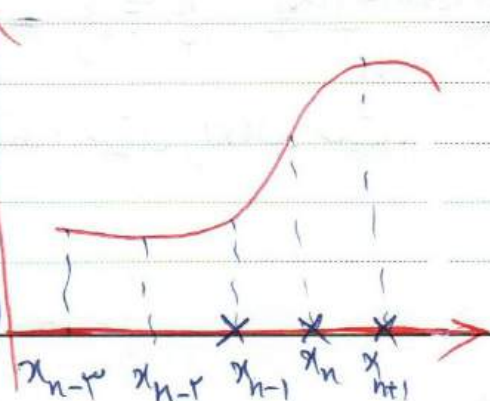
$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f \quad y_{n+1} - y_{n-k} = \int_{x_{n-k}}^{x_{n+1}} f \quad k \geq 2$$

$$\boxed{k \geq 3} \quad z_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{24} (19f_{n-2} - f_{n+1} + f_n)$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{12} (f_{n-1} + f_n + f_{n+1})$$

$$f_{n+1} = f(x_{n+1}, z_{n+1})$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} \approx \frac{r_{61}}{720} (y_{n+1} - z_{n+1})$$



سائل فصل ۵: بحر مسائل ۲، ۳ و ۵ و ۷

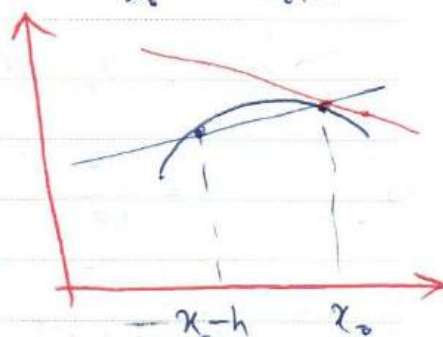
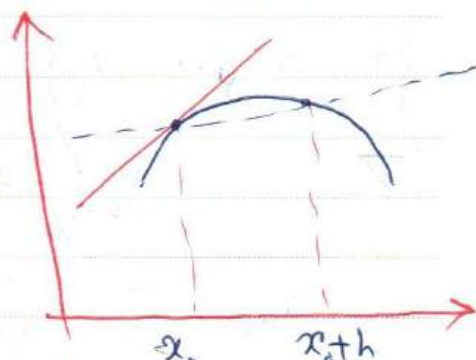
تست گیری عملی

- فرمول های تفاضلی ساده :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{تفاضل پیشرو}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \quad \text{تفاضل پسرو}$$



* خطای فرمول های پیشرو و پسرو

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi) \quad x_0 \leq \xi \leq x_0+h$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi) = f'(x_0)$$

خطای برشی فرمول پیشرو = $-\frac{h}{2} f''(\xi)$ خطا از مرتبه $O(h)$ است.

برای چند جمله ای درجه ۱ دقیق است.

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_0 + h$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(\xi)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3!} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]$$

خطای بیش برای تقاضای مرتبه $= \frac{h^3}{3!} f'''(\xi)$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{h^2}{3!} \frac{1}{2} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \approx f'(x_0) \quad x_0 - h < \xi < x_0 + h$$

بجای روش اول؟

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + c_1 h^2 + c_2 h^4 + \dots$$

$$\begin{matrix} \times 2 \\ \nearrow \end{matrix} \quad f'(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)}{4h} + 4c_1 h^2 + 16c_2 h^4 + \dots$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 4f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4)$$

⋮

⋮

⋮

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_0) + \dots$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_0) - \dots$$

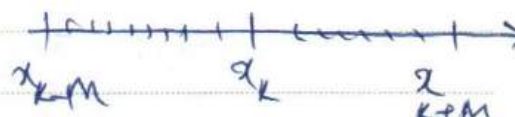
$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_0) + \dots$$

مربعی خط $O(h^2)$ دارد

$$\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \approx f''(x_0)$$

$$f'' \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

روش ضرب نامعین

$$f^{(n)}(x_k) \approx \sum_{j=-m}^m A_j f(x_{k+j})$$


$$f^{(n)}(x_k) = \sum_{j=-5}^5 A_j f(x_{k+j})$$

$$f''(x_0) \approx A f(x_0-h) + B f(x_0) + C f(x_0+h)$$

محاسبی ضرب (مستقیم)

$$A \left(f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots \right) + B f(x_0) + C \left(f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots \right)$$

$$= (A+B+C) f(x_0) + h(C-A) f'(x_0) + (A+C) \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots$$

$$A+B+C=0 \rightarrow C-A=0 \rightarrow A=C$$

P4PCO

$$\rightarrow A+C = \frac{2}{h^2} \rightarrow A=C = \frac{1}{h^2} \quad B = -\frac{2}{h^2}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$f''''(x_0) = \frac{1}{h^2} f(x_0-h) - \frac{2}{h^2} f(x_0) + \frac{1}{h^2} f(x_0+h)$$

$$f''''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \rightarrow \text{تفاضل مرکزی}$$

$$\text{مثلاً: } (A+C) \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{h^2} \times \frac{h^4}{4!} \times f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{4!} h^2 f^{(4)}(\xi)$$

نسبت گیری با درون یابی و

$$f(x) \approx P_n(x) \quad f'(x_0) \approx P_n'(x_0) \quad f^{(k)}(x_0) \approx P_n^{(k)}(x_0)$$

(درون یابی لاگرانژی یا نیوتن)

$$E_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\xi)$$

$$E_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \begin{matrix} \text{معمولاً} \\ x-x_0=h \end{matrix}$$

$$P_1(x) = \frac{(x-x_0)}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) \stackrel{L}{=} \frac{(x-x_0)}{h} f_1 + \frac{(x-x_1)}{-h} f_0$$

$$f'(x_0) = (P_1(x))' + (E_1(x))' \Big|_{x=x_0} = \left(\frac{f_1}{h} - \frac{f_0}{h} \right) +$$

$$\frac{1}{2!} f''(\xi) \left((x-x_1) + (x-x_0) \right) \Big|_{x=x_0} = \frac{f_1-f_0}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi) \rightarrow \text{نسبت}$$

سبق گیری با دو نایبی نیولین

$$P_r(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + a_r(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\downarrow$$

$$f(x_0)$$

$$\downarrow$$

$$f[x_0, x_1]$$

$$f[x_0, x_1, x_r] \rightarrow \frac{\Delta^2 f_0}{2! h^2}$$

$$P_r'(x) = a_1 + a_r[(x-x_1) + (x-x_0)]$$

$$P_r'(x_0) = a_1 + a_r(x_0 - x_1)$$

$$P_r'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} + \frac{f_0 - rf_1 + f_r}{2h^2}(-h)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{-rf_0 + rf_1 - f_r}{2h}$$

$$\begin{cases} f_0 = f(x_0) \\ f_1 = f(x_1) = f(x_0 + h) \\ f_r = f(x_r) = f(x_0 + 2h) \end{cases}$$

$$x_0 - h, x_0, x_0 + h$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$x_0 - 2h, x_0 - h, x_0$$

$$P_r(x) \rightarrow f'(x_0) \approx P_r'(x_0) = \frac{rf_0 - rf_1 + f_r}{2h}$$

$$P_r'(x) = a_1 + a_r[(x-x_0) + (x-x_1)] + a_r[(x-x_0)(x-x_1) + (x-x_1)(x-x_r)]$$

+ ~ ~ ~

$$+ (x-x_0)(x-x_r)]$$

$$f'(x_0) \Leftarrow P'(x_0) = a_1 + a_2(x_0 - x_1) + a_2(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + \dots$$

$$\boxed{f^{(m)}(x_0) \Leftarrow P^{(m)}(x_0)}$$

تعريف: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$$f(x_0+h) = y_1 + e$$

$$f(x_0-h) = y_{-1} + e_{-1}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_0) h^2}{3!}$$

$$f'(x_0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + E(f, h)$$

$$E(f, h) = \underbrace{E(f, h)}_{\text{Round}} + \underbrace{E(f, h)}_{\text{trunc}} = \frac{e - e_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{3!}$$

$$|e| \leq \epsilon, |e_{-1}| \leq \epsilon, |f^{(3)}(x)| \leq M \text{ (مقدار ثابت)}$$

$$|E(f, h)| \leq \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{3!} M = g(h)$$

$$g'(h) = -\frac{\epsilon}{h^2} + \frac{2hM}{3!} = 0$$

$$\frac{2hM}{3!} = \frac{\epsilon}{h^2} \Leftrightarrow 2h^3 M = 3\epsilon \rightarrow h^3 = \frac{3\epsilon}{2M} \rightarrow h = \left(\frac{3\epsilon}{2M}\right)^{1/3}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

مثال: طول گام بهینه برای $f(x) = \cos x$ و شیب f به روش تفاضلات مرکزی و $x = \frac{\pi}{6}$

با محاسبات Δ رستم با معنی

$$h = \left(\frac{2 \times 10^{-9}}{1} \right)^{1/4}$$

$$h = (10)^{1/4} \times 10^{-5} \quad h = 0.000244421$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

$$f''(x_0) = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + E(f, h)$$

$$E(f, h) = \frac{e_1 - 2e_0 + e_{-1}}{h^2} = \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

$$|f^{(4)}(\alpha)| \leq M \quad |\alpha - x_0| \leq \epsilon, \quad i = -1, 0, +1$$

$$|E(f, h)| \leq \frac{\epsilon E}{h^2} + \frac{h^2}{12} M = K(h)$$

$$K'(h) = -\frac{\epsilon E}{h^3} + \frac{h}{6} M = 0$$

$$\frac{M h}{6} = \frac{\epsilon E}{h^3} \rightarrow h^4 = \frac{6 \epsilon E}{M} \rightarrow h = \left(\frac{6 \epsilon E}{M} \right)^{1/4}$$

$$|f^{(4)}(x)| \leq 1 \quad f(x) = \cos x$$

Δ رستم با معنی شیب دوم با فرمول Δ نقطه ای میانی

$$E = 10 \times 10^{-9} = 10 \times 10^{-10}$$

$$h = \left(\frac{1 \times 10 \times 10^{-10}}{1} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.014285714$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

جبر خطی عادی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب A

$x = b$

$$AX = b$$

قضیہ و قیود کے زیر محاکمہ

(۱) باڈیشن b ، دستاویز جواب ملتا ہے (قضیہ وجود و یکتائی)

(۲) ماتریس A نا منفرد ہے (A کا رینک n نہیں ہے)

(۳) دستاویز $AX = 0$ فقط جواب $x = 0$ ہے

(۴) $\det A \neq 0$

Subject :

Year , Month , Date , ()

$$x = A^{-1}b \quad \text{روش ماتریس معکوس: اگر } A \text{ وارون پذیر باشد} \quad x = A^{-1}b$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 25-3 \\ -20+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 22 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

روش کرامر

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|} \quad A_k \text{ ستون } k \text{ ام آن برابر با است.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{25-3}{22} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{22} = -1$$

$$O(n!) > \text{مرتبه محاسبات درمیان}$$

ما داریم که مرتبه محاسباتی درمیان $O(n!)$ است لذا با افزایش n

مرتبه محاسبات بسیار بالا است و روش های بالا عملاً کار برد ندارد. بنابراین x را تقریب

می زنیم، از آنجا که x یک بردار است، مشخص نیست که دقیقاً منظور و هدف از تقریب کردن

چیست لذا ما را مترجمی به نام شرم تعریف می کنیم.

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

نرم ۲

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

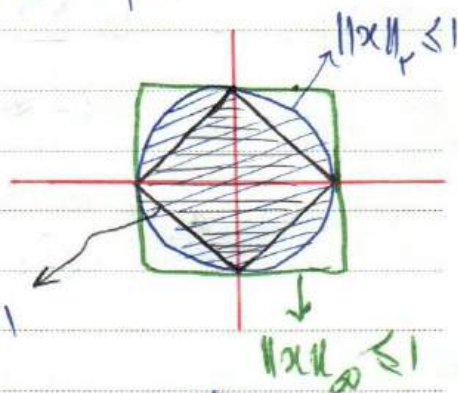
$$\|x\|_\infty = \max |x_i| \quad 1 \leq i \leq n$$

حال گزاروی $\|x\|_2 < 1$ به این معنی است که (در فضای دو بعدی)

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 \rightarrow \|x\|_2 \leq 1$$

$$\|x\|_\infty \leq 1 \rightarrow \max |x_i| \leq 1 \quad 1 \leq i \leq 2$$

$$\|x\|_1 \leq 1 \rightarrow |x_1| + |x_2| \leq 1 \quad \|x\|_1 \leq 1$$



حال در فضا R^5 و $x = (2, -3, 0, 4, -5)$ داریم:

$$\|x\|_1 = |2| + |-3| + |0| + |4| + |-5| = 14$$

$$\|x\|_\infty = 5$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$$

نرم ماتریس: AX یک ماتریس $n \times 1$ است بنابراین میتوان آن را به صورت یک بردار

در R^n در نظر گرفت. ثابت می شود که یک ثابت C موجود است که $\|Ax\| \leq C\|x\|$

Subject :

Year : Month : Date : ()

لذا برای هر x ، کوچکترین C که رابطه‌ی بالا برایش برقرار باشد، C را نرم A تعریف می‌کنیم. لذا،

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\|$$

$$= \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \rightarrow \|A\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

$$\|A\|_1 = \max \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \rightarrow \text{نرم ستونی}$$

$1 \leq j \leq n$

$$\|A\|_\infty = \max \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \rightarrow \text{نرم سطری}$$

$1 \leq i \leq n$

مثال نرم سطری و ستونی A را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \|A\|_1 = \max \{5, 2\} = 5$$

$$\|A\|_\infty = \max \{2, 4\} = 4$$

حل دستگاه $AX = b$

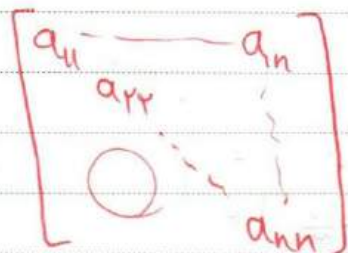
۱- روش **لای مستقیم** : در روش **لای مستقیم**، خود A را با اعمال محاسبات برضرایب، بدست می‌آوریم.

