



حل تمرین :

مقاومت مصالح ۱

استاد ارجمند :

جناب آقای دکتر کرمی نژاد

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی

تکمیل دیرین

تکمیل نوبین

فهرست حل تمرین

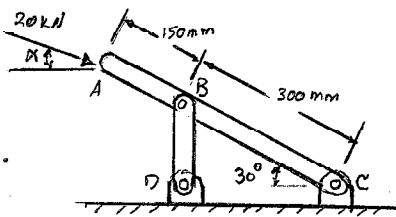
مقاومت مصالح یک

صفحه	عنوان
	حل تمرین فصل اول
۱	مفهوم تنش
	حل تمرین فصل دوم
۸	تنش و کرنش – بارگذاری محوری
	حل تمرین فصل سوم
۲۲	پیچش
	حل تمرین فصل چهارم
۳۹	خمش خالص
	حل تمرین فصل پنجم
۵۱	بارگذاری عرضی

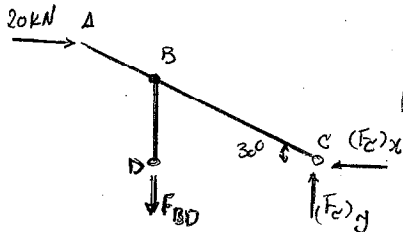
حل تمرین فصل اول

مفهوم تنش

تعیین محصل ۱



۱۰۱۵) از روی BD یک میل فولادی به ضخامت 40 mm ، به فنیست 12 mm و در هر دو طرف از میل دارای 10 mm قطری است. مطلوب است حداکثر مقدار متوسط تنش عمودی در از روی BD (الف) $\alpha = 0^\circ$ (ب) $\alpha = 90^\circ$



حله الف) تنش آذاری را رسم می کنیم. در تائین استیک که برابری را داریم

$$\sum M_C = 0$$

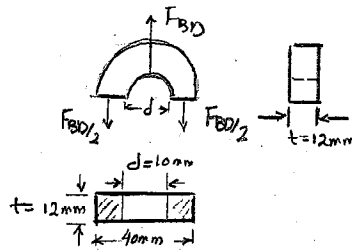
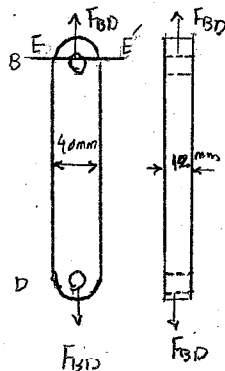
$$F_{BD} \cdot DC - F_A \cdot AC \sin 30^\circ = 0$$

رسم آذاری

$$F_{BD} \cdot (0.3 \cos 30^\circ) - 20 \cdot 0.650 \sin 30^\circ = 0$$

$$\rightarrow F_{BD} = 17.321 \text{ kN} \quad (\text{در کشش})$$

با علم شدن نیرو در کل اعداد است، عضو BD را در نظر گرفته، در کمترین مقطع را برای کالسیب محاسبه می کنیم



برای این منظور در مقطع DD در کشش کاره می شود

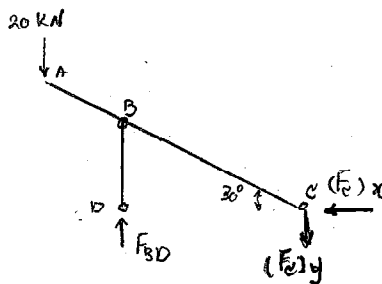
خواهیم داشت

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A} = \frac{F_{BD}/2}{A}$$

$$A = \frac{1}{2} (40 - d) \times t = \frac{1}{2} (40 - 10) \times 12$$

$$A = 180 \text{ mm}^2$$

$$\rightarrow \bar{\sigma} = \frac{17.321 \times 10^3}{2 \times 180} = 48.113 \text{ MPa}$$



ب) بکارش به داریم

$$\sum M_C = 0 : 20 (0.45 \cos 30^\circ) - F_{BD} (0.3 \cos 30^\circ) = 0$$

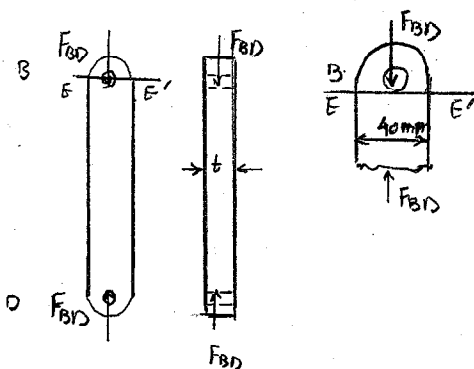
$$\rightarrow F_{BD} = 30 \text{ kN} \quad (\text{تنش})$$

مقاطع EE' در شکل می بینیم و بر این اساس در این صورت

سطح مقطع بیشتر عبارت است از

$$A = 40 \times t = 40 \times 12$$

$$\bar{\sigma} = \frac{30 \times 10^3}{40 \times 12} = 62.5 \text{ MPa} \quad (\text{تنش})$$

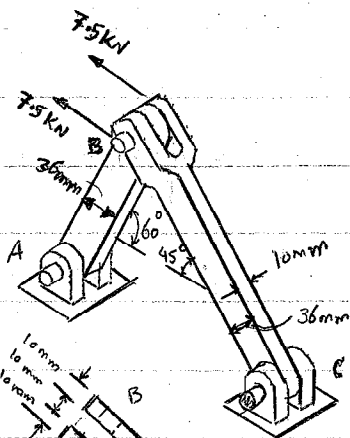


معماری

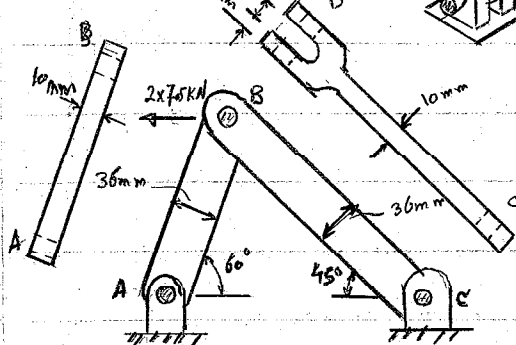
(مقاومت مصالح)

(حل تمرین فصل 1)

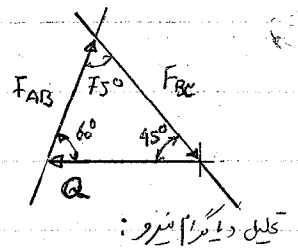
1.12)



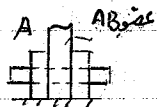
در بند 7.5 kN تغییرات ابعادی است و همواره اعمال می گردند
 و این که برای حل اتصالات از پهنای 12 mm استفاده
 کرده است. مطلوب است محاسبه ضرایب تنش و تغییرات ابعادی در
 ابعاد AB و BC



محاسبه ضرایب تنش و تغییرات ابعادی در بند 7.5 kN
 و این که برای حل اتصالات از پهنای 12 mm استفاده
 کرده است. مطلوب است محاسبه ضرایب تنش و تغییرات ابعادی در
 ابعاد AB و BC



$$\frac{Q}{\sin 75^\circ} = \frac{F_{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{F_{AB}}{\sin 45^\circ} \rightarrow F_{AB} = 10.981 \text{ kN} \quad F_{BC} = 13.449 \text{ kN}$$



$$A = 36 \times 10 = 360 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{-10.981 \times 10^3}{360} = -30.5 \text{ MPa}$$

محاسبه ضرایب تنش و تغییرات ابعادی در بند 7.5 kN

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}/4}{A'} \quad A' = \frac{36-12}{2} \times 10 = 120 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{13.5 \times 10^3}{4 \times 120 \times 10^{-6}} = 28.125 \text{ MPa}$$

محاسبه ضرایب تنش و تغییرات ابعادی در بند 7.5 kN

در بند 7.5 kN

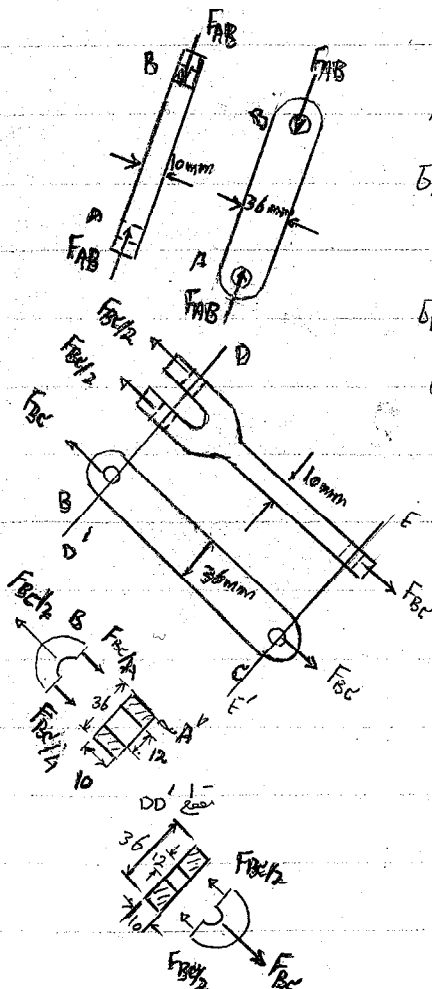
$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}/2}{A} \quad A = \frac{1}{2}(36-12) \times 10 = 120 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{13.5 \times 10^3}{2 \times 120 \times 10^{-6}} = 56.25 \text{ MPa}$$

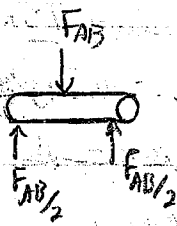
$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A} \quad A = 10 \times 36 = 360 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{13.5 \times 10^3}{360 \times 10^{-6}} = 37.5 \text{ MPa}$$

در بند 7.5 kN



۳-۱

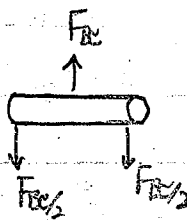


$$\tau_{ave} = \frac{F_{AB/2}}{A}$$

درین اتصال A:

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (12)^2 = 113.097 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{ave} = \frac{5.49 \times 10^3}{113.097} = 48.55 \text{ MPa}$$

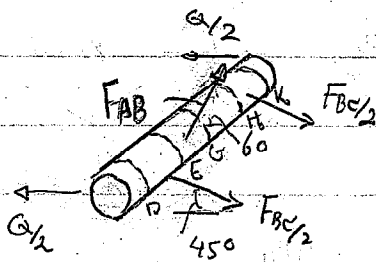


$$\tau_{ave} = \frac{F_{BC/2}}{A}$$

درین اتصال B:

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = 113.097 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{ave} = \frac{6.725 \times 10^3}{113.097} = 59.46 \text{ MPa}$$



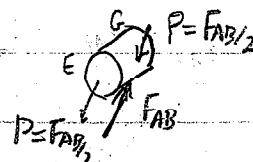
$$P = G/2 = 7.5 \text{ kN}$$

درین اتصال B:

در مقطع D:

$$P = F_{AB/2} = 5.49 \times 10^3$$

در مقطع E:

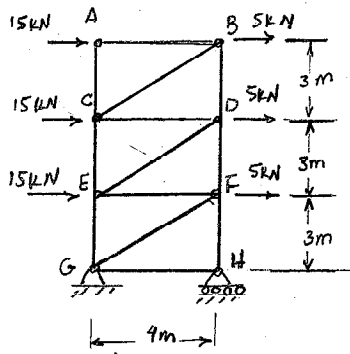


با توجه به این که درین مقطع درین اتصال D، K است.

$$\tau_{ave} = \frac{7.5 \times 10^3}{113.097} = 66.315 \text{ MPa}$$

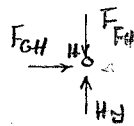
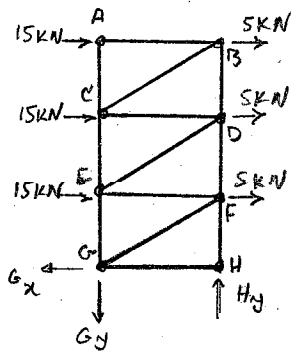
با توجه به این که درین مقطع درین اتصال E، K است.

