

- مفصل اول:
- تنش - کرنش

- بارگذاری های وارد بر سازه:

- نیروها: گسترده، متمرکز

- نیروهای گسترده:
حجمی: مثل نیروی وزن
سطحی: مثل نیروی وارد بر سطح از یک سیال
خطی: مثل نیروی وارد بر زنجیر و تار

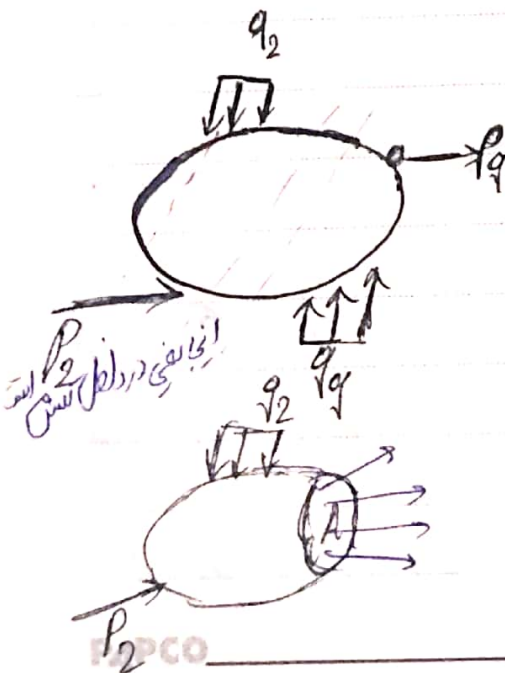
- فشار: به است نیروی های گسترده سطحی عمود بر سطح آزاد جسم

$$P = \frac{F}{A} \quad \left(\frac{N}{m^2} \right) = (Pa) \quad \text{پاسکال}$$

* فشار عمود بر سطح آزاد اثر می کند و در راستای دایره موافق ندارد.
* هر فشار نوعی از تنش است.

- تنش (ک):

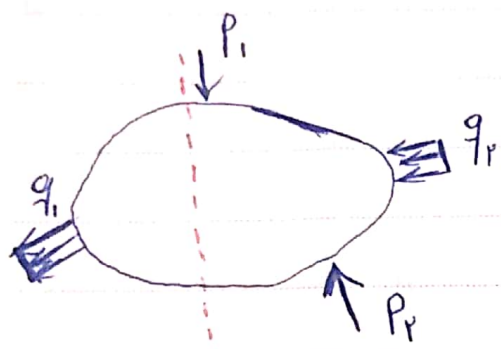
* برای ایجاد تعادل در هر یک از مقطع ها نیروی داخلی گسترده سطحی ایجاد می شود.
* به شدت این نیروها در هر نقطه تنش گفته می شود.
* در سطح جسم به جز جاهایی که بار قرار دارد تنش صفر است.
* تنش ناشی از نیروهای داخلی است.



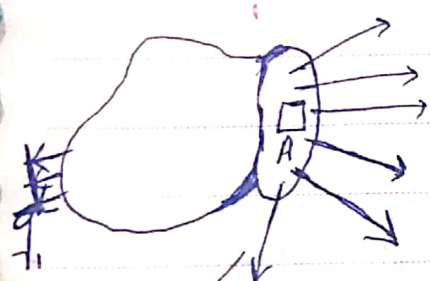
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{or} \quad \text{stress} = \frac{F}{A}$$

تنش می تواند عمود بر جسم نباشد

- * تنش بر خلاف فشار محسوب می شود و می تواند بر سطح جسم عمود باشد.
- * بر روی سطح آزاد اجسام بدون بارگذاری خارجی تنش کمتری ظاهر می شود.
- * تنش بر خلاف فشار با مقدار مثبت و منفی که تنش در آن اثر می کند نشان داده می شود. (تension - compression)



- تنش ها:

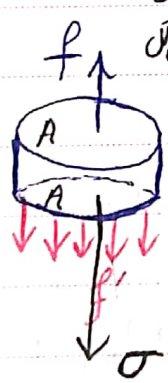
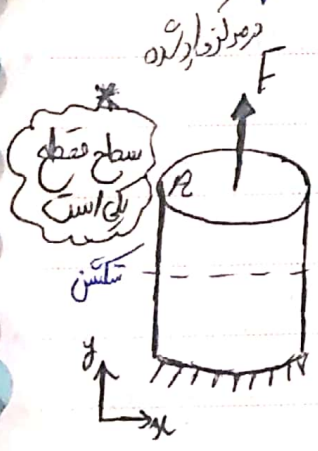


normal stress σ تنش عمودی (نرمال): مولفه عمود بر سطح صفحه
 shear stress τ تنش برشی: مولفه موازی با سطح
 (تواند عمود بر سطح باشد)

$$\sigma_T = \sigma + \tau$$

تنش کل = تنش نرمال + تنش برشی

- تنش نرمال:



$$\sum F_y = 0 \rightarrow F = F'$$

$$\sigma = \frac{F'}{A} = \frac{F}{A}$$

* اگر سطح مقطع یا نیروها با هم یکی نباشند نمی شود از رابطه بالا استفاده کرد

* یک حالت ممکن است سطح مقطع متفاوت باشد و در یک حالت ممکن است نیروها یکی نباشند از رابطه $\sigma = \frac{F'}{A} = \frac{F}{A}$ نمی توان استفاده کرد.
 شدت نیروها ثابت باشد

سطح مقطع جسم متفاوت باشد



«تنش کمتری داریم»
(-)

normal stress -



$$\sigma_{y1} = \frac{F}{A(y)}$$

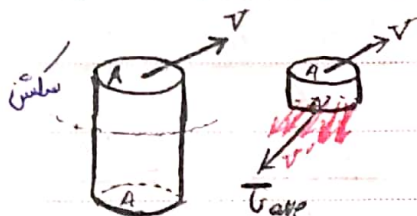


$$\sigma_{y1} = \frac{F(y)}{A}$$

«تنش بیشتری داریم»
(+)



«تنش بیشتری داریم»
(+)

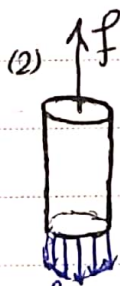


جهت حفظ تعادل جسم
 $V' = V$

تنش برشی:

$$\tau_{ave} = \frac{V'}{A} = \frac{V}{A}$$

«بزرگترین تنش»

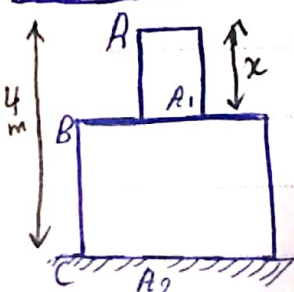


و ما هم باید این
که تغییر فرمها و توزیع تنش
کنترل است جای مناسبی است برای این

$$\sigma_{ave} = \frac{F'}{A} = \frac{F}{A}$$

مثال: ستونی به ارتفاع ۴م برای تحمل وزن خود از دو قسمت AB و BC با قطرهای ۲۰۰mm و ۴۰۰mm تشکیل شده است طول

قسمت AB چند باشد تا کمترین تنش نرمال در قسمت های AB و BC یکسان شود؟ (وزن مخصوص ۸)



جایی که نیرو بیشتر است تنش را داریم
مساحت مقطع یکسان

AB:

$$\sigma_{max} = \sigma_B$$

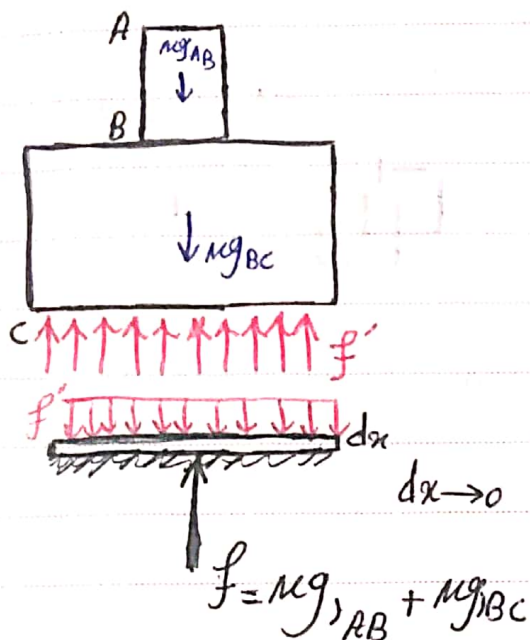
$$\sigma_B = \frac{F}{A} = \frac{W_{AB}}{A_1} = \frac{m g_{AB}}{A_1} = \frac{V g_{AB}}{A_1} = \frac{8 V_{AB}}{A_1} = \frac{8 R_1 x}{A_1} = 8 x$$

(F)

Subject: مقاومة المواد

Date: 9/10/201

توزيع الضغط
على سطح BC



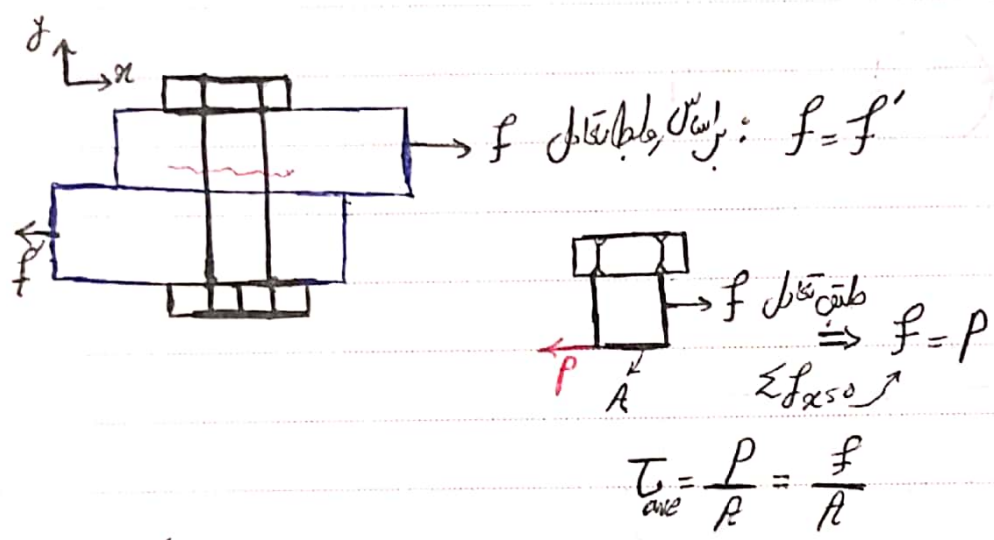
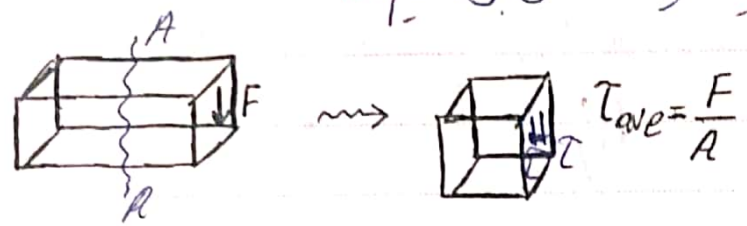
$$\begin{aligned}\sigma_c &= \frac{f'}{A_2} = \frac{m_{AB}g + m_{BC}g}{A_2} = \frac{f_{AB} + f_{BC}}{A_2} \\ &= \frac{8x_{AB} + 8x_{BC}}{A_2} = \frac{8x + 8(4-x)}{A_2} \\ &= 8x \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 + 8(4-x) \\ &= 8x \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 + 8(4-x) \\ &= \frac{8x}{4} + 8(4-x)\end{aligned}$$

$$\sigma_{maxAB} = \sigma_B = 8x$$

$$\sigma_{maxBC} = \sigma_c = \frac{8x}{4} + 8(4-x) \Rightarrow \sigma_B \leq \sigma_c \Rightarrow 8x \leq \frac{8x}{4} + 8(4-x)$$

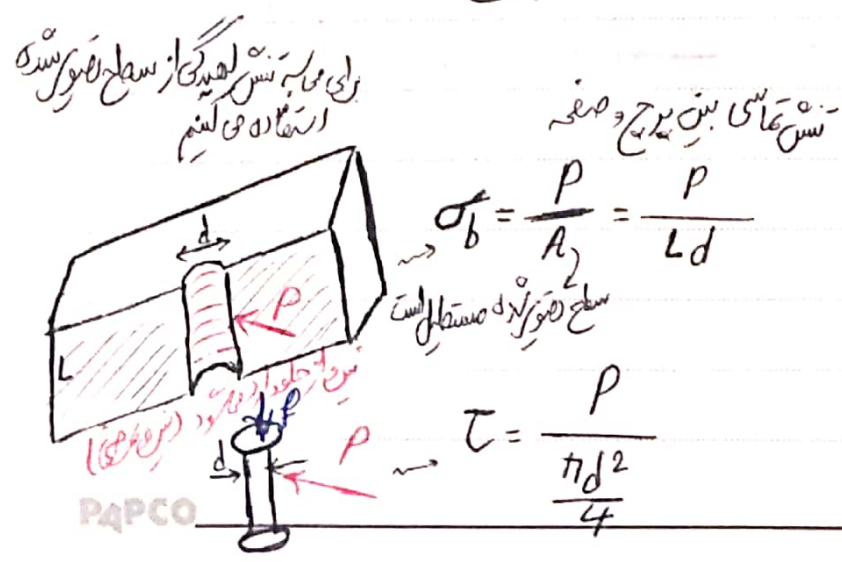
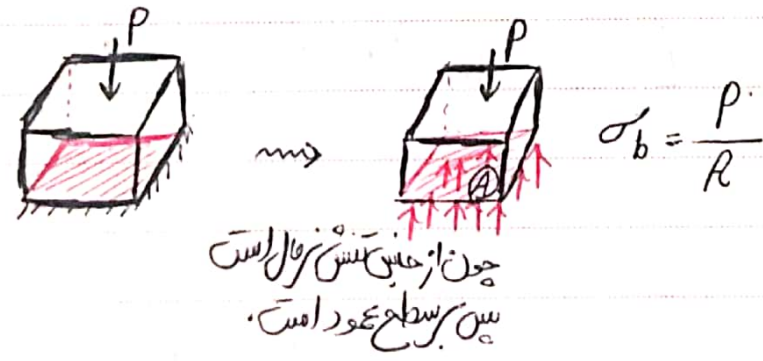
$$\Rightarrow 7x \leq 16 \Rightarrow x \leq \frac{16}{7} \approx 2.28$$

تشنه برشی: اگر یک سازه تحت نیروی عرضی قرار بگیرد در این حالت تشنه برشی داریم.

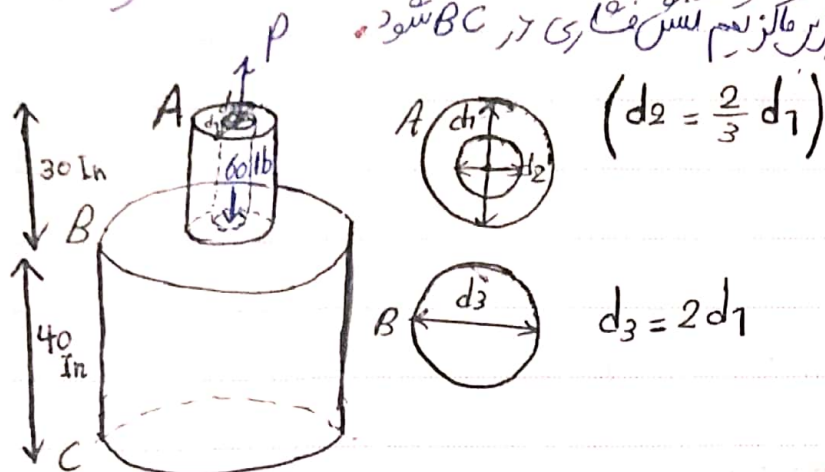


(تشنه تاکیه‌ای)

تشنه لمبیدی در سطح تماس اجسام: هر سطح تماس یک جسم با جسم دیگر تشنه‌های نرمال قائم بوجود می‌آید که از تشنه‌های لمبیدی یا تماسی می‌گویند.



مثال: دو سیل استوانه‌ای بهم چسبیده و در یک شروی P و وزن قرار گرفته‌اند. مطلوب است محاسبه شروی P به طوری که ماکزیم تنش کششی در AB و ماکزیم تنش فشاری در BC شود.



ماکزیم تنش کششی (AB) : $\sigma_A = \frac{P}{A_A} = \frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)}$

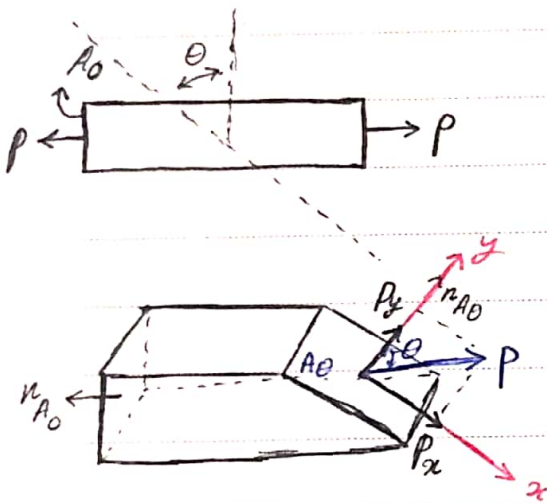
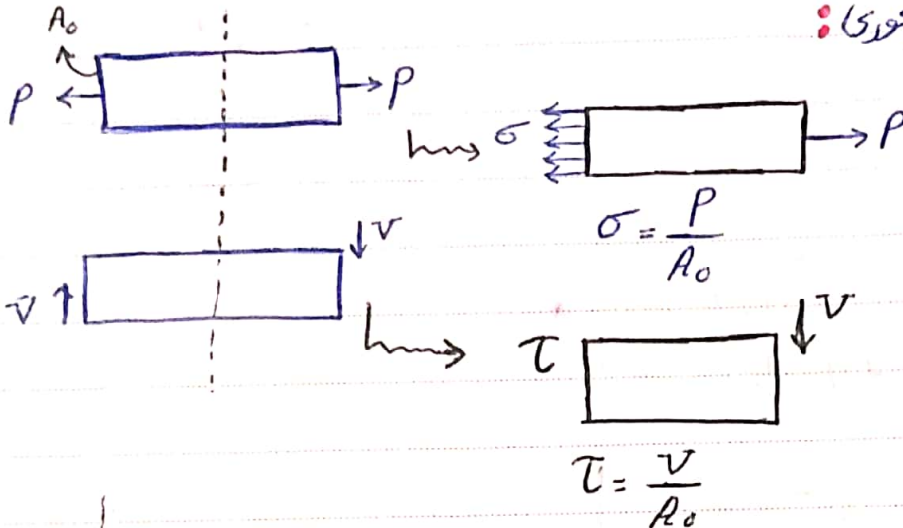
ماکزیم تنش فشاری (BC) : $\sigma_C = \frac{W_{AB}}{A_C} + \frac{W_{BC}}{A_C} + \frac{60}{A_C} - \frac{P}{A_C}$

$$\sigma_C = \frac{1}{\frac{\pi d_3^2}{4}} \left[\left(f g \left[\frac{\pi d_1^2 - \pi d_2^2}{4} \right] \times 30 \right) + \left(f g \left[\frac{\pi d_3^2}{4} \right] \times 40 \right) + 60 - P \right]$$

$$\sigma_A = 2\sigma_C$$

$$\frac{4P}{5\pi} = \frac{2}{9\pi} \left[\frac{15fg\pi}{4} + \frac{360fg\pi}{1} + 60 - P \right] \Rightarrow P =$$

نشیء، مقاطع مایل تحت بار محوری:



$$P_y = P \cos \theta \rightarrow \sigma = \frac{P_y}{A_\theta} = \frac{P \cos \theta}{A_\theta}$$

$$P_x = P \sin \theta \rightarrow \tau = \frac{P_x}{A_\theta} = \frac{P \sin \theta}{A_\theta}$$

$$A_\theta \cos \theta = A_0 \rightarrow A_\theta = \frac{A_0}{\cos \theta}$$

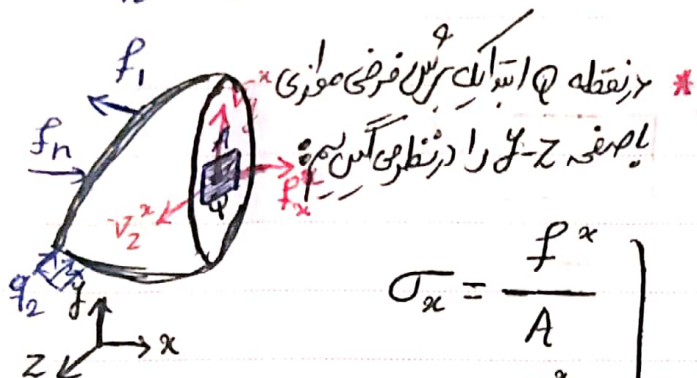
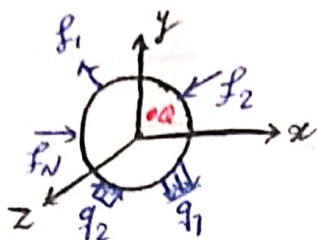
$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma = \frac{P \cos \theta \cos \theta}{A_0} = \frac{P \cos^2 \theta}{A_0} \\ \tau = \frac{P \sin \theta \cos \theta}{A_0} = \frac{P \sin \theta \cos \theta}{A_0} \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{P \cos^2 \theta}{A_0} \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{P}{A_0} \\ \theta = 45^\circ \rightarrow \sigma = \frac{P}{2A_0} \\ \theta = 90^\circ \rightarrow \sigma_{\min} = 0 \end{cases}$$

$$\tau = \frac{P \sin \theta \cos \theta}{A_0} \begin{cases} \theta = 0, 90^\circ \rightarrow \tau_{\min} = 0 \\ \theta = 45^\circ \rightarrow \tau = \frac{P}{2A_0} \end{cases}$$

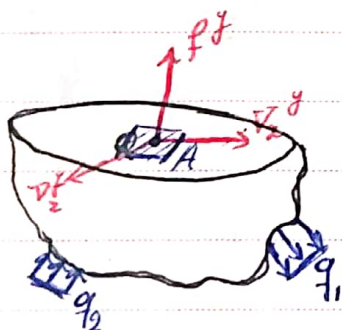
$$\text{if } \theta = 45^\circ \rightarrow \sigma = \tau = \frac{P}{2A_0}$$

تشریح در شرایط استاتیکی:



$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{F_x}{A} \\ \tau_{xy} &= \frac{V_y}{A} \\ \tau_{xz} &= \frac{V_z}{A} \end{aligned} \right\}$$

تشریح در شرایط استاتیکی

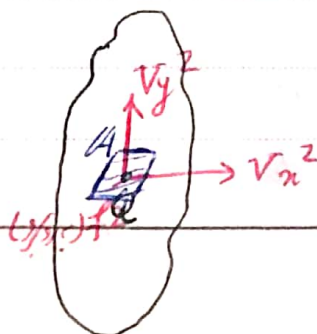


تشریح در شرایط استاتیکی

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{F_y}{A} \\ \tau_{yx} &= \frac{V_x}{A} \\ \tau_{yz} &= \frac{V_z}{A} \end{aligned} \right.$$

تشریح در شرایط استاتیکی

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{F_z}{A} \\ \tau_{zx} &= \frac{V_x}{A} \\ \tau_{zy} &= \frac{V_y}{A} \end{aligned} \right.$$

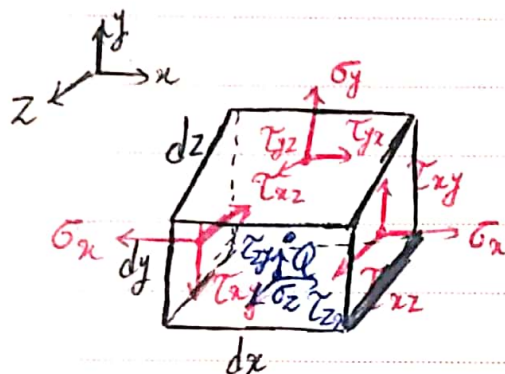


* بنابراین ۹ مولفه تنش برای هر نقطه در ماده از هم وجود دارد:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

۳ نرمال: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

۶ برشی: $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$



- المان مکعبی تنش در نقطه Q:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow (\tau_{yz})(dx dz) \frac{dy}{2} + (\tau_{yz})(dx dz) \frac{dy}{2} - (\tau_{zy})(dx dy) \frac{dz}{2} - (\tau_{zy})(dx dy) \frac{dz}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{yz} - \tau_{zy} = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

به همین ترتیب با استفاده از $\sum M_z = 0, \sum M_y = 0$

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

$$\boxed{\tau_{xz} = \tau_{zx}}$$

* بنابراین ۶ مولفه مستقل تنش برای یک نقطه از هم وجود دارد

$$\begin{cases} \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \\ \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} \end{cases}$$

تنش-تنش

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

*
- مولفه های تنش در شرایط کلی بارگذاری برای مواد ممکن است درجه یک در مختصات دمازی:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ sym & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- مولفه های تنش در مختصات استوانه ای:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{r\phi} \\ & \sigma_\theta & \tau_{\theta\phi} \\ sym & & \sigma_\phi \end{bmatrix}$$

- مولفه های تنش در مختصات قطبی:

کرنش در بارگذاری محوری:

normal strain
کرنش نرمال هندسی

تغییر طول

نرمال (normal)

برشی (shear)

strain

طول اولیه L_1

طول فعلی L_2

تغییر طول ΔL

بار P

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_1} = \frac{\delta}{L_1}$$

کرنش نرمال هندسی (واقعیت)

کرنش نرمال ریاضی $\epsilon = \frac{\Delta L}{L_1}$

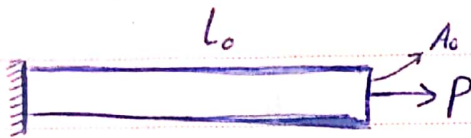
ع: تغییر شکل ماندگ بر حسب بار محوری.

- خودارتنش - کرنش:

این خودارتنشگی به هندسه و شرایط بارگذاری جسم تار و دی می تواند وابسته به شرایط کاری مختلف و نوع مصالح جسم باشند.

مواد نرم (آلومینیوم، فولاد، مس و ...)

مواد ترد (آلومینیوم، مس، چوب، گچ و ...)



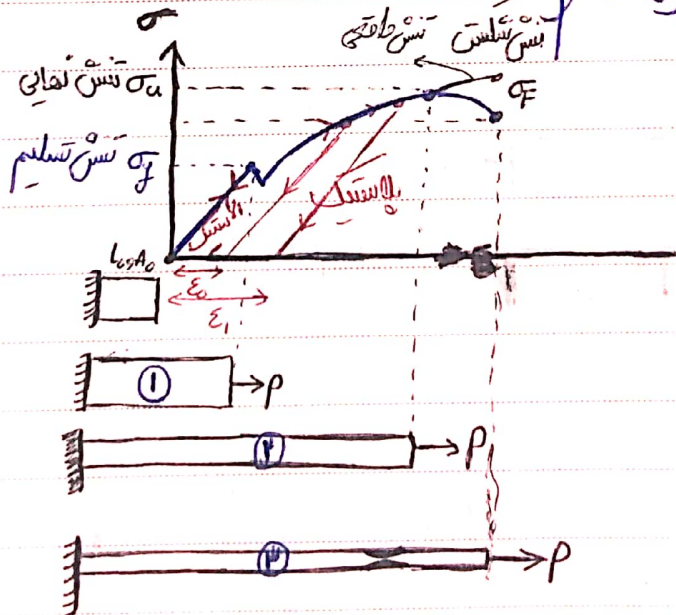
$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

تغییر طولی

تغییر تنش

- خودارتنش و کرنش برای مواد نرم:

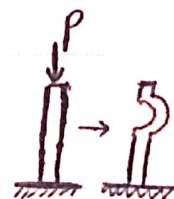


فولاد

① نامیده الاستیک، افزایش طول با آنکه آهسته آهسته اتفاق می افتد و کرنش قطری (فشار) آن بسیار کوچک و قابل صرف نظر در آن است. در این ناحیه با کاهش بار، تنش و کرنش به صورت خطی کاهش می یابد.

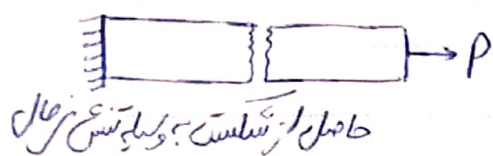
② نامیده پلاستیک، افزایش طول با آنکه هنگام سر برداری اتفاق می افتد و هر چنان که تنش قطری در آن موجود می آید. در ناحیه پلاستیک با افزایش بار، تنش و کرنش به صورت غیر خطی و در جسم یک کرنش باقی می ماند.

③ افزایش طول شدید، تنش قطری بسیار زیاد، ایجاد تغییرات دائمی شکل (ناپوشیدگی) در جسم و شکستن جسم از ناحیه لکونی شکل.

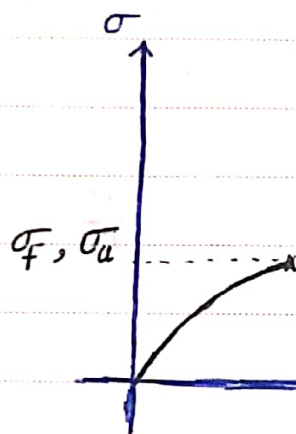




- مقطع شکست در مادی است.
در مادی نیز مقطع شکست به صورت مخروطی شکل است.

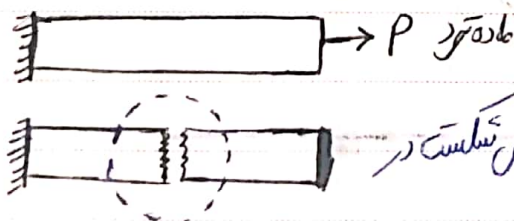


* در این موارد تنش برشی عامل تسلیم است و طرح مخروطی
بسطح اولیه عمود تقریباً زاویه ۴۵ درجه می باشد.



* مواد ترد:
تنش کششی و کرنش کششی
در اینگونه مواد آهنگ کششی به طور
قابل توجهی زیاد خواهد شد.
تأثیر دیگری در این مواد وجود ندارد.

* تنش نهایی و تنش شکست با هم یکی هستند.
در نقطه شکست مواد ترد، کرنش بسیار کمتری نسبت به مواد نرم اتفاق می افتد.



* در مواد ترد سطح مقطع شکست تحت است. بنابراین عامل شکست در
مواد ترد تنش نرمال است.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

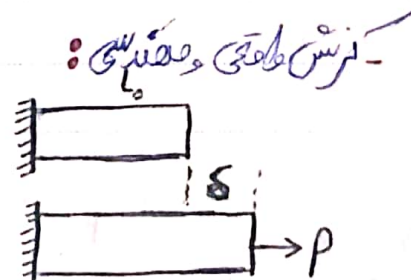
تنش واقعی
سطح در نقطه

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

تنش مهندسی

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

کرنش مهندسی



- کرنش واقعی و مهندسی:

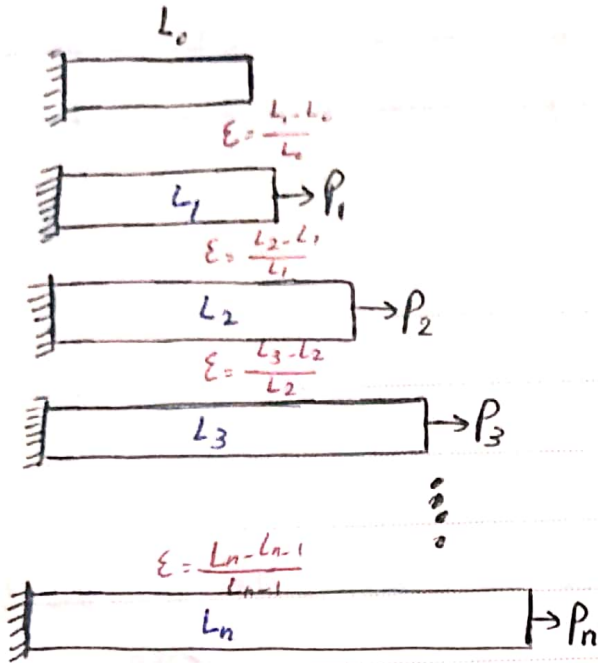
کرنش واقعی ←

تغییر طول نسبت به حالت قبل



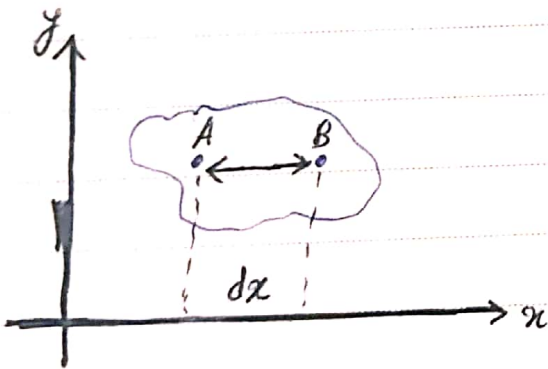
$$d\epsilon = \frac{dL}{L}$$

$$\epsilon = \int d\epsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

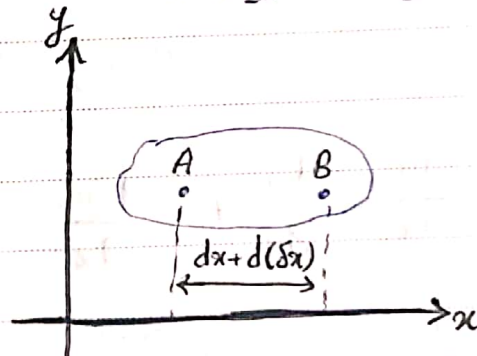


کرنش طولی (تغییر طولی به نسبت به طول اولیه):

رابطه دفرانسیلی بین کرنش و تغییر مکان:



تغییر
طول
برگشتی



$$\epsilon_x = \frac{[dx + d(\delta x) - dx]}{dx} = \frac{d\delta x}{dx}$$

* متوجه تغییر مکان در راستای x نسبت به محور x در هر نقطه
با کرنش طولی در راستای x در همان نقطه برابر است.

$$\epsilon_y = \frac{d\delta y}{dy}$$

$$\epsilon_z = \frac{d\delta z}{dz}$$

* راستای y و z
به همین ترتیب

- بطور کلی اگر یک نقطه در یک جسم (x, y, z) در راستای x تغییر مکان $u(x, y, z)$ ، در راستای y تغییر مکان $v(x, y, z)$ و در راستای z تغییر مکان $w(x, y, z)$ باشد:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

- مثال: مطلوب است محاسبه کرنش خیزال در یک جسم با تغییر مکان های زیر:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \frac{dw}{dx}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \frac{dw}{dy}$$

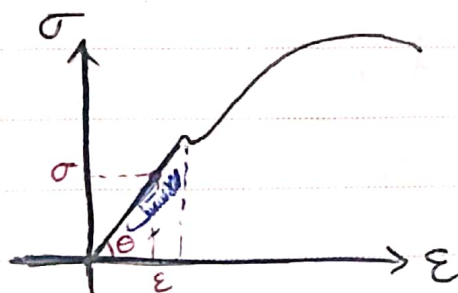
$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

مواد نرم
در ناحیه الاستیک



- قانون هوک:

$$\sigma \approx \epsilon$$

$$\sigma = E \epsilon$$

$$\tan \theta = \frac{\sigma}{\epsilon} \Rightarrow \sigma = \tan \theta \epsilon$$

15

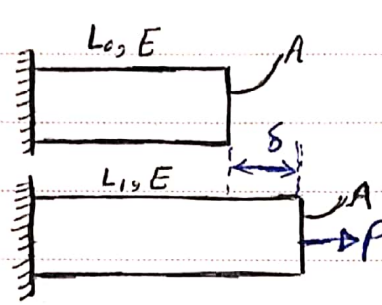
Subject: مقاومت مصالح

Date: ۹۸/۰۷/۱۵ و ۲۰

E: ضریب یانگ، ضریب الاستیسیته، ضریب سختی.
 > مواد همگن و ایزوتروپیک مسئله از بارگذاری و هندسه جسم است.

مواد نرم در ناحیه الاستیک $\Rightarrow \sigma = E \epsilon$

ماتریک
 سبکی به جهت (الباف و جهت بارگذاری)
 > مواد غیر ایزوتروپیک



* تغییر شکل یک عضو تحت بار محوری:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{P}{A} \quad (2) \\ \epsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad (3) \end{array} \right.$$

(2) (3) in (1) $\Rightarrow \frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L_0} \Rightarrow \delta = \frac{PL_0}{EA}$

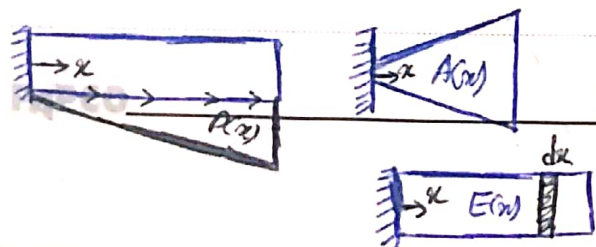
$\sigma = E \epsilon \quad (1)$

- * رابطه فوق باید ۳ شرط را برقرار باشد:
- ۱- نیرو باید طولی باشد یا عضو نباید بکشد.
 - ۲- نیرو یا عضو از یک ماده همگن و ایزوتروپیک ساخته شده باشد.
 - ۳- مقطع طولی یا عضو ثابت باشد.
-

* در غیر این صورت

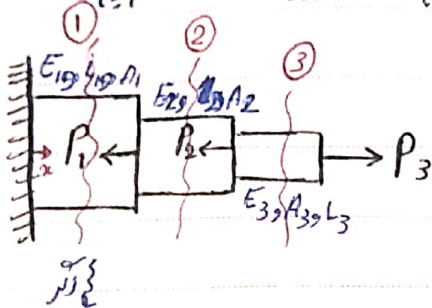
$$d\delta = \left(\frac{P(x) dx}{E(x) A(x)} \right)$$

$$\delta = \int d\delta = \int \frac{P(x) dx}{E(x) A(x)}$$



* اگر یک عضو از مقاطع مختلف یا مواد مختلف ساخته شده باشد و با اینکه در هر قسمت بارگذاری متفاوتی به عضو وارد شود می توان از اصل برهم نهی استفاده نمود:

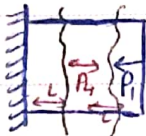
$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$



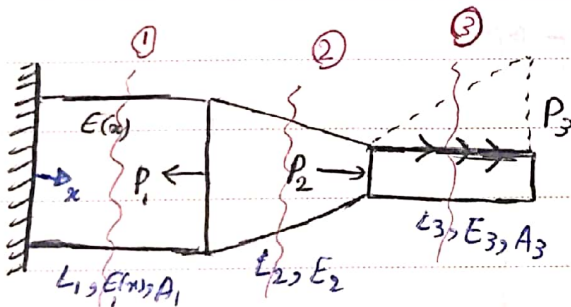
$$\delta_1 = \frac{(P_3 - P_1 - P_2) L_1}{E_1 A_1}$$

$$\delta_2 = \frac{(P_3 - P_2) L_2}{E_2 A_2}$$

$$\delta_3 = \frac{P_3 L_3}{E_3 A_3}$$



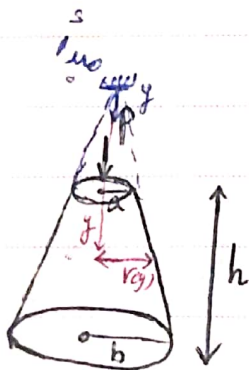
ساختن است $P_4 \leftarrow$ ساختن $P_3 \leftarrow$ دو ساختن P_1 و P_2 در ساختن P_4 است



$$\delta_1 = \int_0^{L_1} \frac{(P_2 - P_1 + P_3) dx}{E(x) A_1}$$

$$\delta_2 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{(P_2 + P_3) dx}{E_2 A(x)}$$

$$\delta_3 = \int_{L_2}^{L_3} \frac{P_3(x) dx}{E_3 A_3}$$



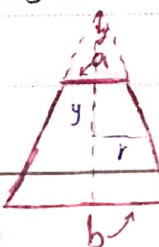
مطلوب است محاسبه تغییر شکل زیر: E ضریب الاستیسیته

$$E(y) = y E_1 + E_0$$

از وزن غرورده صرف نظر شود.

محیط مقطع $E(y)$ باشد

$$\delta = \int \frac{P dy}{E(y) A(y)} = ?$$

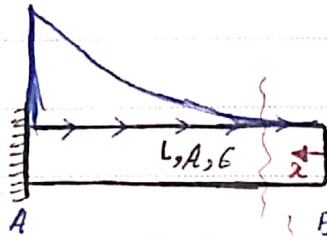


$$y_0 + h = y_1$$

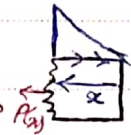
$$\frac{a}{y_0} = \frac{b}{y_1} = \frac{r}{y}$$

$$h \rightarrow r = \frac{a}{y_0} y \text{ or } \frac{b}{y_1} y$$

$$\Rightarrow \delta = \int \frac{p dy}{(yE_1 + E_0)(\pi r^2 y)} = \int \frac{p dy}{(yE_1 + E_0) \pi \frac{a^2}{y^2} y^2} = \frac{p y_0^2}{\pi a^2} \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{(yE_1 + E_0) y^2}$$



$$q(x) = q_0 \frac{x^2}{L^2} \quad \left(\frac{N}{m} \right)$$

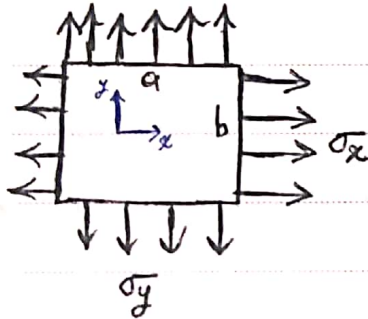


$$p(x) = \int_0^x q_0 \frac{x^2}{L^2} dx = \frac{q_0}{3L^2} x^3 \Big|_0^x = \frac{q_0 x^3}{3L^2}$$

$$\delta = \int \frac{p(x) dx}{EA}$$

$$\Rightarrow \delta = \int_0^L \frac{q_0 x^3}{3L^2} \frac{dx}{EA} = \frac{q_0}{12L^2 EA} x^4 \Big|_0^L = \frac{q_0 L^4}{12L^2 EA}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{q_0 L^2}{12EA}}$$

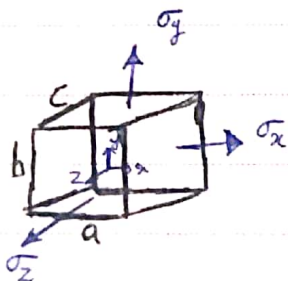


$$A = ab$$

$$\epsilon_A = \frac{\Delta A}{A_0}$$

$$\Delta A = \Delta(ab) = \Delta a b + a \Delta b$$

$$\epsilon_A = \frac{b \Delta a + a \Delta b}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \epsilon_x + \epsilon_y$$



$$V = abc$$

$$\epsilon_V = \frac{\Delta V}{V}$$

$$\Delta V = \Delta(abc) = ab \Delta c + ac \Delta b + bc \Delta a$$

$$\epsilon_V = \frac{ab \Delta c + ac \Delta b + bc \Delta a}{abc} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

- مثال: مطلوب است محاسبه تغییر شکل زیر:

*- محاسبه کرنش سطحی:

- محاسبه کرنش حجمی:

$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$



$$\begin{cases} \sigma_x = E \epsilon_x \rightarrow \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_x \neq 0 \\ \epsilon_y \neq 0 \\ \epsilon_z \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \epsilon_x \neq 0 \\ \epsilon_y = \epsilon_z \end{cases}$$

نسبت تغییر طولی
نسبت تغییر عرضی

$$\nu = - \frac{\text{نسبت تغییر عرضی}}{\text{نسبت تغییر طولی}} = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

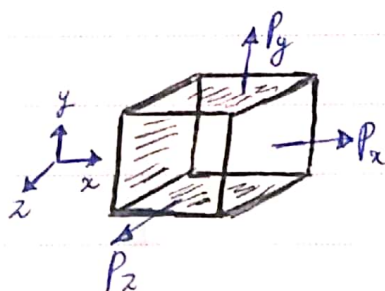
$$\begin{aligned} \epsilon_y &= -\nu \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_z &= -\nu \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \end{cases}$$

نسبت تغییرات طولی و عرضی

نسبت تغییرات طولی و عرضی:

* تغییرات در زاویه الاستیک و تغییرات در زاویه پلاستیک.