در این وضعیت به علت محاسبات زیاد، خطای ناشی از اعداد منجر به بروز خطاهای بالایی شود.

۲- روش **لای تکراری** : در این روش k ، یک دنباله‌ی x_k بدست می‌آوریم که $\lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k\} = x$

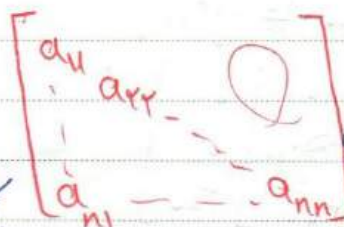
بالا مثلثی
↑در این حالت $x \subseteq x_n$ برای یک شخص

حالات خاص



در این دو حالت خاص مجهولات را به ترتیب به دست می آوریم.

(یک معادله وجود دارد که یک مجهول در آن موجود است.)



به روش بالا، روش جایگزین بشود یا بشود گویند. بنابراین اصول

هر دو روش مستقیم، تبدیل ماتریس A در معادله $Ax = b$ به یک ماتریس بالا مثلثی

پایین مثلثی و یا قطری است.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x + (-5)y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 5x - 4 = 4 \end{cases} \quad \text{روش گاوس؛ با یک مثال توضیح می دهیم}$$

جواب دو ماتریس بالا باهم تفاوت ندارند، حال در حالت ماتریس داریم:

۱- جابجایی سطرها در ماتریس ضرایب، جواب ما فرق نخواهد کرد. $E_i \leftrightarrow E_j$ ۲- ضرب یک سطر در یک عدد و جمع با سطر دیگر، جواب را تغییر نمی دهد. $E_i \leftarrow E_i + cE_j$ ۳- ضرب یک سطر در یک عدد، جواب ما را تغییر نمی دهد. $E_i \leftarrow aE_i$

مثال

$$\begin{cases} 30x_1 - 20x_2 - 10x_3 = 0 \\ -20x_1 + 55x_2 - 10x_3 = 0 \\ -10x_1 - 10x_2 + 50x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} +30 & -20 & -10 & 0 \\ -20 & +55 & -10 & 0 \\ -10 & -10 & +50 & 200 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 30 & -20 & -10 & 0 \\ 0 & 55 - \frac{40}{3} & -10 - \frac{20}{3} & 0 \\ 0 & -10 - \frac{20}{3} & 50 - \frac{10}{3} & 200 \end{array} \right]$$

↑
ماتریس افزوده

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 30 & -20 & -10 & 0 \\ 0 & 125/3 & -50/3 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 200 \end{array} \right]$$

در حالت کلی در هر مرحله E_i را با $E_i - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} E_j$ جایگزین می‌کنیم، در آخر به یک ماتریس

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \quad \& \quad x_i = \frac{b_i - \left(\sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right)}{a_{ii}}$$

مرتبه‌ی محاسبات در این روش n^3 است، (برای بدست آوردن ماتریس بالا مثلثی) و برای محاسبه

جواب از مرتبه‌ی n^2 است. لذا کل این روش از مرتبه‌ی n^3 است که از روش درمیان گیری که

از $O(n!)$ است بهتر است - حال اگر روند ایجاد ماتریس بالا مثلثی را دوبار انجام دهیم، یک

ماتریس قطری بدست می‌آوریم. در این صورت محاسبه جوابها سریع‌تر است، اما چگونگی

مرتبه‌ی محاسبات n^3 است. بهتر است از همان روش گاوس استفاده کنیم.

روش گاوس جردن؛ روشی است که در بالا توضیح داده شد (تبدیل ماتریس به ماتریس

قطری) این روش برای بدست آوردن ماتریس وارون بسیار مناسب است.

$$[A_{n \times n} | I_{n \times n}] \rightarrow [I_{n \times n} | \bar{A}_{n \times n}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{مثال}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 & -5/4 & 1/2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -2/5 & -4/5 \\ 0 & 2 & 0 & 4/2 & -2/5 & -14/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/5 & 4/5 \end{array} \right]$$

$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ & & & 1 & 0 & 5 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/5 & 4/5 \end{array} \right]$$

روش تجزیه مثلثی: در این روش بعضی ماتریس A^{-1} را به حالت حاصل ضرب دو ماتریس بالا روش وارون مثلثی تبدیل کنیم.

$$A = LU \rightarrow L = \begin{bmatrix} L_{11} & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ L_{n1} & \dots & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad \& \quad U = \begin{bmatrix} U_{11} & \dots & \dots & U_{1n} \\ & U_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_{nn} \end{bmatrix}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

در این صورت برای هر $i \neq j$ داریم $u_{ij} = 0$ و $u_{ji} = 0$ و $(i < j)$ و $(i > j)$ داریم $u_{ij} = 0$ و $u_{ji} = 0$ داریم

$$\sum_{k=1}^n L_{ik} u_{kj} = A_{ij}$$

لذا $n^2 + n$ مجهول و n^2 معادله داریم

لذا بی نهایت جواب داریم، در این وضعیت، خردمان n معادله جدید فرض می‌کنیم مثل اینکه

$$L_{ii} = 1$$

دوگانه

$$u_{ii} = 1$$

کوته

$$L_{ii} = u_{ii} \neq 0$$

موسسه

شرط مثبت معین بزرگ ماتریس A :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\forall x \quad x^T A x > 0 \Rightarrow A \text{ مثبت معین است}$$

در تعریف A مثبت معین است هرگاه

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$

مثال) مثبت معین بزرگ ماتریس زیر را بررسی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 44 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1 > 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 44 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

پس A مثبت معین است.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

کردت :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L_{11}=1, U_{12}=1, L_{21}=4, U_{13}=1, L_{31}=3, L_{22}=2, L_{32}=1, L_{33}=3$$

$$U_{23}=2, L_{33}=-1$$

حال قرار می دهیم $Z = UX$ و $LZ = b$ در این صورت داریم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 2 \\ z_3 = -1/4 \end{cases}$$

$$UX = Z \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1/4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن ماتریس وارون A در این روش داریم :

$$A = LU \rightarrow LU A^{-1} = I \rightarrow LZ = I$$

$$U A^{-1} = Z$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

الادب

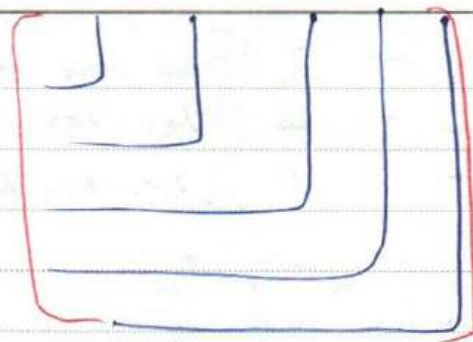
Subject:

Year: Month: Date: ()

$L = A^{-1}$ معادل باشد و مثبت معین باشد

در بیان ماتریس های معین مثبت معین

معین



$$A \times D = I \rightarrow AD_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad AD_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad AD_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$LUX = I$$

$$LY = I \rightarrow UX = I \rightarrow X = A^{-1}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

تجزیه به روش دولست

$$LY = I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} y_{11} = 1 \\ y_{12} = 0 \\ y_{13} = 0 \end{matrix} \rightarrow Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_{11} &= \\ x_{22} &= 1/1 \\ 1 \cdot x_{31} &= 3 \rightarrow x_{31} = \frac{3}{1} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1/1 & -0/1 & 3/1 \\ -1/1 & -1/1 & 0/1 \\ 3/1 & 1/1 & 1/1 \end{bmatrix}$$

$$x_{21} = \frac{2 - (0 \times \frac{3}{1})}{-1} \rightarrow x_{21} = \frac{-1}{1}$$

$$x_{33} = \frac{1 - (-1 \times \frac{-1}{1} + 3 \times \frac{3}{1})}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = \prod_{i=1}^n L_{ii} \prod_{j=1}^n U_{jj}$$

$$\det(A) = +1 \times -1 = -1 \quad \text{مثلاً برای A در مثال قبلی}$$

$$\text{مثلاً) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = L^T$$

$$L = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = A$$

$$u_{11}^2 = 1 \quad u_{11} = 1 \quad u_{11} u_{12} = 2 \rightarrow u_{12} = 2$$

$$u_{11} u_{13} = 0 \rightarrow u_{13} = 0 \quad u_{12}^2 + u_{22}^2 = 0$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$u_{12}^2 + u_{22}^2 + u_{32}^2 = 45 \rightarrow 25 + 14 + u_{32}^2 = 45$$

$$u_{32}^2 = 6 \rightarrow u_{32} = \sqrt{6} \quad \text{--- تمین ص ۱۷ کتاب درسی ---}$$

نامی

Subject:

Year: Month: Date: ()

1
Jul

94

av

Subject:

Year. Month. Date. ()

ch

Subject:

Year: Month: Date: ()

اگر $\tilde{x} \approx x$ ، $A\tilde{x} \approx b$ ، r نوسان پیدا کند $x \approx \tilde{x}$ گردد.

$$A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0002 \end{bmatrix} \quad \text{مثلاً} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2.0002 \end{bmatrix}}_b$$

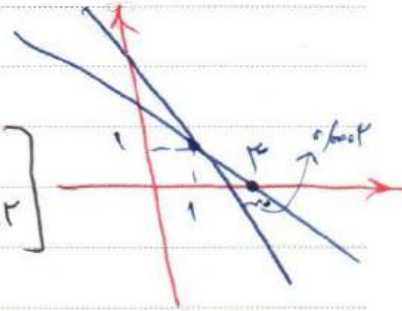
$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0002 \end{bmatrix}$$

$$\|r\|_{\infty} = 0.0002$$

$$\|x - \tilde{x}\|_{\infty} = 2$$

$$\|r\|_{\infty} = 0.0002$$

$$\|x - \tilde{x}\|_{\infty} = 2$$



$$r = b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x} = A(x - \tilde{x}) \Rightarrow \bar{A}^T r = (x - \tilde{x})$$

$$\|r\| = \|A(x - \tilde{x})\|$$

$$\text{نتیجه: } \|x - \tilde{x}\| = \|\bar{A}^T r\| \leq \|\bar{A}^T\| \|r\|$$

نامشروعی مقدار

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\|\bar{A}^T\| \|r\|}{\|x\|} \rightarrow Ax = b$$

$$Ax = b \rightarrow \|Ax\| = \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|r\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \|A^{-1}\| \cdot \|r\| = \|A\| \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

حالت عددی

$$K = \|A\| \|A^{-1}\| \quad \text{عدد حالت} \quad 1 \leq K(A)$$

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\|$$

$K(A)$

هرچه بیشتر باشد بدتر است و هرچه کمتر باشد بهتر است و در نتیجه بد حالت تر است.

مثلاً در مثال منحنی قبل اگر کران خطا را از K بخواهیم K عدد حالت را بدست

$$\|x - \tilde{x}\| \leq K \frac{0.0002 \rightarrow |r|}{1.0001 \rightarrow \|b\|} = 1 \checkmark$$

آورد یعنی

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\underbrace{x + f(x)}_{g(x)} = 0 + x$$

$$Ax = b \quad \text{روشن نمایی حل}$$

$$x = Tx + C$$

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$$

$$x^{(n+1)} = T(x^{(n)}) + C$$

روش

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \right)$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

در تکرار k ام $\rightarrow$ (k+1) $\rightarrow$ در تکرار k ام

آیا همگراست؟

تعریف: A ماتریس غالب قطری است، اگر $|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|$

قضیه: اگر A ماتریس غالب قطری است، آنگاه A معکوس پذیر است.

① A معکوس پذیر است.

② روش ژاکوبی برای حل $Ax=b$ با هر نقطه شروع x همگرا به جواب است.

طرح استات برای $n=2$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y \rightarrow g_1 \\ y = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x \rightarrow g_2 \end{cases}$$

$$i=1,2 \rightarrow \left| \frac{\partial g_i}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_i}{\partial y} \right| < 1$$

$$\begin{array}{l} \text{برای } g_1 \rightarrow \left| -\frac{a_{12}}{a_{11}} \right| < 1 \\ \text{برای } g_2 \rightarrow \left| \frac{a_{21}}{a_{22}} \right| < 1 \end{array}$$

$$\downarrow |a_{12}| < |a_{11}| \quad \downarrow |a_{21}| < |a_{22}|$$

و این یعنی غالب قطری بودن

محل دوم برای همگرایی هر روش تکراری

$x^{k+1} = T(x_k) + c$ همگرا به جواب می شود، برای هر نقطه‌ای شروع اولیه اگر روشها اگر

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| < 1$$

$1 \leq i \leq n \rightarrow$ مقیاری و بردی ماتریس A

$$\begin{cases} -2x + y + 5z = 15 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -21 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ۱}$$

$$\begin{array}{l} \text{سطر ۱} \\ \text{سطر ۲} \\ \text{سطر ۳} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -21 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$|4| > |-1| + |1|$$

$$|-8| > |4| + |1|$$

$$|5| > |-2| + |1|$$

$\leftarrow$ یعنی غالب قطری است.