تمرین عمل ۱



۱۴-۱) در این تیراچه اعضای کششی و فشرده را مشخص کنید و در آن سازه از ضرایب ایمنی با مقطع دایره تعیین شده اند. ضریب ایمنی عددی در اعصاب ۱۰۰ MPa
در مطالب تیراچه (الف) عضو EG (ب) عضو FG

پایه: ابتدا تحلیل نیروی را برسم و تیراچه آزاد کلی سازه را می‌گیریم



$$\sum F_x = 0 :$$

$$\rightarrow F_{GH} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{HH} = H_y$$

پایه: تیراچه آزاد کلی سازه

$$\sum M_H = 0 : G_y(4) - 20(3) - 20(6) - 20(9) = 0$$

$$\rightarrow G_y = 90 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : G_x = 60 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : F_{GF} \cos \theta - G_x = 0$$

مگر G

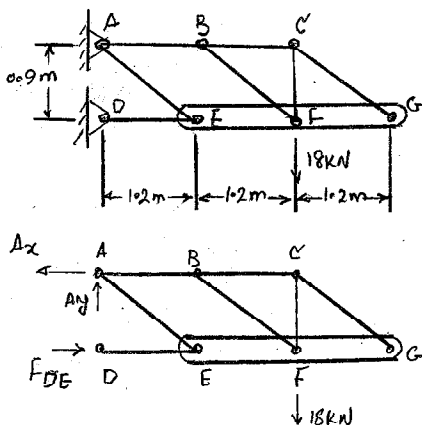
$$\sum F_y = 0 : F_{GF} \sin \theta + F_{GE} - G_y = 0$$

$$\rightarrow F_{GF} (4/5) - 60 = 0 \rightarrow F_{GF} = 75 \text{ kN}$$

$$75 (3/5) + F_{GE} - 90 = 0 \rightarrow F_{GE} = 45 \text{ kN}$$

برای تعیین تنش عددی از رابطه $\sigma = P/A$ استفاده می‌کنیم در اینجا $A = \pi d^2/4$

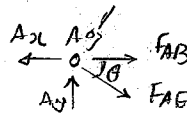
$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{F_{GE}}{\sigma} = \frac{45}{100} \rightarrow d_{EG} = 23.94 \text{ mm} , A = \frac{F_{GF}}{\sigma} = \frac{75}{100} \rightarrow d_{GF} = 30.9 \text{ mm}$$



۱۴-۱) تیراچه عضو EFG در سازه سازه دایره سازه کلی سازه

مطالب تیراچه عضو AE در سازه سازه عددی در اعصاب

۱۰۵ MPa



حل: ابتدا تیراچه آزاد کلی سازه را می‌گیریم

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y = 18 \text{ kN}$$

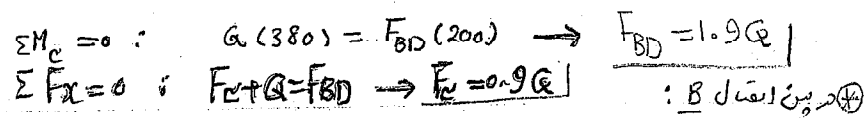
$$\sum M_D = 0 : A_x(0.9) - 18(2.4) = 0 \rightarrow A_x = 48 \text{ kN}$$

$$A_x : F_{AE} \sin \theta = A_y \rightarrow F_{AE} = \frac{18}{\sin 36.87} \rightarrow F_{AE} = 30 \text{ kN}$$

$$A_{AE} = \frac{F_{AE}}{\sigma} \rightarrow A = \frac{30 \times 10^3}{105} = 285.71 \text{ mm}^2$$

حدَّثَنَا عَنْ عَبْدِ اللَّهِ بْنِ حَفْصٍ

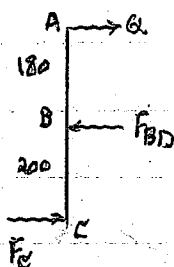
در انتقال به پیوسته تعذر 10 mm ارتفاع دهانه است در صورتیکه در انتقال
B و C تغییر نیفتد 12 mm در آن حالت تنش برشی 100 MPa
تنش عمودی نهایی در بازوی BD، 250 MPa است مطلوب است که
تعیین کنید ضریب ایمنی چیست.



$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (12)^2 = 113.097 \text{ mm}^2$$

$$\rightarrow F_{BD} = 7.54 \text{ kN} \quad \rightarrow Q = \underline{3.968 \text{ kN}}$$

دریں اقبال ہے :



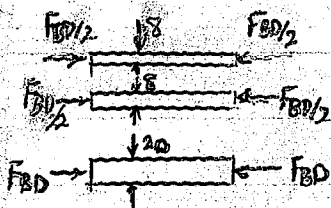
$$F_{sc} = \frac{T_u}{T_{all}} \rightarrow T_{all} = \frac{100}{3} = 33.33 \text{ MPa}$$

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (10)^2 = 78.54 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{all} = \frac{F_{c/2}}{A} = \frac{F_c}{2A} \rightarrow F_c = 5.235 \text{ kN}$$

$$F_c + Q = F_{BD} \quad \downarrow \quad F_c + Q = \frac{380}{200} Q \rightarrow Q = 5.817 \text{ kN}$$

i BD $\therefore \angle$ 



$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_v}{F.S.} = \frac{250}{3} = 83.33 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{all} = \frac{F_{BD}/2}{A} = \frac{F_{BD}}{2A} \quad A = 8 \times 20 = 160 \text{ mm}^2$$

$$F_{BD} = (83.33 \times 10^6) (2 \times 100 \times 10^{-6}) = 26.67 \text{ kN}$$

$$\rightarrow Q = 14.04 \text{ kN}$$

در این صورت، بارش در انتهای ستون برابر است با $Q = 3.97 \text{ KN}$ معادل 2

- تھیں ۹ ہزار سن مش لکھائی $4u = 250 \text{ MPa}$

از طرفی $f_{\text{rel}} = \frac{f}{f_s} = \frac{100}{3} \rightarrow G = 4.44 \text{ Kg}$ - در این اتصال C

$$F_{\text{net}} = \frac{F_c}{e \cdot t} = \frac{0.9 \text{ G}}{(10)(12)}$$

$$F_{\text{bar}} = \frac{F_c}{A \cdot t} = \frac{0.45Q}{(b)(2 \times 8)} \Rightarrow Q = \underline{5.93 \text{ kN}}$$

1. Соблюдение —

- دریں D, B

$$F_{\text{ber}} \approx \frac{F_{\text{BD}}}{1.1} = \frac{1.9 \text{ kN}}{1.1} \rightarrow \underline{G = 2.53 \text{ kN}}$$

$$f_b = \frac{F_{BD}}{A \cdot t} = \frac{1.95}{(12)(288)} \rightarrow Q = 3.37 \text{ Kcal}$$

۱- شکل B و D در عضو A-B

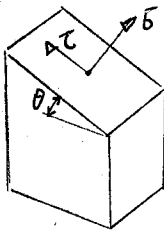
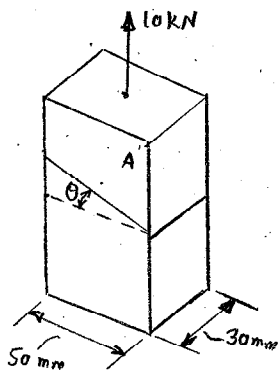
صفر: ۴

$$f_{\text{ber}} = \frac{F_{BD}}{d_0 \cdot t} = \frac{1.9Q}{(12)(12)} \rightarrow Q = 2.53 \text{ kN}$$

✓
D = ۵

صفحه ۷

حل تقریبی فصل ۱



۱-۵۵، ۵۶) دوست عمود AB روی صفحه‌ای با زاویه θ به یکدیگر متعامدند.

در این حالت تنش عمود بر AB عبارتند از $\sigma_v = 17 \text{ MPa}$ ، $\tau_v = 9 \text{ MPa}$

مطلوبه: محاسبه زاویه θ برای آنکه ضامن منزیب اینی برای عضو مورد نظر باشد.

همچنین مقدار θ عبارت از منزیب اینی برای عضو ضامن است.

$$\sigma = \sigma_0 \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\theta$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{A_0} = \frac{10 \times 10^3}{50 \times 30} = \frac{20}{3} = 6.67 \text{ MPa}$$

تعیین ضامن θ برای تنش عمودی مجاز:

$$F.C. = \frac{\sigma_v}{\sigma_{all}} \rightarrow \sigma_{all} = \frac{\sigma_v}{F.C.} = \frac{17}{3}$$

$$\sigma = \sigma_{all} \rightarrow \frac{17}{3} = \frac{20}{3} \cos^2 \theta_{min} \rightarrow \theta_{min} = 22.787^\circ$$

تعیین ضامن θ برای تنش برشی مجاز:

$$F.C. = \frac{\tau_v}{\tau_{all}} \rightarrow \tau_{all} = \frac{\tau_v}{F.C.} = \frac{9}{3} = 3 \text{ MPa}$$

$$\tau = \tau_{all} \rightarrow 3 = \frac{1}{2} \frac{20}{3} \sin 2\theta_{max} \rightarrow \theta_{max} = 32.079^\circ$$

برای محاسبه θ ضامن در است

$$22.787^\circ \leq \theta \leq 32.079^\circ$$

حاصل کرده که هیچ هم‌زمانی تنش عمود که مقدار σ_{all} و تنش برشی که مقدار τ_{all} بزرگتر نخواهد شد.

برای زاویه ضامن منزیب اینی داریم:

$$F.C. = \frac{\sigma_v}{\sigma_{all}} \quad , \quad F.C. = \frac{\tau_v}{\tau_{all}}$$

با این روش مقدار θ از θ_{min} مقدار $\sigma_{all} = \sigma$ کمتر، $\tau_{all} = \tau$ از τ_{all} بزرگتر در این صورت ضامن در جهت عمود بر AB است.

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_{all}} = \frac{\tau_v}{\tau_{all}} \quad \& \quad \frac{\sigma_v}{\sigma_0 \cos^2 \theta} = \frac{\tau_v}{\frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\theta}$$

$$\sigma_v \sin \theta = \tau_v \cos \theta \quad \& \quad \tan \theta = \frac{\tau_v}{\sigma_v} = \frac{9}{17} \rightarrow \theta = 27.897^\circ$$

$$\sigma_{all} = \sigma = \sigma_0 \cos^2 \theta = 5.209 \text{ MPa} \rightarrow F.S. = \frac{\sigma_v}{\sigma_{all}} = 3.26$$

حل تمرین فصل دوم

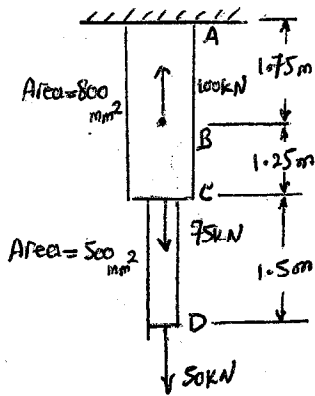
مفهوم تنش و کرنش

بارگذاری محوری

حل تمرین فصل ۲

۱-۲) سله ABCD از آلومینیوم ساخته شده است $E = 706 \text{ GPa}$
برای بارگذاری نشان داده شده، تغییرات طول در هر سله مطلوب است.