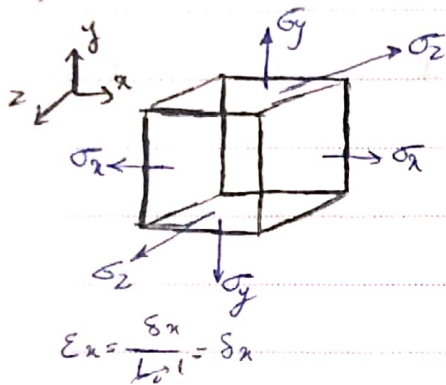
$$P_x \Rightarrow \sigma_x \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \end{cases}$$

$$P_y \Rightarrow \sigma_y \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \\ \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \end{cases}$$

$$P_z \Rightarrow \sigma_z \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

قانون کلی هک در بارگذاری خرد و در (نزدیکاً نقطه میانی باشد):

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$



$$V_1 = 1$$

$$V_2 = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

$$e = \Delta V = V_2 - V_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

تغییر حجم واحد (ضریب بالک):

ضریب ع مار هم را منفره نظر می باشد
مقدار ضریب کوکلی را راند.

$$e = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) + \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\Rightarrow e = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E} - \frac{2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\Rightarrow e = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

* اگر جسم تحت فشار هیدرواستاتیک قرار گیرد:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\Rightarrow e = -\frac{3(1-2\nu)}{E} p \quad \rightsquigarrow \quad e = -\frac{3p}{K}$$

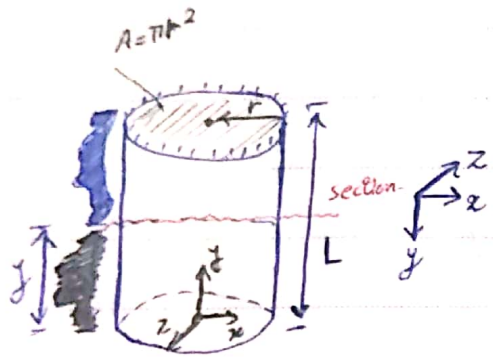
$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{ضریب بالک}$$

* فشار هیدرواستاتیک $\leftarrow e < 0 \leftarrow K > 0$

$$\Rightarrow 1 - 2\nu > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

* ضرب پواسون یک مقدار مثبت است $\nu > 0$

$$\Rightarrow 0 < \nu < \frac{1}{2}$$



$\delta = \rho g$ وزن مخصوص استوانه

* مثال: استوانه‌ای با وزن مخصوص δ از سقف آویزان شده است:

الف) تنش و کرنش طولی در فاصله‌ی y از انتهای استوانه

ب) تغییر شعاع مقطع در فاصله‌ی y از انتهای استوانه

ج) تغییر سطح جانبی استوانه

الف)

وزن مشخص y

$$\sigma_x = \sigma_z = 0$$

$$\sigma_y = \frac{W(y)}{A} = \frac{\delta \nu}{A} = \frac{\delta A y}{A} \Rightarrow \boxed{\sigma_y = \delta y}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) = -\frac{\nu}{E} \sigma_y = -\frac{\nu}{E} \delta y = \frac{-\nu \delta y}{E} \Rightarrow \boxed{\epsilon_x = \epsilon_z = \frac{-\nu \delta y}{E}}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{\delta y}{E} \Rightarrow \boxed{\epsilon_y = \frac{\delta y}{E}}$$

ب)

$$A = \pi r^2 \rightarrow dA = d(\pi r^2) = 2\pi r dr \Rightarrow dr = \frac{dA}{2\pi r}$$

$$\epsilon_A = \frac{dA}{A}$$

$$\epsilon_A = \epsilon_x + \epsilon_z = -\frac{2\nu \delta y}{E} \Rightarrow dA = \epsilon_A A = -\frac{2\nu \delta y}{E} \times \pi r^2$$

$$\Rightarrow dr = \frac{dA}{2\pi r} = \frac{-2\nu \delta y \pi r^2}{E (2\pi r)} = \boxed{\frac{-\nu \delta y r}{E} = dr}$$

ج) $A' = 2\pi rL \rightarrow dA' = d(2\pi rL) = 2\pi drL + 2\pi r dL$

$\epsilon_{A'} = \frac{dA'}{A'} = \frac{2\pi drL + 2\pi r dL}{2\pi rL} = \frac{dr}{r} + \frac{dL}{L} = \frac{-\nu \delta y}{E} + \frac{\delta y}{E} = (1-\nu) \frac{\delta y}{E}$

سطح جانبی الان 

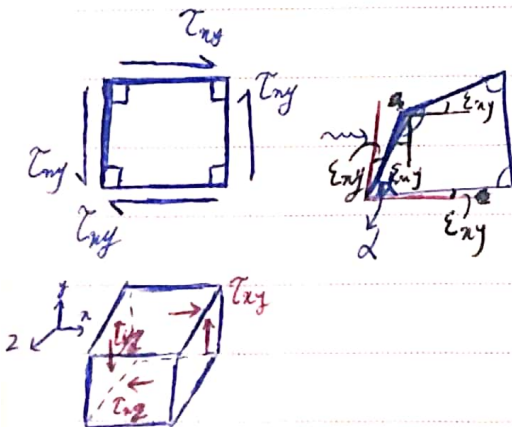
$L = 2\pi r dy$

تغییر سطح جانبی الان

کرنش سطح جانبی الان = $\frac{\text{تغییر سطح جانبی الان}}{\text{سطح جانبی الان}} \Rightarrow \text{تغییر سطح جانبی الان} = \text{کرنش سطح جانبی الان} \times \text{سطح جانبی الان}$

$\text{تغییر سطح جانبی الان} = \frac{(1-\nu) \delta y}{E} \times 2\pi r dy$

$\text{تغییر سطح جانبی الان} = \int_0^L \text{تغییر سطح جانبی الان} = \int_0^L \frac{(1-\nu) \delta y}{E} 2\pi r dy$
 $= \frac{(1-\nu) \delta}{E} \pi r L^2$



کرنش برشی:

$\gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) / 2$

$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha$

علت
افزایش زاویه $\rightarrow -$
کاهش زاویه $\rightarrow +$

۷۲

Subject:

مقاومت مصالح

Date

۹ آبان ۱۴۰۷

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{xz} = 2 \epsilon_{xz} \xrightarrow{\text{نسبت}} \tau_{xz} \\ \delta_{yz} = 2 \epsilon_{yz} \xrightarrow{\sim} \tau_{yz} \\ \delta_{xy} = 2 \epsilon_{xy} \xrightarrow{\sim} \tau_{xy} \end{array} \right.$$

ضریب تناسب انحراف برشی با جرم

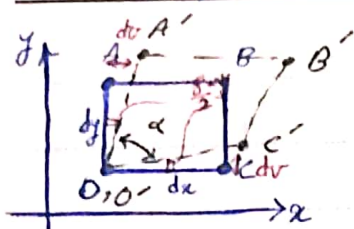
$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = G \delta_{xy} \\ \tau_{xz} = G \delta_{xz} \\ \tau_{yz} = G \delta_{yz} \end{array} \right.$$

$$\sigma = E \epsilon$$

$$\tau = G \delta$$

$U, V, W \Rightarrow$ مولفه‌های جابجایی در راستای z, y, x

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}$$



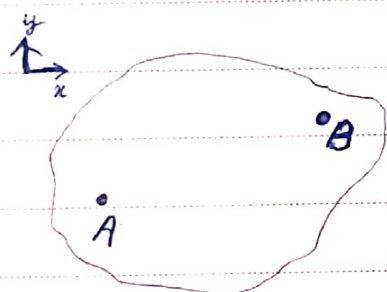
- رابطه دفرانسیلی کرنش برشی:

$$\gamma_{xy} = 2 \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) = \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \tan\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \approx \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\tan\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) = \frac{du}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \tan\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \approx \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$



فاصله اولیه بین نقاط A و B
 x یار راستای
 y یار راستای

- کرنش های حرارتی در یک المان:

* اگر دمای جسم به اندازه ΔT افزایش یابد فاصله حرارتی x و y و نقطه A و B به ترتیب به اندازه Δl_x و Δl_y افزایش می یابد.

رشد طول

$$\epsilon_{Tx} = \frac{\Delta l_x}{l_x}$$

$$\epsilon_{Ty} = \frac{\Delta l_y}{l_y}$$

Thermal strain
 کرنش های حرارتی

تغییر طول

$$\Delta l_x = l_x \alpha \Delta T$$

ضریب انبساط حرارتی

$$\Delta l_y = l_y \alpha \Delta T$$

$$\epsilon_{Tx} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon_{Ty} = \alpha \Delta T$$

با فرض ماده هگزان و ایزوتروپیک و تغییر دمای یکسان در راستای x و y

رشد طول

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

- جسمی با برآیند صاف و یکنواخت

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) + \alpha \Delta T$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) + \alpha \Delta T$$

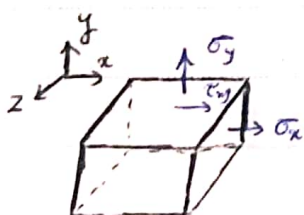
$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + \alpha \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E \alpha \Delta T \\ E \alpha \Delta T \\ E \alpha \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

- روابط تنش و کرنش در حالت تنش صفحه‌ای (Plane stress):

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

مؤلفه‌های تنش بر اساس مؤلفه‌های کرنش

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$c_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$$

$$c_{33} = G$$

- روابط تنش و کرنش در حالت کرنش صفحه‌ای (Plane strain):

در یک راستا کرنش را صفر فرض کنیم، حالت کرنش صفحه‌ای اتفاق می‌افتد. مثل لوله‌های انتقال نفت و گاز ...
 $\epsilon_z = 0$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

$\Downarrow$

$$\epsilon_x = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu) \sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu) \sigma_y - \nu \sigma_x)$$

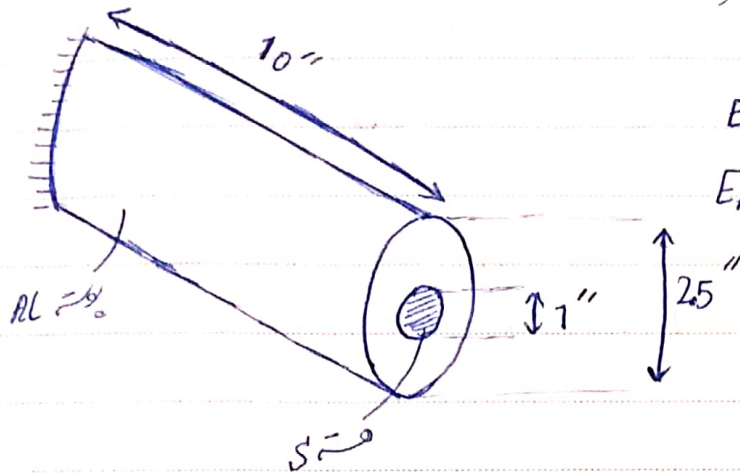
$$\epsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

مثال: در شکل زیر دو قطعه فولاد با خواص مکانیکی زیر قرار داده شده است. هر دو قطعه فولادی و پیوسته می شوند و تحت نیروی کششی قرار می گیرند. خواص مکانیکی فولاد: $E_s = 29 \times 10^6 \text{ psi}$ و $\nu = 0.3$ و $E_{AL} = 10.7 \times 10^6 \text{ psi}$. جسم تحت نیروی کششی قرار می گیرد.



$$\sigma_{AL} = \frac{P_{AL}}{A_{AL}}$$

$$\sigma_S = \frac{P_S}{A_S}$$

$$\delta_{AL} = \delta_S \quad , \quad P_{AL} + P_S = P$$

$$\frac{P_{AL} \times L}{E_{AL} A_{AL}} = \frac{P_S \times L}{E_S A_S} \rightarrow \frac{(P - P_S)}{10.7 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} (2.5^2 - 1^2)} = \frac{P_S}{29 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} (1^2)} \rightarrow P_S = 14.139 \text{ klb}$$

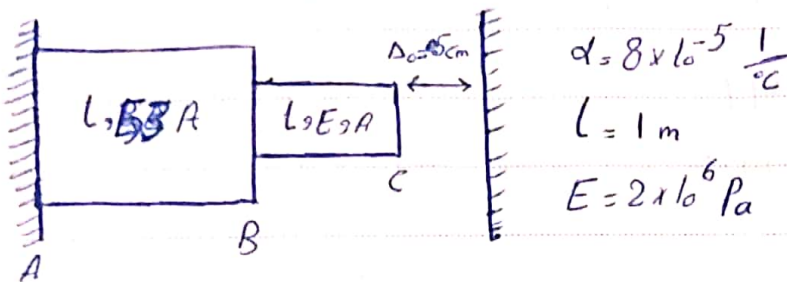
$$P_{AL} = 25.281 \text{ klb}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{AL} = \frac{P_{AL}}{A_{AL}} = \frac{25.281}{4.123} = 6.272 \text{ ksi} \\ \sigma_S = \frac{P_S}{A_S} = \frac{14.139}{0.785} = 18.012 \text{ ksi} \end{cases}$$

علامت منفی → نیروی فشاری
علامت مثبت → نیروی کششی

$$\delta_{AL} = \delta_S = \delta = \frac{P_S \times L}{E_S \times A_S} = \frac{14.139 \times 10^3 \times 10}{29 \times 10^6 \times 0.785} = 6.27 \times 10^{-3} \text{ in}$$

مثال: در شکل زیر اگر دمای میل‌های AB و BC به ترتیب به اندازه‌های 50°C و 25°C افزایش یابد تنش در میل AB را بدست آورید.



$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} = L \alpha \Delta T_{AB} + L \alpha \Delta T_{BC} = 1 \times 8 \times 10^{-5} \times 50 + 1 \times 8 \times 10^{-5} \times 25$$

$$\rightarrow \delta = 0.6 \text{ cm} \rightarrow 0.6 > 0.5 \text{ cm}$$

پس بر روی قاع را بجا می‌کند
پس تنش در قسمتی از میل ایجاد می‌شود

تغییر طول ناشی از تغییرات

$$\delta_T + \delta_M = \Delta_0 \rightarrow 3L \alpha \Delta T = (3 \times 1 \times 8 \times 10^{-5} \times 25) - \left(\frac{FL}{EA} + \frac{FL}{3EA} \right) = \Delta_0$$

تغییر طول مکانیکی

$$\rightarrow \frac{4FL}{3EA} = 3L \alpha \Delta T - \Delta_0 \rightarrow \sigma_{AB} = \frac{F}{A_{AB}} = \frac{E(3L \alpha \Delta T - \Delta_0)}{4L} = 500 \text{ MPa}$$

تغییر دمای غیر یکنواخت

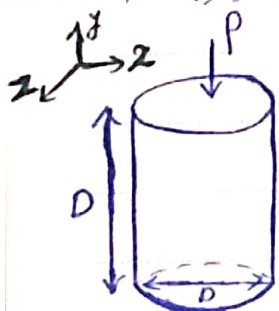
$$\rightarrow \alpha_s = \alpha_0 T + \alpha_1 T^2 + \alpha_3 T^3$$

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

$$T_2 = 150^\circ\text{C} \rightarrow \int_{T_1}^{T_2} L \alpha dT$$

$$T_1 = 100^\circ\text{C}$$

مثال: استوانه‌ای با قطر D و ارتفاع D تحت نیروی P که به طور یکنواخت در مقطع توزیع شده بر روی آن قرار گرفته است. در موردی که از تغییر شکل جانبی جلوگیری شود، تغییر طول استوانه را بدست آورید. (استوانه تحت افزایش دمای یکنواخت ΔT قرار دارد) $E, \nu, \alpha, \Delta T$



$$\epsilon_z = \epsilon_x = 0 \rightarrow \text{تغییر شکل جانبی نداریم}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{L}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) + \alpha \Delta T$$

$$\sigma_y = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{\pi D^2}{4}}$$

$$0 = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_z + \sigma_y) + \alpha \Delta T$$

$$0 = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + \alpha \Delta T$$

با حل این دو معادله $\sigma_x = \sigma_z$

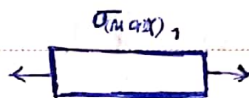
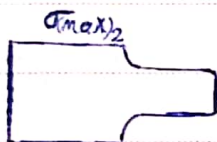
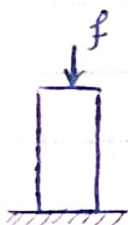
$$\rightarrow 0 = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_x) + \alpha \Delta T \rightarrow \sigma_x \left(\frac{1}{E} - \frac{\nu}{E} \right) = \frac{\nu}{E} \sigma_y - \alpha \Delta T$$

$$\rightarrow \sigma_x = \frac{\nu \sigma_y - E \alpha \Delta T}{1 - \nu} = \frac{\nu \left(\frac{4P}{\pi D^2} \right) - E \alpha \Delta T}{1 - \nu} = \frac{4\nu P - E \alpha \Delta T (\pi D^2)}{\pi D^2 (1 - \nu)}$$

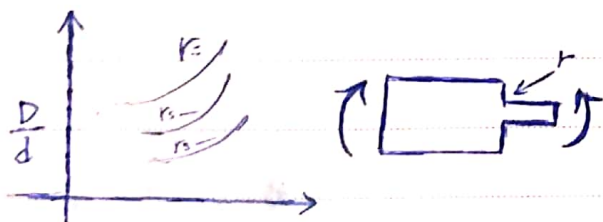
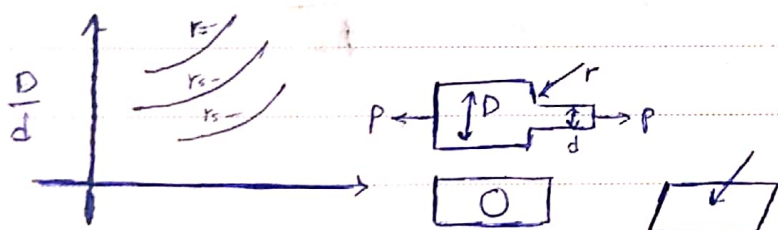
$$\epsilon_y = \frac{\delta y}{D} = \frac{4P}{\pi D^2 E} - \frac{2\nu}{E} \left(\frac{4\nu P - \pi D^2 E \alpha \Delta T}{\pi D^2 (1-\nu)} \right) + \alpha \Delta T$$

$$\hookrightarrow \delta y = \epsilon_y D \rightarrow \left\{ \delta y = \frac{4P}{\pi D E} - \frac{2\nu}{E} \left(\frac{4\nu P - \pi D^2 E \alpha \Delta T}{\pi D (1-\nu)} \right) + \alpha \Delta T D \right\}$$

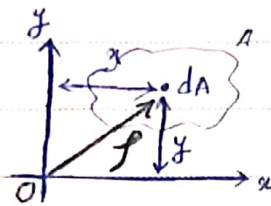
*
- رابطه بین E و G : ضریب الاستیسیته
 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
ضریب پواسون (مایلین)



شماره
کلاس



نویس: ۴-۴



یادآوری: خصوصیات ذرشی برای مقطع نشان داده شد:

$A = \int dA$ مساحت

$\phi_x = \int y dA$ استوار استوار از محور x مقطع

$\phi_y = \int x dA$ استوار استوار از محور y مقطع

$I_x = \int y^2 dA$ ممان انرسی حول محور x

$I_y = \int x^2 dA$ ممان انرسی حول محور y

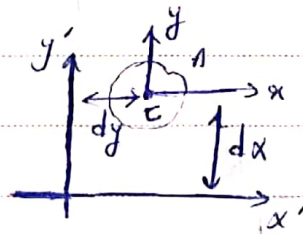
$I_{xy} = \int xy dA$ ممان انرسی سطح نسبت به محورهای x و y

$J = I_x + I_y = \int r^2 dA$ ممان انرسی عطفی

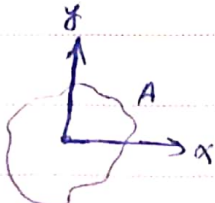
* اگر ممان انرسی مقطع نسبت به محورهای عبوری از مرکز سطح I_x و I_y باشند، ممان انرسی برای محورهای که موازی با محورهای عبوری از مرکز سطح و در فاصله dx و dy از آن قرار دارند، عبارتند از:

$I_{x'} = I_x + A dx^2$

$I_{y'} = I_y + A dy^2$

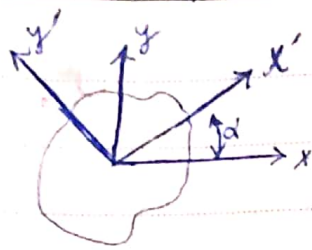


* استوار استوار سطح حول محورهای عبوری از مرکز سطح جسم را اینها میگویند:



$\phi_x = 0$

$\phi_y = 0$



* انتقال میان سیستمی حول محورهای دوران یافته :

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha$$

$$I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'}$$

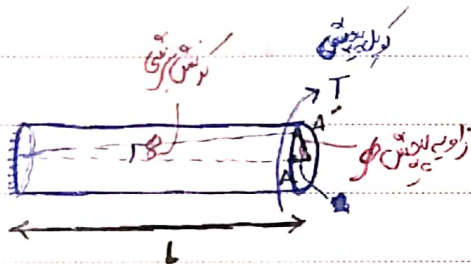


فرض اول : فقط در ناحیه الاستیک رفتار
رابطه بین تنش و کرنش خطی
فرض دوم : درجه یابی
فرض سیم : درجه یابی
فرض چهارم : درجه یابی

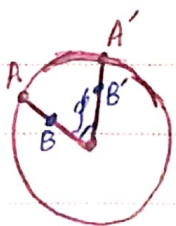
* فرضیات استفاده شده در این قسمت :

① تمام مقاطع عرضی به صورت همی باقی میمانند.