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{4} [7 + y^{(k)} - z^{(k)}] \quad y^{(k+1)} = \frac{1}{-8} [-21 - 4x^{(k)} - z^{(k)}]$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{5} [15 + 2x^{(k)} - y^{(k)}]$$

$$\text{حدس اولی} \rightarrow \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \frac{1}{4} [7 + 2 - 2] = \frac{7}{4}$$

$$y^{(1)} = \frac{1}{8} [-21 - 4x^{(1)} - 2] = \frac{-27}{8}$$

$$z^{(1)} = \frac{1}{5} [15 + 2x^{(1)} - 2] = \frac{15}{5} = 3$$

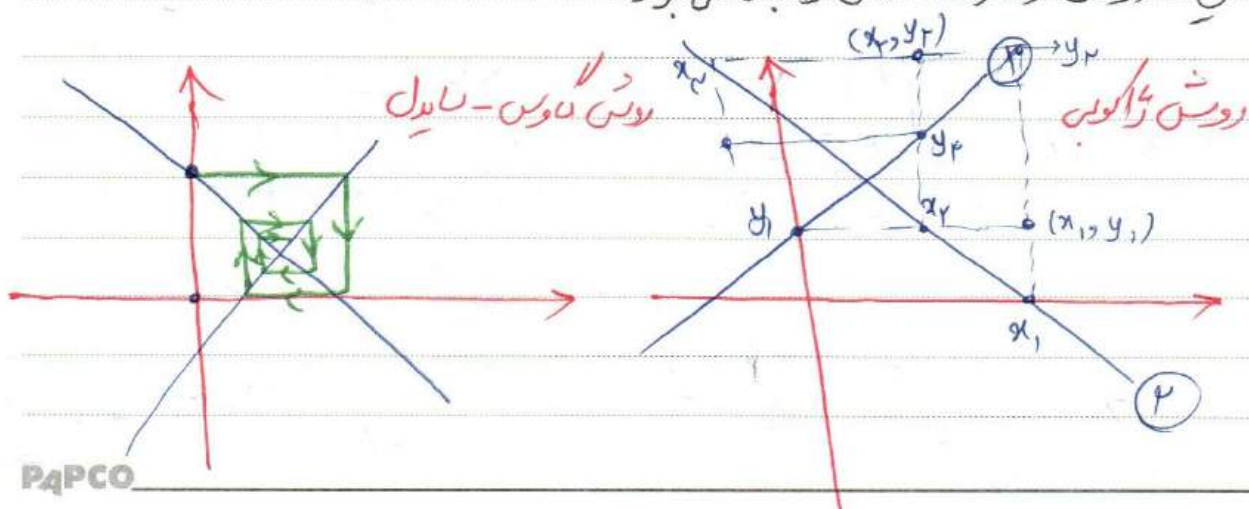
$$x^{(2)} = \frac{1}{4} [7 + 2 \cdot \frac{7}{4} - 3] = \frac{7175}{4}$$

$$y^{(2)} =$$

$$z^{(2)} =$$

برای اینکه حدس اولی خودهای نزدیک تر به جواب اصلی باشد می توان فصل مشترک دو صفحه را بدست آورد که یک خط است پس تقاطع فصل مشترک با صفحه سوم را محاسبه کرده و نهایتاً حدس که می زنیم روی نقطه ای است که بر روی یک خط فصل مشترک ۲ صفحه قرار دارد.

این کار دقت و سرعت حدس را بالا می برد.



۱۰۳

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad \text{روشن کردن مایل ۲}$$

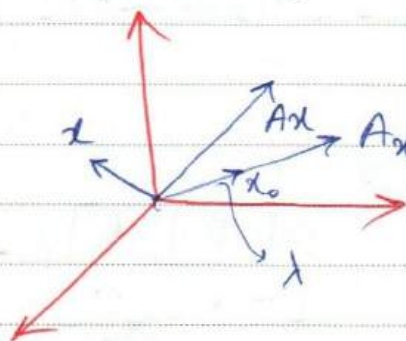
$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مثال ۱}} \begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{4} [v + y^{(k)} - z^{(k)}] \\ y^{(k+1)} = \frac{1}{-1} [-r - f x^{(k+1)} - z^{(k)}] \\ z^{(k+1)} = \frac{1}{5} [10 + 2x^{(k+1)} - y^{(k+1)}] \end{cases} \quad \text{مثال ۲}$$

$$x^{(1)} = \frac{1}{4} [v + 2 - 2] = 1.75$$

$$y^{(1)} = -\frac{1}{1} [-r - f x^{(1)} - 2] = \frac{4}{1} = 4.75$$

$$z^{(1)} = \frac{1}{5} [10 + 2 \times 1.75 - 4.75] = \frac{14.75}{5} = 2.95$$



مقدار ویژه و بردار ویژه
 $Ax = \lambda x \rightarrow \lambda > 1$

$$Ax = \lambda x$$

↓ ↓
 مقدار ویژه بردار ویژه

$$A(r x_0) = r A x_0 = r \lambda x_0 = \lambda (r x_0) \quad \text{مقدار ویژه}$$

برای بدست آوردن مقادیر ویژه کافی است $\det(A - \lambda I) = 0$ گردد.

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

↙ حدالتر n ریشه
 ممکن است حقیقی نباشد (موهومی باشد)
 ممکن است تکراری باشند.

اگر ماتریس مثلثی و یا قطری باشد مقادیر ویژه عناصر روی قطر هستند.

مثال $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

مقادیر ویژه

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 10 = 0 \rightarrow \lambda = -1, 2$$

$$AX = \lambda X \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4x_1 \\ 5x_1 + 4x_2 = 4x_2 \end{cases}$$

$\forall \lambda = 2$

$$\rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\forall \lambda = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -x_1 \\ 5x_1 + 4x_2 = -x_2 \end{cases} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

کمان مقادیر ویژه

دارای رنگورین: اگر A یک ماتریس باشد و λ در اینها باشد. هر دایره

C_i (در صفحه مختلط) به مرکز a_{ii} و شعاع $\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ عدالت یک مقدار ویژه را در بر دارد.

$$|1 - a_{ii}| \leq r_i$$

$$A x_0 = \lambda x_0$$

اثبات:

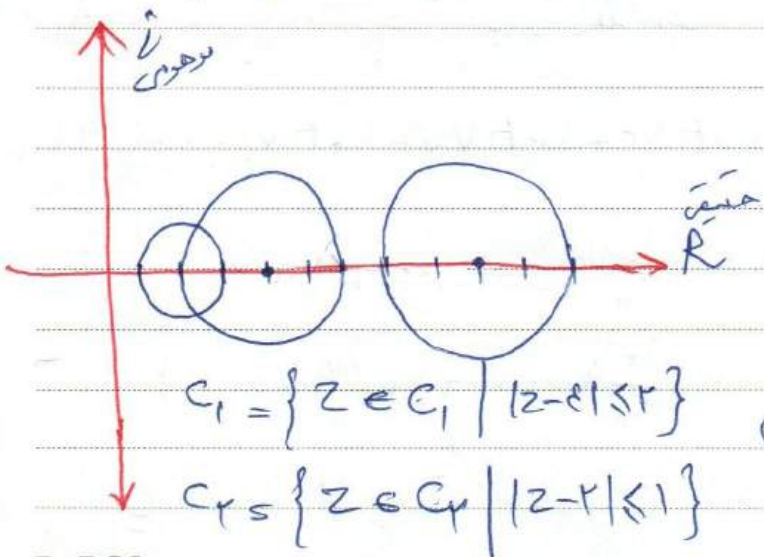
$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = \lambda x_k \rightarrow (a_{kk} - \lambda) x_k = - \sum_{j \neq k} a_{kj} x_j$$

$$|a_{kk} - \lambda| |x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| |x_j| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| |x_k|$$

* اگر C_i یک جز باشد (همدیگر را قطع نکند) دقیقاً n مقدار ویژه متمایز داریم.

* اگر K تا دایره به هم $n-K$ تا را قطع نکند K تا مقدار ویژه در K دایره وجود دارد.

مثال) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

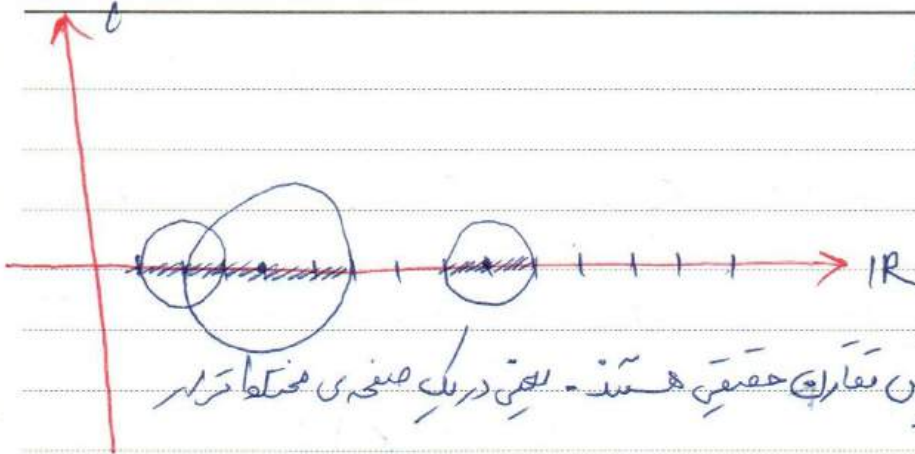


$$C_2 = \{z \in C_2 \mid |z - 2| \leq 1\}$$

Subject :

Year : / Month : / Date : ()

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$



* مقدارهای ویژه در ماتریس مقادیر حقیقی هستند. یعنی در یک صفحه مختلط قرار

نمی گیرند و فقط اعداد روی محور IR قابل قبول اند. $0 \leq \lambda_1 < 1$ و $4 \leq \lambda_2 < 12$

و B ماتریس مثبت معین است. برای مقادیر ویژه λ_1 و λ_2

به ازای A و v_1 و v_2 و ... v_n آنگاه مقادیر ویژه ای $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ متعلق خطی هستند.

هر عنصر فضا را می توان به صورت ترکیب خطی این بردارها نوشت و

روش توانی

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

حدس اولیه برای تعیین مقدار ویژه λ

λ_1 بزرگترین مقدار ویژه باروشن تکراری

$$A x_0 = c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + c_3 A v_3 + \dots + c_n A v_n$$

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \Rightarrow c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_n \lambda_n v_n$$

$$x_1 = A x_0 = \lambda_1 \left(c_1 v_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \dots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \right)$$

این دفعه x_1 بدست آمده را بجای x_0 قرار داده و همین فرایند را ادامه می دهیم

تا x بدست آید و این فرایند را تا n مرحله ادامه می دهیم:

$$x_k = Ax_{k-1} = A^k x_0 = \lambda_1^k \left(c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right)$$

حال با توجه به اینکه $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$ داریم آنکه $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$ و $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|^k \rightarrow 0$

$$* \quad x_k = A^k x_0 \approx \lambda_1^k c_1 v_1$$

اما اگر $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$ آنکه $x_k \rightarrow \infty$ و اگر $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ آنکه $x_k \rightarrow 0$

برای رفع این مشکل هر بار که A در آن ضرب شد و طول آن بزرگتر یا کوچکتر شد آن را نرمال

کرده و به طول 1 درمی آوریم تا مشکلات فوق که $x_k \rightarrow \infty$ و $x_k \rightarrow 0$ است رخ ندهد.

$$u_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty} \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\|x\|_\infty = \max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \}$$

نرمال سازی

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \rightarrow Av_1 \cdot v_1 = \lambda_1 v_1 \cdot v_1 \rightarrow \lambda_1 = \frac{Av_1 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}$$

$$\lambda_1 = \frac{Ax_k \cdot x_k}{x_k \cdot x_k} \quad \text{آنکه}$$

$$x \cdot x = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

مثال ۱ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ حدس اولیه $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $Ax_0 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \|Ax_0\|_{\infty} = 6$$

$$x_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6 \\ 2.6 \end{bmatrix} \quad \|Ax_1\|_{\infty} = 4.6$$

$$x_2 = \frac{1}{4.6} \begin{bmatrix} 4.6 \\ 2.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5652 \end{bmatrix}$$

با انجام این فرایند تا مرحله پنجم نتیجه می رسم که $x_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ است و به آن میل می کند.

$$Ax_5 = \begin{bmatrix} 4.9975 \\ 2.5000 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \frac{Ax_5 \cdot x_5}{x_5 \cdot x_5} = \frac{2.49875}{1.249375} = 2.0004$$

پس $\lambda \approx 2$ و بردار ویژه نهایی آن تقریباً $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ است.

Subject:

Year: Month: Date: ()

اگر بزرگترین مقدار ویژه ی یک ماتریس را داشتیم آنگاه می توان کمترین مقدار ویژه را هم به کمک

واریان ماتریس بدست آورد. $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$

$$Ax = \lambda x \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x \rightarrow x = \lambda A^{-1}x$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)x = A^{-1}x$$

مقدار ویژه ی A^{-1}

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقدار ویژه A باشند $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ مقدار ویژه ی A^{-1} هستند.

روش توانی معکوس برای بدست آوردن کوچکترین مقدار ویژه A از روش توانی برای

ماتریس A^{-1} استفاده می کنیم. سرعت روش توانی معکوس به $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ دارد.