الف، سله B - ب، سله C - ج، سله D



$$P_1 = 50 \text{ kN}$$

$$P_2 = 125 \text{ kN}$$

$$P_3 = 25 \text{ kN}$$

$$A_1 = 500 \text{ mm}^2$$

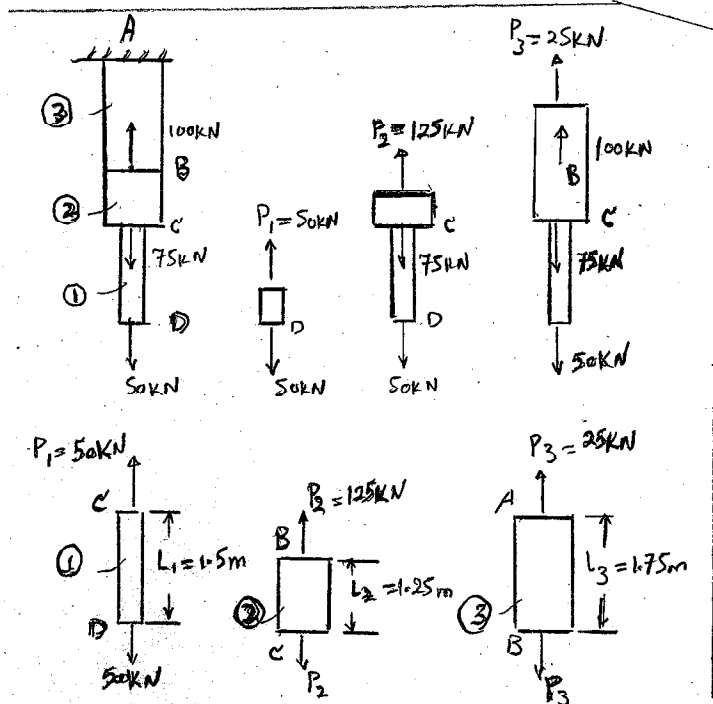
$$A_2 = 800 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = 800 \text{ mm}^2$$

$$L_1 = 1.5 \text{ m}$$

$$L_2 = 1.25 \text{ m}$$

$$L_3 = 1.75 \text{ m}$$



$$\delta_B = \delta_A + \delta_{B/A}$$

$$\delta_B = \delta_{B/A} = \frac{P_3 L_3}{E_3 A_3} = \frac{(25 \times 10^3)(1.75)}{(70 \times 10^9)(800 \times 10^{-6})}$$

$$\delta_B = 7.8125 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.78125 \text{ mm} \downarrow$$

$$\delta_D = \delta_A + \delta_{D/A} = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

$$\delta_{D/C} = \delta_1 = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{(50 \times 10^3)(1.5)}{(70 \times 10^9)(500 \times 10^{-6})} = 2.149 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{D/C} = 2.149 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.149 \text{ mm} \downarrow$$

$$\delta_{C/B} = \delta_2 = \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} = \frac{(125 \times 10^3)(1.25)}{(70 \times 10^9)(800 \times 10^{-6})}$$

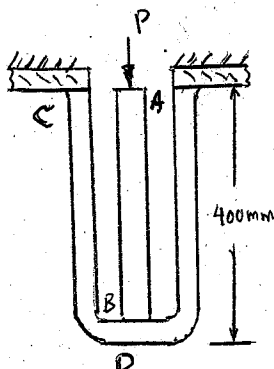
$$\delta_{C/B} = \delta_2 = 2.79 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.79 \text{ mm} \downarrow$$

$$\delta_D = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \sum \delta_i = 2.149 + 2.79 + 0.78125 = 5.714 \text{ mm} \downarrow$$

۱-۴) سله برنجی AB به انتهای استوانه فولادی CD به سطح مقطع 300 mm^2 متصل شده است. استوانه به شکل

شکل درج شده است. سله فولادی برنج $E = 85 \text{ GPa}$ است. تغییرات طول سله AB، 9 mm و

جابجایی نقطه A، 1.2 mm ، مقدار بار P را تعیین کنید.



$$\delta_A = \delta_B + \delta_{A/B}$$

$$\delta_B = \delta_D = \frac{P L_{CD}}{E_{CD} A_{CD}} = \frac{P(400 \times 10^{-3})}{(85 \times 10^9)(300 \times 10^{-6})} = 1.569 \times 10^{-8} P$$

$$\delta_{A/B} = \frac{P L_{AB}}{A_{AB} E_{AB}} = \frac{P(400 \times 10^{-3})}{[\frac{\pi}{4}(9 \times 10^{-3})^2](85 \times 10^9)} = 7.397 \times 10^{-8} P$$

$$1.2 \times 10^{-3} = 1.569 \times 10^{-8} P + 7.397 \times 10^{-8} P \rightarrow P = 13.384 \text{ kN}$$

(حل تقریبی شکل ۲)

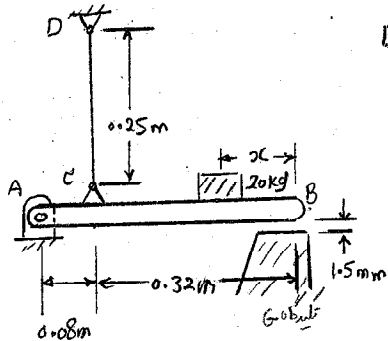
۲-۱۷) سیم فولادی CD به قطر 2 mm و به طول 0.25 m به باری صلب AB

مطابق شکل متصل می‌گردد. بعد از بارگذاری در حالت تعادل بار 1.5 mm بین اتصال B

و تکیه گاه C وجود دارد. $E = 200\text{ GPa}$ (الک) مطلوب است تحلیل ترانزیس ورنزادک

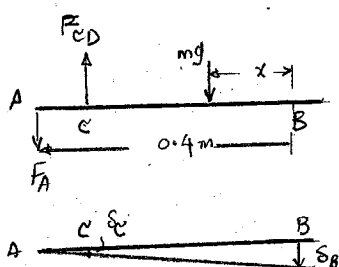
20 kg به سیم فولادی اتصال B با تکیه گاه C (ب) محاسب ورنزادک که تا بین

B و C را بوسیله آورد.



$$\sum M_A = 0 : F_{CD}(0.08) = mg(0.4 - x) \quad (I) \quad \text{الک}$$

لرزش طبقه را با تغییر شکل



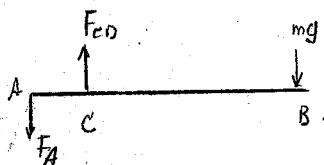
$$\frac{\delta_B}{AB} = \frac{\delta_C}{AC} \quad \rightarrow \quad \frac{1.5}{0.4} = \frac{\delta_C}{0.08} \quad \rightarrow \quad \delta_C = 0.3\text{ mm}$$

$$\delta_C = \frac{F_{CD} L_{CD}}{E_{CD} A_{CD}}$$

$$L_{CD} = 0.25\text{ m} \quad E_{CD} = 200\text{ GPa} \quad A_{CD} = \frac{\pi}{4}(2)^2 = 3.14\text{ mm}^2$$

$$\rightarrow F_{CD} = \frac{(0.3 \times 10^{-3})(200 \times 10^9)(3.14 \times 10^{-6})}{0.25} = 753.98\text{ N}$$

$$(I) \rightarrow x = 0.0927\text{ m}$$



$$\sum M_A = 0 : F_{CD}(0.08) = mg(0.4) \quad (II) \quad \text{ب}$$

$$\delta_C = 0.3\text{ mm} \quad \text{لرزش طبقه را با تغییر شکل}$$

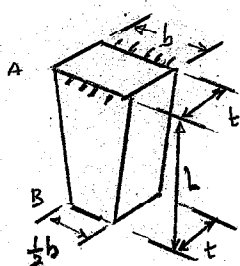
$$\delta_C = \frac{F_{CD} L_{CD}}{A_{CD} E_{CD}} \rightarrow F_{CD} = 753.98\text{ N}$$

$$(I) \rightarrow mg = 150.796 \rightarrow m = 15.371\text{ kg}$$

۲-۱۸) عنصری در نقطه A شکل با ضخامت t از تکیه گاه A آویزان شده است

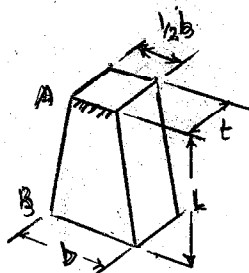
بعد از تغییر کردن از وزن عنصری مطابق منیر اتصال B در اثر بارکنش P در کل B

با ضخامت صغیر



۲-۲۵) عنصری در نقطه A از تکیه گاه A آویزان شده است. با در نظر گرفتن

P به عنوان درجه (در آبرود حجم) عنصری مطابق انحراف در نقطه A و در کل در



صفحه ۱۱

۵ سطح معادل (۲-۱۸)

برای اینکه سطح معادل داشته باشیم

$$\delta = \int_0^L \frac{P}{EA} dy$$

برای تغییر به این شکل خود نقطه A را به خط راست می‌کشیم:

$$x - \frac{b}{2} = \frac{b/2 - b/4}{0 - L} (y - 0)$$

$$\rightarrow x = -\frac{b}{4L} y + \frac{b}{2}$$

سطح معادل

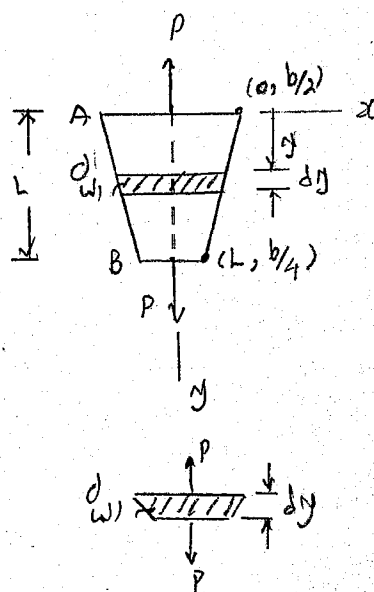
$$A = 2x(t) = \left(-\frac{b}{2L} y + b\right) t = \frac{bt}{2L} (-y + 2L)$$

$$d\delta = \frac{P}{EA} dy = \frac{P}{\frac{bt}{2L} (-y + 2L) E} dy$$

$$\rightarrow \delta = \int_0^L \frac{2PL}{btE} \frac{dy}{(-y + 2L)} = \frac{-2PL}{btE} \ln(-y + 2L) \Big|_0^L$$

$$\rightarrow \delta = \frac{-PL}{btE} (\ln L - \ln 2L) = \frac{-2PL}{btE} \ln \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\delta = 1.386 \frac{PL}{btE}}$$



بخش اول (۲-۲۰)

برای تغییر پهنای مثل ذوزنقه‌ای داریم:

$$x - \frac{b}{4} = \frac{b/2 - b/4}{L - 0} (y - 0) \rightarrow x = \frac{b}{4L} y + \frac{b}{4}$$

$$\rightarrow x = \frac{b}{4L} (y + L)$$

برای سطح مقطع:

$$A = 2xt = \frac{bt}{2L} (y + L)$$

برای نیرو در سطح مقطع:

$$P = m_0 g - mg = (v_0 \rho - v \rho) g = (v_0 - v) \rho g$$

در اینجا ρ چگالی است، v حجم یکدست ارتفاع L و v_0 حجم کل مثل است

$$v_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} + b \right) L t$$

$$v = \frac{1}{2} \left(2x + \frac{b}{2} \right) y t = \frac{1}{2} \left[\frac{b}{2L} (y + L) + \frac{b}{2} \right] y t$$

$$\rightarrow v = \frac{3bL}{4} t \left[\frac{1}{3L^2} y^2 + \frac{2}{3L} y \right]$$

در این صورت برای نیروی داخلی P داریم:

$$P = (\rho g) \left(\frac{3b}{4} t L \right) \left(1 - \frac{1}{3L^2} y^2 - \frac{2}{3L} y \right)$$