② رابطه بین تنش و کرنش به صورت خطی است (یا برای نواحی الاستیک است).



$$AA' = \phi R \Rightarrow \phi R = \delta L \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\phi R}{L}}$$



$$\delta_{max} = \frac{\phi R}{L}$$

کرنش بیش و کم

$$\delta = \frac{\phi r}{L}$$

نوشته شده در کتاب
از مرکز است

$$\frac{\delta_{max}}{R} = \frac{\delta}{r} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{r}{R} \delta_{max}}$$

$$\tau = G\delta \rightarrow \tau = G \frac{r}{R} \delta_{max}$$

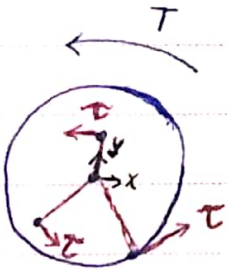
قانون هوک:

$$\tau_{max} = G \delta_{max} \Rightarrow \frac{\tau_{max}}{\tau} = \frac{G \delta_{max}}{G \frac{r}{R} \delta_{max}} \rightarrow \boxed{\tau = \frac{r}{R} \tau_{max}}$$

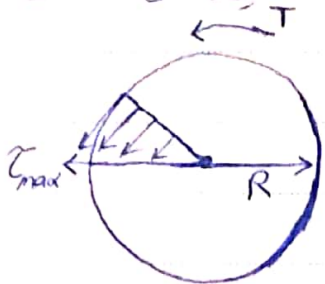
$$\underbrace{(\tau dA)}_{df} r = dT \Rightarrow \int dT = \int \tau dA r \Rightarrow T = \int \tau dA r$$

$$\boxed{T = \int \frac{r^2}{R} \tau_{max} dA = \frac{\tau_{max}}{R} \underbrace{\int r^2 dA}_J = \frac{\tau_{max} J}{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{TR}{J}} \quad \boxed{\tau = \frac{Tr}{J}}$$



در اکثر دیدنی‌های T در مقطع تنش‌های برشی به صورت عمود بر شعاع اثر می‌کنند. جهت تنش‌های برشی در نقاط مختلف دایره به سمتی است که حول مرکز آن گشتاوری هم‌جهت با T ایجاد می‌شود.



$$\tau_{max} = \frac{TR}{J}$$

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

$$\tau = G\delta$$

$$\delta = \frac{\tau}{G}$$

بقیه هم بعد

$$\frac{\phi}{L} = \frac{\gamma_{max}}{R} \quad \rightarrow \quad \gamma_{max} L = \phi R \Rightarrow \gamma_{max} = \frac{\phi R}{L}$$

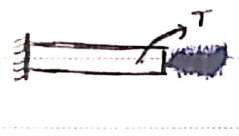

$$\begin{cases} \gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} \\ \gamma_{max} = \frac{\phi R}{L} \end{cases} \quad ; \quad \tau_{max} = \frac{TR}{J}$$

$$\frac{TR}{GJ} = \frac{\phi R}{L} \rightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{GJ}}$$

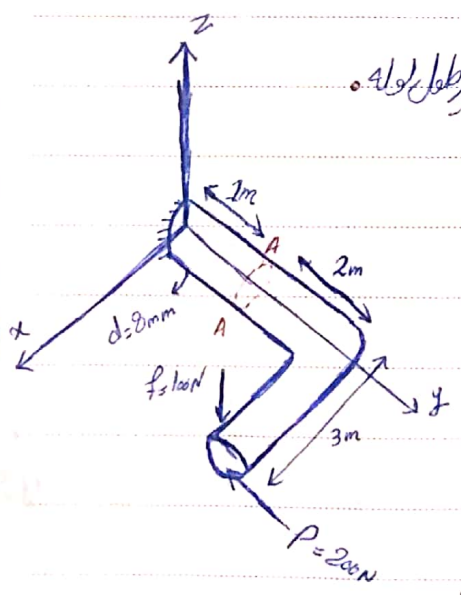
زاویه چرخش



$$\sigma = \frac{P}{A} \quad ; \quad \delta = \frac{PL}{EA}$$

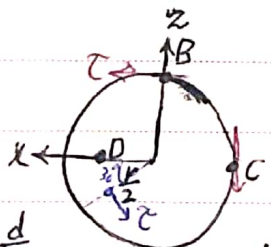
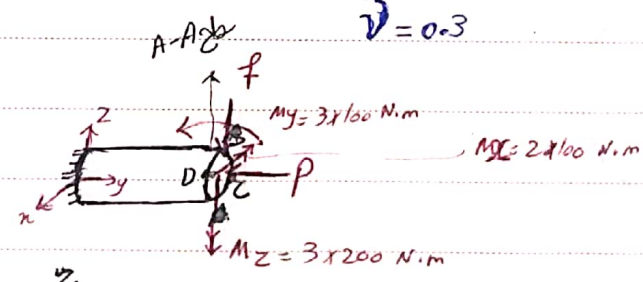


$$\tau = \frac{TR}{J} \quad ; \quad \phi = \frac{TL}{GJ}$$



مثال: محلول است محاسب کنید تنش برشی و فرمال در مقطع A-A، همچنین محاسب کنید تغییر طول اولیه.

$E = 200 \text{ GPa}$
 $\nu = 0.3$



B :
$$\tau_{yx} = \frac{TR}{J} = \frac{My \frac{d}{2}}{\frac{\pi}{32} d^4} = \frac{16 My}{\pi d^3} = \frac{16 \times 300}{\pi (8 \times 10^{-3})^3} = 19.7 \text{ GPa}$$

$$\sigma_y = \frac{P}{A} = \frac{200}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{4 \times 200}{\pi (8 \times 10^{-3})^2} = 0.31 \times 10^8 \text{ Pa}$$

$$C: \tau_{yz} = \frac{16 M_y}{\pi d^3} = 197 \text{ GPa}$$

$$\sigma_y = \frac{P}{A} = 0.31 \times 10^8 \text{ Pa}$$

$$D: \tau = \frac{T r}{J} = \frac{M_y \frac{d}{4}}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{8 M_y}{\pi d^3} = 9.55 \text{ GPa}$$

$$\tau_{yz} = \tau \cos 30 = 9.55 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ GPa}$$

$$\tau_{yx} = \tau \sin 30 = 9.55 \times \frac{1}{2} \text{ GPa}$$

$$\sigma_y = \frac{P}{A} = 0.31 \times 10^8 \text{ Pa}$$

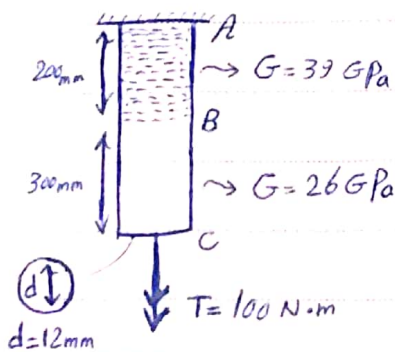
$$\phi = \frac{TL}{GJ}; \phi_B = \phi_C = \phi_D$$

$$\phi = \frac{300 \times 7}{\frac{\pi}{32} \times (8 \times 10^{-3})^4} = \frac{300 \times 7}{77 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} (8 \times 10^{-3})^4} = (\quad) \text{ Rad}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0.3)} = \frac{200}{2.6} = 77 \text{ GPa}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA} = \frac{200 \times 7}{200 \times 10^9 \times \frac{\pi \times (8 \times 10^{-3})^2}{4}} = (\quad) \text{ m}$$

مثال: در شکل زیر یک ماده از دو ماده مختلف تشکیل شده است. مطلوب است کاسه زاویه پیچش در مقطع B و C.



$$\phi_B = \phi_B + \phi_A$$

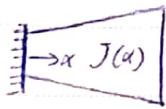
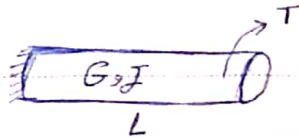
$$\phi_B = \phi_B = \frac{TL}{GJ} = \frac{100 \times 200 \times 10^{-3}}{39 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} (12 \times 10^{-3})^4} = 252 \times 10^{-3} \text{ Rad}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (12 \times 10^{-3})^4}{32}$$

$$\phi_C = \phi_C + \phi_B + \phi_A = \phi_C + \phi_B = \frac{TL}{GJ} + \phi_B = \frac{100 \times 300 \times 10^{-3}}{26 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} (12 \times 10^{-3})^4} + 252 \times 10^{-3}$$

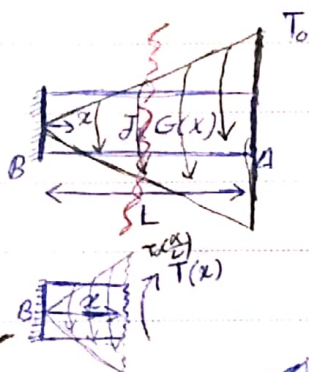
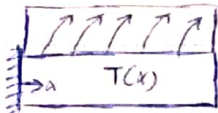
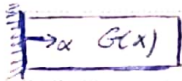
$$\hookrightarrow \phi_C = 567 \times 10^{-3} + 252 \times 10^{-3} = 819 \times 10^{-3} \text{ Rad}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$



در این حالت J, G, T متغیر است

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x) dx}{G(x) J(x)}$$

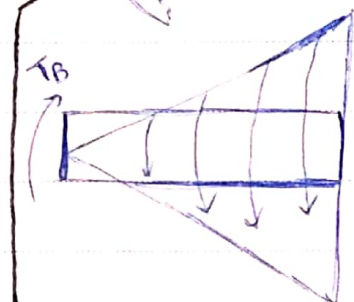


مثال: در شکل زیر مطلوب است محاسبه زاویه پیچش در نقطه A و B:

$$G(x) = G_0 + x^2$$

$$T(x) = T_0 \frac{x}{L}$$

$$T_B = \left(\frac{T_0}{L} \times \frac{L}{2} \right) (L) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{T_0 L}{2}$$



$$T(x) = -T_B + \left(\frac{T_0 x}{L} \times x \times \frac{1}{2} \right) = -\frac{T_0 L}{2} + \frac{T_0 x^2}{2L}$$

$$\phi_A = \int \frac{T(x) dx}{J G(x)} = \int_0^L \frac{\left(-\frac{T_0 L}{2} + \frac{T_0 x^2}{2L} \right) x dx}{(G_0 + x^2) J}$$

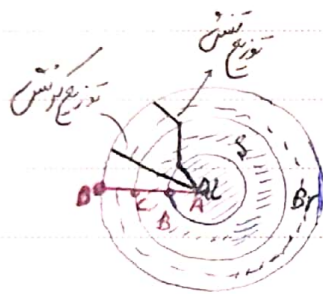
$\phi_B = 0$ $\Rightarrow \phi_A = \phi_A - \phi_B$

- مقاومت بیدینی در مقاطع دایره‌ای:

مقاومت بیدینی یک ماده محاکم الکتریکی است که یک مقطع می‌توان اعمال نمود بدون اینکه تنش‌های برشی در آن از مقدار مجاز بیشتر گردد. برای بدست آوردن مقاومت بیدینی باید تنش برشی محاکم در ماده را برابر با تنش برشی مجاز قرار داد.

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

$$\tau_{max} = \tau_{all} = \frac{T_{all} r}{J} \Rightarrow T_{all} = \frac{\tau_{all} J}{r}$$



- تنش برشی در مقاطع غیر همگن دایره‌ای:

برای محاسبه تنش‌های برشی ناشی از بیدینی در مقاطع دایره‌ای غیر همگن بصورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) توزیع تنش بصورت خطی و پیوسته است و بی‌توزیع تنش‌ها در مرکز دایره متغیر است.

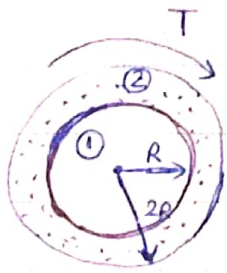
۲) تنش در نقاط مختلف متناسب با r و G است.

۳) برای محاسبه تنش‌های برشی ناشی از بیدینی در مقاطع را نسبت به یکای انبساط همگن می‌کنیم و از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\tau_j = \frac{n_j T r}{J} \quad n_j = \frac{G_j}{G_0} \text{ ضریب برشی نسبت به ماده مبدا} \quad G_0 = \text{ضریب برشی ماده مبدا}$$

۲: ماده مبدا نقطه مورد نظر از مرکز دایره

$$\bar{J} = \sum_{j=1}^n n_j \bar{J}_j \quad \bar{J}: \text{ممان انشعبی مقطع مایل}$$



- مثال: شکل مقابل تحت لنگر بیدینی T قرار دارد. اختلاف تنش و کرنش برشی در مرکز دایره را بدست آورده.

$$G_2 = 2G_1$$

$$\begin{cases} n_1 = \frac{G_1}{G_0} = 1 \\ n_2 = \frac{G_2}{G_0} = 2 \end{cases}$$

$$\bar{J} = \sum_{j=1}^2 n_j \bar{J}_j = n_1 \bar{J}_1 + n_2 \bar{J}_2 = \left(1 \times \frac{\pi R^4}{2}\right) + \left(2 \times \frac{\pi}{2} ((2R)^4 - R^4)\right)$$

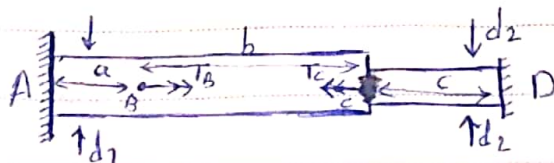
$$= \frac{\pi R^4}{2} + 15\pi R^4 = \frac{31}{2} \pi R^4$$

$$\delta_1 = \frac{2T}{31\pi R^3 G_1}$$

$$\delta_2 = \frac{2T}{31\pi R^3 G_2}$$

$$\tau_1 = n_1 \frac{T r}{\bar{J}} \quad ; \quad \tau_2 = n_2 \frac{T ((2R) - R)}{\bar{J}} \Rightarrow \Delta \tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{2T}{31\pi R^3}$$

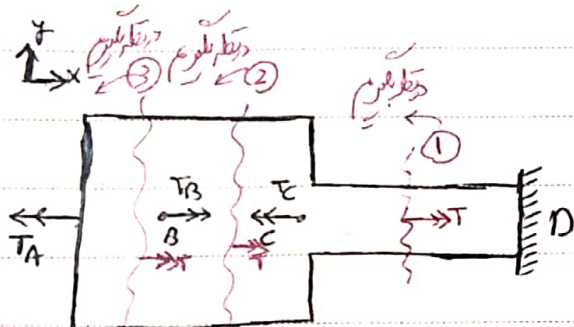
مثال: در شکل زیر مطلوب است محاسبه عکس العمل تکیه ها و تنش برشی طرزیم در شفت:



$$d_1 = 2d_2$$

$$a + b + c = L$$

$$T_C \checkmark / T_B \checkmark / a, b, c \checkmark, d_1 \checkmark \quad \leftarrow \text{مطلوب}$$



$$\phi_D = 0 \Rightarrow \phi_D = \phi_A + \phi_B + \phi_C + \phi_D$$

$$① \quad \phi_C = \frac{(T_C + T_A - T_B)c}{GJ_2}, J_2 = \frac{\pi}{32} d_2^4, J_1 = \frac{\pi}{32} d_1^4 = \frac{\pi}{32} (2d_2)^4 = \frac{\pi}{2} d_2^4 \Rightarrow J_1 = 16J_2$$

$$② \quad \phi_B = \frac{(T_A - T_B)b}{GJ_1} = \frac{(T_A - T_B)b}{16GJ_2}$$

$$③ \quad \phi_A = \frac{(T_A)a}{GJ_1} = \frac{T_A a}{16GJ_2}$$

$$\phi_A = 0$$

$$\Rightarrow \phi_D = \frac{T_A a}{16GJ_2} + \frac{(T_A - T_B)b}{16GJ_2} + \frac{(T_A + T_C - T_B)c}{GJ_2} = 0 \Rightarrow \frac{T_A a + (T_A - T_B)b + 16(T_A + T_C - T_B)c}{16GJ_2} = 0$$

$$\rightarrow T_A(a + b + 16c) + T_B(-b - 16c) + T_C(16c) = 0$$

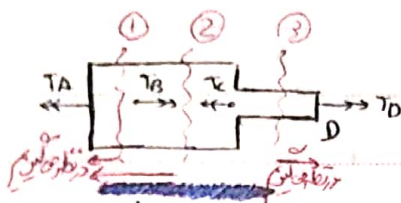
$$\rightarrow T_A = \frac{T_B(b + 16c) - T_C(16c)}{(a + b + 16c)}$$

T_C, T_B
معلوم

اما T_A مجهول

$T_A \rightarrow \tau_B \leftarrow \tau_C \rightarrow T_D \Rightarrow \sum M_{x=0} \rightarrow -T_A + T_B - T_C + T_D = 0 \Rightarrow T_D = T_C + T_A - T_B$

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$



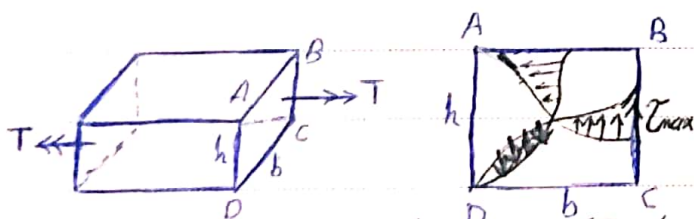
AB: $\tau_{max} = \frac{T_A \frac{d_1}{2}}{J_1}$

BC: $\tau_{max} = \frac{(T_A - T_B) \frac{d_1}{2}}{J_1}$

CD: $\tau_{max} = \frac{T_D \frac{d_2}{2}}{J_2}$

تغییر مقاطع مستطیلی:

یک مقطع مستطیلی که تحت نیروی برشی T قرار گرفته است برخلاف مقاطع دایره ای شکل، مقطع عرضی مقطع به صورت مسطح باقی نمی ماند و دچار اعوجاج (واپش) می شود.



در این مقطع، حداکثر تنش برشی در وسط ضلع برکت (AD) رخ می دهد و مقدار آن نسبت به نسبت $\frac{h}{b}$ دارد.

لکه که بزرگتر از $\frac{h}{b}$ باشد حداکثر تنش برشی ناشی از واپش عبارت است از:

$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 b^2 h}$$

که نسبت به نسبت $\frac{h}{b}$ دارد.

تنش برشی در این مقاطع در گوشه های A و B و D و C و مرکز مستطیل برابر یا کمتر است.

با افزایش نسبت $\frac{h}{b}$ مقدار c_1 افزایش می یابد.

$$\frac{h}{b} \rightarrow \infty \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}$$

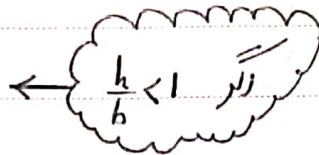
$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 b^2 h} = \frac{3T}{b^2 h}$$

$$\frac{h}{b} = 1 \Rightarrow c_1 \approx 0.2$$

برای مقاطع مربعی شکل ($\frac{h}{b} = 1$):

$$\tau_{max} = \frac{5T}{b^2 h}$$

$$\frac{3T}{b^2 h} \leq \tau_{max} \leq \frac{5T}{b^2 h}$$



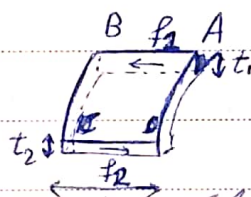
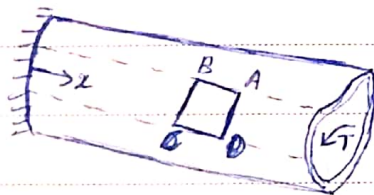
زاویه پیچش در مقاطع مستطیلی:

$$\phi = \frac{TL}{GJ_e} ; J_e = c_2 b^3 h$$

↓
نسبت به نسبت $\frac{h}{b}$ دارد

$$\Rightarrow \phi = \frac{TL}{G c_2 b^3 h}$$

نسبت های لایه خالی جدا نازک:



با توجه به اینکه ضخامت مقطع نسبت به سایر ابعاد آن کوچکتر است از تغییرات تنش برشی در راستای ضخامت مقطع صرف نظر می‌کند.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow f_1 = f_2 \rightarrow \tau_2 A_{CD} = \tau_1 A_{AB}$$

$$\Rightarrow \tau_2 t_2 dx = \tau_1 t_1 dx \Rightarrow \boxed{\tau_2 t_2 = \tau_1 t_1}$$

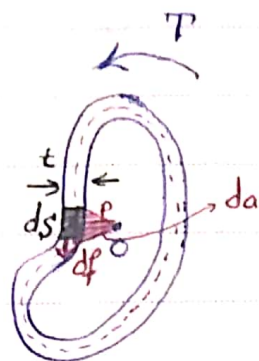
$$\tau t = q \quad \text{جران برش}$$

جران برش (q) در نقاط مختلف یک مقطع جدا نازک مقدار ثابتی است.

$$\tau t = q = \text{cte.}$$

Constant

$$q = \tau t$$



رابطه بین نیروی برشی و تنش برشی و دهانه برش در دیواره:

بدان این از مقطع عرضی دیواره به طول ds را انتخاب می کنیم.

$$df = \tau da = \tau t ds = q ds$$

$$[df = q ds]$$

$$\Rightarrow [dT = P df] \quad \text{لستوار نسبتی نیروی df و طول نقطه}$$

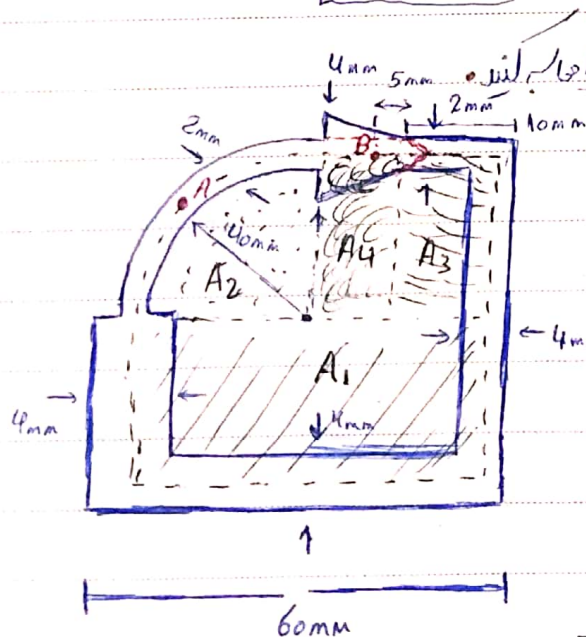
$$\Rightarrow dT = P q ds = q (P ds) = q (2 da) = [2q da]$$

$$da = \frac{1}{2} P ds$$

$$\rightarrow T = \oint dT = \oint 2q da = [2qa]$$

مساحت دیواره برشیده توسط
قطر مرکزی و مقطع عرضی دیواره

$$\Rightarrow T = 2 \tau t a \quad \tau = \frac{T}{2ta}$$



$$A_1 = 56 \times (60 - 42 - 2) = 56 \times 16 = 896 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} (42)^2 = 1320.25 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = 47 \times (10 - 2) = 47 \times 8 = 328 \text{ mm}^2$$

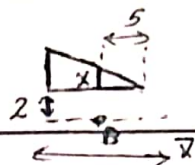
$$A_4 = 47 \times (60 - 2 - 7 - 40 - 10) = 47 \times 7 = 287 \text{ mm}^2$$

$$\rightarrow A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2831.25 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\tau_A = \frac{T}{2at} = \frac{90}{2 \times 2831.25 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-3}}$$

$\Rightarrow$

$$\tau_B = \frac{T}{2at} = \frac{90}{2 \times 2831.25 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-3}}$$