است $\lambda_1 = 0$ در این ماتریس چقدر

در واقع λ_1 λ_2 λ_3 λ_4 λ_5 λ_6 λ_7 λ_8 λ_9 λ_{10} λ_{11} λ_{12} λ_{13} λ_{14} λ_{15} λ_{16} λ_{17} λ_{18} λ_{19} λ_{20} λ_{21} λ_{22} λ_{23} λ_{24} λ_{25} λ_{26} λ_{27} λ_{28} λ_{29} λ_{30} λ_{31} λ_{32} λ_{33} λ_{34} λ_{35} λ_{36} λ_{37} λ_{38} λ_{39} λ_{40} λ_{41} λ_{42} λ_{43} λ_{44} λ_{45} λ_{46} λ_{47} λ_{48} λ_{49} λ_{50} λ_{51} λ_{52} λ_{53} λ_{54} λ_{55} λ_{56} λ_{57} λ_{58} λ_{59} λ_{60} λ_{61} λ_{62} λ_{63} λ_{64} λ_{65} λ_{66} λ_{67} λ_{68} λ_{69} λ_{70} λ_{71} λ_{72} λ_{73} λ_{74} λ_{75} λ_{76} λ_{77} λ_{78} λ_{79} λ_{80} λ_{81} λ_{82} λ_{83} λ_{84} λ_{85} λ_{86} λ_{87} λ_{88} λ_{89} λ_{90} λ_{91} λ_{92} λ_{93} λ_{94} λ_{95} λ_{96} λ_{97} λ_{98} λ_{99} λ_{100}

یعنی مقدار ویژه $\lambda_2, \lambda_3, \dots$

روش گشتی و پلاندر

$$A_1 = A - v_1 (u^T A) \rightarrow A_1 v_1 = \lambda_1 v_1$$

می ماند

$$A_1 v_1 = A v_1 - v_1 (u^T \cdot A v_1) = \lambda_1 v_1 - v_1 (u^T \lambda_1 v_1)$$

$$= \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 (u^T v_1)$$

$$v_i = (\lambda_i - \lambda_1) w_i + \lambda_1 (u^T w_i) v_1$$

✓ w بردار ویژه ی ماتریس A_1 متاسب با λ_i است.

اگر A متقارن باشد

$$B = A - \lambda_1 K_1 K_1^T$$

$$K_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|_F}$$

 $\hat{L}_1$

$$A_1 = A - V_1 (V_1^T A) = A - A (V_1 U^T) = A - \lambda_1 V_1 U^T$$

$$V_1 V_1^T = \|V_1\|_F^2 \rightarrow \frac{V_1}{\|V_1\|_F} \cdot \left(\frac{V_1}{\|V_1\|_F} \right)^T = \frac{V_1 V_1^T}{\|V_1\|_F^2} = I$$

مثال) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \dots$$

$$x_{10} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.99999 \\ 0.00001 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{A x_{10} \cdot x_{10}}{x_{10} \cdot x_{10}} = 2.9999$$

$$\lambda_1 = 2 \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = A - \lambda_1 K_1 K_1^T \quad \|v_1\|_{K_1} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 x_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

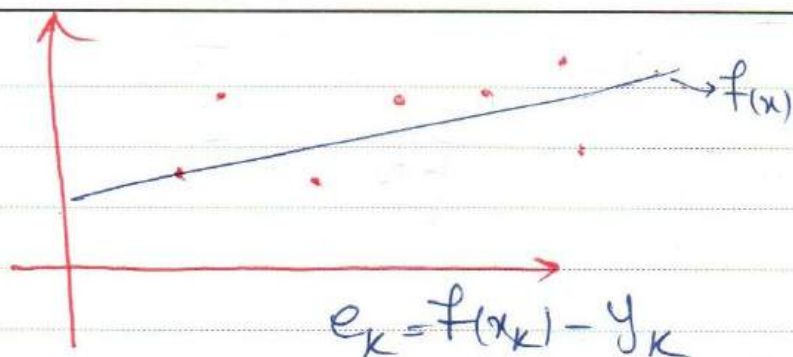
$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_1 x_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ 0.14142 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{A_1 x_3 \cdot x_3}{x_3 \cdot x_3} = -1.9994 \approx -2$$



برازش خطی

$(e_1, \dots, e_k)$ که بردار است که خطای k نقطه‌ی مابین می‌توان برای آن فرم

$$\times E_{\infty}(f) = \max_{1 \leq k \leq n} |e_k|$$

تعریف می‌کنیم.

$$\times E_1(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |e_k|$$

$$\checkmark E_p(f) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k^2 \right)^{1/2}$$

چون $\max$ در دل خورش دارد

قدر مطلق ندارد شوق گری از آن

راحت تر است پس از آن استفاده می‌کنیم تا خط $\min$ گردد

بهترین خطی که از نقاط می‌گذرانیم

برازش خطی به روش کمترین مربعات

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

$$E(f) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k))^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - (a_0 + a_1 x_k))^2}$$

$$E(a_0, a_1) = \sum_{k=1}^n (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \sum_{k=1}^n (y_k - a_0 - a_1 x_k) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \sum_{k=1}^n -x_k (y_k - a_0 - a_1 x_k) = 0$$

$$a_0 \left(\sum_{k=1}^n 1 \right) + a_1 \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k$$

$$a_0 \sum_{k=1}^n x_k + a_1 \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

برای سهولت در یادآوری روابط فوق از یک بار استرگی زیر استفاده می‌کنیم:

$$S_x = \sum x_k \quad S_{x^2} = \sum x_k^2$$

$$S_y = \sum y_k \quad S_{xy} = \sum x_k y_k$$

$$\begin{bmatrix} n & S_x \\ S_x & S_{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix}$$

x_k	-۳	-۱	۰	۲
y_k	۰	۱	۲	۳

(مثال)

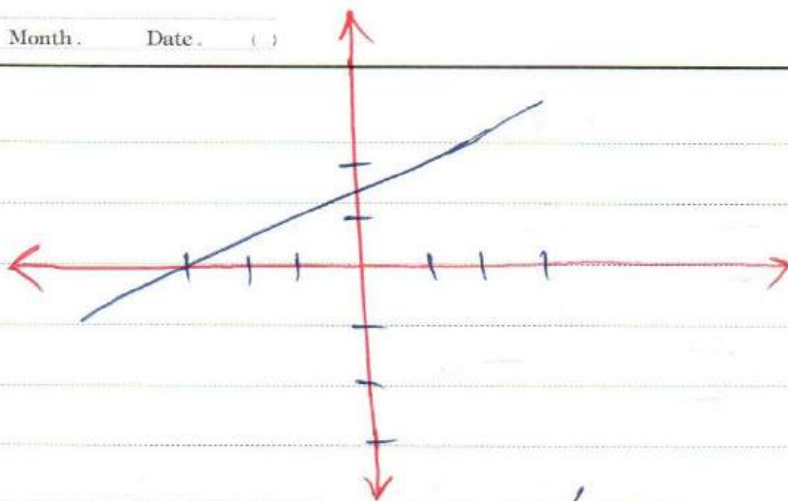
$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

S_y
 S_{xy}

۲ برابر خط دوم بچاپیم
خط اول را

$$\begin{bmatrix} 0 & 24 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} 24a_1 &= 12 \rightarrow a_1 = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \\ a_0 &= \frac{5 - 1 \times \frac{1}{2}}{-2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$y = \frac{9}{4} + \frac{1}{2}x \quad \checkmark$$



برای برازش درجه دوم (سه درجه) به روش کمترین مربعات

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$E(a, b, c) = \sum_{k=1}^n (y_k - ax_k^2 - bx_k - c)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = -2 \sum_{k=1}^n (y_k - ax_k^2 - bx_k - c) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = + \sum_{k=1}^n -2x_k (y_k - ax_k^2 - bx_k - c) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{k=1}^n -2x_k^2 (y_k - ax_k^2 - bx_k - c) = 0$$

برای بهینه آوردن
مقدار E

$$nc + b \sum x_k + a \sum x_k^2 = \sum y_k$$

$$c \sum x_k + b \sum x_k^2 + a \sum x_k^3 = \sum x_k y_k$$

$$c \sum x_k^2 + b \sum x_k^3 + a \sum x_k^4 = \sum x_k^2 y_k$$

$$\begin{bmatrix} n & S_x & S_x^2 \\ S_x & S_x^2 & S_x^3 \\ S_x^2 & S_x^3 & S_x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_y \\ S_{xy} \\ S_{x^2y} \end{bmatrix}$$

x_k	۲	۵	۷	۹	۱۱
y_k	۱	۲	۴	۱۲	۱۷

مثال

$$S_x = 26 \quad S_y = 34 \quad S_{x^2} = 280 \quad S_{xy} = 161$$

$$S_x^3 = 1844 \quad S_x^4 = 16364 \quad S_{x^2y} = 1377$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 26 & 280 \\ 26 & 280 & 1844 \\ 280 & 1844 & 16364 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 161 \\ 1377 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c = 1.3764 \\ b = -0.7281 \\ a = -0.1994 \end{cases}$$

$$y = -0.1994x^2 - 0.7281x + 1.3764$$

* می‌توان از همان ابتدا به جای تقریب $y = ax^2 + bx + c$ از $y = ax^2 + c$ استفاده کرد.

استفاده کرد که ماتریس { دو در دو } می‌گردد و محاسبات کمتر می‌گردد ولی دقت کم می‌شود.

$$y = ax^2 + c \rightarrow \begin{bmatrix} n & S_x^2 \\ S_x^2 & S_x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_y \\ S_{x^2y} \end{bmatrix}$$

$$y = ax^2 + bx \rightarrow \begin{bmatrix} S_x^2 & S_x^3 \\ S_x^3 & S_x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xy} \\ S_{x^2y} \end{bmatrix}$$

Subject :

Year. Month. Date. ()

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \xrightarrow{\text{حالت ساده}} y = ax^2 + c$$

x_k	-3	0	2	4
y_k	+3	1	1	3

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_k^2 \\ \sum x_k^2 & \sum x_k^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_k \\ \sum x_k^2 y_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 29 \\ 29 & 153 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 79 \end{bmatrix} \rightarrow \text{a و c نسبت می آید}$$

برای خطی سازی کردن برخی توابع مثل $y = ae^{bx}$ نسبت می آوریم

$$E(a, b) = \sum_{k=1}^n (y_k - ae^{bx_k})^2 \quad \text{نقاط } (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \quad \sum_{k=1}^n e^{bx_k} (y_k - ae^{bx_k}) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \quad \sum_{k=1}^n -ax_k e^{bx_k} (y_k - ae^{bx_k}) = 0$$

$$a \sum_{k=1}^n e^{bx_k} = \sum_{k=1}^n y_k e^{bx_k} \xrightarrow{\text{نسبت می آید}} g_1(x, y) = 0$$

$$a^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 e^{2bx_k} = a \sum_{k=1}^n x_k e^{bx_k} y \rightarrow g_2(x, y) = 0$$

$$\text{مثال} \begin{cases} g_1(a, b) = 0 \\ g_2(a, b) = 0 \end{cases}$$

حل این معادله که کمالات پس از همان ابتدا از عبارات کولم

L_n می گیریم

$$\ln y = \ln a e^{bx} \rightarrow \ln y = \ln a e^{bx}$$

$$Y = \underbrace{\ln a}_C + bx$$

$$\begin{bmatrix} n & S_x \\ S_x & S_{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix} \rightarrow a, b \checkmark$$

$$\begin{array}{c|ccc} x_k & 2 & 1 & 0 \\ \hline y_k & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

$$y = a e^{bx} \quad \text{مثال) به روش کمترین مربعات}$$

$$\begin{bmatrix} n & S_x \\ S_x & S_{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow C = -0.4 \quad b = 0.9$$

$$a = e^C = e^{-0.4} = 0.67$$

$$\xrightarrow[\text{نمایندگاری}]{\text{عبرت}} y = a e^{bx} = 0.67 e^{0.9x}$$

برای خط‌های برشی چند متغیره رشد باتری و سلول و ... از تابع $y = a d^{bx}$ بدست می‌آید.

$$X = \ln x \leftarrow y = a \ln x + b \quad \text{مثال) } \log_a \text{ منگرم}$$

$$Y = \frac{x}{a} + \frac{b}{a} \leftarrow \frac{Y-1}{y} \quad y = \frac{a}{x+b} \quad \text{مثال) برای تابع}$$

حال اگر تابع مد نظر ما ترکیبی از چند تابع مثل $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ باشد.

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + \dots + c_m f_m(x)$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

الهدف من هذا التمرين هو إيجاد قيم $c_1, c_2, \dots, c_m$ التي تقلل من دالة التكلفة E .

$$E(c_1, c_2, \dots, c_m) = \sum_{k=1}^n \left(y_k - \sum_{i=1}^m c_i f_i(x_k) \right)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = 0 = -2 \sum_{k=1}^n f_j(x_k) \left(y_k - \sum_{i=1}^m c_i f_i(x_k) \right)$$

$$\sum_{k=1}^n f_j(x_k) \sum_{i=1}^m c_i f_i(x_k) = \sum_{k=1}^n f_j(x_k) y_k$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (f_j(x_k) f_i(x_k)) c_i$$

$$\begin{bmatrix} \sum f_1 f_1 & \sum f_1 f_2 & \dots & \sum f_1 f_m \\ \sum f_2 f_1 & \sum f_2 f_2 & \dots & \sum f_2 f_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum f_m f_1 & \sum f_m f_2 & \dots & \sum f_m f_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_1 y \\ \sum f_2 y \\ \vdots \\ \sum f_m y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum f_1 f_1 & \sum f_1 f_2 & \dots & \sum f_1 f_m \\ \sum f_2 f_1 & \sum f_2 f_2 & \dots & \sum f_2 f_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum f_m f_1 & \sum f_m f_2 & \dots & \sum f_m f_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_1 y \\ \sum f_2 y \\ \vdots \\ \sum f_m y \end{bmatrix}$$

$$F^T F \quad \begin{matrix} m \times n & n \times 1 \end{matrix}$$

x	0	1	2
y	1	-2	-4

مثال) فرض کنید خط مطلوب با $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ باشد

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} e^0 & e^{2 \cdot 0} \\ e^1 & e^{2 \cdot 1} \\ e^2 & e^{2 \cdot 2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & e & e^2 \\ 1 & e^2 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e & e^2 \\ e^2 & e^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e & e^2 \\ 1 & e^2 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

مثال 5 ص 207

در اینجا برای بسط تابعی توابع تناوبی 2

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$x_k = -\pi + \frac{2\pi k}{n} \quad \sum f_k(x_i) f_j(x_i)$$

$$E(a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m) = \sum_{i=1}^n (T_m(x_i) - y_i)^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cos(kx_i) \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n f(x_i) \sin(kx_i) \end{aligned} \right. \quad k=1, 2, \dots, m$$