برای تغییر پهنای ذوزنقه داریم:

$$d\delta = \frac{P}{EA} dy$$

برای چگالی ρ و A داریم:

$$\delta = \int_0^L \frac{\rho g \left(\frac{3b}{4} t L \right)}{\left(\frac{bt}{2L} \right) E} \frac{\left(1 - \frac{1}{3L^2} y^2 - \frac{2}{3L} y \right)}{(y + L)} dy$$

$$= \frac{\rho g}{2E} \int_0^L \frac{(y + L)(3L - y) - 4yL}{(y + L)} dy = \frac{\rho g}{2E} \left[\int_0^L (3L - y) dy - 4L \int_0^L \frac{y}{y + L} dy \right]$$

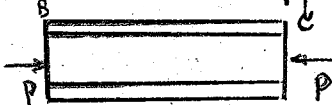
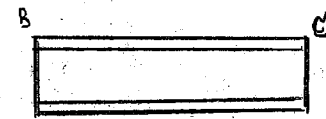
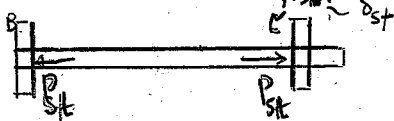
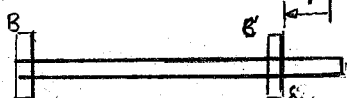
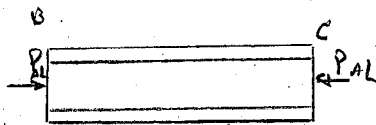
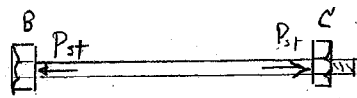
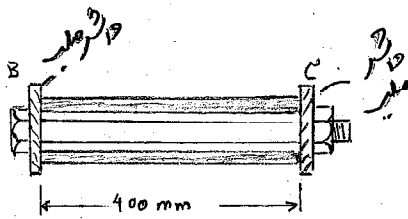
$$= \frac{\rho g}{2E} \left[3Ly - \frac{y^2}{2} \Big|_0^L - 4L \int_0^L \left(1 - \frac{L}{y + L} \right) dy \right]$$

$$= \frac{\rho g}{2E} \left[3Ly - \frac{y^2}{2} \Big|_0^L - 4L (y - L \ln(y + L)) \Big|_0^L \right]$$

$$= \frac{\rho g}{2E} \left[\frac{5L^2}{2} - 4L(L - L \ln 2L + L \ln L) \right] = \frac{\rho g}{2E} \left[\frac{5L^2}{2} - 4L^2(1 + \ln \frac{1}{2}) \right]$$

$$\rightarrow \boxed{\delta = 0.636 \frac{\rho g L^2}{E}}$$

» مقایسه مصالح «



» حل سترین مقاومت مصالح «

۱۲-۳۲) یک پیچ فولادی ($E_s = 200 \text{ GPa}$) به قطر ۱۰ mm داخل تیر آلومینیومیبا $E_a = 70 \text{ GPa}$ به قطر خارجی ۱۸ mm و ضخامت دیواره ۳ mm قرار

گرفته است. دیواره یک سره به آن لغت شده است. هر این تیر را که با پیچ ۲ mm

در انتهای مطلوب تنش عمودی است (البته پیچ ۱/۴ در تیر است)

$$P_{AL} = P_{st} = P$$

$$\delta_{AL} = \delta_{st} = \delta_1 - \delta_2$$

$$\delta_1 = \frac{1}{4}(2) = \frac{1}{2} \text{ mm}$$

$$\delta_2 = \frac{P_{st} L_{st}}{A_{st} E_{st}} = \frac{P(400)}{(200 \times 10^9) \left[\frac{\pi}{4} (10)^2 \times 10^{-6} \right]} = 2.546 \times 10^{-5} P$$

$$\delta_{st} = \frac{1}{2} - 2.546 \times 10^{-5} P$$

$$\delta_{AL} = \frac{P_{AL} L_{AL}}{E_{AL} A_{AL}} = \frac{P(400)}{(70 \times 10^9) \left[\frac{\pi}{4} [(18)^2 - (12)^2] \times 10^{-6} \right]} = 4.042 \times 10^{-5} P$$

$$\frac{1}{2} - 2.546 \times 10^{-5} P = 4.042 \times 10^{-5} P$$

$$\rightarrow P = 7589.52 \text{ N} = 7.589 \text{ kN}$$

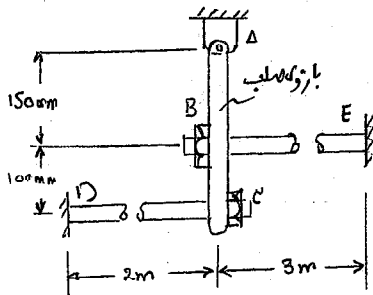
(ب)

$$\sigma_{st} = \frac{P_{st}}{A_{st}} = 96.69 \text{ MPa}$$

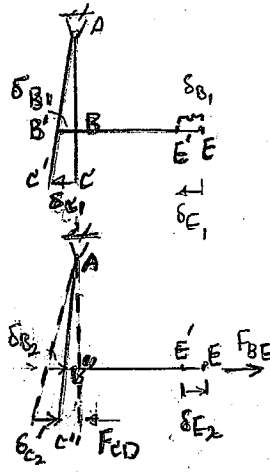
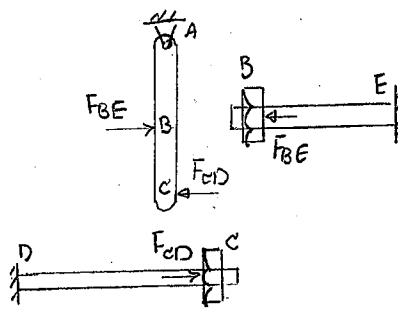
(ج)

$$\sigma_{AL} = \frac{P_{AL}}{A_{AL}} = 53.681 \text{ MPa}$$

مثال ۲، فصل ۲



۲-۳۴) سازه فولادی BE و CD دارای مقطع ۱۶ mm است. مدول الاستیسیته $E_s = 200 \text{ GPa}$ است.
 استخوان در سازه فولادی در هر دو سازه ۲.۵ mm است. سازه را تحت نیروی افقی در هر دو سازه قرار دهید.
 یک درگاه در هر دو سازه قرار دهید. مطلوب است: (۱) تغییرات طولی در سازه BE و (۲) تغییرات طولی در سازه CD.



$$\sum M_A = 0; \quad F_{CD}(250) - F_{BE}(150)$$

$$F_{BE} = 1.67 F_{CD} \quad (I)$$

در هر دو سازه تغییرات طولی در هر دو سازه E و F را در نظر بگیرید

$$\delta_C = 2.5 \text{ mm}$$

$$\frac{\delta_{B1}}{\delta_C} = \frac{AB}{AC} \quad \text{یا} \quad \frac{\delta_{B1}}{2.5} = \frac{150}{250} \rightarrow \delta_{B1} = \frac{3}{5}(2.5) = 1.5 \text{ mm}$$

$$\delta_{E1} = \delta_{B1} = 1.5 \text{ mm}$$

در هر دو سازه تغییرات طولی در هر دو سازه E و F را در نظر بگیرید

$$\delta_{B/E} = \frac{F_{BE} L_{BE}}{E_{BE} A_{BE}} = \frac{F_{BE} (3000)}{(200 \times 10^9) \left[\frac{\pi}{4} (16 \times 10^{-3})^2 \right]} = 7.46 \times 10^{-5} F_{BE}$$

$$\delta_{B2} = \delta_{E1} + \delta_{B/E} \quad \text{یا} \quad \delta_{B2} = \delta_{E1} + \delta_{B/E}$$

تغییرات طولی در هر دو سازه

$$\delta_{E1} = \delta_{E2} + \delta_{B/E} \quad \text{یا} \quad \delta_{E1} = \delta_{E2} \rightarrow \delta_{E2} = 1.5 \text{ mm}$$

$$\delta_{B2} = 1.5 - 7.46 \times 10^{-5} F_{BE}$$

$$\frac{\delta_{C2}}{\delta_{B2}} = \frac{AC}{AB} \rightarrow \delta_{C2} = \frac{5}{3} \delta_{B2}$$

تغییرات طولی

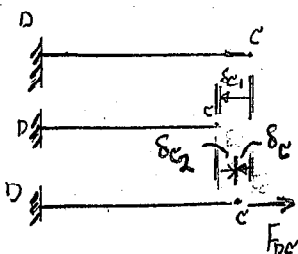
همچنین:

$$\delta_{C2} = \frac{F_{CD} L_{CD}}{E_{CD} A_{CD}} = \frac{F_{CD} (2000)}{(200 \times 10^9) \left[\frac{\pi}{4} (16 \times 10^{-3})^2 \right]} = 4.974 \times 10^{-5} F_{CD}$$

تغییرات طولی

$$4.974 \times 10^{-5} F_{CD} = \frac{5}{3} (1.5 - 7.46 \times 10^{-5} F_{BE})$$

$$\rightarrow F_{CD} = 9.729 \text{ kN}$$



$$\delta_C = 2.5 \text{ mm}$$

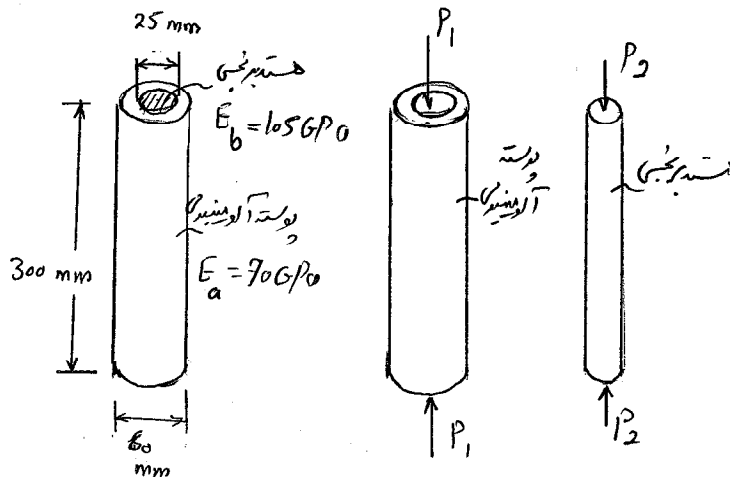
$$\delta_{C2} = \frac{F_{CD} L_{CD}}{E_{CD} A_{CD}} = \frac{F_{CD} (2000)}{(200 \times 10^9) \left[\frac{\pi}{4} (16 \times 10^{-3})^2 \right]} = 4.974 \times 10^{-5} F_{CD}$$

$$\delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2} \quad \text{یا} \quad \delta_C = \delta_{C1} - \delta_{C2} = 2.5 - 4.974 \times 10^{-5} F_{CD} \quad (II)$$

$$\delta_B = \frac{3}{5} \delta_C \quad (III), \quad \delta_B = \frac{F_{BE} L_{BE}}{E_{BE} A_{BE}} = 7.46 \times 10^{-5} F_{BE} \quad (IV)$$

$$7.46 \times 10^{-5} F_{BE} = \frac{3}{5} (2.5 - 4.974 \times 10^{-5} F_{CD}) \rightarrow F_{CD} = 9.729 \text{ kN} \rightarrow \delta_C = 2.616 \text{ mm}$$

مثال (۲-۴۲) میل فولاد دارنده دایره هسته برنجی و پوسته آلومینیومی می باشد. اگر نیروی $P=200 \text{ kN}$ بصورت فکری به میل اعمال گردد، مطلوب است (الف) نیروهای دایره و پوسته و تنش فکری است آلومینیومی. (ب) تغییر طول فکری آلومینیومی.