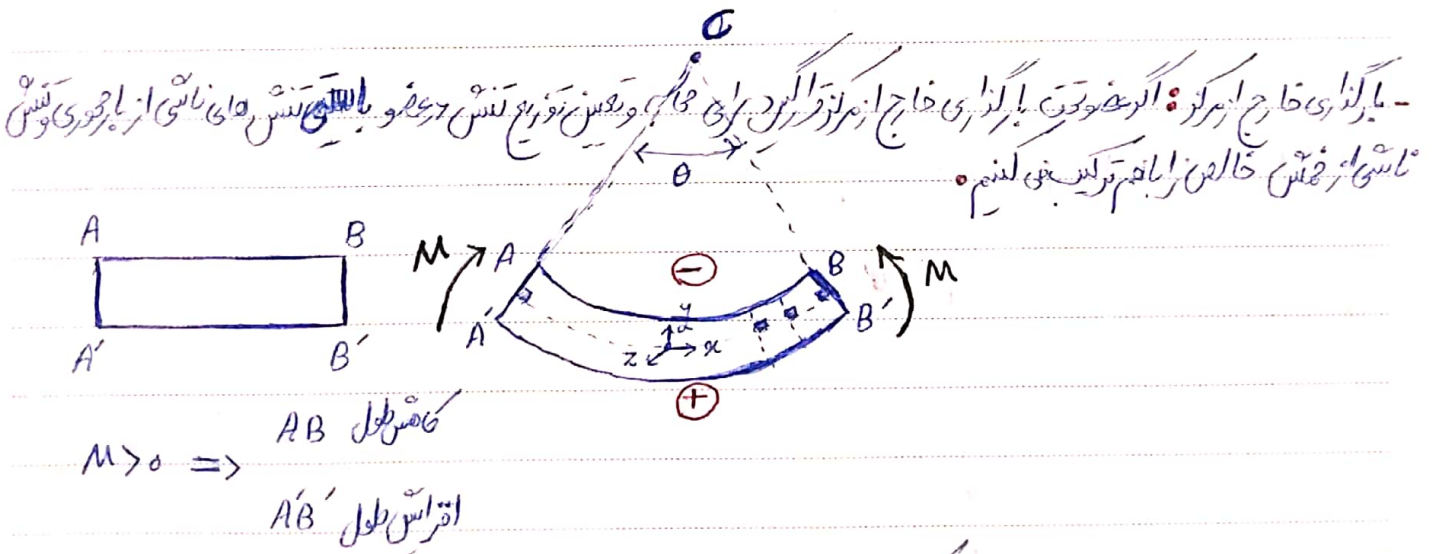
t_B : طبق قضیه استیونس ~~.....~~ $\frac{1}{x} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{5}{2} \rightarrow t_B = 2x + 2 = \frac{10}{2} + 2 = \frac{24}{2}$

$\Rightarrow \tau_B = \frac{90}{2 \times 2831.25 \times 10^{-6} \times \frac{24}{2} \times 10^{-3}} = \dots$

مانند
↑
↓
مانند

خمش:

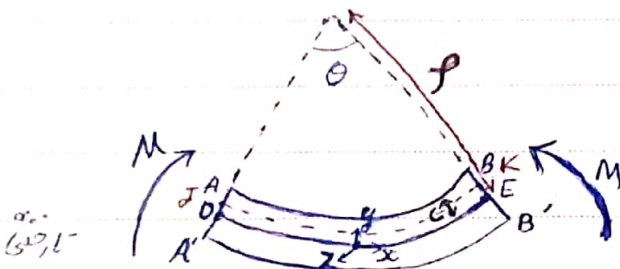
خمش خالص اگر عضو فقط تحت خمش باشد (مثل گوی).
یا گزندی خارج از مرکز: اگر عضو تحت بارگذاری خارج از مرکز قرار گیرد و خمش توزیع ناهمگونی تنش در عضو باشد تنش‌های ناشی از بارچرخشی و تنش‌های ناشی از بارگزندی ترکیب می‌کنیم.



* تمام مقاطع عرضی عمود بر محور عضو AB پس از اعمال گوی به صورت دایره باقی می‌مانند و امتداد هر کدام از صفحات از نقطه C عبور می‌کنند.

* طول AB کاهش می‌یابد ← کرنش نرمال منفی وجود می‌آید ← تنش نرمال فشاری ← در راستای x
* طول A'B' افزایش می‌یابد ← کرنش نرمال مثبت وجود می‌آید ← تنش نرمال کششی ← در راستای x

با توجه به تغییرات تنش در تنش از A تا A' می توان تغییرات کشیدگی یا تار بین A و A' وجود درگاه تنش در تنش درگاه است.
به این تار خارجی می گویند.



$$DE = p\theta$$

$$JK = (p - y)\theta$$

$$JK = DE = p\theta$$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L_{JK}}{L_{JK}} = \frac{(p - y)\theta - p\theta}{p\theta} = \frac{-y\theta}{p\theta} = \frac{-y}{p}$$

$$\epsilon_{max} = \frac{-c}{p}$$

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_{max}} = \frac{y}{c} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{y}{c} \epsilon_{max}$$

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad \text{قانون هوک}$$

$$\sigma_x = \frac{E y}{p} = \frac{E y}{c} \epsilon_{max}$$

* تنش قائم بر حسب قاعده از سطح خنثی صورت خطی تغییر می کند

با استفاده از معادلات تعادل می توان تنش قائم را در هر نقطه از سطح بدست آورد.

$$\sigma_{max} = \frac{M c}{I_z} \quad \text{و} \quad \sigma_x = \frac{M y}{I_z}$$

در فاصله موازی از سطح خنثی

مکان انرژی

$$\epsilon_x = \frac{y}{c} \epsilon_{max}$$

$$\epsilon_x = \frac{-y}{p}$$

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad \text{قانون هوک}$$

برای مابین شعاع انحناء

$$-\frac{M y}{I} = E \frac{y}{c} \epsilon_{max} = E \left(\frac{-y}{p} \right) \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{M}{EI}$$

(۴۲)

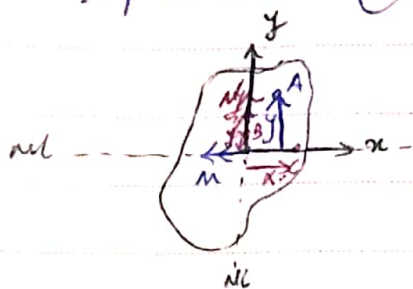
Subject:

مقاومت مصالح

Date:

۹۸۱۰۹۱۰۲

خمش ساده: هرگاه تیر خمشی در راستای یکی از محورهای اصلی واقع شود در مقابل خمش یک محور خنثی (دوره تنش‌های قائم) ایجاد شود و در مقابل آن تنش‌های برشی در راستای آن ایجاد شود.



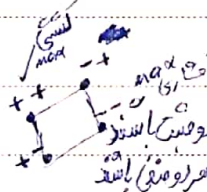
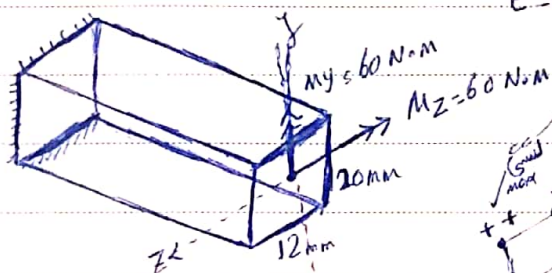
$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x}$$

$$B: \sigma_z = \frac{M_y (0)}{I_y} = 0$$

$$C: \sigma_z = \frac{-M_y (x')}{I_y}$$

مثال: برای شکل زیر تحت خمش قرار گرفته مطلوب است محاسبه تنش‌ها و تغییرات طولی آن.

$$E = 200 \text{ GPa}$$

الف) ناشی از M_z ب) ناشی از M_y 

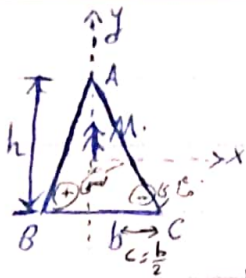
تغییرات طولی در هر دو جهت (الف) و (ب)

$$\text{الف) } \sigma_{x_{\max}} = \frac{M_z (c)}{I_z} = \frac{60 \times 10 \times 10^{-3}}{\frac{1}{12} (12) (20)^3 \times 10^{-12}} = 75 \text{ MPa}$$

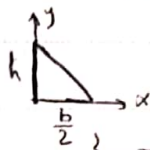
$$\text{ب) } \sigma_{x_{\max}} = \frac{M_y (c')}{I_y} = \frac{60 \times 6 \times 10^{-3}}{\frac{1}{12} (20) (12)^3 \times 10^{-12}} = 125 \text{ MPa}$$

$$\text{الف) } \frac{1}{f} = \frac{M_z}{E I_z} = \frac{60}{200 \times 10^9 \times \frac{1}{12} (12) (20)^3 \times 10^{-12}} \Rightarrow f = \dots$$

$$\text{ب) } \frac{1}{f} = \frac{M_y}{E I_y} = \frac{60}{200 \times 10^9 \times \frac{1}{12} (20) (12)^3 \times 10^{-12}} \Rightarrow f = \dots$$



مثال: در مقطع زیر نسبت انکسار خمشی M تنش نرمال در نقطه C را به دست آورید.



مورد ختمی در این حالت محور تقارن جسم محور y باشد.

$$\sigma_C = \frac{M y_C}{I_y} = \frac{M \frac{b}{2}}{2 \times \frac{1}{12} h \left(\frac{b}{2}\right)^3} = \frac{M \frac{b}{2}}{\frac{h b^3}{48}} = \frac{24 M}{h b^2}$$

$\sigma_A = 0$
روی محور تقارن مرکز ثقل

$$\sigma_B = \frac{24 M}{h b^2} \quad (+) \text{ لسیه}$$

گرنش های عرضی در حالت خمش خالص:

$$\epsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$

تنش و گرنش های نرمال

$$\sigma_x = \frac{-M y}{I}$$

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x = \frac{\nu y}{\rho}$$

گرنش های عرضی

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\epsilon_z = -\nu \epsilon_x = \frac{\nu y}{\rho}$$

$$\epsilon_y = \frac{\nu y}{\rho} = \frac{\nu y M}{EI}$$

$$\epsilon_z = \frac{\nu y}{\rho} = \frac{\nu y M}{EI}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) ; \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z)$$

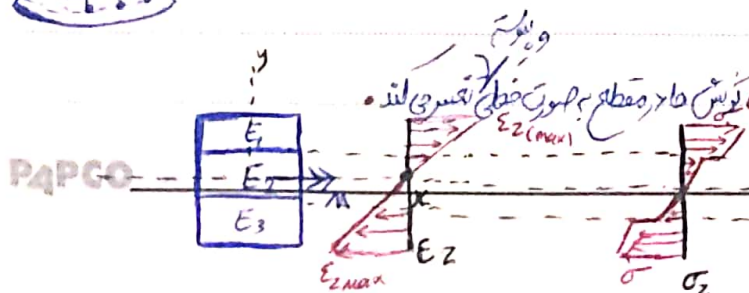
خمش خالص در مواد مرکب: این مقطع از جنس M دارد ساقه شده است ولی انتقال های مختلف این نسبت به یکدیگر صورت کاملاً صلب این می شود.



و مقطع تحت خمش M بصورت یکپارچه عمل می کند. در این حالت فرضیات زیر استفاده می شود:

E_1
E_2
E_3

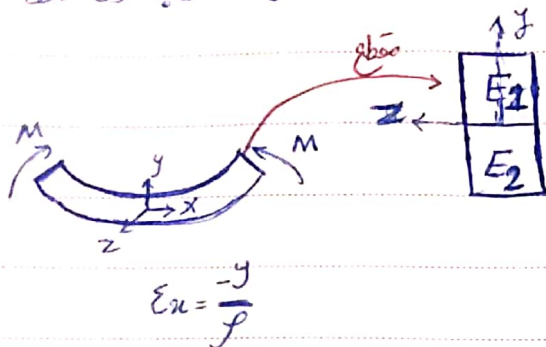
* سطح باقی مانده مقطع پس از بارگذاری و مقاطع عرضی عمود بر محور طولی هستند.



* با توجه به یکپارچه بودن مقطع، تنش ها در مقطع به صورت خطی تغییر می کنند.

گرنش و خطی بودن
تنش و خطی نبودن
خطی ماندن طولی
به پس عامل نابهرگی (جبری ماند)

* با توجه به تغییر بودن ضریب الاستیسیته در قسمت های مختلف توزیع تنش در داخل قسمت های مختلف هر ماده خطی بوده ولی در مرکز مشترک دارای پیرش است. توزیع تنش بصورت پله ای - خطی است.



در این حالت نمی توان فرض کرد که محور خنثی از مرکز سطح مقطع ماده مرکب عبور می کند. در این حالت باید محور خنثی را بیست آوریم.

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_x = \frac{-E_1 y}{\rho}$$

$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_x = \frac{-E_2 y}{\rho}$$

نیروی مؤثر بر یک جزء از قسمت فوقانی:

$$dF_1 = \sigma_1 dA = \frac{-E_1 y}{\rho} dA$$

نیروی مؤثر بر یک جزء از قسمت تحتانی:

$$dF_2 = \sigma_2 dA = \frac{-E_2 y}{\rho} dA$$

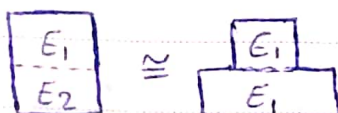
$$\frac{E_2}{E_1} = n \quad \text{فرض کنیم}$$

$$dF_1 = \frac{-E_1 y}{\rho} dA$$

$$dF_2 = \frac{-E_2 n}{\rho} dA = \frac{-E_1 y}{\rho} (n dA)$$

عوض از این می کنیم تا آلا جای تعارض نشود تا با قاعده ای
نوعی $\rightarrow$ تنش های یکسانند
 $\rightarrow \frac{-E_1 y}{\rho} [n dz dy]$
سطح مقطع ماده ۲ را n برابر کنیم
آنوقت یک ماده از جنس ۱ خواهیم داشت

- تغییران عرضی به موازی محور خنثی با تیر صورت گیرد تا فاصله هر جزء از تیر خنثی ثابت بماند.

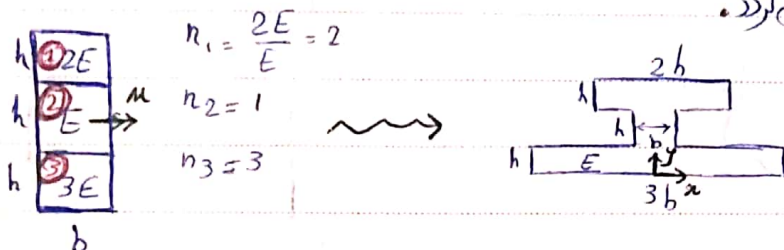


$$\sigma_x = \frac{-M y}{I}$$

در این حالت می توان با خنثی را بیست آورد و مرکز سطح جسم تبدیل یافته عبور می کند. برای بیست آوردن σ_x تنش یک در نقطه مناظر مقطع تبدیل یافته را بیست می آوریم. برای بیست آوردن σ_x تنش یک در نقطه مناظر مقطع تبدیل یافته را n ضرب می کنیم.

محاسبه تنش در مقاطع مرکب با روش رسم مقطع هگن شده:
برای محاسبه تنش در مقاطع مرکب می توان با هگن کردن مقطع نسبت به یکی از مصالح و رسم شکل مقطع هگن شده تنش در نقاط مختلف را بدست آورد.

(۱) برای رسم مقطع هگن شده، مساحت هر ماده را در ضریب هگن کن ضرب می کنیم. بعد از آن ماده که عمود بر محور خنثی قرار دارد تغییر می کند و تغییرات به موازات محور خنثی انجام می گردد.



(۲) در مقاطع مرکب محور خنثی از مرکز سطح مقطع هگن شده عبور کرده و برای محاسبه همان انشوری می توان همان انشوری مقطع هگن شده نسبت به تار خنثی را بدست آورد.

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

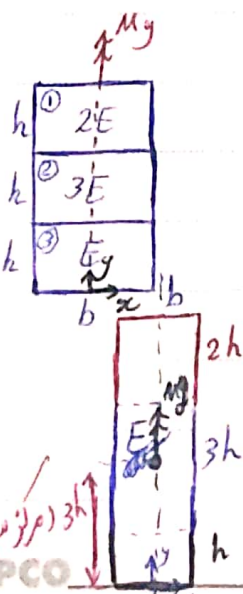
$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

$$\bar{I} = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

همان انشوری
نسبت به تار خنثی

$$\sigma_i = n_i \frac{m y}{\bar{I}}$$

ضریب هگن سازی



مثال: در شکل زیر مطلوب است:
(۱) محاسبه تنش خمشی ماکزیم در ماده (۲) نسبت به ماده (۳) هگن سازی کردم
(۲) شعاع انحنای مقطع

می توان به اندازه تنش هر کدام از مواد هگن سازی کرد که در اینجا نسبت به ماده (۳) هگن سازی کردم
تار خنثی را در هفت و یکم را با رسم برعکس تر تغییر می کند (h ها تغییر می کنند)

$$n_1 = \frac{E_1}{E_3} = \frac{2E}{E} = 2$$

$$n_2 = 3$$

$$n_3 = 1$$

$$\bar{y} = 3h$$

$$\bar{x} = 0$$

(دری محور ها)
x < 0

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} (6h) b^3$$

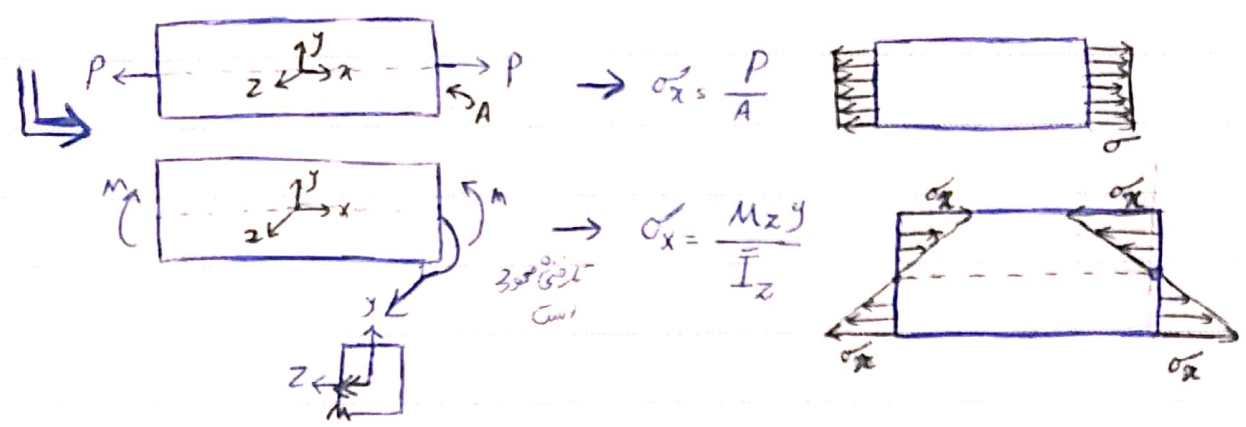
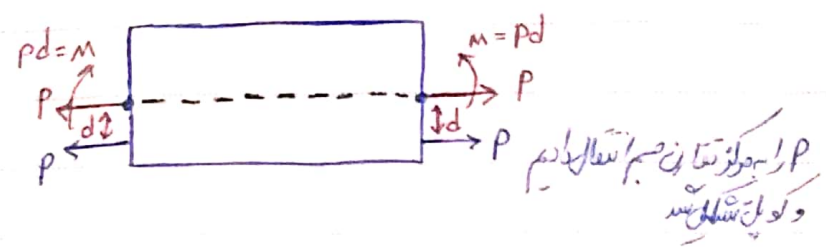
همان انشوری
نسبت به تار خنثی

$$\sigma_{max} = n_2 \frac{m x}{\bar{I}} = 3x \frac{m (\frac{b}{2})}{\frac{1}{12} (6h) b^3} = \frac{3m}{hb^2}$$

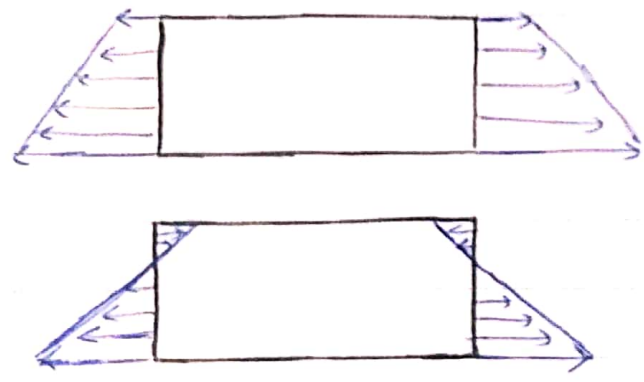
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \bar{I}} = \frac{M}{E \times \frac{6hb^3}{12}} \rightarrow \rho = \frac{Ehb^3}{2m}$$

در قسمت این دو نسبت به این دو تغییر می کند (نسبت به تار خنثی)
نسبت به تار خنثی (موازی محور ها)

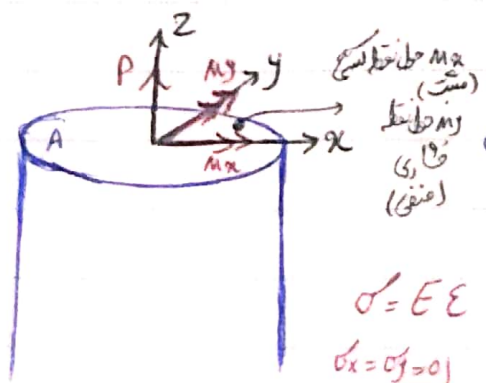
- بارگذاری محوری خارج از مرکز:



$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_z y}{I_z}$$



- ترکیب بار محوری و انحراف در خمشی:



$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{m_x y}{I_x} - \frac{m_y x}{I_y}$$

$$\sigma = E \epsilon \Rightarrow \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{P}{AE} + \frac{m_x y}{I_x E} - \frac{m_y x}{I_y E}$$

$\sigma_x = \sigma_y = 0$

جایی که تنش ها صفر هستند

$$\epsilon_x \neq 0 \Rightarrow \epsilon_z$$

$$\epsilon_y \neq 0 \Rightarrow -\epsilon_z$$

P4PCO

در تیرهایی که در دو سر آنها تکیه‌گاه داریم و در وسط آنها بار داریم، تنش‌ها صفر می‌شوند.