اگر تابع فرد باشد $\{a_k\}$ صفر هستند و سری سینوسی

اگر تابع زوج باشد $\{b_k\}$ صفر هستند و سری کسینوسی

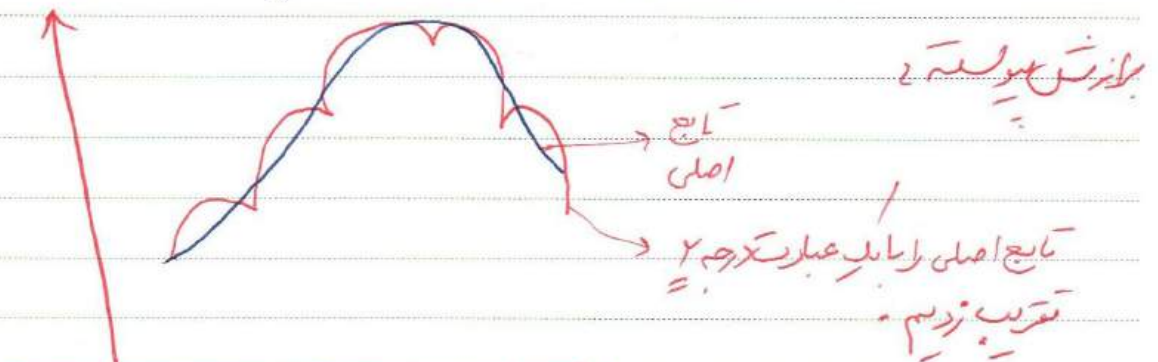
Subject :

Year. Month. Date. ()

سائنس فصل ۷ جز اول اور ۲

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_8 = 0 \quad f(x) = \frac{x}{2} \text{ تابع فرد است.}$$

$$x_k = -\pi + \frac{2\pi}{N} k \quad N=12 \quad \text{نقطه } 12 \text{ با } [-\pi, \pi) \quad m=5 \text{ برای}$$



$\{ \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \}$ روی $[a, b]$ متعامد هستند.

$$y(x) = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x)$$

$$\int_a^b w(x) f(x) dx - \int_a^b w(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) dx$$

$$\int_a^b w(x) \left(f(x) - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right)^2 dx = E(c_1, c_2, \dots, c_m)$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = 2 \int_a^b w(x) \left(f(x) - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right) \varphi_j(x) dx = 0$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b w(x) \varphi_j \varphi_i(x) dx = \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$= \left[\int_a^b w(x) \varphi_1 \varphi_1, \dots, \int_a^b w(x) \varphi_1 \varphi_n \right] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \int_a^b w(x) f(x) \varphi_j(x) dx$$

$$\begin{bmatrix} \int_a^b w(x) \phi_1 \phi_1 dx & \dots & \int_a^b w(x) \phi_1 \phi_m dx \\ \vdots & & \vdots \\ \int_a^b w(x) \phi_m \phi_1 dx & \dots & \int_a^b w(x) \phi_m \phi_m dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b w(x) f(x) \phi_1 dx \\ \vdots \\ \int_a^b w(x) f(x) \phi_m dx \end{bmatrix}$$

ماتریس و بردار

چند جمله‌ای نژاد ϕ_1, ϕ_r

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-1/e} \\ r/e \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \phi_1 = 1 \\ \phi_r = x \end{array}$$

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

$$T_m(x) = \frac{a_0}{r} + \sum_{k=1}^m a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) dx$$

حل مسائل مقدار مرزی

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

رنگاه

↓ حد

در این مسئله

$$y(x_0) = y_0$$

↓
تعیین

$$y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2)$$

$$y_1(0) = y_1$$

$$y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2)$$

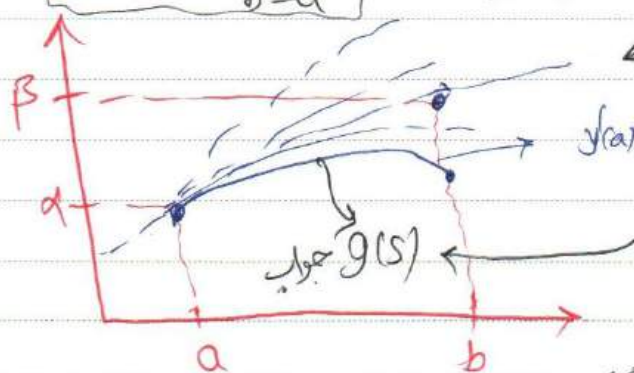
$$y_2(0) = y_2$$

$$dy: y' = v \quad v' = f(x, y, v)$$

$$v' = f(x, y, v) \rightarrow \begin{matrix} y(a) = \alpha & v(a) = ? \\ y(b) = \beta \end{matrix}$$

$$y'(a) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

میکنیم که $v(a)$ را با $y(a)$ تقریب بزنیم
ولی به جواب نرسیم.



با شروع از $y(a)$

جواب $g(s)$

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = f(x, y, v) \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = \beta \end{cases}$$

اگر $g(s) = \beta$ گردد مسئله حل شده است.

$$\begin{cases} y'' = 4t, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$y(1/5) = ?$$

(مثالی)

$$\text{مثلاً} \rightarrow y(0) = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

در این مثال خاص، روش مستقیم قابل حل است ولی می‌خواهیم از روش‌های
ی بسایر عددی استفاده کنیم.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} y_2 \\ 4t \end{bmatrix}}_f \rightarrow Y' = f \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y' = f \\ Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

به روش رانگ-کوتا
حل می‌کنیم

$$Y = Y_0 + \frac{1}{4} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

$$K_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$K_2 = \frac{h}{2} f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + K_1)$$

$$K_3 = \frac{h}{2} f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + K_2)$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + 2K_3)$$

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1/5 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/4 \sqrt{5} \\ 1/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/5 \sqrt{5} \\ 1/5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1/4 \sqrt{5} \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

$$y_1(1/5) \approx 0.4472$$

$$Y^T = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 1.175 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1/5 \sqrt{5} \\ 1/5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/2 \sqrt{5} \\ 1/2 \sqrt{5} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/2 \sqrt{5} \\ 1/2 \sqrt{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/1 \sqrt{5} \\ 1/1 \sqrt{5} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

۱۲۴

$$Y^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y'(0) = -1 \quad \text{هنا } \hat{y} \text{ مائل}$$

$$Y' = \begin{bmatrix} -0.175\omega \\ -0.12\omega \end{bmatrix}$$

$$Y^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

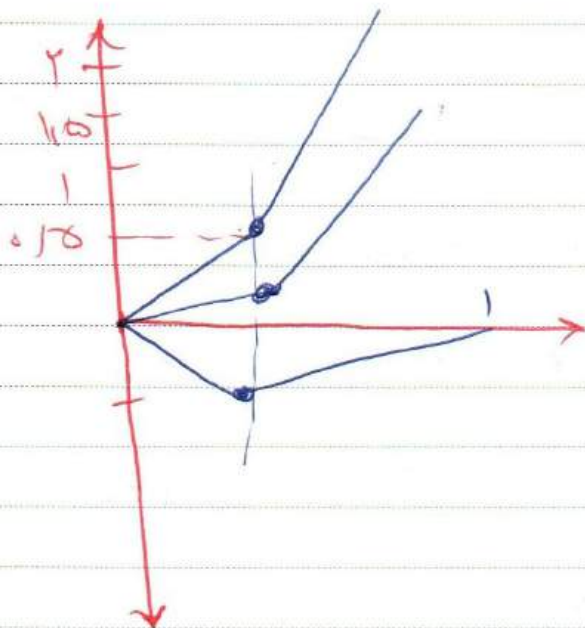
$$y(1) = 0$$

$$y'(0) = 0 \rightarrow Y' = \begin{bmatrix} 0.175\omega \\ 0.12\omega \end{bmatrix}$$

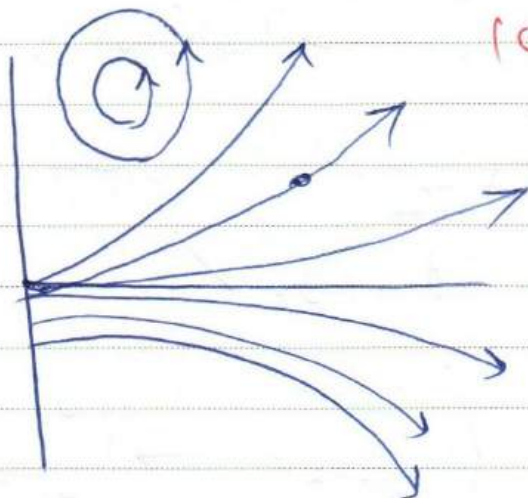
$$Y^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow y(1) = 1$$

$$\rightarrow y(1) = 0 \rightarrow y(0.1\omega) = 0.175\omega \quad \checkmark$$



$$y'' = p$$



روش شوتینگ (میانگاری)

$$y'' = p(t)y + q(t)y'$$

روش انطباق

$$y(a) = \alpha$$

$$y(b) = \beta \quad a \leq t \leq b$$

$$\begin{cases} y(a) = 0 \\ y'(a) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y(a) = \alpha \\ y'(a) = 0 \end{cases}$$

برای محادلات خطی

که می‌توان با این
شرایط‌ها مشخص

$$y_2 = y_1 + \lambda y_2$$

جواب‌های ترکیبی

$$y_1'' = p(t)y_1 + q(t)y_1'$$

جواب‌های ترکیبی

$$\lambda y_2'' = \lambda p(t)y_2 + \lambda q(t)y_2' \Rightarrow (\lambda y_2 + y_1)'' = p(t)(y_1 + \lambda y_2) + q(t)(y_1 + \lambda y_2)'$$

Subject :

Year. Month. Date. ()

اگر y_1 باشد هر λ می توان انتخاب کرد و اگر y_2 باشد $\lambda = 0$ ✓

باید λ را طوری انتخاب کرد که جواب $y_1 + \lambda y_2$ در y_1 گردد نه y_2

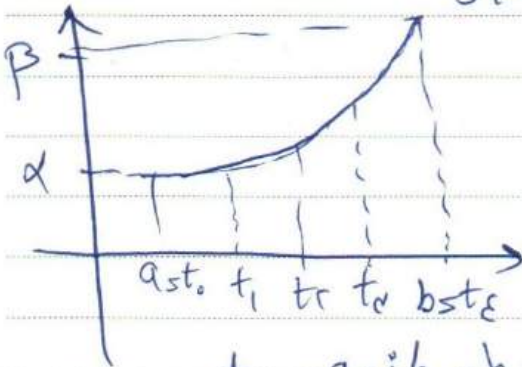
جواب : $y_1 + \lambda y_2$ ✓

مثال

$$\begin{cases} y'' = 4t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y'' = 4t \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = y_1(t) + \frac{y_2(1) - y_1(1)}{y_2(1)} y_2(t)$$

$$y(0.5) = y_1(0.5) + \frac{y_2(1) - y_1(1)}{y_2(1)} y_2(0.5) \quad y_1 + \lambda y_2(1) = y_1(1) + \lambda y_2(1) = 3$$



روش تفاضلات متناهی :

$$[a, b] \text{ را به } n \text{ قسمت تقسیم کنیم} \quad t_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$y'(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y''(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 \left(f(t_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h}) \right)$$

$$\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

مرحلہ تمام مسائل ۳ عدد والا داریم و ماتریس ضرب به نرم یک ماتریس ۳ نظری بدست

$$y'' = 4t \quad 0 \leq t \leq 1$$

مراکز

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 1 \quad y(0.5) = 0.5$$

$$h = 0.5 \quad t_0 = 0 \quad t_1 = 0.5 \quad t_2 = 1$$

$$y_2 - 2y_1 + y_0 = h^2 f(t_1, y_1, y'_1)$$

$$\frac{y_2 - y_0}{h}$$

$$1 - 2y_1 + 0 = (0.5)^2 \left(4 \underset{0.5}{t_1} \right) \rightarrow y_1 = 0.125 \checkmark$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

12A

$$y'' = 4t$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{array}}$$

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

$$u(0) = y(0) \rightarrow c_0 = 0$$

$$u(1) = y(1) \rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$4x_k^6 + 3ax_k^2 + 4ax_k^2 + 4a^2 - 4x_k^4 - 11ax_k^2$$

$$2x_k^6 - 4ax_k^2 + 3a^2$$

$$3a^2 - 4a^2 + 4a^2 = 3a^2$$

۳۱۴۱۴
۷۵
(۱۸)

e

آزمون میان ترم درس محاسبات عددی

زمان: ۳ ساعت

f

۵/۵۰۰۰۵۳

۲۱ فروردین ۱۳۹۲

سؤالات ۶ و ۷ مخصوص گروه‌های استاد کیانپور و سؤالات ۸ و ۹ مخصوص گروه‌های استاد صلواتی هستند.

۱. برای تقریب e^π از سری تیلور استفاده می‌کنیم. اگر بخواهیم این عدد را با دقت 10^{-10} به دست آوریم، عدد π را تا چند رقم اعشار باید داشته باشیم؟ (روش را توضیح دهید)

۲. کامپیوتری داریم که اعداد را تا ۵ رقم معنادار نمایش می‌دهد و هر عدد ورودی را به نزدیک‌ترین عدد ماشینی گرد می‌کند.

الف) اگر $x = 5.00223$ و $y = 5.00013$ ، آنگاه خطای نسبی و مطلق در محاسبه $x - y$ را بیابید.

ب) در محاسبه مجموع $\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100} + 1$ ، اگر از راست به چپ جمع بزنیم دقت بیشتری دارد یا اگر از چپ به راست جمع بزنیم؟ چرا؟

۳. الف) تقریب $\sqrt{15}$ را با استفاده از روش نیوتون (نیوتون-رافسون) با شروع از $x_0 = 2$ توضیح دهید.