$$P = P_1 + P_2 \quad (I)$$

$$\delta_1 = \delta_2 \quad (II)$$

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{E_1 A_1}$$

$$\delta_2 = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}$$

$$(II): \frac{P_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2}{E_2 A_2}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} (60^2 - 25^2) = 2336.56 \text{ mm}^2 \quad A_2 = \frac{\pi}{4} 25^2 = 490.87 \text{ mm}^2$$

$$\rightarrow \frac{P_1}{70(10^9)(2336.56 \times 10^{-6})} = \frac{P_2}{105(10^9)(490.87 \times 10^{-6})}$$

$$\rightarrow P_2 = 0.315 P_1$$

$$(I): 200 = P_1 + 0.315 P_1 \rightarrow P_1 = 152.097 \text{ kN}, P_2 = 47.904 \text{ kN}$$

(الف)

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{152.097 \times 10^3}{2336.56} = 65.086 \text{ MPa}$$

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{(152.097 \times 10^3)(300 \times 10^{-3})}{(70 \times 10^9)(2336.56 \times 10^{-6})} = 2.789 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (ب)$$

$$= 0.279 \text{ mm}$$

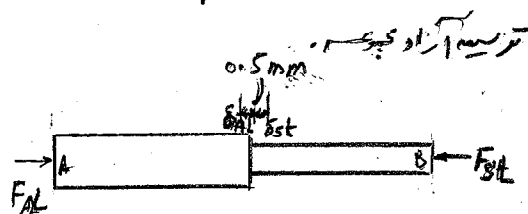
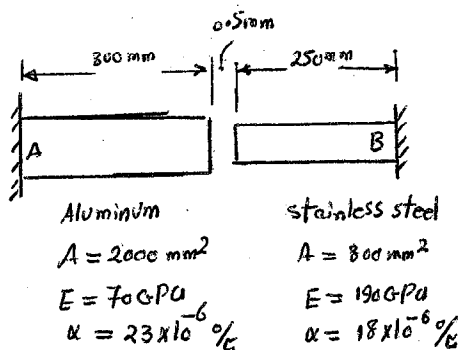
(فصل ۲)

2.46

(۲.۴۶) در نمای آسان (فصل ۲) یک اتصال در میل مطابق شکل وجود دارد

در زمانی که بارهای محوری به 140 kN افزایش یابد، به طوری که (مقاومت کششی در آلومینیوم

— طول واقعی آلومینیوم



$$F_{AL} = F_{ST} \quad (I)$$

در این تغییر شکلها، با توجه به اصل جمع اثرها

تغییر درجه حرارت:

$$\delta_{AL}' = (23 \times 10^{-6}) (120) (300) = 0.828 \text{ mm}$$

$$\delta_{AL}'' = \frac{F_{AL} L_{AL}}{A_{AL} E_{AL}} = \frac{F_{AL} (0.3)}{(2000 \times 10^{-6}) (70 \times 10^9)} = 2.143 \times 10^{-9} F_{AL}$$

توجه به شکل

$$\delta_{AL} = \delta_{AL}' - \delta_{AL}'' = 0.828 \times 10^{-3} - 2.143 \times 10^{-9} F_{AL}$$

تغییر درجه حرارت:

$$\delta_{ST}' = (18 \times 10^{-6}) (120) (250) = 0.54 \text{ mm}$$

تغییر تاثیر نیروی کششی:

$$\delta_{ST}'' = \frac{F_{ST} L_{ST}}{A_{ST} E_{ST}} = \frac{F_{ST} (0.25)}{(800 \times 10^{-6}) (190 \times 10^9)} = 1.645 \times 10^{-9} F_{ST}$$

توجه به شکل

$$\delta_{ST} = \delta_{ST}' - \delta_{ST}'' = 0.54 \times 10^{-3} - 1.645 \times 10^{-9} F_{ST}$$

$$\delta_{ST} + \delta_{AL} = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$0.54 \times 10^{-3} - 1.645 \times 10^{-9} F_{ST} + 0.828 \times 10^{-3} - 2.143 \times 10^{-9} F_{AL} = 0.5 \times 10^{-3} \quad (II)$$

$$F_{ST} = F_{AL} = 229.169 \text{ kN}$$

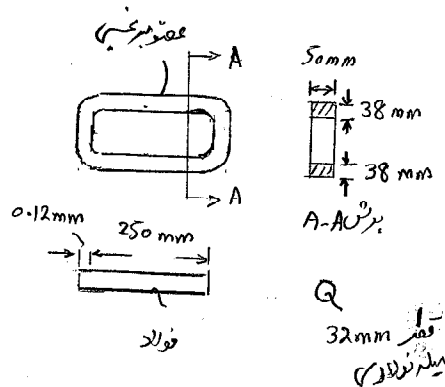
با توجه به روابط I و II

$$\sigma_{AL} = \frac{F_{AL}}{A_{AL}} = 114.58 \text{ MPa}$$

(الف)

$$\delta_{AL} = 3.369 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.3369 \text{ mm} \rightarrow L_{AL}' = L_{AL} + \delta_{AL} = 300.3369 \text{ mm}$$

$$\delta_{ST} = 1.63 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.163 \text{ mm} \rightarrow L_{ST}' = L_{ST} + \delta_{ST} = 250.163 \text{ mm}$$



۴۸-۲ مغناطیسی ($E_b = 105 GPa$, $\alpha_b = 19 \times 10^{-6} / ^\circ C$) یک میل فولادی

($E_s = 200 GPa$, $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6} / ^\circ C$) دارای ابعاد مطابق شکل در دمای

به $18^\circ C$ هم نشسته. میل فولاد که آند سردی ندارد به راحتی (مغناطیسی)

قرار گرفته. آنگاه دوات مجبوس به $38^\circ C$ انداخته می شود. مطلوب است:

الف) تنش عمودی نهایی در فولاد (ب) طول نهایی فولاد

در مرحله اول) با توجه به هندسه شکل

$$\delta_{st} = -0.12 \text{ m}$$

$$\delta_{st} = \alpha \Delta T L$$

لرزان

$$\rightarrow -0.12 = (11.7 \times 10^{-6}) (\Delta T) (250) \rightarrow \Delta T = -41.025^\circ C$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = T_2 - 18 \rightarrow T_2 = -23.026^\circ C$$

$$\delta_{st}' = \alpha \Delta T' L = (11.7 \times 10^{-6}) (38 + 23.026) (250) \quad (\text{در مرحله دوم})$$

$$\delta_{st}'' = \frac{F_{st} \cdot L_{st}}{A_{st} \cdot E_{st}} = \frac{F_{st} (250)}{[\frac{\pi}{4} (32)^2 \times 10^{-6}] [200 \times 10^9]} = 1.554 \times 10^{-6} F_{st}$$

$$\delta_{st} = \delta_{st}' - \delta_{st}'' = 0.1785 - 1.55 \times 10^{-6} F_{st}$$

$$\delta_B' = \alpha \Delta T L = (19 \times 10^{-6}) (38 - 18) (250) = 0.095 \text{ mm}$$

$$\delta_B'' = \frac{F_B L_B}{A_B E_B} = \frac{F_B (250)}{[(2 \times 50 \times 38) \times 10^{-6}] [105 \times 10^9]} = 6.266 \times 10^{-7} F_B$$

$$\delta_B = \delta_B' + \delta_B'' = 0.095 + 6.266 \times 10^{-7} F_B$$

$$\delta_B = \delta_{st} \quad \& \quad F_{st} = F_B$$

لرزان

$$0.095 + 6.266 \times 10^{-7} F_B = 0.1785 - 1.554 \times 10^{-6} F_{st}$$

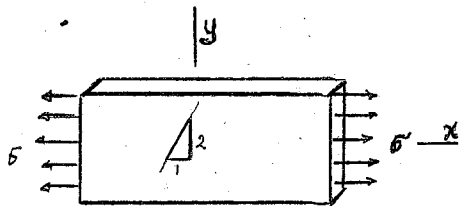
$$\rightarrow F_B = F_{st} = 38.288 \text{ kN}$$

$$\sigma_{st} = \frac{F_{st}}{A_{st}} = \frac{38.288 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} (32)^2} = 47.608 \text{ MPa} \quad (\text{الف})$$

$$\delta_{st} = 0.119 \text{ mm} \quad (\text{ب})$$

$$L_{st}' = L_{st} + \delta_{st} = 250.119 \text{ mm}$$

(حل سترین مفصل ۲)



۲-۵۷ یک معادله آلوینیدی نتیجه یک بارگذاری محوری مثل شکل همبردی σ می باشد. تبدیل بارگذاری یک خواص ایست ۲:۱ رسم شده است مطابق

نسبت خواص در اعمال کشش $\sigma = 130 \text{ MPa}$ برای آلوینیدیم

$$E = 70 \text{ GPa} , \nu = 0.33$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{130 \times 10^6}{70 \times 10^9} = 1.857 \times 10^{-3}$$

$$\delta x = \epsilon_x L_x = (1.857 \times 10^{-3})(1) = 1.857 \times 10^{-3}$$

$$L'_x = L_x + \delta x = 1 + 1.857 \times 10^{-3} = 1.0019$$

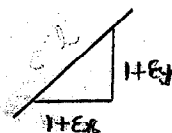
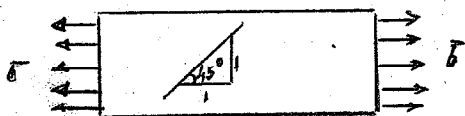
$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\frac{0.33}{70 \times 10^9} (130 \times 10^6) = -6.129 \times 10^{-4}$$

$$\delta y = \epsilon_y L_y = (-6.129 \times 10^{-4})(2) = -1.226 \times 10^{-3}$$

$$L'_y = L_y + \delta y = 2 - 1.226 \times 10^{-3} = 1.999$$

$$\tan \theta' = \frac{L'_y}{L'_x} = 1.995$$

۲-۵۸ برای یک عنصر تحت بارگذاری محوری مقدار کشش عمودی ϵ' درجه زاویه 45° نسبت به محور عمودی کرنش ϵ_x (الف) در نظر گرفتن منحنی مانند مسئله بالا برای محاسبه در بارگذاری σ استفاده از مقادیر ϵ_x و ϵ_y در آن زمان تقسیم یافته است.



$$\epsilon_x = \frac{\delta x}{L_x} = \frac{\delta x}{1} = \delta x$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta x}{L_x}$$

$$\delta y = -\nu \frac{\delta x}{L_x} + \frac{\delta y}{L_y} = -\nu \frac{\delta x}{L_x}$$

$$\delta y = -\nu \frac{\delta x}{L_x} = -\nu \epsilon_x$$

$$L' = \sqrt{(1 + \delta x)^2 + (1 + \delta y)^2} = \sqrt{(1 + \epsilon_x)^2 + (1 + \epsilon_y)^2} = \sqrt{2 + 2\epsilon_x + 2\epsilon_y} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \epsilon_x(1 - \nu)}$$

$$\delta x = \epsilon_x \frac{L_x}{L_x} = \epsilon_x$$

$$\delta y = \epsilon_y \frac{L_y}{L_y} = \epsilon_y$$

$$\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 \approx 0$$

$$L = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

برای کرنش استاندارد 45° داریم:

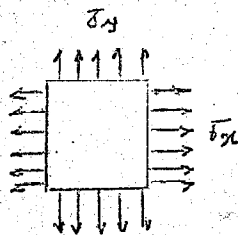
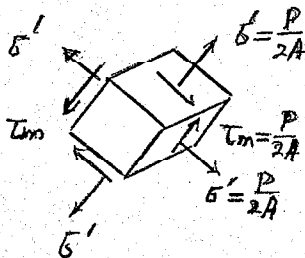
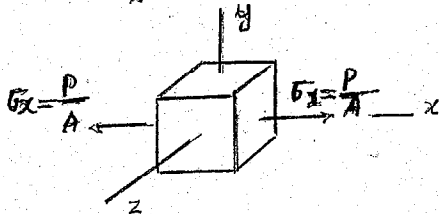
$$\epsilon' = \frac{L' - L}{L} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 + \epsilon_x(1 - \nu)} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{1 + \epsilon_x(1 - \nu)} - 1$$

(تشریح مسئله ۲)

ادامه شکل (۲-۵۸)

$$1 + \epsilon' = \sqrt{1 + \epsilon_x(1 - \nu)} \rightarrow (1 + \epsilon')^2 = 1 + \epsilon_x(1 - \nu)$$

$$\sqrt{1 + \frac{\epsilon_x^2}{2} + 2\epsilon'} = \sqrt{1 + \epsilon_x(1 - \nu)} \rightarrow \epsilon' = \frac{\epsilon_x}{2} (1 - \nu)$$



$$\sigma_x' = \sigma' = \frac{P}{2A} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma}{2}$$

$$\sigma_y' = \sigma' = \frac{P}{2A} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma}{2}$$

$$\epsilon' = \epsilon_x' = \frac{\sigma_x'}{E} - \nu \frac{\sigma_y'}{E} - \nu \frac{\sigma_z'}{E}$$

$$\epsilon' = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\epsilon' = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{E} (1 - \nu)$$

$$\epsilon' = \frac{1}{2} \epsilon_x (1 - \nu)$$

(2.59) در سیریکال های دانش که تنش در یک جسم همگن و یکنواخت

در یک حالت است. $\sigma_x = \sigma$ و در حالت همگن از یک شکل داده شده.