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{P}{A} + \frac{m_x y}{I_x} - \frac{m_y x}{I_y} = 0 \right\}$$

رابطه نا همبستگی

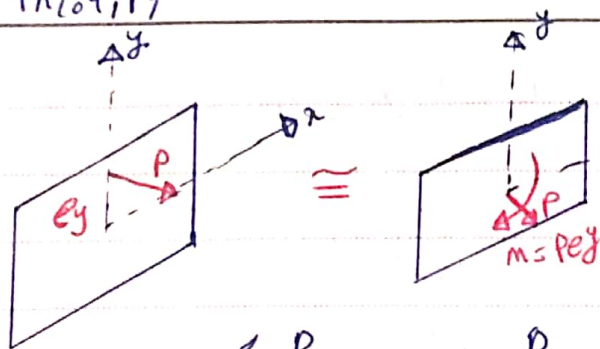
(47)

Subject:

مقاومت مصالح

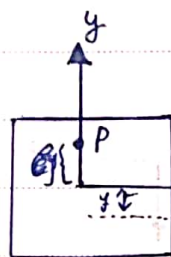
Date:

98, 09, 19



$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow \sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M y}{I}$$

$$\sigma_y = \frac{M y}{I}$$



برای محاسبه تارخشی کافی است که تنش را در این با صفر قرار دهیم.

$$\sigma_z = 0 \rightarrow \frac{P}{A} + \frac{M x}{I_x} = 0$$

$$\frac{P}{A} + \frac{(P e_y) y}{I_x} = 0 \rightarrow e_y y = -\frac{I_x}{A} = -r_x^2$$

خروج از مرکزیت بار

خروج از مرکزیت تارخشی

حل می ده

$$\boxed{y_s = -\frac{r_x^2}{e_y}}$$

خروج از مرکزیت بار و علاقه تنش

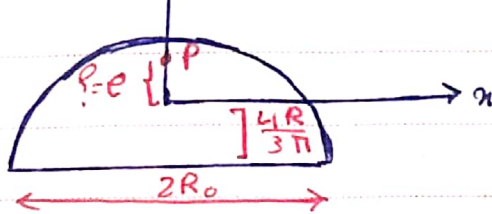
با خروج از مرکزیت تارخشی

مخالف هم هستند

هم جهت هاب یکس
است و لقم مقاوم در یکس است

* با توجه به علامت متغیر طبقه قبل می بینیم که نیروی محوری و تارخشی همواره در طرفین مرکز سطح قرار دارد و با تارخشی شدن برای آنجا به مرکز جگرگی از مرکز دور می شود.

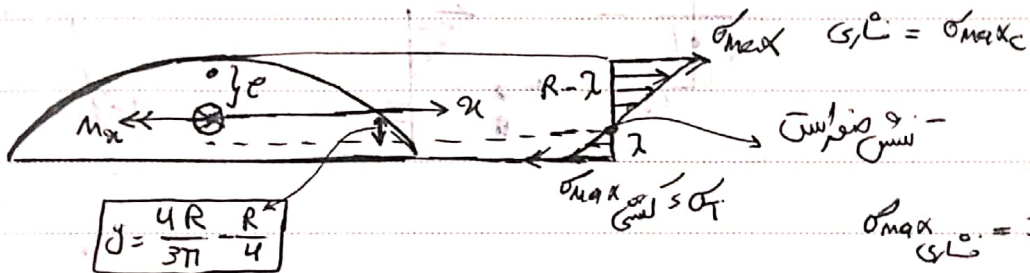
مسئله: در مثال زیر نیروی فشاری P در یک فاصله e از مرکز سطح اثر کند تا دایره تنش فشاری برابر دایره تنش کششی آن شود.



$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$$

$$\frac{\pi R^4}{5} = \bar{I}_x + \frac{\pi R^3}{2} \times \left(\frac{4R}{3\pi} \right)$$

$$\rightarrow \bar{I}_x = \frac{\pi R^4}{5} - \frac{8R^4}{9\pi}$$



$$\sigma_{max} = 3 \sigma_c$$

$$\frac{3\sigma_c}{\sigma_c} = \frac{R - \lambda}{\lambda} \rightarrow 3\lambda = R - \lambda \rightarrow \lambda = \frac{R}{4}$$

$$y = \frac{4R}{3\pi} - \frac{R}{4}$$

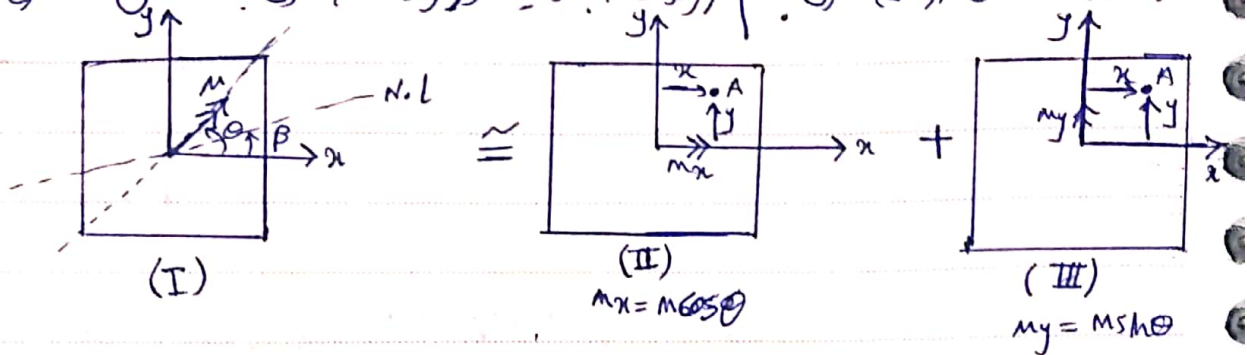
$$e_y y = -r_x^2 \rightarrow -\frac{\bar{I}_x}{A}$$

$$e = \frac{-\bar{I}_x}{Ay} \rightarrow e \left(\frac{4R}{3\pi} - \frac{R}{4} \right) = \frac{-\left(\frac{\pi R^4}{5} - \frac{8R^4}{9\pi} \right)}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

$$\rightarrow e =$$

فصل نامعین:

اگر استوارهای خمشی در صفحه یقین جسم قرار نداشته باشند یا عضو برای صفحه تعین نباشد، خمشی نامعین اتفاق می افتد.



$$\sigma_I = \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$\sigma_{II} = \frac{m_x y}{I_x}$$

$$\sigma_{III} = \frac{-m_y x}{I_y} \rightarrow \text{در اینگونه موارد، وقتی نسبت مهم هستند}$$

$$\sigma_I = \frac{m_x y}{I_x} - \frac{m_y x}{I_y} = \frac{m \cos \theta y}{I_x} - \frac{m \sin \theta x}{I_y}$$

$$\sigma_I = \sigma_Z = 0 \rightarrow \frac{m \cos \theta y}{I_x} - \frac{m \sin \theta x}{I_y} \Rightarrow \frac{\sin \theta x}{\cos \theta} = \frac{I_y}{I_x} y$$

$$\Rightarrow y = \frac{I_x}{I_y} \tan \theta x \quad \text{معادله تانژانت است}$$

$$y = \tan \beta x$$

$$\tan \beta = \frac{I_x}{I_y} \tan \theta \Rightarrow \frac{\tan \beta}{\tan \theta} = \frac{I_x}{I_y} \rightarrow \text{نسبت سین تانژانت به نسبت کوزینت}$$

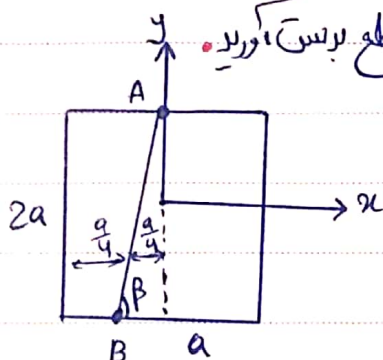
* با توجه به مقدار I_x و I_y ، θ و β هم علامت هستند.

* اگر $I_x > I_y \leftarrow \theta > \beta$

* اگر $I_x < I_y \leftarrow \theta < \beta$

* بنابراین محورهای تارفتی همواره بین محو کول u و محو اصلی متعامد با هم می باشد.

- مثال: در مقطع زیر تنش A و B یکسان است. سبب محورفتی را بر این مقطع بررسی کنید.



$$I_x = \frac{1}{12} (a)(2a)^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} (2a)(a)^3$$

* خط AB محوری تارفتی است پس سبب آن

خط با سبب تارفتی می باشد.

$$\frac{\tan \beta}{\tan \theta} = \frac{I_x}{I_y}$$

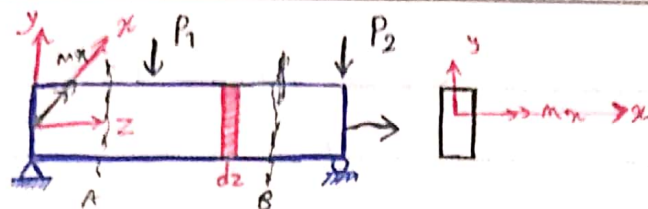
$$\tan \beta \times \frac{2a}{\frac{a}{4}} = 2a \times \frac{4}{a} = 8$$

$$\frac{8}{\tan \theta} = \frac{8a^4}{2a^4} \rightarrow \boxed{\tan \theta = 2}$$

51

Subject: مقاومت مصالح

Date: 9, 10, 9, 18



محاسبه تغییر طول سیر تحت اثر تنش:

برای محاسبه تغییر طول سیر نشان داده شده در بازه ای A تا B، ابتدا تغییر طول المانی به طول dz را بدست می آوریم سپس در فاصله ای A تا B انتگرال گیری انجام می دهیم:

$$\Delta(dz) = \epsilon_z dz = \frac{\sigma_z}{E} dz = \frac{M y}{E I_x} dz$$

$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \frac{M y}{I} \\ \text{تغییر طول المانی} \end{array} \right.$

$$\Delta = \int_A^B \Delta(dz) = \int_A^B \frac{M y}{E I} dz = \frac{y}{E I} \int_A^B M dz$$

مثال: تیری با ضریب الاستیسیته E تحت فشار M قرار دارد. تغییر طول المانی در سیر را بدست آورید. $(y = -h)$

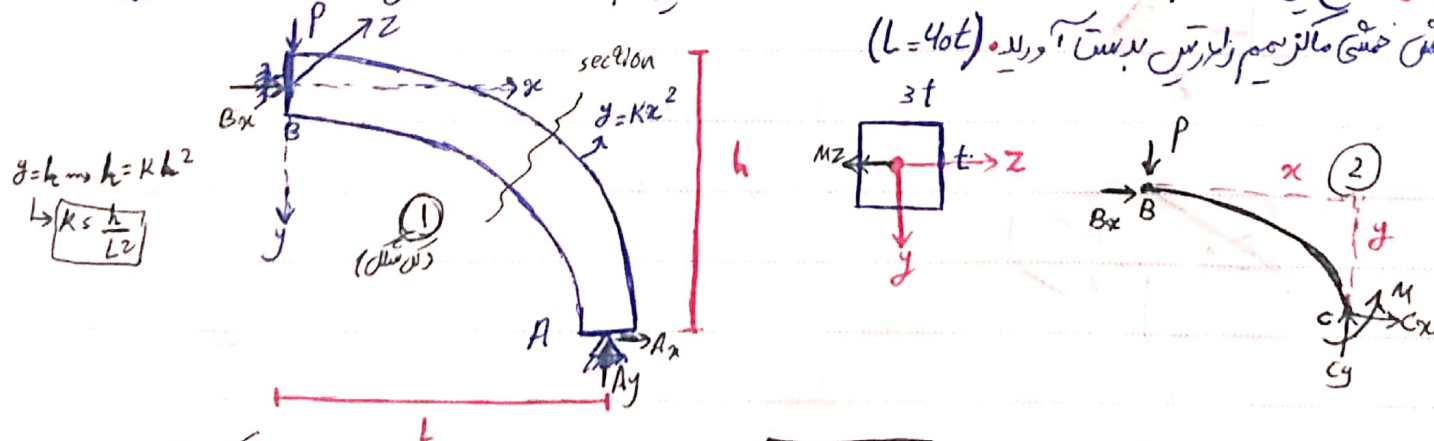
$$\Delta = \frac{y}{E I} \int_0^L M dz = \frac{-h}{\frac{4}{3} b h^3 E} \int_0^L M dz = \frac{3 M h L}{4 E b h^3} = \frac{3 M L}{4 E b h^2}$$

$$y = -h$$

$$E = E$$

$$I_x = \frac{1}{12} (2b)(2h)^3 = \frac{4}{3} b h^3$$

مثال: مقطع سیر خمیده مقابل مستطیلی بابعاد t و 3t می باشد. معادله سیر نسبت به محور مختصات خودی به صورت $y = Kx^2$ بیان شده است. تنش خمشی ماکزیمم را بدست آورید. $(L = 40t)$



$$\textcircled{1} \text{ مثال: } \sum M_A = 0 \rightarrow PL - Bh = 0 \rightarrow B = \frac{PL}{h}$$

② سوال: $\sum M_{C50} \rightarrow -M - Px + By = 0 \rightarrow -M - Px + \frac{PL}{h} (Kx^2) = 0$

$\rightarrow -M - Px + \frac{PL}{h} \left(\frac{h}{L^2} \right) x^2 = 0 \rightarrow \boxed{M(x) = \frac{P}{L} x^2 - Px}$

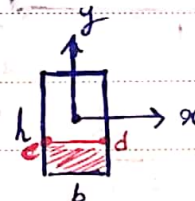
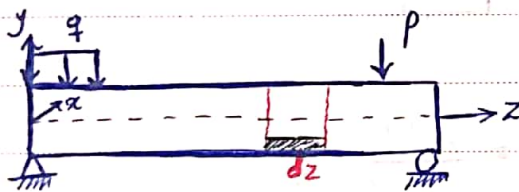
برای M بیشترین $M_{max} \Rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = 0 \rightarrow \frac{2Px}{L} - P = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{L}{2}}$

$x = \frac{L}{2} \rightarrow M_{max} = \frac{P(\frac{L}{2})^2}{L} - \frac{L}{2}P = \boxed{\frac{-PL}{4}}$ (-) ماکزیم منفی

$\sigma_{max} = \frac{Mf}{I} = \frac{-\frac{PL}{4} \times \frac{L}{2}}{\frac{1}{12}(3t)(t)^3} = \boxed{\frac{-20P}{t^2}}$

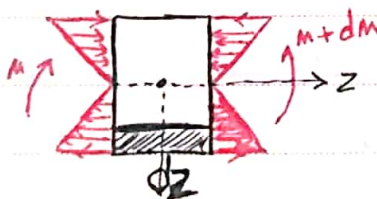


فصل ۱۰ جزوه (کتاب)



- تنش برشی:

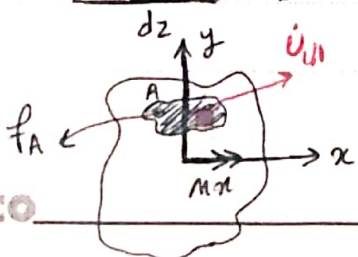
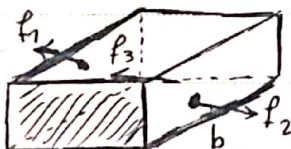
برای محاسبه تنش های برشی در تارک از مقطع تری توان الهامی با ضخامت dz در نظر گرفت:



با فرض توزیع یکنواخت تنش برشی در عرض مقطع و با بررسی تعادل:

طبق تعادل

$\boxed{f_2 = f_1 + f_3}$



همان استاتیسیطع A نسبت به محور x (تارک)

$f_A = \int_A dA = \int + \frac{M_x y}{I_x} dA = \frac{M}{I} \int y dA$

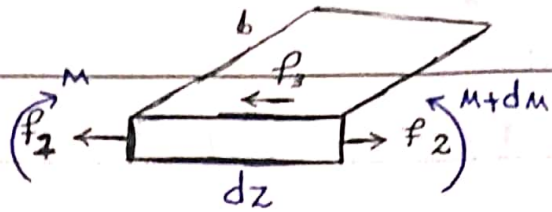
$\boxed{f_A = \frac{M_x \phi_x}{I_x}}$

۵۳

Subject: مقاومت مصالح ۱

Date: ۹۸, ۰۹, ۲۳

$$f_1 = \frac{mQ}{I_x}, \quad f_2 = \frac{(m+dm)Q}{I_x}$$



نمودار افقی ناستی از تنش برشی: $f_3 = \tau_{yz} A = \tau_{yz} (b dz)$

$$f_1 + f_3 = f_2 \Rightarrow \frac{mQ}{I_x} + \tau_{yz} (b dz) = \frac{(m+dm)Q}{I_x}$$

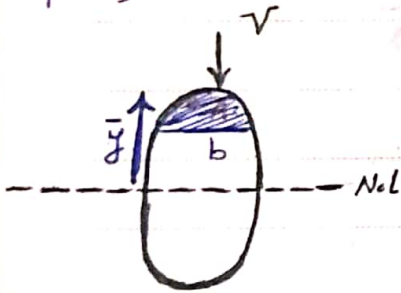
$$\Rightarrow \tau_{yz} = \frac{(\frac{dm}{dz})Q}{I_x b}$$

از طرفی: $\frac{dm}{dz} = V$

$$\tau_{yz} = \frac{VQ}{I_x b}$$

$$\tau \neq \frac{V}{A}$$

نمودار عرضی که قبلاً در قسمت اول دیدیم



$$\tau = \frac{VQ}{I_x b}$$

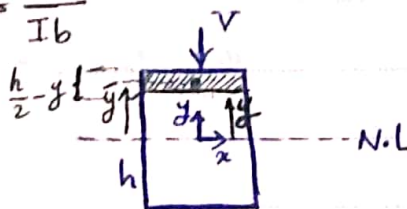
Q: مقدار استوار است
سطح دایره نسبت به
محور افقی

b: عرض قسمت جدا شده

V: شدت نیروی برشی (برشی)

I: ممان انرشیا کل سطح نسبت به محور افقی

$$\begin{cases} \text{تأثیر از نیروی محوری} \rightarrow \sigma = \frac{P}{A} \\ \text{محور} \rightarrow \sigma = \frac{My}{I} \\ \text{برشی} \rightarrow \tau = \frac{Tr}{J} \\ \text{نیروی برشی (برشی)} \rightarrow \tau = \frac{VQ}{I_x b} \end{cases}$$



مثال: مقطع مستطیل زیر تحت نیروی برشی V قرار دارد. مطلوب است:
(۱) معادله تغییرات تنش برشی
(۲) تنش برشی حداکثر

$$\tau = \frac{VQ}{I_x b}$$

$$\begin{cases} V = V \\ I_x = \frac{1}{12} b h^3 \\ b = b \\ Q = \int y dA = \bar{y} A \rightarrow A = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \end{cases}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right) + y = \left[\frac{h}{4} + \frac{y}{2} \right]$$

صفر

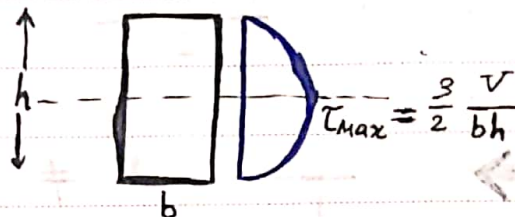
$$Q = \bar{y}A = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) \left(\frac{h}{2} - y \right) b = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b$$

$$\tau_{yz} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b}{\frac{1}{12} b h^3} = \left\{ \frac{V}{bh} \left[\frac{3}{2} - 6 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \right\}$$

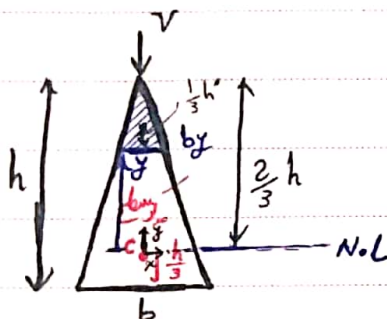
توزیع پیرامونی (order 2)

$$y = \frac{h}{2} \rightarrow \tau = 0$$

$$y = -\frac{h}{2} \rightarrow \tau = 0$$



مثال:



$$\tau_{yz} = \frac{VQ}{Ib} \rightarrow \begin{cases} V = V \\ b = b_y \Rightarrow \frac{b_y}{b} = \frac{\frac{2}{3}h - y}{\frac{2}{3}h} \rightarrow b_y = \frac{b}{h} \left(\frac{2}{3}h - y \right) \end{cases}$$

$$I_x = \frac{1}{36} b h^3$$

$$Q = \int y dA = \bar{y}A = \begin{cases} A = \frac{b_y h'}{2} \\ \bar{y} = \frac{1}{3} h' + y \end{cases}$$

$$\rightarrow Q = \left[\frac{b}{2h} \left(\frac{2}{3}h - y \right) \left(\frac{2}{3}h - y \right) \right] \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}h - y \right) + y \right]$$

$$\Rightarrow \tau_{yz} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V}{\frac{bh}{2}} \left[\frac{4}{3} + \frac{2y}{h} - 6 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

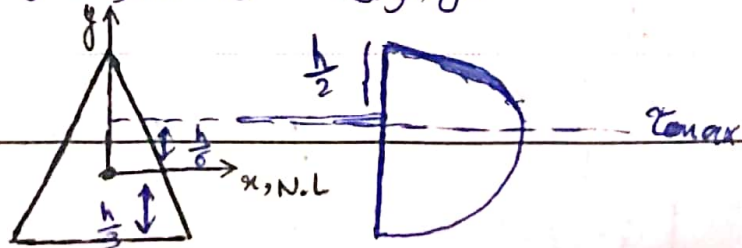
توزیع پیرامونی (order 2)

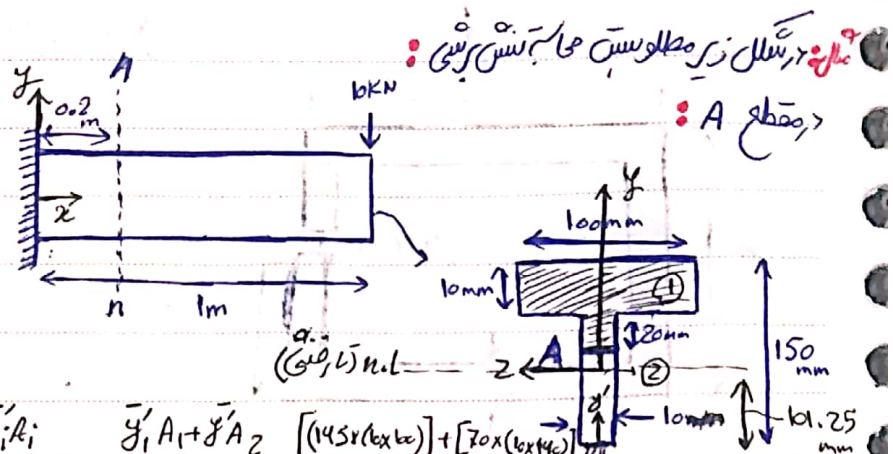
$$\frac{d\tau}{dy} = 0 \rightarrow y = \frac{h}{6}$$