ب) چند تکرار لازم است تا جواب تا ۱۰ رقم اعشار درست باشد.

$$(45a+a)(a\sqrt{a}+3a\sqrt{a})$$

$$4a\sqrt{a}$$

$$16a^2 + 40a^2\sqrt{a}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}$$

$$(45a+a)(a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}) = 4a\sqrt{a}$$

پیش‌نهاد شده است. نشان دهید این دنباله، همگرایی مرتبه ۳ است.

۵. مقادیر تابع f مطابق جدول زیر داده شده است. با روش نیوتون و لاگرانژ آن را درونیابی کنید.

$$\frac{24a-}{(3a+a)^2} = \frac{14a^2}{14a^2}$$

$$(2x_k^2 + 3a)(4a)$$

۳	۰	۲	۱	x
۵	-۴	۲	۳	f(x)

$$h = 0.1$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \\ \hline 0.1 \end{array}$$



۶. مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ را به روش

الف) نقطه میانی

ب) سیمپسون

برای $n = 2$ تقریب بزنید.

۷. h را طوری تعیین کنید که خطای محاسبه $\int_0^1 e^x \sin x dx$ با روش

الف) ذوزنقه

ب) سیمپسون

کم‌تر از 10^{-5} باشد.

۸. روش نیوتون را برای حل دستگاه زیر توضیح دهید.

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 - y = 0 \\ 4xy^2 - x = 1 \end{cases}$$

۹. اگر تابع $f(x)$ و نقاط $x_0, \dots, x_n$ داده شده باشند، ثابت کنید چندجمله‌ای درجه n ای مانند $p(x)$ وجود دارد که برای هر $0 \leq k \leq n$ ، $f(x_k) = p(x_k)$ و ثابت کنید که این چندجمله‌ای یکتاست.

موفق باشید.

$$x^6 - 15 \rightarrow 6x^5 \rightarrow 12x^4 \rightarrow 24x^3 \rightarrow 24$$

$$\frac{24x_0}{24}$$

$$\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{4}$$

آزمون پایان ترم درس محاسبات عددی

زمان: ۳ ساعت

۳ تیر ۱۳۹۳

۸. روش انتگرال گیری گاوسی (Gaussian quadrature) عبارت است از یافتن نقاط $x_1, \dots, x_n$ در بازه $[-1, 1]$ و ضرایب $a_1, \dots, a_n$ به طوری که فرمول انتگرال گیری

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n) \quad (1)$$

برای f های چندجمله ای از درجه $2n+1$ دقیق باشد. هدف این سؤال یافتن x_i ها و a_i ها است.

الف) نشان دهید چندجمله ای درجه $n+1$ ای مانند $q(x)$ وجود دارد که برای هر چندجمله ای درجه n مانند $p(x)$

$$\int_{-1}^1 q(x)p(x) dx = 0$$

و این چندجمله ای در حدیک ضرب، یکتاست. این چندجمله ای را وقتی ضریب بزرگترین درجه آن ۱ باشد، چندجمله ای هرمت می نامند.

ب) نشان دهید q ، $n+1$ ریشه حقیقی متمایز در بازه $[-1, 1]$ دارد.

راهنمایی: اگر این طور نباشد یک چندجمله درجه حداکثر n مانند p بسازید که $\int_{-1}^1 q(x)p(x) dx > 0$.

پ) ریشه های q را x_1 تا x_n می نامیم و a_1 تا a_n را ضرایبی می گیریم که فرمول (۱) برای چندجمله ای های درجه n دقیق باشد. نشان دهید فرمول (۱) برای چندجمله ای های درجه $2n+1$ نیز دقیق است. راهنمایی: اگر f از درجه $2n+1$ باشد، آن را بر q تقسیم کنید

$$f = qp + r, \quad \deg r \leq n, \quad \deg p \leq n$$

۹. ضرایب a و b و c و d را طوری تعیین کنید که فرمول انتگرال گیری زیر برای چندجمله ای های درجه ۳ دقیق باشد.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx \approx af(-\frac{3}{4}\pi) + bf(-\frac{1}{4}\pi) + cf(\frac{1}{4}\pi) + df(\frac{3}{4}\pi)$$

موفق باشید.

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{h^2} = \frac{1}{h^2} = \frac{1}{h^2}$$

$$1 = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2}$$

$$1 = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2}$$

$$1 = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2}$$

$$1 = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-3+2$$

$$-2+8+1=7$$

$$4 \rightarrow 25 \text{ ان}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4.8 & 1.15 \end{bmatrix}$$

آزمون پایان ترم درس محاسبات عددی

زمان: ۳ ساعت

۳ تیر ۱۳۹۳

سؤال ۹ مخصوص گروه های استاد صلواتی است.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n + h, y_n + h) + f(x_{n+1} + h, y_{n+1} + h) \right]$$

۱. دستگاه زیر را با استفاده از تجزیه LU حل کنید.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

۲. با استفاده از روش ریچاردسن، یک فرمول مشتق گیری عددی برای محاسبه $f''(x)$ با مرتبه دقت h^4 بیابید.

۳. با استفاده از روش اویلر اصلاح شده با طول گام $h = 0.25$ جواب دستگاه زیر را در $t = 1$ به دست آورید.

$$\begin{cases} x' = 32x + 66y + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y' = -66x - 133y - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

۴. الگوریتم گاوس-سایدل را برای دستگاه زیر تا دو مرحله اعمال کرده و جواب را به دست آورید.

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -61/5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -21/5 \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27 \end{cases}$$

۵. روش به دست آوردن ضرایب آدامز-بشفورت مرتبه چهار را توضیح داده و با استفاده از آن $y(1)$ را در معادله زیر با طول گام $h = 0.25$ به دست آورید.

$$y' = -2xy^2, \quad y(0) = 1$$

۶. فرض کنید ماتریس A دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد و $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. اگر x_k عدد مرحله k ام در روش توانی باشد، نشان دهید یک عدد ثابت C وجود دارد که

$$|x_k - \lambda_1| < C\lambda_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k$$

۷. با توجه به داده های جدول زیر، a و b را طوری تعیین کنید که مدل زیر بهترین تقریب با روش کمترین مربعات باشد.

$$y = \frac{a^2 + x^2}{b^2 x} = \frac{a^2}{b^2 x} + \frac{x}{b^2}$$

راهنمایی: تغییر متغیرهای مناسبی بدهید که مسأله تبدیل به یک مسأله برازش خطی شود.

۴	۳	۲	۱	۰.۵	x
۲	۲.۴	۳.۳	۵.۸	۱۰.۴	y

$$4x_1 + 2 = -1$$

$$4x_1 + 2x_2 = 40$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{23}{5} = \frac{44}{10} + \frac{2x_2}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} + 2x_2 = \frac{22}{5}$$

$$4x_1 + 2x_2 = 40$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{23}{5} = \frac{44}{10} + \frac{2x_2}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} + 2x_2 = \frac{22}{5}$$

$$\frac{2}{5} + 2x_2 = \frac{22}{5}$$

$$2x_2 = \frac{22}{5} - \frac{2}{5} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow x_2 = 2$$

1- بانفون استیم $10^{-2} \times 10^{-4} < |R_n| < \sqrt[3]{V}$ را با دست چهارم است، محاسبه کنید. (*)

حل: ابتدا نزدیک ترین عدد به $\frac{1}{V}$ را پیدا می کنیم به فرضی آن کامل باشد که این عدد $x_0 = 8$

می باشد. $(\sqrt[3]{8} = 2)$ ، فنون کنید $(f(x) = \sqrt[3]{x})$

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \quad x < \eta < x_0$$

$$|R_n| = \frac{|(x-x_0)^{n+1}| |f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-3} \rightarrow n \geq 4$$

حل بسط تیلور تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را به چهار عدد می نویسیم:

$$\sqrt[3]{x} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} (x-x_0)^4$$

$$x = V$$

$$x_0 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{8} + \frac{f'(8)}{1!} (-1) + \frac{f''(8)}{2!} (-1)^2 + \frac{f'''(8)}{3!} (-1)^3 + \frac{f^{(4)}(8)}{4!} (-1)^4$$

$$2 - \text{ نشان دهد: } \sinh = h - \frac{h^3}{3!} + O(h^5)$$

$$f(x) = \sin x \quad f^{(0)}(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x \quad f^{(1)}(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$

$$(*) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n(x)$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$R_n(y) = \frac{h^n}{n!} \cos y \Rightarrow |R_n(y)| = \left| \frac{h^n}{n!} \right| |\cos y| \leq \frac{h^n}{n!} \leq h^n \checkmark$$

۳- اعداد زیر را با مبنای شان و تا ۴ رقم با معنی گردانید.

a) $-25700 \xrightarrow{\text{زیاد شده}} -0.25700 \times 10^5 \rightarrow -0.2570 \times 10^5$

b) $-0.000527532 \xrightarrow{\text{زیاد شده}} 0.527532 \times 10^{-3} \rightarrow 527532 \times 10^{-3}$

که رقم پنجم از $B/2$ کمتر است همانند گرد کردن عمل می کنیم.

a) $-4014840.2 \xrightarrow{\text{زیاد شده}} -0.40148409 \times 10^7 \rightarrow -0.4014840 \times 10^7$ (ب)

b) $30281051 \xrightarrow{\text{زیاد شده}} 0.30281051 \times 10^8 \rightarrow 0.30281 \times 10^8$

۴- اگر 34152 یک عدد تقریبی تا ۵ رقم با معنی صحیح باشد حد بالایی خطای نسبی را بیابید.

$$\left\{ \begin{array}{l} |r_x| \leq \frac{1}{4} B^{-k+1} \leftarrow \text{گرد کردن} \\ |r_x| \leq \frac{1}{4} B^{-k} \leftarrow \text{قطع کردن} \end{array} \right. \quad |r_x| \leq \frac{|34152 - 34151.5|}{34151.5} = \frac{1}{2 \times 34151.5}$$

لکه این کوئیرتین حد بالایی خطای نسبی است و

مناسب تر است.

۱- برای حل $f(x) = 0$ و روش تکراری $x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$ و $x = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$

معرفی شده است. اولاً این روش همگرا می باشد. همگرا هستند. ثانیا مرتبه همگرا

را تعیین کنید: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 2}{x_n + 1} \Rightarrow d = \frac{d+2}{d+1}$ (حل)

$\Rightarrow d(d+1) = d+2 \rightarrow d = \pm \sqrt{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$

تمرین ۱۱ الف) الگوریتمی برای روش دو بخشی بیان کنید

ب) با استفاده از شرط توقف $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$ برنامه‌ی matlab آن را بنویسید

الف) ورودی؟ خروجی؟ حلقه‌ی تکرار؟

الگوریتم: ورودی: اعداد حقیقی a و b و تابع پیوسته $f(x)$ و عدد مثبت ϵ

خروجی: تقریب از ریشه‌ی $f(x) = 0$ بر بازه‌ی (a, b) با دقت ϵ

گام ۱: قرار دهید $c = \frac{a+b}{2}$

گام ۲: اگر $f(c) = 0$ آنگاه c ریشه است.

گام ۳: اگر $f(a)f(c) > 0$ قرار دهید $a = c$ در غیر این صورت $b = c$

گام ۴: اگر شرط توقف برقرار است c را به عنوان تقریب ریشه برگردان وگرنه به گام ۱ برگردید.

ب) تمرین نقولی چهارشنبه ۲۷، ۱۱، ۹۳

تمرین ۲ الف) الگوریتمی برای روش نیوتن بنویسید

نمته الف را با برنامه نویسی در متلب اجرا کنید (شرط توقف)

$$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$$

Subject :

Year . Month . Date . ()

۳- برای تعیین $\sqrt[3]{2}$ از فرمول نیوتن استفاده کنید.

$$x = \sqrt[3]{2} \rightarrow x^3 = 2 \rightarrow f(x) = x^3 - 2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$$

درونیایی

درونیایی لاگرانژ

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1 \quad \sum_{i=0}^n x_i^k L_i(x) = x^k$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

مثال ۱) با استفاده از درونیایی لاگرانژ عبارت زیر را بسازید

$$x^2 + 1$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3 \quad f(x) = x^2 + 1$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -1(x-1)(x-3)$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

4

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(2-1)(2-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n x_i^k L_i(x) = x^k \quad f(x) = x^2 + 1$$

$\underbrace{f_1}_{f_1} \quad \underbrace{f_2}_{f_2}$

$$x^2 = \sum_{i=0}^2 x_i^2 L_i(x) = x_0^2 L_0(x) + x_1^2 L_1(x) + x_2^2 L_2(x) = L_0(x) + 4L_1(x) + 9L_2(x)$$

$$\Rightarrow 1 = x^0 = \sum_{i=0}^2 x_i^0 L_i(x) = L_0(x) + L_1(x) + L_2(x)$$

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{L_0(x) + 4L_1(x) + 9L_2(x) + L_0(x) + L_1(x) + L_2(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{2L_0(x) + 5L_1(x) + 10L_2(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{2 \frac{(x-2)(x-3)}{2}}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{5 \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{10 \frac{x(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)(x-3)}}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

۵- فرض کنید $L_i(x)$ چند جمله‌ای لاگرانژ بر روی نقطه‌های

$x_0, x_1, \dots, x_n$ باشد اگر $f(x) = (x-x_0) \dots (x-x_n)$ ثابت کنید.

$$L_i(x) = \frac{f(x)}{(x-x_i) \cdot f'(x_i)}$$

$$f(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \times (x-x_i)$$

با در ثابت کنیم این نسبت $f'(x)$ است.

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 \times (x-x_1)\dots(x-x_n) + \dots$$

$f'(x_i)$ در هر جایی که (x_i-x_i) دارد صفر می شود و نهایتاً فقط عددی به متبقی $(x-x_i)$ در آن

$$f'(x) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n) \quad \text{حذف شده باقی می ماند پس}$$

✓ (x_i-x_i) ندارد.

۶- تیرین $f(x) = \frac{1}{x-a}$ نشان دهید.