برای این حالت که تنش همگن (Plane stress) فزاینده می شود

صورتی که ϵ_x و ϵ_y بهر آرازی در آن است و آن نیز در آن

$$\sigma_x = E \frac{\epsilon_x + \nu \epsilon_y}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_y = E \frac{\epsilon_y + \nu \epsilon_x}{1 - \nu^2}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (I)$$

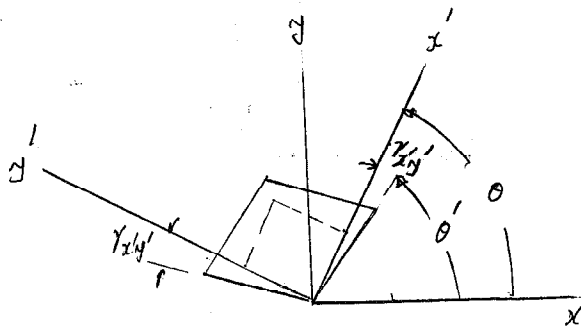
$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (II)$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \quad (III)$$

یا توجه به قانون تقسیم یافته هورن:

از ترکیب معادله فوق نتیجه می گیریم که:

صفحه ۲۰۰



$$\tan \theta = \frac{2}{1} \rightarrow \theta = 63.43^\circ$$

لژیء صفت مایل

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta = \frac{1}{2} (130) (0.8) = 52 \text{ MPa}$$

لژء مؤل تقسیم یافءء مؤرء

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\tau_{x'y'}}{G}$$

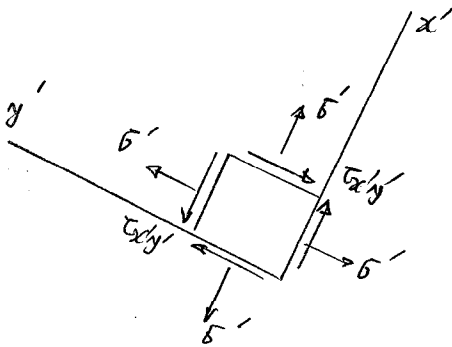
لژء مؤرء

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 26.32 \text{ GPa}$$

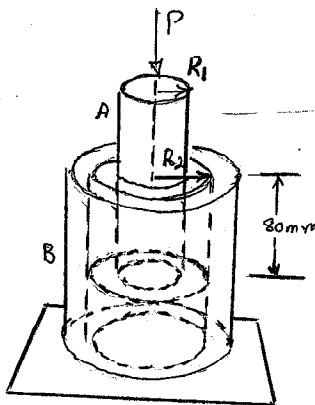
$$\gamma_{x'y'} = 1.976 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.113^\circ$$

$$\theta' = \theta - \frac{\gamma_{x'y'}}{2} = 63.378^\circ$$

$$\rightarrow \tan \theta' = 1.995$$

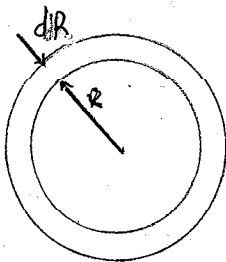


(حل تقریبی مسئله ۱)



یک تکیه‌گاه جدا از ارتعاش در مرکز میل A به شعاع $R_1 = 10 \text{ mm}$ دارد. B به شعاع داخلی $R_2 = 25 \text{ mm}$ است که به ارتعاش است. در حالی که ارتفاع 80 mm و مدول جیسیته $G = 12 \text{ MPa}$ است. اگر فرض میل A جداگانه 2.5 mm است و مطلوب است بزرگترین نیروی P که می‌تواند به این میل وارد کرد.

پایه (در نامه R_1 و R_2 یعنی به شعاع R به عرض dR در طول L را در نظر بگیرید. برای تعادل ایستایی این خواهم داشت:



$$\tau (2\pi R L) = (\tau + d\tau) [2\pi (R + dR) L]$$

$$\tau R = \tau R + \tau dR + R d\tau + d\tau dR$$

$$\tau dR = -R d\tau$$

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{dR}{R}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه:

$$\ln \tau = -\ln R + \ln C$$

در نتیجه $\tau = \frac{C}{R}$ - انتگرال‌گیری از این رابطه:

$$\rightarrow \ln \tau = \ln \frac{C}{R} \quad \text{یا} \quad \tau = \frac{C}{R} \quad \text{یا} \quad \tau R = C = \text{const}$$

این مورد نظر تحت تأثیر تنش برشی τ دچار کرنش γ مطابق شکل فراموش.

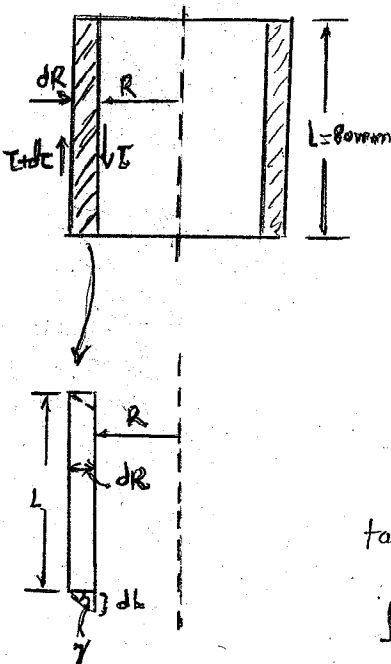
$$\tan \gamma = \frac{dL}{dR} \quad \text{یا} \quad \gamma = \frac{dL}{dR} \quad \text{یا} \quad dL = \gamma dR \quad \text{یا} \quad dL = \frac{\tau}{G} dR$$

$$\int_0^L dL = \int_{R_1}^{R_2} \frac{C}{RG} dR$$

$$\delta = \frac{C}{G} \ln \frac{R_2}{R_1} \rightarrow C = \frac{\delta G}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{(2.5 \times 10^{-3}) (12 \times 10^6)}{\ln \frac{25}{10}} = 32740.7$$

$$\tau_1 = \frac{C}{R_1} = \frac{32740.7}{10 \times 10^{-3}} = 3.274 \text{ MPa} \quad \text{در شعاع } R_1$$

$$P = (2\pi R_1 L) \tau_1 = 2\pi (10 \times 10^{-3}) (80 \times 10^{-3}) (3.274 \times 10^6) = 16.457 \text{ kN}$$

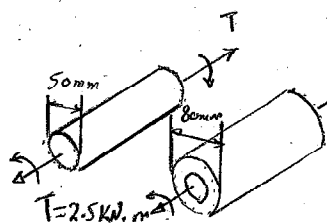


حل تمرین فصل سوم

پیش

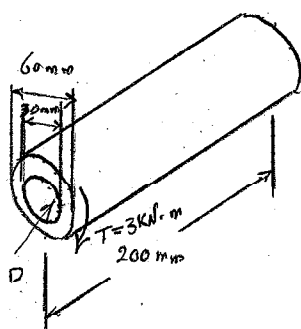
«مقاومت مصالح»

(حل تمرین فصل ۳)

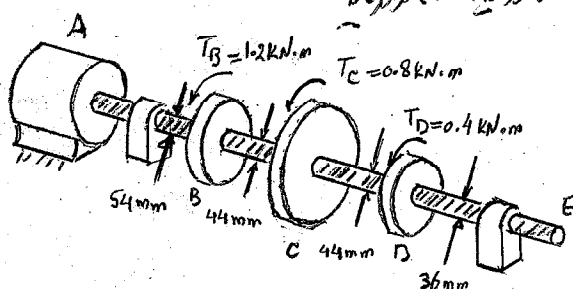


۳-۲) انت (برای محور توپر به قطر 50 mm و انت از انت دارد به مطلب حداکثر تنش برشی
- مطلب رنج دایمی مورد توجهی و مقدار 80 mm در سبک حداکثر تنش
مقدار محاسبه در انت " انت " است.

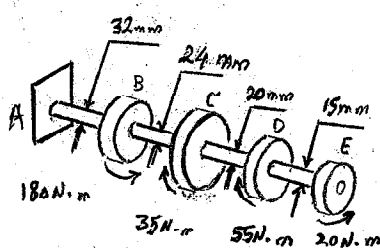
۳-۳) گشت در T به محور توپر برنجی مطابق شکل اعمال شود (مطلب انت) (مطلب تنش برشی
- تنش برشی در نقطه D روی رنج 15 mm ج (در حد گشت در حد رنج به سبک
مستقر از محور داخل رنج 15 mm



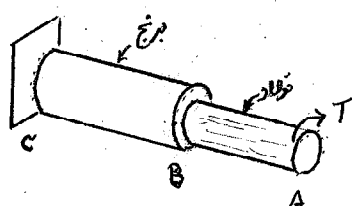
۳-۴) گشت شریانی عملگر در محمول، مقدار الکتریکی گشت در 2.4 kN.m را اعمال کنند
در انت که محور توپر است، مطلب حداکثر تنش برشی (انت در گشت BC)



۳-۵) در این که در گشت AE ن یک سبک محاسبه است. مطلب حداکثر
تنش برشی نتیجه بارگذاری اعمال شده



۳-۶) تنش طایر در سبک AB، 85 MPa، در سبک BC، 50 MPa، و در گشت در T = 6.5 kN.m در کل



انت مطلب: معلوم کردیم در انت در سبک AB، در سبک BC

$$T_{max} = \frac{T \cdot c}{J}$$

(انت) در گشت AB:

$$85 \times 10^6 = \frac{(6.5 \times 10^3) \cdot c}{\frac{\pi \cdot c^4}{2}} \rightarrow c = 36.51 \text{ mm} \rightarrow d_{AB} = 2c = 73.028 \text{ mm}$$

$$T_{max} = \frac{T \cdot c}{J}$$

(- در گشت BC):

$$50 \times 10^6 = \frac{(6.5 \times 10^3) \cdot c}{\frac{\pi \cdot c^4}{2}} \rightarrow c = 43.579 \text{ mm}$$

$$d_{BC} = 2c = 87.157 \text{ mm}$$

(مقایسه مصالح)

(حل سترین فصل ۳)

$$\tau = \frac{Tr}{J}, \quad \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

بخش سوال (۳-۲) الف)

$$\tau_{max} = \frac{(2.5 \times 10^3)(25 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2} (25 \times 10^{-3})^4} = 101.859 \text{ MPa}$$

(ب)

$$\bar{\tau} = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0.04)^4 - c_1^4]$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc_2}{J} \rightarrow \bar{\tau} = \frac{Tc_2}{\tau_{max}} = \frac{(2.5 \times 10^3)(0.04)}{101.859 \times 10^6} = 9.818 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\rightarrow c_1 = 0.0373 \text{ m} = 37.3 \text{ mm}$$

$$\rightarrow d_1 = 2c_1 = 74.6 \text{ mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(3 \times 10^3)(0.03)}{\frac{\pi}{2} (0.03)^4} = 70.74 \text{ MPa}$$