* برای محاسبه تنش برشی ماکزیمم:

$$\tau_{max} = \left(\tau_{y=\frac{h}{6}} \right) = \frac{3}{2} \tau_{ave} ; \tau_{ave} = \frac{V}{A} = \frac{V}{\frac{bh}{2}}$$

if $y = \frac{2}{3}h \rightarrow \tau = 0$ چون $Q = 0$ و $y = -\frac{h}{3} \rightarrow \tau = 0$ چون $Q = 0$
تنش صفر است. $\rightarrow$ بار را پس از آنکه اگر Q را محاسبه کنیم، Q صفر می‌شود.





$$\tau_{yx} = \frac{VQ}{Ib}$$

$$V = 10 \times 10^3 \text{ KN}$$

$$b = 10 \text{ mm}$$

$$\bar{y}' = \frac{\int y' dA}{\int dA} = \frac{\sum \bar{y}'_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\bar{y}'_1 A_1 + \bar{y}'_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{[(145)(10 \times 10)] + [70 \times (10 \times 150)]}{(10 \times 100) + (10 \times 150)}$$

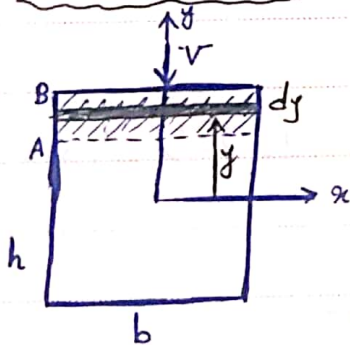
$$\bar{y}' = \frac{14500 + 105000}{2400} = 101.25 \text{ mm}$$

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{12} (100)(10)^3 + (10 \times 100) \left(\frac{43.75}{145 - 101.25} \right)^2 \right) + \left(\frac{1}{12} (10)(150)^3 + (10 \times 150) \left(\frac{31.25}{101.25 - 70} \right)^2 \right)$$

$$I = (\dots) \text{ mm}^4$$

$$Q = \int y' dA = \bar{y}' A = (10 \times 100)(43.75) + (20 \times 10)(28.75) = 49500 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{yx} = \frac{VQ}{Ib}$$



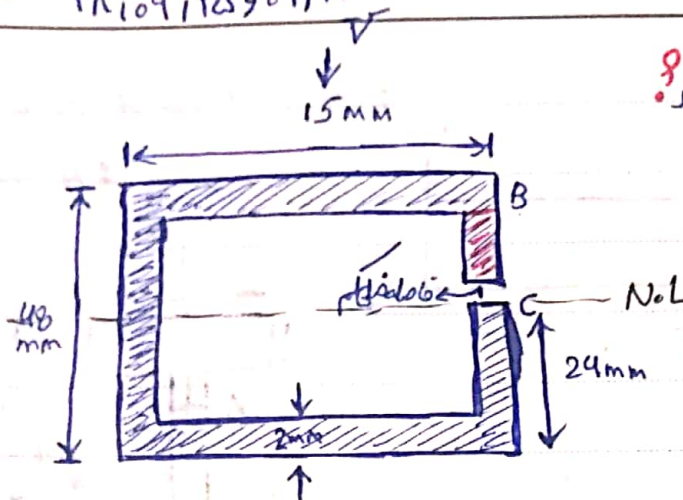
محاسبه نیروی برشی و در قسمت های مختلف یک مقطع:

برای محاسبه نیروی برشی تحمل شده در قسمت AB استوار همان به تفاوت بود
و در نظر می گیریم و نیروی و در آن را به دست می آوریم:

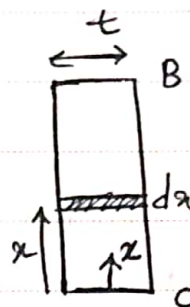
$$dF = \tau dA = \frac{VQ}{Ib} b dy = \frac{VQ}{I} dy$$

پس با رابر فاصله B تا A تغییر داده و به وسیله استوار گیری، نیروی و در قسمت ABC را به دست می آوریم:

$$F_{AB} = \int_A^B dF = \int_A^B \frac{VQ}{I} dy$$



- مثال: در شکل زیر سازه BC خنجر در صورتی که V را کامل می کنند؟



$$f_{BC} = \int_C^B \frac{vQ}{I} dx$$

$$I = \frac{1}{12}(48)^3(15) - \frac{1}{12}(44)^3(11) = \boxed{\dots}$$

$$Q = \bar{x}A = \frac{x}{2}(x)(t) = \frac{x^2 t}{2}$$

$$f_{BC} = \int_{0.022}^{0.22} \frac{vx^2 t}{2I} dx = \frac{vt}{6I} x^3 \Big|_0^{0.22} = \boxed{0.059V} \rightarrow \boxed{5.9\% V}$$

*

- جریان برش:

شدت نیروی برشی در واحد طول یک مقطع را جریان برش می گویند:

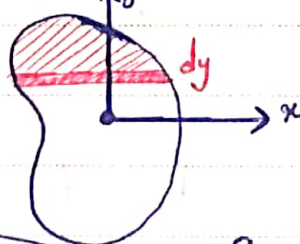
$$q = \frac{df}{dy} = \frac{\tau dA}{dy}$$

$$= \frac{\tau(bdy)}{dy} = \tau b$$

$$= \frac{vQ}{Ib} b = \frac{vQ}{I}$$

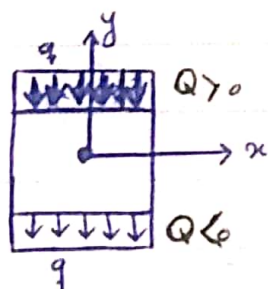
$$q = \frac{vQ}{I}$$

$$q = \max \quad \text{و} \quad Q = \max$$



* جریان برشی حداکثر در یک مقطع، هوا و برآر خنجر اتفاق می افتد زیرا همان استاتیکی سطح هوا و روی تاج خنجر بیشینه است.

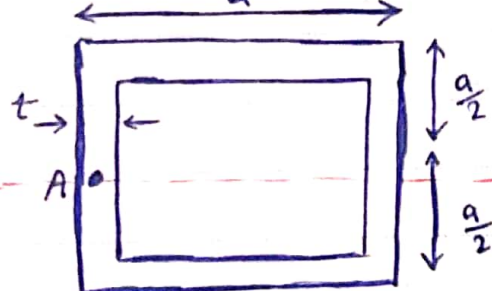
* برای رسم جریان برشی در مقطع Q بر اساس استاتیکی Q برای قسمت جدا شده مثبت باشد، جریان برشی در آن قسمت به صورت عمود بر مرکز جاذبه و به آن نزدیک می شود و در صورت منفی بودن Q قسمت جدا شده، جریان برشی در آن قسمت از مرکز جاذبه دور خواهد شد.



- تنش های برشی در مقاطع جدار نازک:

باتوجه به کوچک بودن ضخامت، تنش برشی به موازات جدارها حائز اهمیت بوده و توزیع آن در ضخامت مقطع به صورت یکنواخت فرض می شود.

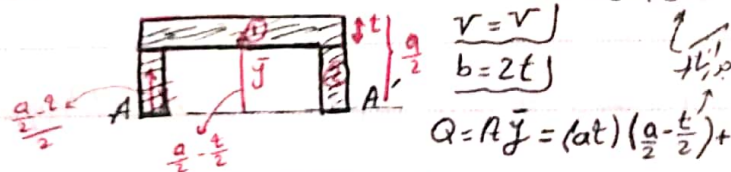
- مثال: در مقطع جدار نازک زیر، ضخامت مقطع ثابت و برابر با t است. تنش برشی در نقطه A را به دست آورید.



$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

t دقتی بتوان 2 بار سرد و 2 بار گرم از آن صرف نظر کرد

ناقص



$$Q = A\bar{y} = (at)\left(\frac{a}{2} - \frac{t}{2}\right) +$$

$$(2)\left(\frac{a}{2}\right)t\left(\frac{a}{2} - t\right)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{a^2t}{2} + \frac{a^2t}{4} = \frac{3a^2t}{4}$$

$$I = \frac{1}{12}(a)(a)^3 - \frac{1}{12}(a-2t)(a-2t)^3$$

مستطیل

$$\frac{1}{12}(a^2-4at+4t^2)(a^2-4at+4t^2)$$

جدار

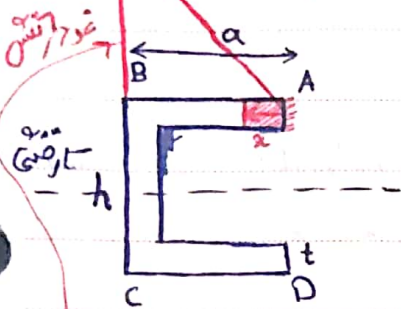
$$= \frac{1}{12}a^4 - \frac{1}{12}(a^4 - 8a^3t + 12a^2t^2 - 8at^3 + 4t^4) = \frac{8}{12}a^3t - \frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{12}a^4 - \frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{12}a^4 = \frac{8}{12}a^3t = I$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3}a^3t$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{V\left(\frac{3a^2t}{4}\right)}{\left(\frac{2}{3}a^3t\right)(2t)} = \frac{9}{16} \frac{V}{at} \rightarrow \tau = \frac{9}{16} \frac{V}{at}$$

- تغییرات تنش برشی در قسمت های مختلف یک مقطع:
* در یک مقطع با توجه به فاصله همان از تار قوی، تنش برشی با درجه های مختلف تغییر می کند:

* در یک مقطع جدا تارک و با افتحات ثابت در صورتی که قسمتی از تار قوی فاصله ی ثابتی داشته باشد، تنش برشی بر روی آن بصورت خطی تغییر می کند:



$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \rightarrow \begin{cases} v = V \\ Q = A\bar{y} = (xt) \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = x(t) \left(\frac{h}{2} \right) \\ b = t \\ I = I_{\text{مقدری ثابت}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{Vxt \frac{h}{2}}{It} = \frac{Vh}{2I} x \quad \tau(x) = \frac{Vh}{2I} x$$

خطی
order 1

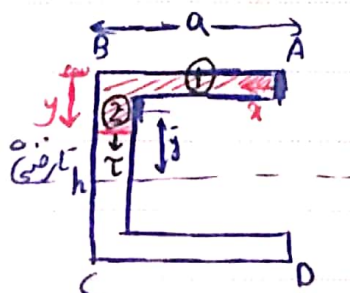
$$\begin{cases} \tau_A = 0 \\ \tau_B = \frac{Vha}{2I} \end{cases}$$

* با توجه به تغییرات خطی تنش برشی، برای بدست آوردن نیروی برشی ایجاد شده در مقطع AB، تنش برشی متوسط AB را در مساحت آن ضرب می کنیم:

$$\tau_{ave} = \frac{\tau_A + \tau_B}{2} = \frac{Vha}{4I}$$

$$F_{AB} = \tau_{ave} A_{AB} = \frac{Vha}{4I} (at)$$

* در یک مقطع جدا تارک و با افتحات ثابت در صورتی که قسمتی از مقطع از تار قوی فاصله ی متغیری داشته باشد، تنش برشی بر روی آن بصورت سهمی تغییر می کند:

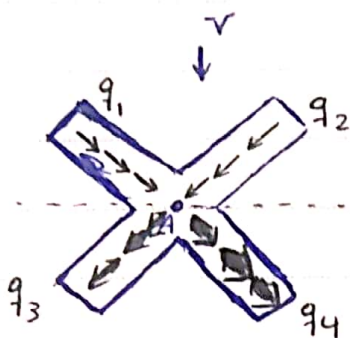


$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \rightarrow \begin{cases} v = V \\ I = I \\ b = t \\ Q = Q_1 + Q_2 = at \left(\frac{h}{2} \right) + yt \left(\frac{h}{2} - y + \frac{y}{2} \right) \\ Q = at \frac{h}{2} + yt \left(\frac{h-y}{2} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{V (at \frac{h}{2} + yt (\frac{h-y}{2}))}{I t (2)} \quad \tau(y) = \frac{V}{2I} [ah + y(h-y)]$$

- اصل پیوستگی جریان برش:

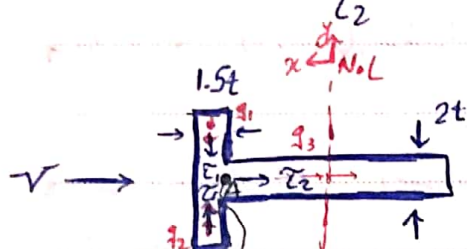
مطالب این اصل در هر گره جریان برشی ورودی به آن با جریان برشی خروجی از آن یکسان است.



$$\sum q_{in} = \sum q_{out}$$

$$q_1 + q_2 = q_3 + q_4$$

- مثال: در شکل زیر یک مقطع تحت نیروی برشی V قرار گرفته است. مطلوب است محاسب نسبت $\frac{\tau_1}{\tau_2}$.



$$\begin{cases} q = \frac{VQ}{I} \rightarrow q = \tau b = \tau t \\ \tau = \frac{VQ}{Ib} \end{cases}$$

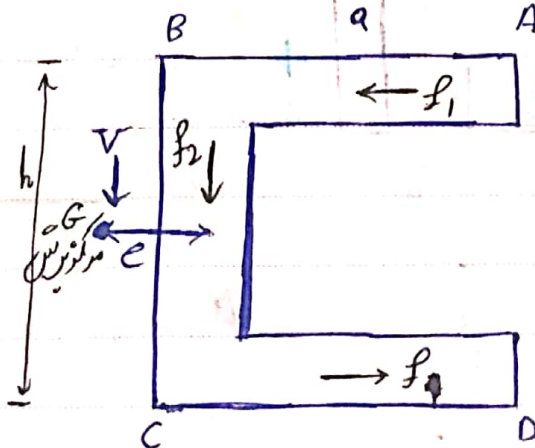
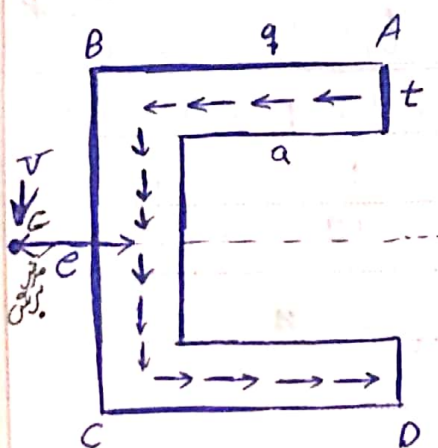
$$A \text{ در } \rightarrow A: \sum q_{in} = \sum q_{out} \rightarrow q_1 + q_2 = q_3 \quad ; \quad q = \tau t$$

$$q_1 = q_2$$

$$\Rightarrow \tau_1 \times 1.5t + \tau_1 \times 1.5t = \tau_2 \times 2t \rightarrow 3\tau_1 t = 2\tau_2 t \rightarrow \boxed{\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{2}{3}}$$

- مرکز برش:

مرکز برش نقطه‌ای در یک مقطع می‌باشد که راستای نیروی کششی از آنجا بلند می‌شود. مقطع تحت اثر لنگر بی‌مشی قرار نمی‌گیرد. در این حالت لنگرهای ناشی از جریان برش حول هر نقطه دلخواه، معادل لنگرهای برشی حول همان نقطه دلخواه می‌باشند. بنابراین اگر لنگرگیری حول مرکز برش انجام شود، لنگرهای برشی و لنگرهای ناشی از جریان برش حول مرکز برش صفر خواهند شد.



f_1 نیروی ایستاده در بال برش

f_2 نیروی ایستاده در جان برش

$$\sum M_G = 0 \rightarrow f_2 \times e = f_1 \times h$$

$$\rightarrow \boxed{e = \frac{f_1 h}{f_2}}$$

PAPCO

$$f_2 = V$$

$$f_1 = \tau_{ave} A \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{ave} = \frac{\tau_A + \tau_B}{2} \\ A = at \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_A = 0 \\ \tau_B = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V(a \times t \times \frac{h}{2})}{I(t)} = \frac{Vah}{2I} \end{array} \right.$$

90

Subject: مقاومت مصالح 1

Date: 98/10/02

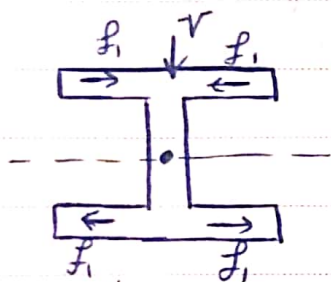
$$\tau_{ave} = \frac{0 + \frac{v_{ah}}{2I}}{2} = \frac{v_{ah}}{4I}$$

$$f_1 = \frac{v_{ah}}{4I} \times at = \frac{va^2th}{4I}$$

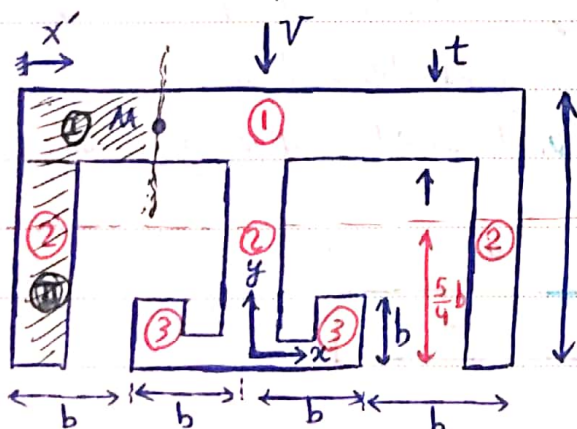
$$\Rightarrow e = \frac{f_1 h}{f_2} = \frac{\frac{va^2th}{4I} \times h}{V} = \frac{a^2th^2}{4I} \quad \text{محل مرکز ثقل}$$

* مرکز ثقل هر مقطع ماستر مرکز سطح از مختصات هندسی مقطع بوده و منحصر به فرد است. محل مرکز ثقل مستقل از بارگذاری است.

* در صورت وجود محور تقارن در یک مقطع مرکز ثقل لزوماً بر روی آن قرار گرفته است. در صورتی که مقطع دارای مرکز تقارن باشد مرکز ثقل و مرکز سطح بر هم منطبق و بر روی محل مرکز تقارن قرار می گیرند.



- مثال: مقطع زیر تحت اثر بارش قائم V در مرکز ثقل قرار گرفته است. اگر تنش برشی در نقطه M برابر صفر باشد مقدار x را بیابید.



$$\tau_m = \frac{VQ}{Ib} = ? \quad \text{ابتدا محل تقاطع را بیابیم}$$

$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{[(4b(t)) \frac{2b}{2}] + 3[(2b(t))b] + 2[(b(t)) \frac{b}{2}]}{4bt + 3t(2b) + 2(b)(t)}$$

$$\bar{y} = \frac{8b + 6b + b}{12} = \frac{15b}{12} = \frac{5}{4}b$$

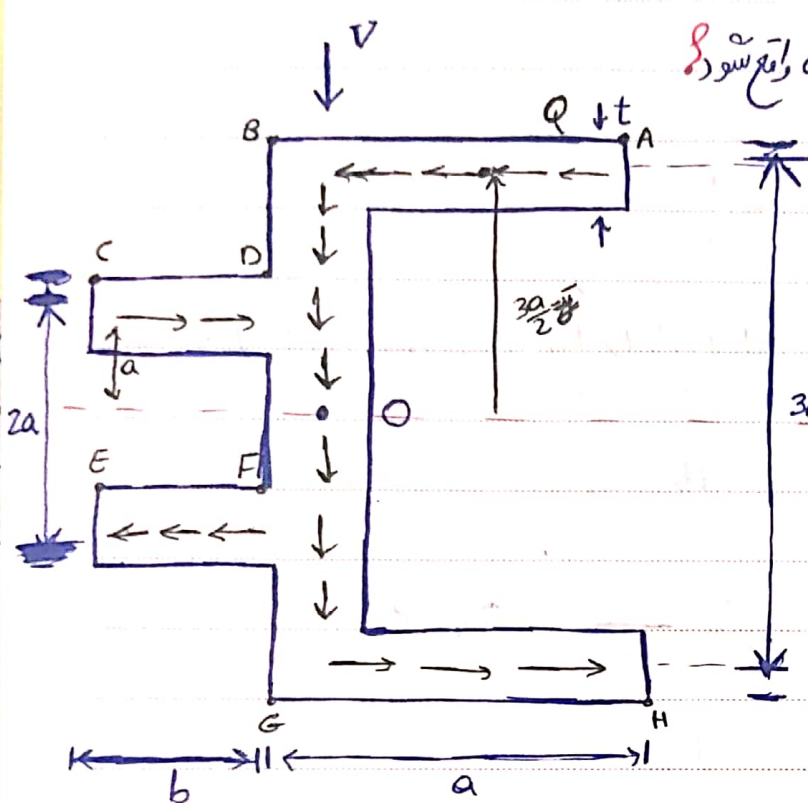
$$Q = A\bar{y} = Q_{(I)} + Q_{(II)} = [(x't)(2b - \frac{5}{4}b)] + [(2b(t))(\frac{2b}{2} - \frac{5}{4}b)]$$

$$Q = \left[\frac{3x'tb}{4} + \frac{-b^2t}{2} \right]$$

P4PCO

$$\tau_m = 0 = \frac{VQ}{Ib} = 0 \rightarrow VQ = 0 \rightarrow \begin{cases} V \neq 0 \\ Q = 0 \end{cases} \rightarrow \text{مقدار } x \text{ را بیابیم}$$

$$Q=0 \rightarrow \frac{3x'tb}{4} - \frac{b^2t}{2} = 0 \rightarrow \boxed{x' = \frac{2}{3}b}$$



* مثال: الشكل زیر با حقیقت باشد تا مرکز برش مقطع در نقطه O واقع شود.