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{(x_0-a)(x_1-a)\dots(x_n-a)}$$

$$n=1, \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{\frac{1}{(x_1-a)} - \frac{1}{(x_0-a)}}{(x_1-x_0)} = \frac{(-1)^1}{(x_1-a)(x_0-a)}$$

(مبنای استقراء)

$$n=k$$

فرض استقراء

$$n=k+1, \quad f[x_0, \dots, x_{k+1}] = \frac{(-1)^{k+1}}{(x_0-a)\dots(x_{k+1}-a)}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$f[x_0, \dots, x_{k+1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x_0, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_0}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(x_1 - a) \dots (x_{k+1} - a)} - \frac{(-1)^k}{(x_0 - a) \dots (x_k - a)}$$

$$= \frac{(-1)^k (x_0 - a - x_{k+1} + a)}{(x_0 - a) \dots (x_{k+1} - a)} = \frac{(-1)^{k+1}}{(x_0 - a) \dots (x_{k+1} - a)} \quad \checkmark$$

✓ فون کنڊ $T_n(x)$ جي خاصيت ثابت ڪند

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) \cdot T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} n & m=n=0 \\ 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m=n > 0 \end{cases}$$

خاصيت: $T_n(x) = \cos(n \underbrace{\cos^{-1}(x)}_{\theta})$

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad x = \cos\theta$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos n\theta \cdot \cos m\theta}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\pi}^0 \frac{-\cos\theta \cdot \cos m\theta}{|\sin\theta|} \times \sin\theta d\theta$$

$$x = \cos\theta \rightarrow dx = -\sin\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{r} (\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta) d\theta$$

$$\rightarrow m=n > 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \left(\frac{\sin 2n\theta}{2n} + \theta \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\sin 2n\pi}{2n} + \frac{\pi}{r} = \frac{\pi}{r} \checkmark$$

$$\rightarrow (m \neq n) \Rightarrow \frac{1}{r} \left(\frac{\sin(m+n)\theta}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\theta}{m-n} \right) \Big|_0^{\pi} = 0 \checkmark \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$\rightarrow m=n=0 \Rightarrow \frac{1}{r} (1+1) \int_0^{\pi} d\theta = \frac{2\pi}{r} \checkmark$$

تمرینات مهم امتحان

۱- فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متناظر باشند $L_j(x)$

$$L_j'(x_j) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_i}$$

چند جمله ایی لاگرانژ باشد ثابت کنید

Subject:

Year: Month: Date: ()

۲- اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای درجه‌ی سوم باشد، ثابت کنید

$$f[\alpha, \beta, \gamma] = \frac{1}{4} f'''\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$$

۳- اگر $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$ چند جمله‌ای n مرتبه درجه‌ی n باشد $T_n(x)$

و باید $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ را چنانی

۴- ریشه‌های $T_n(x)$ را بیابید.

مادامی $\alpha_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad k=0, 1, \dots, n-1$

بمبانی شود

۵- اگر $p(x)$ چند جمله‌ای درجه‌ی n باشد و $(1, 2)$ و $(2, 3)$ باشد

درگاه ضرایب $p(x)$ را مشخص کنید.

چنانی $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ آنگاه شرط درجه‌ی $p(x)$ را

از رابطه‌ی $e_n = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} |(x-x_0) \dots (x-x_n)|$ استفاده کنید $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_n = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Subject

Year Month Date ()

۶- عبارت خطای دوینایی برای تابع $f(x)$ درجه دوم را بیابید.

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$$

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} |(x-x_0) \cdots (x-x_n)|$$

۷- اگر $f(x) = x^{n+1}$ و $P_n(x)$ چندجمله‌ای دوینایی $f(x)$ در نقاط $x_0, \dots, x_n$ باشد نشان دهید

i) $P_n(x) = x^{n+1} - (x-x_0) \cdots (x-x_n)$

ii) $f[x, x_0, \dots, x_n] = 1$

iii) $f[x_0, \dots, x_n] = x_0 + \dots + x_n$

۸- اگر دنباله $\{x_n\}$ از $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + a)}{2x_n^2 + a}$ تعریف شده باشد و $\sqrt{a}$ حد آن باشد

را بیابید.

۹- اگر $F(x) = (x-x_0) \cdots (x-x_n)$ و $\sum \alpha_i \frac{F(x)}{(x-x_i) F'(x_i)} = 0$ را حل کنید.

را بیابید $\alpha_0 + \dots + \alpha_n$

$$\sum L_i(x) = 1 \quad \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \dots + \alpha_n L_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = 0 \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Subject :

Year. Month. Date. ()

نقطه‌های راست
n+1
نقطه

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \rightarrow n+1 \text{ مقدار و } n+1 \text{ نقطه}$$

$$w_n \bar{w}_1 \text{ و } x_n \bar{x}_0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ f(x) &= x \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih \\ i &= 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

تمرین (1) فرمول نقطه‌های راست را بنویسید

$$w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\begin{aligned} n+1 &= 4 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^3 w_i f(x_i) = \int_a^b f(x) dx$$

(1)

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_0 &= 0 \quad x_1 = x_0 + 1 \times h \text{ و } h \\ x_2 &= 2h \quad x_3 = 3h \\ x_4 &= 4h \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \rightarrow 4h = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \\ f(x) &= x \rightarrow \frac{9h^2}{2} = 0 + hw_1 + 2hw_2 + 3hw_3 \\ f(x) &= x^2 \rightarrow \frac{36h^3}{3} = 0 + h^2w_1 + 4h^2w_2 + 9h^2w_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow \frac{36h^3}{3} = 0 + h^2w_1 + 4h^2w_2 + 9h^2w_3$$

$$\begin{aligned} r_1 &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4h \\ 9h^2/2 \\ 36h^3/3 \\ 144h^4/4 \end{bmatrix} \\ r_2 &\begin{bmatrix} 0 & h & 2h & 3h \end{bmatrix} \\ r_3 &\begin{bmatrix} 0 & h^2 & 4h^2 & 9h^2 \end{bmatrix} \\ r_4 &\begin{bmatrix} 0 & h^3 & 8h^3 & 27h^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3$

Subject :

Year , Month , Date ()

2.6.1 $f(x) = P_n(x) + e_n(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_n(x) dx + \underbrace{\int_a^b e_n(x) dx}_{\text{Error}} \quad \text{1st step}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$\int_a^b P_n(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx}_* = \sum_{i=0}^n f(x_i) d_i, \quad d_i = \int_a^b L_i(x) dx$$

$$x = a + th$$

$$x = a \quad a = a + th \rightarrow t = \frac{a-a}{h} = 0$$

$$x = b \quad b = a + th \rightarrow t = \frac{b-a}{h} = n$$

$$\Rightarrow * \rightarrow d_i = \int_0^n \frac{(x + th - x - jh)}{(x + h - a - jh)} h dt \rightarrow \int_a^b \frac{(t - j)}{(i - j)} h dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^n B_i f(x_i)$$

$$\underbrace{\int_a^b \frac{(t - j)}{(i - j)} h dt}_{B_i}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_i) \quad \text{where: } \begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = b \end{cases}, h = \frac{b-a}{n}$$

$$n=1 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^1 \beta_i f(x_i) = h (\beta_0 f(x_0) + \beta_1 f(x_1))$$

$$\beta_0 = \int_0^1 \frac{(t-1)}{(0-1)} dt = - \left[\frac{(t-1)^2}{2} \right]_0^1 = +\frac{1}{2} \quad \left\{ \sum f(x_i) \beta_i \right.$$

$$\beta_1 = \int_0^1 \frac{(t-0)}{(1-0)} dt = \frac{1}{2}$$

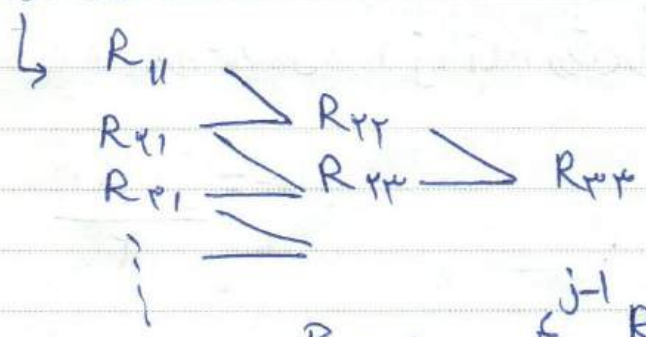
$$i=1, j=0 \rightarrow \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{1} \left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} \right] = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

نمونه کویلی: $n=2$ و 1, 3.

نمونه 3: ثابت کنید $\sum_{i=0}^n \beta_i = n$

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_a^b 1 dx = h \sum_{i=0}^n \beta_i \rightarrow \sum_{i=0}^n \beta_i = n \quad \checkmark$$

$(b-a) \leftarrow \frac{(b-a)}{n}$



$$R_{k,j} = \frac{f^{j-1} R(k)(j-1) - R(k-1)(j-1)}{f^{j-1} - 1}$$

تمرین ۴) اگر برای محاسبه $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{2 + \sin x}$ از روش رامبرگ استفاده کنیم در این واقع بر

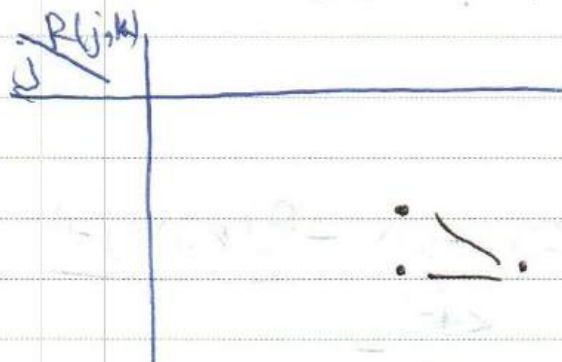
تک سهم (در این اول) را باید.

$$\begin{cases}
 R_{11} = \frac{\pi/4 - (-\pi/4)}{2} = \left(f(\pi/4) + f(-\pi/4) \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \\
 R_{21} = \frac{\pi/4 + (-\pi/4)}{4} \left(f(\pi/4) + 2f(0) + f(-\pi/4) \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{12} \\
 R_{31} = \frac{\pi/4 + 2(-\pi/4) + \pi/4}{8} \left(f(\pi/4) + 2f(-\pi/4) + 2f(0) + f(\pi/4) \right) = \frac{17\pi}{144} \\
 \left. \begin{cases}
 R_{22} = \frac{f(R_{21} - R_{11})}{4} = \frac{2\pi}{9} \\
 R_{23} = \frac{f(R_{21} - R_{21})}{4} = \frac{16\pi}{252}
 \end{cases} \right\} R_{23} = \frac{f^2(R_{22} - R_{22})}{16} = \frac{4\pi}{144}
 \end{cases}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

تمرین ۵) برای محاسبه در (ژ و ۱) به روش رامبرگ چند درجه نیاز است؟



$$\text{جواب} = \frac{z(z+1)}{2}$$

$$\therefore \quad 1+2$$

$$\therefore \quad 1+2+3$$

$$\vdots$$

۹۳، ۲، ۱۳

تمرین ۱) حاصل $\int_{-1}^{+1} \ln \frac{1-x}{1+x} dx$ را با استفاده از فرمول ۲ نقطه‌ای گاوس بیابید.

$$f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

$$f(-x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = -f(x)$$

نکته خاصیت

تایع فرد است پس $f(\sqrt{5}/6)$ و $f(-\sqrt{5}/6)$ هم نامر شوند حاصل قمر است.

$$\frac{1}{x} f(x)$$

تقریب برای انتگرال

تصویر (۲) درجه دقت را برای فرمول انتگرال گیری $\int f(x) dx = \frac{4}{3} f(\frac{1}{3}) + \dots$ باید و بس از این

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

فرمول برای انتگرال زیر باید و با مقدار واقعی مقایسه کنید.

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_0^1 1 dx = 1 \quad \frac{4}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = 1 \quad 1 = 1 \checkmark$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \checkmark$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad \frac{4}{3} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3} \quad \text{پس مرتبه دقت ۲ است.}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctg}(x) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{مقدار دقیق}$$

$$\text{مقدار تقریب} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{1+(\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+1^2} = \frac{37}{40}$$

$$\text{مقدار خطا} = \left| \frac{\pi}{4} - \frac{37}{40} \right|$$

۴ یادآوری: اگر تابع f در نور $a \leq x \leq b$ و $-\infty < y \leq \infty$ پیوسته باشد و در نامعلوم

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

زیرمصدق کند:

آنگاه معادله $y = f(x, y)$ و $y(x_0) = y_0$ جواب یکتا دارد.

Subject:

Year: Month: Date: ()

تمرین ۳) اگر $y' = 1 + x \sin(xy)$ وجود و یکتایی جواب را برای این معادله بررسی کنید.

$y(0) = 0$ و $0 < x \leq 2$

$f(x, y) = 1 + x \sin(xy) \rightarrow$

هر دو در $\mathbb{R}^2$ در بازه $[0, 2]$

$f_y(x, y) = x^2 \cos(xy) \rightarrow$

پیوسته است پس جواب دارد و یکتا است.