بخش سوال (۳-۴) الف)

(ب)

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{(3 \times 10^3)(0.015)}{\frac{\pi}{2} (0.03)^4} = 35.368 \text{ MPa}$$

(ج)

(د)

$$T' = \int (\tau dA) \rho = \int \frac{T}{J} \rho^2 dA = \frac{T}{J} \int \rho^2 dA$$

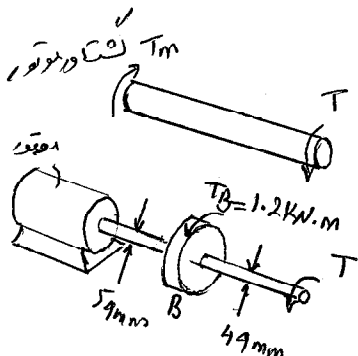
$$\bar{T}' = \int \rho^2 dA$$

$$T' = \frac{T}{J} \bar{T}' = \frac{\bar{T}'}{J} T$$

$$\bar{T}' = \frac{\pi}{2} (0.015)^4 = 7.952 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\bar{T} = \frac{\pi}{2} (0.03)^4 = 1.273 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\rightarrow T' = 0.0625 T \quad \underline{\underline{T' = 6.25\% T}}$$



$$T = 2.4 \text{ kN.m}$$

(الف)

بخش سوال (۳-۴) الف)

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(2.4 \times 10^3)(27 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2} (27 \times 10^{-3})^4} = 77.625 \text{ MPa}$$

(ب)

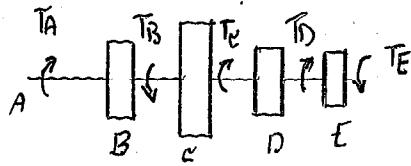
$$T = T_m - T_R = 2.4 - 1.2 = 1.2 \text{ kN.m}$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(1.2 \times 10^3)(22 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2} (22 \times 10^{-3})^4} = 71.745 \text{ MPa}$$

صفحه: ۲۳

(مستطیل یک)

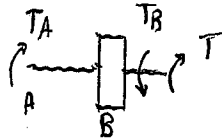
(حل سیرین فعل ۳)



تأخ (۲) : $T_A = 180 + 20 - (35 + 55) = 110 \text{ N.m}$

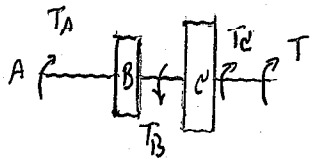
برای AB : $T_{max} = \frac{T_C}{J} = \frac{110 \times (16 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2} (16 \times 10^{-3})^4}$

$T_{max} = 17.097 \text{ MPa}$



$T = T_B - T_A = 70 \text{ N.m}$

$T_{max} = \frac{T_C}{J} = \frac{70 \times (12 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2} (12 \times 10^{-3})^4} = 25.789 \text{ MPa}$



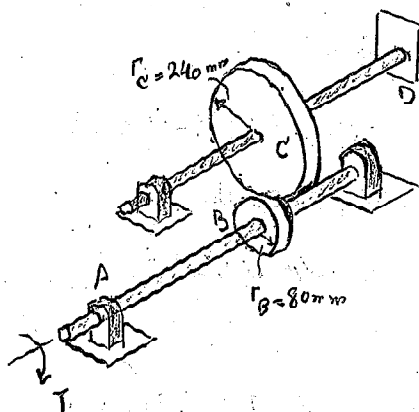
برای CD : $T = T_B - T_A - T_C = 180 - 110 - 35 = 35 \text{ N.m}$

$T_{max} = \frac{T_C}{J} = \frac{35 \times (10 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2} (10 \times 10^{-3})^4} = 22.28 \text{ MPa}$

برای DE : $T = 20 \text{ N.m}$

$T_{max} = \frac{T_C}{J} = \frac{20 \times (7.5 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2} (7.5 \times 10^{-3})^4} = 30.2 \text{ MPa}$

۴۴: ۴۴



۱۴-۳) گره CD از میلگرد به قطر 60 mm با گره AB به قطر 48 mm از ورق درج یک درجه متفاوت است. در نظر گرفتن تفاوت انبساطی از پیچیدن دایره به اینگونه که از هر دو گره 60 MPa به مطلب حاصل گرفته و T را محاسبه کنید.

پاسخ:

برای گره AB

$$\tau_{max} = \frac{T r_c}{J}$$

$$6 \times 10^6 = \frac{T (24 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2} (24 \times 10^{-3})^4} \rightarrow T = 1302.88 \text{ N.m}$$

برای گره CD

$$\tau_{max} = \frac{T_{CD} \cdot r_c}{J}$$

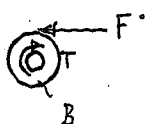
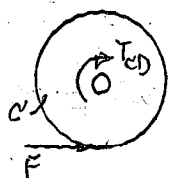
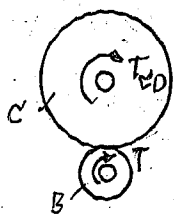
با توجه به درجه یک درجه متفاوت

$$F = \frac{T}{r_b}, \quad T_{CD} = F \cdot r_c = T \frac{r_c}{r_b} = 3T$$

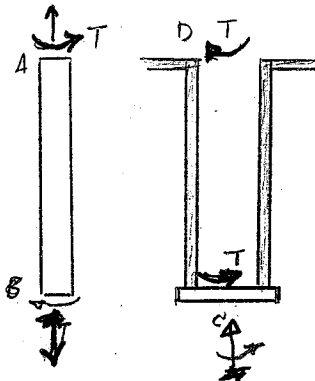
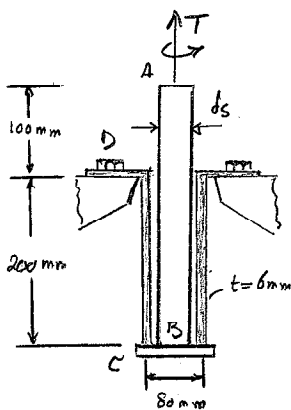
$$60 \times 10^6 = \frac{3T (33 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2} (33 \times 10^{-3})^4} \rightarrow T = 1129 \text{ N.m}$$

پاسخ:

$$T_{max} = 1129 \text{ N.m}$$



(حله مقبول فصل ۳)

(۳-۱۲) سطلر CD دارای قطر خارجی 80 mm و ضخامت دیواره 8 mm استو از جنس برنج با تنش برشی مجاز 40 MPa است. در سطلر AB به قطر $d_s = 56\text{ mm}$ و از جنس فولاد است که تنش برشی مجاز آن 55 MPa استمطلوبه حداکثر گشت در سطلر AB در سطلر AB 

$$T_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{در سطلر } AB$$

$$T = \frac{T_{\max} J}{c} = \frac{(55 \times 10^6) \left[\frac{\pi}{2} (28 \times 10^{-3})^4 \right]}{28 \times 10^{-3}} = 1.897 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$T = \frac{T_{\max} J}{c_2} \quad \text{در سطلر } CD$$

$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4)$$

$$J = \frac{\pi}{2} [(40 \times 10^{-3})^4 - (34 \times 10^{-3})^4] = 1.922 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$T = \frac{(40 \times 10^6) (1.922 \times 10^{-6})}{(40 \times 10^{-3})} = 1.922 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$T_{\max} = 1.897 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{پایانه}$$

(۳-۴) در سطلر AB قطر مجز $d_s = 60\text{ mm}$ است، سطلر CD از جنس فولاد ($G = 80\text{ GPa}$) استمطلوبه زاویه گردش سطلر A در سطلر AB $T = 2\text{ kN}\cdot\text{m}$ (در سطلر CD)

$$\Phi_A = \Phi_B + \Phi_{A/B}$$

$$\Phi_B = \Phi_C$$

$$\Phi_{A/B} = \frac{T \cdot L_{AB}}{G J_{AB}} = \frac{(2 \times 10^3) (0.3)}{(80 \times 10^9) \left[\frac{\pi}{2} (30 \times 10^{-3})^4 \right]} = 5.895 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.338^\circ \uparrow$$

$$\Phi_C = \frac{T \cdot L_{CD}}{G J_{CD}} = \frac{(2 \times 10^3) (0.2)}{(80 \times 10^9) \left[\frac{\pi}{2} \{ (40 \times 10^{-3})^4 - (34 \times 10^{-3})^4 \} \right]} = 2.601 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.149^\circ \uparrow$$

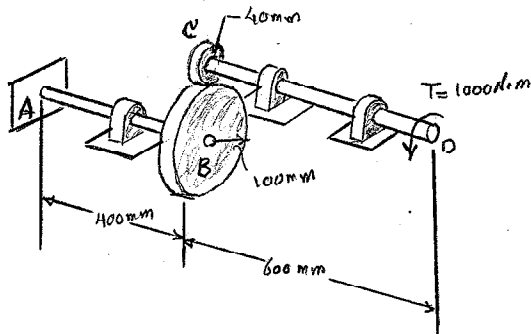
$$\Phi_A = \Phi_B + \Phi_{A/B} = 0.338^\circ + 0.149^\circ = 0.487^\circ$$

(حل مسئله فصل ۳)

(۳-۴) تار سه واچ می باشد چرخ اندک و گوی در آن است.

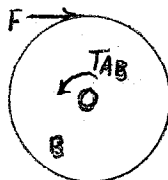
در شکل به محورهای هم محور AB و CD از جنس فولاداستفاده دارد. همچنین از آن است $\tau_{max} \leq 60 \text{ MPa}$ و Φ_B بر روی تار از آن به چرخ است که قطر CD کمتراز 1.5 است. اگر تغییر کرنش $G = 80 \text{ GPa}$

در تارهای مذکور از پیوسته مطلوب حداقل مقدار محور



$$\sum M_C = 0 \quad \text{چرخ در مرکز C}$$

$$F \cdot c = T_{CD} \rightarrow F = \frac{1000}{40} = 25 \text{ N}$$



$$\sum M_B = 0 \quad \text{چرخ در مرکز B}$$

$$F \cdot c = T_{AB} \rightarrow T_{AB} = \frac{1000}{40} (100) = 2500 \text{ N.m}$$

معیار حد انحراف کششی:

$$\tau_{max} = \frac{T_{CD} \cdot c}{J}$$

$$60 \times 10^6 = \frac{(1000) \cdot c}{\frac{\pi}{2} c^4}$$

برای محور CD :

$$c = 0.02197 \text{ m} = 21.97 \text{ mm} \rightarrow d = 2c = 43.95 \text{ mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{AB} \cdot c}{J}$$

$$60 \times 10^6 = \frac{2500 \cdot c}{\frac{\pi}{2} c^4}$$

برای محور AB :

$$c = 0.0298 \text{ m} = 29.82 \text{ mm} \rightarrow d = 59.65 \text{ mm}$$

بنابراین با توجه به معیار فوق $d_{min} = 59.65 \text{ mm}$

معیار زاویه پیچش:

$$\Phi_{B/A} = \Phi_B = \frac{T_{AB} L_{AB}}{JG} = \frac{(2500)(0.4)}{\left(\frac{\pi}{2} c^4\right)(80 \times 10^9)} \quad \text{در محور } AB$$

$$\Phi_{B/A} = \frac{3.97 \times 10^{-9}}{c^4}$$

با توجه به اینکه چرخ در مرکز است:

$$\Phi_C = \Phi_B \quad \text{و} \quad \Phi_C = \frac{100}{40} \Phi_B = 2.5 \Phi_B$$

$$\Phi_C = \frac{1.99 \times 10^{-8}}{c^4}$$

$$\Phi_D = \Phi_C + \Phi_{D/C} \quad \text{برای محور } CD$$

$$\Phi_{D/C} = \frac{T_{CD} L_{CD}}{JG} = \frac{(1000)(0.6)}{\left(\frac{\pi}{2} c^4\right)(80 \times 10^9)} = \frac{4.775 \times 10^{-9}}{c^4}$$

$$\Phi_D = 1.5 \times \frac{\pi}{180} = \frac{1.99 \times 10^{-8}}{c^4} + \frac{4.775 \times 10^{-9}}{c^4}$$