N.L فرضی

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{VQ}{Ib} = \begin{cases} V_s V \\ Q_B A \bar{y} = (a)(t) \left(\frac{3a}{2} \right) = \frac{3a^2}{2}t \\ b=t \end{cases} \rightarrow \tau_B = \frac{V \frac{3a^2}{2}t}{2It} = \frac{3}{2} \frac{V}{I} a^2$$

$$\tau_{ave} = \frac{\tau_A + \tau_B}{2} = \frac{3}{4} \frac{V}{I} a^2$$

فرضی
مقاومت

$$F_{AB} = \tau_{ave} A = \frac{3}{4} \frac{V}{I} a^3 t$$

$$\tau_C = 0$$

$$\tau_D = \frac{VQ}{Ib} = \begin{cases} V_s V \\ Q_D = A \bar{y} = (t)(b)(a) \\ b=t \end{cases} \rightarrow \tau_D = \frac{tab V}{It} = \frac{V}{I} ab$$

$$\tau_{ave} = \frac{\tau_C + \tau_D}{2} = \frac{V}{2I} ab$$

$$F_{CD} = \tau_{ave} A = \frac{Vab^2 t}{2I}$$

۴۲

Subject:

Date

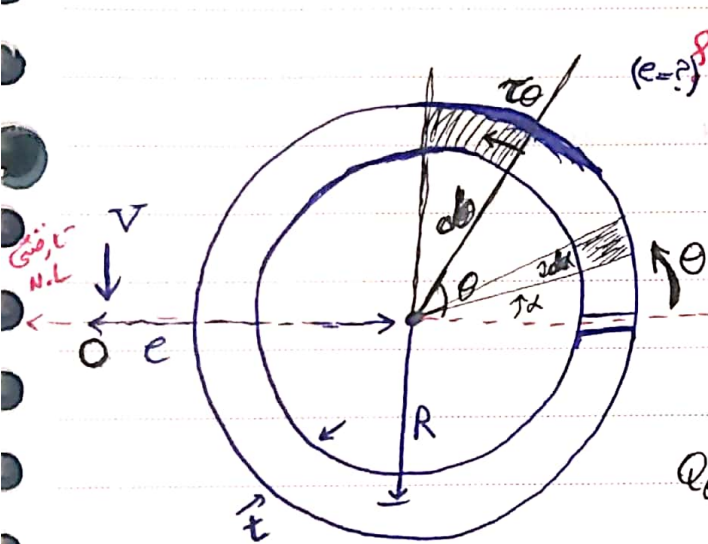
مقاومت مصالح

۹۸/۱۰/۱۵۷

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow f_{AB}(3a) - f_{CD}(2a) = 0 \rightarrow 2f_{CD} = 3f_{AB}$$

$$\rightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{a} b^2}{2I} t \right) = 3 \left(\frac{3}{4} \frac{\sqrt{a^3}}{I} t \right)$$

$$\rightarrow b^2 = 3 \times \frac{3}{4} a^2 \rightarrow b = +\frac{3}{2} a$$



مثال: فاصله مرکز ثقل مقطع جبرائیک زیر مرکز دایره کلام است (e=?)

$$d f_0 = \tau_0 dA = \tau_0 t R d\theta$$

$$\tau_0 = \frac{V Q}{I b} ; Q_{(\theta)} = ?$$

$$Q_{\theta} = \int_0^{\theta} dQ_{\alpha}$$

$$dQ_{\alpha} = (R d\alpha t) R \sin \alpha$$

$$dQ_{\alpha} = t R^2 \sin \alpha d\alpha \rightarrow Q_{\theta} = \int_0^{\theta} t R^2 \sin \alpha d\alpha$$

$$\rightarrow Q_{\theta} = -t R^2 \cos \alpha \Big|_0^{\theta} = \underline{t R^2 (1 - \cos \theta)}$$

$$\tau_{\theta} = \frac{V (t R^2 (1 - \cos \theta))}{I t}$$

$$d f_0 = \frac{V t R^3 (1 - \cos \theta)}{I} d\theta$$

$$dM_{\theta} = R d f_0$$

$$M = \int_0^{2\pi} dM_{\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{V t R^4}{I} (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{V t R^4}{I} (\theta - \sin \theta) \Big|_0^{2\pi} = \underline{\frac{V t R^4}{I} (2\pi)}$$

PAPCO

پاپکو

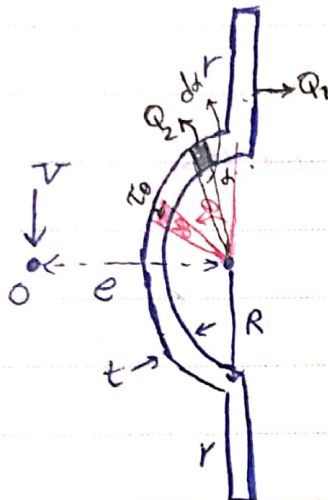
93

Subject: مقاومت مصالح

Date: 9/10/07909

نسبت انحراف برشی = M نسبت انحراف برشی

$$\frac{VtR^4(2\pi)}{I} = V\theta \implies \boxed{e = \frac{tR^4(2\pi)}{I}}$$



$$\tau_0 = \frac{VQ_0}{Ib}$$

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

$$Q_0 = \int_0^\theta dQ_2 + Q_1$$

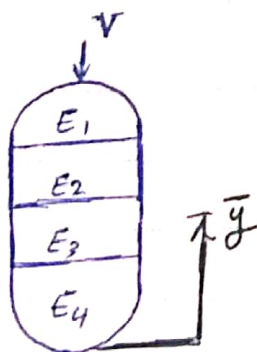
$$Q_1 = \frac{V(t)}{(r + \frac{r}{2})}$$

$$Q_2 = \int_0^\theta dQ_2 = (rt d\alpha)(r \cos \alpha) = tr^2 \int_0^\theta \cos \alpha d\alpha$$

$$\hookrightarrow Q_2 = tr^2 \sin \theta$$

$$d\theta_0 = \tau_0 dA_0 = \tau_0 r d\theta$$

$$dM_0 = r d\theta_0, \dots$$



$$n_j = \frac{E_2}{E_0}$$

ضریب همگنی

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^K n_i A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^K n_i A_i}$$

* تنش برشی در مقاطع مرکب:

در مقاطع مرکب تنش برشی از رابطه زیر محاسب می شود:

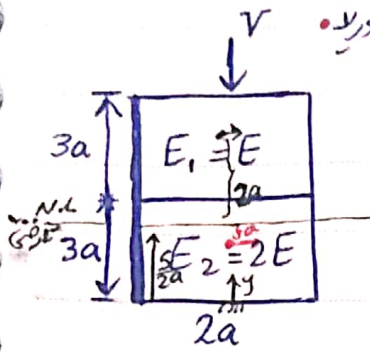
$$\tau = \frac{V\bar{Q}}{I\bar{b}} \rightarrow \text{مقدار واقعی مقطع}$$

$\bar{Q}$: تنش و استاتیکی سطح مقطع همان شده نسبت به یکی از مصالح
 $\bar{I}$: همان انحراف واقعی همان شده نسبت به یکی از مصالح

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^K n_i Q_i = n_1 Q_1 + n_2 Q_2 + \dots$$

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^K n_i \bar{I}_i = n_1 \bar{I}_1 + n_2 \bar{I}_2 + \dots$$

مثال: در مقطع نشان داده شده تحت نیروی برشی V ، محل تارفتی و تنش برشی ماکزیمم را بیست آورده.



هنگام سازه نسبت به ماده ۱
 $n_1 = \frac{E_1}{E_1} = \frac{E}{E} = 1$

$n_2 = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2E}{E} = 2$

$A_1 = A_2 = 2a \times 3a = 6a^2$

$$\bar{y} = \frac{n_1 A_1 \bar{y}_1 + n_2 A_2 \bar{y}_2}{n_1 A_1 + n_2 A_2} = \frac{[1 \times 6a^2 \times (\frac{3a}{2} + 3a)] + [2 \times 6a^2 \times \frac{3a}{2}]}{1 \times 6a^2 + 2 \times 6a^2} = \frac{5}{2}a$$

$$\bar{I} = n_1 I_1 + n_2 I_2 = \left(\left[1 \times \frac{1}{12} (2a)(3a)^3 \right] + \left[6a^2 \times (2a)^2 \right] \right) + \left(2 \times \left[\frac{1}{12} (2a)(3a)^3 + 6a^2 (a^3) \right] \right)$$

 انتقال به تارفتی Ad^2

$$\bar{I} = \frac{99}{2} a^4$$

مربوط به محل برشی
 ماکزیمم تنش برشی

$$\bar{Q} = n_1 Q_1 + n_2 Q_2 = n_2 Q_2$$

$$= 2 \times \left[\frac{5}{2}a \times 2a \right] \times \frac{5}{4}a = \frac{25}{2} a^3$$

 n A y-bar

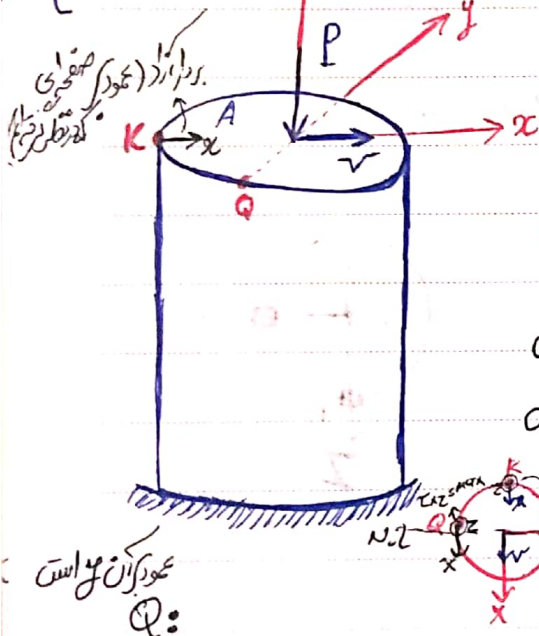
$$\tau_{max} = \frac{V \bar{Q}}{\bar{I} b} = \frac{V \frac{25}{2} a^3}{\frac{99}{2} a^4 (2a)} = \frac{25}{198} \frac{V}{a^2}$$

تنش برشی روی تارفتی
 ماکزیمم است پس روی
 تارفتی برش می زنیم و $\bar{Q}$
 شکل این را می بینیم که
 این داده تشکیل شده
 شکل بالای محل برش
 از دو داده تشکیل شده و
 می $\bar{Q}$ در آن اندکی شکل
 است

انتقال به محل

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 1: Bar fixed at left, force } P \text{ at right.} \\ \text{Diagram 2: Bar fixed at left, temperature change } \Delta T. \end{array} \right.$
 $\sigma = \frac{P}{A}$
 $\sigma = \frac{\kappa y}{I}$
 $\sigma = E \alpha \Delta T$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 3: Bar fixed at left, torque } T \text{ at right.} \\ \text{Diagram 4: Bar fixed at left, shear force } V \text{ at right.} \end{array} \right.$
 $\tau = \frac{Tr}{J}$
 $\tau = \frac{VQ}{Ib}$



مثال: مطلوب است محاسب مولفه های تنش در نقطه K و Q:

K: فرض شده ماده هگزاگونال و همگن است پس در داخل با مولفه داریم:

$\sigma_x = ?$
 $\sigma_y = ?$
 $\sigma_z = ?$
 $\tau_{xy} = ?$
 $\tau_{xz} = ?$
 $\tau_{yz} = ?$

روی سطح K از جسم و محور کان می است پس
همه مولفه هایی که x دارند، صفر هستند.

$\sigma_x = 0$
 $\tau_{xy} = 0$
 $\tau_{xz} = 0$
 $\sigma_z = -\frac{P}{A}$
 $\sigma_y = 0$
 $\tau_{yz} = 0$

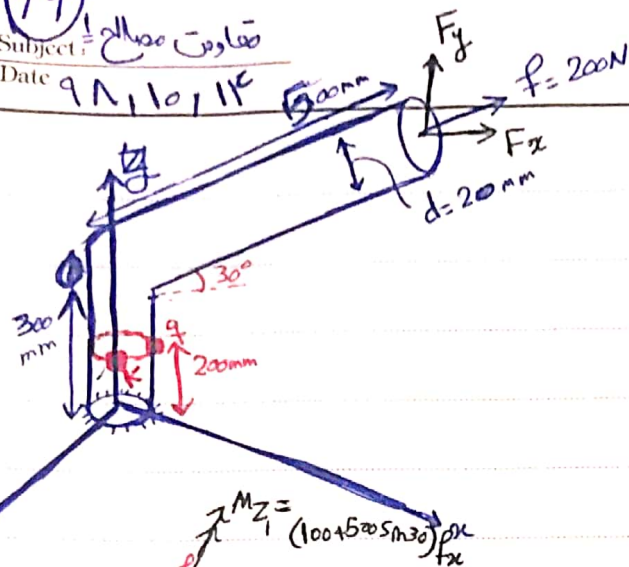
$\sigma_x = ? = 0$
 $\sigma_y = ? = 0$
 $\sigma_z = ? = -\frac{P}{A}$
 $\tau_{xy} = ? = 0$
 $\tau_{xz} = ? = \frac{VQ}{Ib} = \frac{Vx(\frac{\pi r^2}{2}) \times \frac{4r}{3\pi}}{\frac{\pi}{4} \pi r^4 \times 2r}$
 $\tau_{yz} = ? = 0$

تنسور تنش: $K: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z = -\frac{P}{A} \end{bmatrix}$, $Q: \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} = \frac{VQ}{Ib} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z = -\frac{P}{A} \end{bmatrix}$

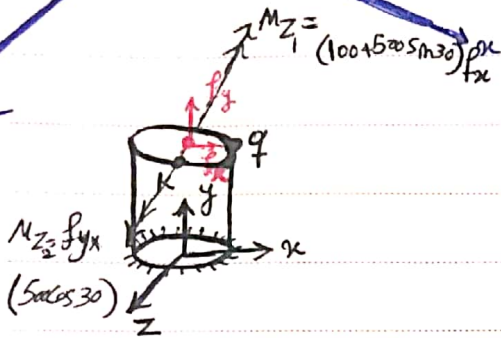
44

Subject: مقاومت مصالح

Date: 9/10/14



مسئله: مطلوب است محاسبه‌های تنش در دو مقطع K و Q.



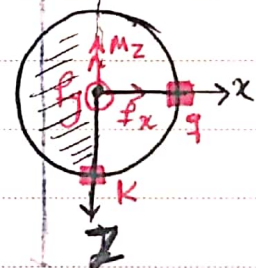
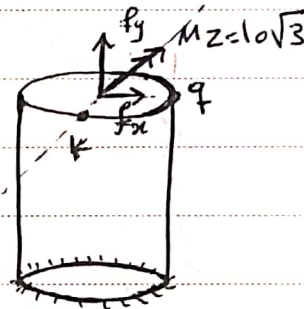
$$F_x = 200 \cos 30$$

$$F_y = 200 \sin 30$$

$$M_z = -200 \cos 30 (350) \times 10^{-3} = -35\sqrt{3}$$

$$M_z = 200 \sin 30 \times 500 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10^{-3} = 25\sqrt{3}$$

$$M_z = M_{z1} + M_{z2} = -10\sqrt{3}$$



K:

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A} = \frac{100}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{F_x \frac{\pi d^2}{8} \times \frac{4r}{3\pi}}{\frac{\pi d^4}{64} \times d}$$

$$\tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{xz} = 0$$

(Mz) = 0

(تنش‌ها در این نقطه)

در این سطح هم تنش برکن داریم سرد و در این سطح هم تنش برکن داریم و در این سطح هم تنش برکن داریم.

Q:

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A} = \frac{M_z d}{I}$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0 \rightarrow$$

$$\tau_{xz} = 0$$

در این سطح هم تنش برکن داریم سرد و در این سطح هم تنش برکن داریم و در این سطح هم تنش برکن داریم.

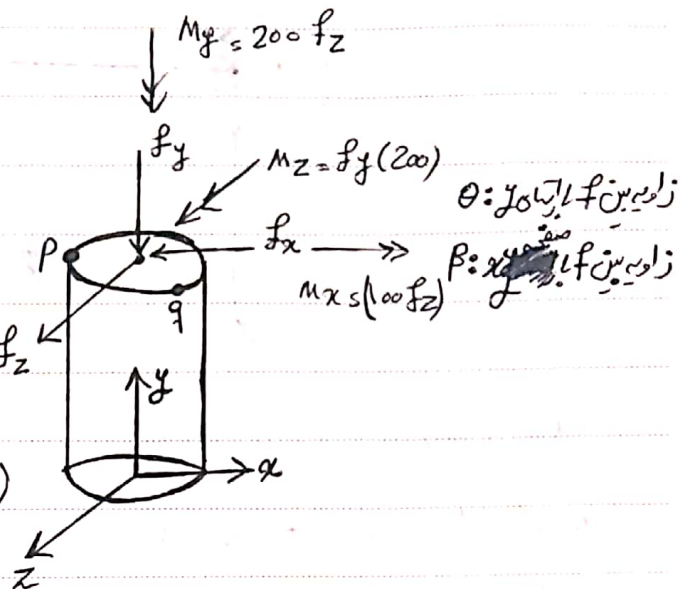
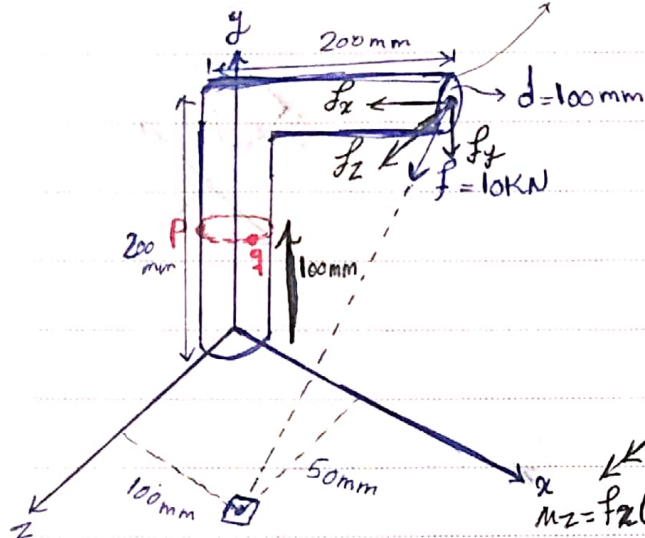
در این سطح هم تنش برکن داریم سرد و در این سطح هم تنش برکن داریم و در این سطح هم تنش برکن داریم.

در این سطح هم تنش برکن داریم سرد و در این سطح هم تنش برکن داریم و در این سطح هم تنش برکن داریم.

در این سطح هم تنش برکن داریم سرد و در این سطح هم تنش برکن داریم و در این سطح هم تنش برکن داریم.

در این سطح هم تنش برکن داریم سرد و در این سطح هم تنش برکن داریم و در این سطح هم تنش برکن داریم.

مسئله: مطلوب است محاسبه مولفه های تنش در نقاط P و Q:



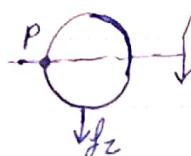
(۹۵) مولفه های داری اینس (مستقیم) بر این مثال آن است

P: $\sigma_x = 0$ $\tau_{xy} = 0$

$\sigma_y = \frac{M_z d}{2I} - \frac{F_y}{A}$ $\tau_{xz} = 0$

$\sigma_z = 0$ $\tau_{yz} = \frac{F_z Q}{I d} - \frac{M_y (d/2)}{I}$

$\frac{M_y c}{I} = -\frac{M_y (d/2)}{I}$
 $\tau_{yz} = \frac{V Q}{I b} = \frac{F_z Q}{I d}$



$Q = A \bar{z}$
 $Q = \frac{\pi r^2}{2} \times \frac{4r}{3\pi}$

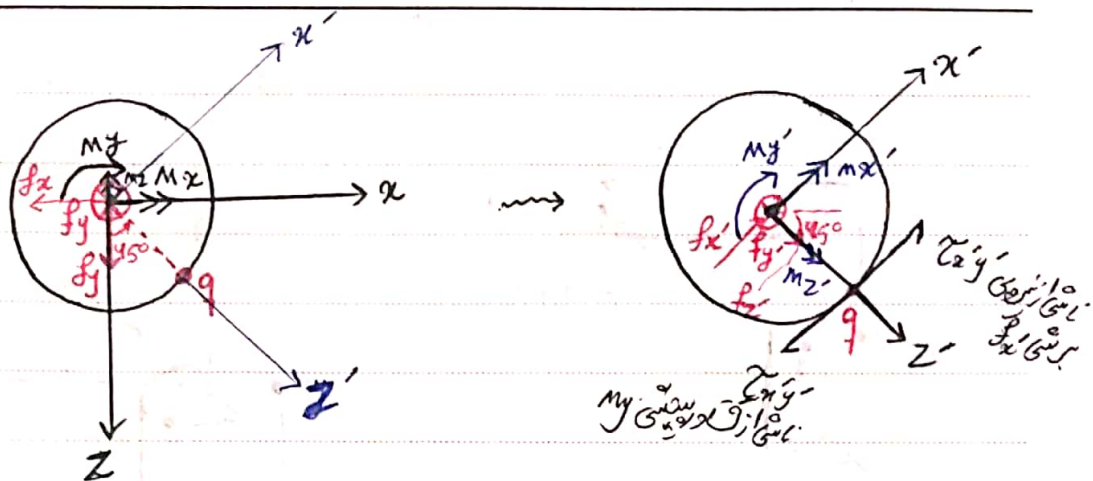
$\sigma_y = -\frac{F_y}{A}$

$\sigma_y = 0$ (چون $M_x = 0$)

$\sigma_y = \frac{M_z d}{I_z}$

(در این مثال $M_z = 0$)

بقیه صفر بود



$$\begin{cases} M_{z'} = M_x \cos 45 - M_z \sin 45 \\ M_{x'} = M_z \cos 45 + M_x \sin 45 \\ M_{y'} = M_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{z'} = F_z \cos 45 - F_x \sin 45 \\ F_{x'} = -F_z \sin 45 - F_x \cos 45 \\ F_{y'} = F_y \end{cases}$$

* z' بردار شمال به نقطه q می باشد.

$$\sigma_{z'} = 0, \quad \tau_{z'x'} = 0, \quad \tau_{z'y'} = 0$$

$$\sigma_{x'} = 0$$

$$\sigma_{y'} = -\frac{F_y}{A} - \frac{M_{x'} \cdot \frac{d}{2}}{I_{x'}}$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{-M_{y'} \cdot \frac{d}{2}}{I} + \frac{F_{x'} \cdot \left(\frac{4r}{3\pi} \times \frac{\pi r^2}{2} \right)}{I \cdot d}$$

در مثال خواست که به محورها اصلی برگردانیم، و با روابطی که در دست داریم
رابطه x' را می توانیم به محورها اصلی برگردانیم. $(x \sin \theta, x \cos \theta)$
فرض