راه دوم: واضح است که تابع f در $\mathbb{R}^2$ پیوسته است. حال شرط لیب-شوارتز را طبق قضیه

وجود و یکتایی جواب بررسی می‌کنیم: $y' = f(x, y) = 1 + x \sin(xy)$

$$\frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{df}{dy}(x, y)$$

$y_1 \leq y \leq y_2 \rightarrow f_y = \frac{df}{dy} = x^2 \cos(xy)$

$\frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1} = x^2 \cos(xy) \rightarrow f(x, y_2) - f(x, y_1)$

$= x^2 \cos(xy) (y_2 - y_1)$

واحد سوال ۴ صوفی
یا بعدی

یادآوری: $y(0.1) = y(0) + 0.1 y'(0) + \frac{(0.1)^2}{2} y''(0) = 1 + (0.1 \times 1) + \frac{(0.1)^2 \times 2}{2} = 1 + 0.1 + 0.01 = 1.11$

$y_n(x) = 1 + y_1 + \dots + y_{n+1} = y(x_n + h) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots +$

$\frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_n)$

تمرین (۴) ما این مقدار اولیه را در نظر بگیریم به ازای $h=0.1$ حاصل

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$y(1)$ مرتبه دوم را بیابید.
 $f(x, y) = y' = x + y$ نکته:

$$x_0 = 0, y_0 = 1 \quad x_1 = 0.1 \quad y_1 = ? \quad h = 0.1$$

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) = 1 + (0.1)(1) + \frac{(0.1)^2}{2} (2)$$

$$y' = x + y \quad (*) = 1.11$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = 1 + y' \rightarrow y''(0) = 1 + y'(0) = 1 + 1 = 2$$

$\uparrow$ x_0 $\downarrow$ $x(0) + y(0)$

تمرین (۵) با استفاده از بسط تیلور مرتبه K برای معادله دیفرانسیل $y' = x + y$ شرط $y(0) = 1$

$$\frac{y_{n+1} + x_{n+1}}{y_n + x_{n+1}}$$

جواب تقریبی

$$y_{n+1} = y(x_n + h) = y(x_n) + h y'(x_n) + \dots + \frac{h^{(K)}}{K!} y^{(K)}(x_n)$$

$$y' = x + y \rightarrow y'' = 1 + y' = 1 + x + y \rightarrow y''' = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$y^{(4)} = y^{(5)} = \dots = y^{(K)} = 1 + x + y$$

$$y_{n+1} + x_{n+1} = y_n + x_{n+1} + h(x_n + y_n)$$

Subject :

Year . Month . Date . ()

تمرین ۶) معادله‌ی دیفرانسیل $y' = e^{xy} + 1$ با شرط $y(0) = 0$ را در نظر بگیرید مقدار

$y(0.1)$ را با ربط تیلور مرتبه‌ی ۲ با گام ۰.۱۱ بیابید

تمرین ۱۷) $y' = e^{xy}$ ← با ربط تیلور مرتبه‌ی ۳ برای $y(0.1)$ بیابید .
 $y(0.1) = 1$

ماتریس A را یک مقدار تویم هرگاه $A^T = -A$

۱- اگر A ماتریس یک مقدار باشد، آنگاه برای هر بردار x مانند x نشان

دهید:

$$x \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{یعنی}} x, n \times 1 \quad x^T A x = 0$$

$$x^T, 1 \times n$$

$$(ج) \quad \underbrace{(x^T A x)^T}_{1 \times n} = \underbrace{x^T}_{1 \times n} \underbrace{A^T}_{n \times n} \underbrace{(x)^T}_{n \times 1} = x^T (-A) x = -x^T A x$$

$$\Rightarrow 2x^T A x = 0 \rightarrow x^T A x = 0$$

۲- به ازای کدام مقدار K ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & 0 & K \\ 0 & 1 & -1 \\ K & 0 & 1 \end{pmatrix}$ می تواند متعامد نرمال باشد؟

متعامد نرمال $\rightarrow A^T A = A A^T = I \checkmark$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & K \\ 0 & 1 & -1 \\ K & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & K \\ 0 & 1 & -1 \\ K & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

هاس هولدر

$$H = I - \frac{2UU^T}{\|U\|_2^2} \rightarrow HH^T = H^TH = I$$

* (تئوری) (a) فرض کنید α برداری، n بعدی باشد و ماتریس هاس هولدر H را
طوری بیابید که $Hx = \alpha x$

(b) $\|Hx\|_2 = \|x\|_2$ را طوری بیابید که

(a) $H = I - \frac{2UU^T}{\|U\|_2^2} \rightarrow Hx = (I - \frac{2UU^T}{\|U\|_2^2})x = \alpha x$

$$\Rightarrow x - \frac{2UU^T}{\|U\|_2^2}x = \alpha x \Rightarrow x - \alpha x = \frac{2U^Tx}{\|U\|_2^2}$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)x = \frac{2U^Tx}{\|U\|_2^2}U$$

ضریب

U باید در راستای $x - \alpha x$ باشد.

$$\|Hx\|_2^2 = \|\alpha x\|_2^2 \rightarrow \|Hx\|_2^2 = (Hx)^T(Hx) \quad (b)$$

$$= x^T H^T H x = x^T x = \|x\|_2^2$$

$$= \|x\|_2^2 = |\alpha|^2 \|x\|_2^2 \rightarrow |\alpha|^2 = 1 \rightarrow \alpha = \pm 1$$

* اگر A و B و $A+B$ وارون پذیر باشد در این صورت اثبات کنید

$$[A(A+B)^{-1}B]^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$$

یا داریم $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$[A(A+B)^{-1}B]^{-1} = B^{-1}(A+B)A^{-1} = (B^{-1}A + I)A^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$$

مقادیر و بردارهای ویژه $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ را بیابید.

مقدار ویژه $\det(A - \lambda I) = 0$

رابطی بین بردار $Ax = \lambda x$ و مقدار ویژه λ و بردار ویژه x

$x \in \mathbb{R}^n$, $x, n \times 1$
 $A, n \times n$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 9 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$14 - 8\lambda + \lambda^2 - 36 = 0$ مقدار ویژه
 $\lambda^2 - 8\lambda - 22 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm 46}{2}$

$Ax - \lambda x = 0 \xrightarrow{\lambda = -2} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 = -2x_1 \rightarrow 4x_1 = -9x_2 \rightarrow 2x_1 = -\frac{9}{2}x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 = -2x_2 \rightarrow 4x_1 = -6x_2 \end{cases}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{2}{9}x_1 \end{pmatrix}$

Subject :

Year, Month, Date, ()

۶- اگر بردار $\alpha = (1, 1, 1)^T$ یک بردار ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ حاصل $a+b$ را بیابید.

$$\rightarrow A\alpha = \lambda\alpha \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

معادله‌ی خطی
 $\begin{bmatrix} 1 \\ a+b+1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow a+b=2$

۷- $A = \begin{pmatrix} P & 1 & 0 \\ 1 & P & 1 \\ 0 & 1 & P \end{pmatrix}$ به ازای کدام مقدار P مثبت معین است؟
 $\alpha \in \mathbb{R}^n, n \times 1 \rightarrow \alpha^T A \alpha > 0$

راه اول :

$$\begin{cases} P > 0 \quad \checkmark \\ P^2 - 1 > 0 \rightarrow P > 1, P < -1 \\ P^3 - 2P > 0 \rightarrow P(P^2 - 2) > 0 \rightarrow P^2 - 2 > 0 \quad \begin{matrix} P > \sqrt{2} \\ P < -\sqrt{2} \end{matrix} \end{cases}$$

راه دوم : $\det(A - \lambda I) = 0$ مقدار ویژه

$$\rightarrow \det \left[\begin{pmatrix} P & 1 & 0 \\ 1 & P & 1 \\ 0 & 1 & P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} P-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & P-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & P-\lambda \end{pmatrix}$$

چون P مثبت بنابه نقطه $P = \lambda \rightarrow P = \lambda$

$$\rightarrow (P - \lambda) \left((P - \lambda)^2 - 4 \right) = 0$$

$$\rightarrow P - \lambda = \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P - \sqrt{2} = \lambda > 0 \Rightarrow P > \sqrt{2} \checkmark \\ P + \sqrt{2} = \lambda > 0 \Rightarrow P > -\sqrt{2} \times \end{cases}$$

جواب می‌باشد $\Rightarrow P \in [\sqrt{2}, +\infty]$

نشان دهیم نامساوی زیر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر برداری برقرار است. خطی هم

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\| \alpha x \| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| \|x\|$ خاصه دوم

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

برای $\|y\|$: $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \rightarrow$ یادآوری

$$\rightarrow \|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \overbrace{\| -y \|}^{\|y\|}$$

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \rightarrow \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\| \Rightarrow$$

$$\|x - y\| = \|y - x\|$$

$$\Rightarrow \|x - y\| \geq \|y\| - \|x\|$$

$$\begin{cases} \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \\ \|x - y\| \geq -(\|x\| - \|y\|) \end{cases} \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

ثانیه ۲۷، ۲۸

مثال فرض کنید A و B و C ماتریس‌هایی با بعد مناسب باشند نشان دهید اگر $BA = I$ (مثال)

$AC = I$ آنگاه $B = C$ اگر A و B ماتریس‌هایی نامفرد باشند آنگاه

AB هم نامفرد است.

یادآوری: ماتریس A نامفرد است $x \in \mathbb{R}^n$ $AX = 0 \rightarrow x = 0$

$$BA = I \xrightarrow{\times A^{-1}} \underbrace{BA A^{-1}}_I = \underbrace{IA^{-1}}_{A^{-1}}$$

$$\rightarrow B = A^{-1} \quad \textcircled{I}$$

$$AC = I \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}AC = A^{-1}I \rightarrow C = A^{-1} \quad \textcircled{II}$$

$$\xrightarrow{I, II} B = C$$

$$AX = 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$$

$$y \in \mathbb{R}^n \rightarrow By = z \in \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{A}_{n \times n} \underbrace{By}_x = 0 \rightarrow By = 0 \rightarrow y = 0$$

نباید داد

تمرین ۲) فرض کنید A و B دو ماتریس داده شده باشند به طوری که $AX = BX$ برای هر

برد x باید متساوی باشد، نشان دهید $A = B$

حل: فرض کنید $A = [a_1, \dots, a_n]$ که در آن $a_1, \dots, a_n$ ستون های ماتریس

A است و فرض کنید $B = [b_1, \dots, b_n]$ که $b_1, \dots, b_n$ به ترتیب ستون های

$$AX = BX \rightarrow [a_1, \dots, a_n]x = [b_1, \dots, b_n]x$$

چون طبق فرض $AX = BX$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ پس برای e_i هم این رابطه برقرار

$$Ae_i = Be_i \rightarrow a_i = b_i \quad \forall i$$

$\forall i$

تمرین ۳ نشان دهید که مقدار یکی ویژه یک ماتریس مثلثی عناصر روی قطر اصلی آن است

یادآوری: دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر است با حاصلضرب عناصر قطر اصلی.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & & \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = 0$$

تمرین ۴ نشان دهید $\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$ اگر و تنها اگر x و y دوبردار عمود بر هم باشند.

یادآوری: اگر بردار x عمود بر y باشد، آنگاه $x^T y = 0$

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \|x\|_2^2 = x^T x$$

$$\text{مح: } \|x+y\|_2^2 = (x+y)^T (x+y) = (x^T + y^T)(x+y) =$$

$$x^T x + y^T y + \underbrace{x^T y}_{=0} + \underbrace{y^T x}_{=0} \iff \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$$

اگر $x^T y = 0$ و $y^T x = 0$ ← x, y برهم عمودند

تمرین ۵) فرض کنید Q ماتریس $m \times n$ باشد با ستون‌های متعامد، نشان دهید ستون‌های Q باید مستقل خطی باشند.

یادآوری: اگر دو بردار q و q' برهم عمودند آنگاه $q_i^T q'_j = 0$ $i \neq j$

$$q_i^T q_i = 1 \rightarrow a_1 q_1 + \dots + a_n q_n = 0 \xrightarrow{\times q_i^T}$$

$$a_1 q_1 q_i^T + \dots + a_n q_n q_i^T = a_i \|q_i\|_2^2 = a_i \rightarrow a_i = 0$$

تمرین ۶) اگر ماتریس $A_{m \times n}$ دارای n ستون مستقل خطی باشد نشان دهید AA^T

نامفرد است. (۵) برای این نشان دهیم AA^T نامفرد است که نسبت به

کسیم AA^T معین مثبت است (زیرا ماتریس نامفرد مقدار ویژه صفر ندارد.)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x > 0$$

$$\text{حکم} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A^T A x > 0, x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax)$$

$$= \|Ax\|_2^2 > 0$$

پس AA^T ماتریس معین مثبت است، پس تمام مقادیر ویژه‌ی آن مثبت است پس AA^T نامفرد است.

Subject :

Year . Month . Date . ()

تمرین ۱۷ فرض کنید x و y بردارهای n تایی باشند و $z = xy^T$ یک راه برای محاسبه

z^k ارائه دهید. چون x و y بردارهای n تایی هستند، z یک ماتریس $n \times n$ خواهد بود.

$$z^2 = (xy^T)(xy^T) = x(y^T x)y^T = xy^T(y^T x)$$

$$z^3 = (xy^T)(xy^T)(xy^T) = x(y^T x)(y^T x)y^T = xy^T(y^T x)^2$$

$$z^k = (xy^T) \dots (xy^T) = xy^T (y^T x)^{k-1} = z (y^T x)^{k-1}$$

الگوریتم: اعمال زیر را از n بار تکرار کنید تا به z^k برسید.

۱- $t = y^T x$ ۲- $b = t^{k-1}$ ۳- $z' = z \cdot b$

تمرین ۱۸ اگر ماتریس A دارای n ستون مستقل خطی باشد و $Ax = Ay$ آنگاه $x = y$.

اگر A دارای n سطر مستقل خطی و یا n ستون مستقل خطی باشد وارون پذیر است.

$$Ax = Ay \rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}Ay \rightarrow x = y$$

* مثال ارائه دهید اگر A سطرهای مستقل خطی داشته باشد اگر $Ax = Ay$ آنگاه لزوماً $x \neq y$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x \neq y$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = Ay = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Subject: _____

Year. _____ Month. _____ Date. ()

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 = 0 \rightarrow a_1 (0 \cdot 1 \cdot 0) + a_2 (0 \cdot 0 \cdot 1) = 0$$

$$\rightarrow a_1 = a_2 = 0 \quad \checkmark$$

Subject :

Year . Month . Date . ()