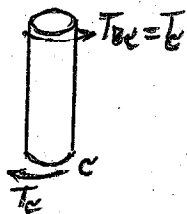
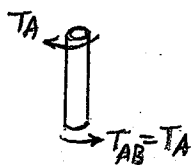
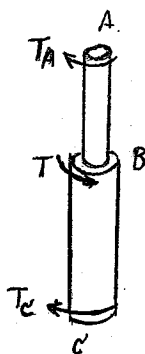
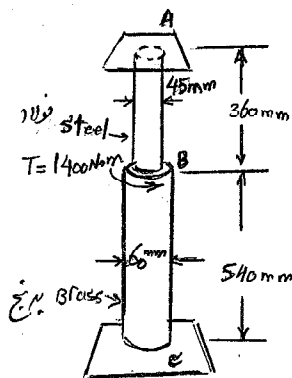
$$\rightarrow c = 0.031 \text{ m} = 31.156 \text{ mm}$$

$$d = 2c = 62.31 \text{ mm}$$

بنابراین دو معیار $d_{min} = 62.31 \text{ mm}$

(تدریس فصل ۳)

(۲۰۴۰) استاندارد نصب تسمه در AB و BC در محل B به یکدیگر متصل شده اند و به یکدیگر گامای لوله در A و C تاس دارند. در این یکدیگر لوله است $G = 80 GPa$ برای فولاد و $G = 40 GPa$ برای برنجی است. تطابقت هداکتیونی برای انت (در محور AB) و (در محور BC)



با توجه به مقدار استاتیکی مجموع:

$$T_A + T_C = T = 1400 \text{ N.m} \quad (I)$$

با توجه به معادلات تغییر شکل

$$\Phi_A = \Phi_C = 0$$

$$T_{AB} = T_A$$

در محور AB :

$$\Phi_B = \Phi_A + \Phi_{B/A} \quad \Phi_{B/A} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB} G_{AB}}$$

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} (22.5 \times 10^{-3})^4 = 4.026 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\Phi_B = \frac{T_A (0.36)}{(4.026 \times 10^{-6}) (80 \times 10^9)}$$

$$T_{BC} = T_C$$

در محور BC :

$$\Phi_B = \Phi_C + \Phi_{B/C} \quad \Phi_{B/C} = \frac{T_{BC} L_{BC}}{J_{BC} G_{BC}}$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} (30 \times 10^{-3})^4 = 1.272 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\Phi_B = \frac{T_C (0.54)}{(1.272 \times 10^{-6}) (40 \times 10^9)}$$

با استفاده از رابطه:

$$T_A = 0.95 T_C \quad (II)$$

با توجه به روابط I و II

$$T_A = 682.05 \text{ N.m} \quad T_C = 717.95 \text{ N.m}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_A \cdot c}{J_{AB}} = \frac{(682.05) (22.5 \times 10^{-3})}{4.026 \times 10^{-6}} \quad (\text{الف})$$

$$\tau_{max} = 38.12 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_C \cdot c}{J_{BC}} = \frac{(717.95) (30 \times 10^{-3})}{1.272 \times 10^{-6}} \quad (\text{ب})$$

$$\tau_{max} = 1693 \text{ MPa}$$

(حل تمرین مقارنت مصالح)

(فصل ۳)

(۲-۴۲) به محور یک شفت داده شده، گشت در پیچش T در سر A اعمال می‌گردد. چنانچه مدول صلبیت فولاد 80 GPa و برای آلومینیم 27 GPa باشد، مطلوب است حداکثر زاویه پیچش در الکتر گشت در پیچش در سر A اگر حداکثر تنش برش برای فولاد از 60 MPa و برای آلومینیم از 45 MPa تجاوز ننماید.

$$T = T_{AL} + T_{st} \quad (I) \quad \text{با توجه به استاتیسیته}$$

$$\phi_{AL} = \phi_{st} \quad (II) \quad \text{با توجه به تغییر شکل}$$

$$(II): \frac{T_{AL} \cdot L}{J_{AL} \cdot G_{AL}} = \frac{T_{st} \cdot L}{J_{st} \cdot G_{st}}$$

$$J_{AL} = \frac{\pi}{2} [(36 \times 10^{-3})^4 - (27 \times 10^{-3})^4] = 1.804 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{st} = \frac{\pi}{2} [(27 \times 10^{-3})^4] = 8.348 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

با جایگزینی در رابطه (II):

$$\frac{T_{AL}}{(1.804 \times 10^{-6})(27 \times 10^9)} = \frac{T_{st}}{(8.348 \times 10^{-7})(80 \times 10^9)} \rightarrow T_{AL} = 0.729 T_{st}$$

$$(T_{max})_{AL} = \frac{T_{AL} \cdot C_2}{J_{AL}} \rightarrow T_{AL} = \frac{(45 \times 10^6)(1.804 \times 10^{-6})}{36 \times 10^{-3}} = 2254.44 \text{ N.m}$$

$$\phi = \frac{T_{AL} \cdot L}{J_{AL} \cdot G_{AL}} = \frac{(2254.44)(2.5)}{(1.804 \times 10^{-6})(27 \times 10^9)} = 0.1157 \text{ rad} = 6.63^\circ$$

$$(T_{max})_{st} = \frac{T_{st} \cdot C'}{J_{st}} \rightarrow T_{st} = \frac{(60 \times 10^6)(8.348 \times 10^{-7})}{27 \times 10^{-3}} = 1855.08 \text{ N.m}$$

$$\phi = \frac{T_{st} \cdot L}{J_{st} \cdot G_{st}} = \frac{(1855.08)(2.5)}{(8.348 \times 10^{-7})(80 \times 10^9)} = 0.069 \text{ rad} = 3.98^\circ$$

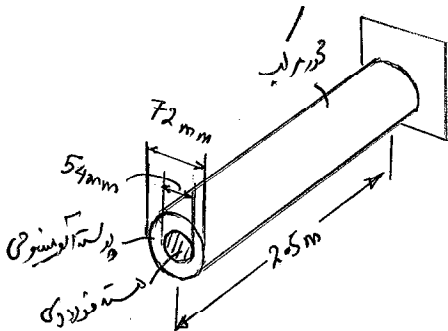
$$\phi_{max} = 3.98^\circ, \quad T_{st} = 1855.08 \text{ N.m}$$

از رانجی طبق رابطه (I):

$$T_{AL} = 0.729 T_{st} \rightarrow T_{AL} = 1352.35 \text{ N.m}$$

$$(I): T_{max} = 1352.35 + 1855.08 = 3207 \text{ N.m}$$

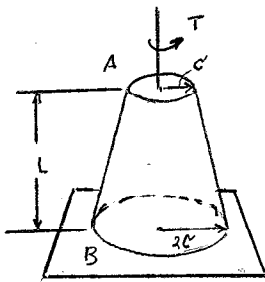
$$T_{max} = 3.207 \text{ kN.m}$$



(حل تقریبی فعلی ۳)

(۳-۴۵) کوپل پیچشی T به محور میل AB مطابق شکل اعمال می‌گرددنسبت دقت در مقدار زاویه پیچش است A عبارت است از

$$\Phi_A = \frac{77L}{12\pi Gc^4}$$



$$\Phi = \int_0^L \frac{T dx}{GJ}$$

(کاخ)

برای هر سطح در فاصله x :

$$J = \frac{\pi}{2} y^4$$

با توجه به این که شرط کنی تغییرات x به نسبت x است:

$$y - c = \frac{c - 2c}{L - 0} (x - 0)$$

$$y = \frac{-cx}{L} + 2c$$

با جایگزینی در رابطه زاویه پیچش

$$\Phi = \frac{T}{G} \int_0^L \frac{dx}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{-cx}{L} + 2c \right)^4} = \frac{2TL}{3\pi Gc} \frac{1}{\left(\frac{-cx}{L} + 2c \right)^3} \Big|_0^L$$

$$\Phi = \frac{2TL}{3\pi Gc} \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8c^3} \right) = \frac{77L}{12\pi Gc^4} = \frac{0.5833TL}{\pi Gc^4}$$

(۳-۴۶) سله از رانکب محور بصورت پله‌ای به میزان تقریبی زیر

محور گردشی حل شده در هند صفا را به نسبت آوریم

$$\Phi_A = \sum_{i=1}^5 \Phi_i = \sum_{i=1}^5 \frac{T_i L_i}{G J_i} = \frac{T L_5}{G} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{J_i}$$

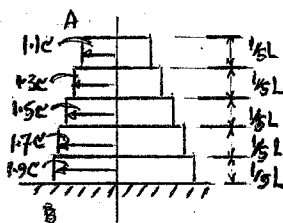
$$J_i = \frac{\pi}{2} c_i^4 = \frac{\pi}{2} (K_i c)^4 = \frac{\pi}{2} c^4 K_i^4$$

$$\Phi_A = \frac{2TL}{5\pi Gc^4} \left[\frac{1}{(1.1)^4} + \frac{1}{(1.3)^4} + \frac{1}{(1.5)^4} + \frac{1}{(1.7)^4} + \frac{1}{(1.9)^4} \right]$$

$$\Phi_A = \frac{0.5708TL}{\pi Gc^4}$$

در مقایسه با مقدار زاویه پیچش سله بالا:

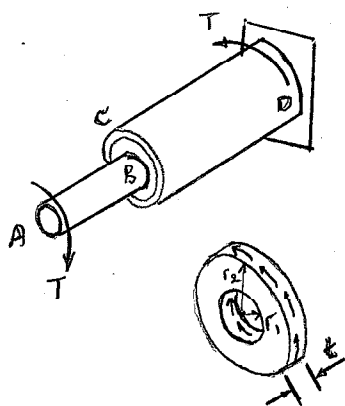
$$\text{درصد} = \frac{0.5833 - 0.5708}{0.5833} \times 100 = 2.149\%$$



(حل تمرین معین ۳)

(۳۰۴۸) معین که به ضخامت t بر روی اتصال محور AB به ارتفاع r_1 به عنوان D به ارتفاع داخلی (3.48)
 r_2 است (در صورت لزوم). الف) شش دهید زاویه θ که در اتصال C ایجاد می‌شود به ارتفاع B محور در میان
برای عبارت است از:

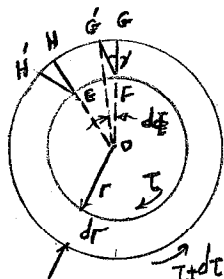
$$\Phi_{C/B} = \frac{T}{4\pi G t} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$



ب) شش دهید چگالی الف نسبت به مرکز ثقل به است:

$$\Phi_{C/B} = \frac{T_1}{2G} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)$$

(ع)



$$(2\pi r t) r = [2\pi (r+dr) (t+dt) t] (r+dr)$$

$$r^2 t = (r^2 + 2r dr + dr^2) (t+dt)$$

$$= r^2 t + r^2 dt + 2r dr t + 2r dr dt$$

$$\rightarrow 2r dt = -r dr \rightarrow \frac{dt}{t} = -2 \frac{dr}{r} \rightarrow \ln t = -2 \ln r + D$$

$$r = r_1 \rightarrow t = t_1 \rightarrow \ln t_1 = -2 \ln r_1 + D \rightarrow D = \ln t_1 r_1^2$$

$$\rightarrow \ln t = \ln \frac{1}{r^2} + \ln t_1 r_1^2 \rightarrow \ln t = \ln \frac{t_1 r_1^2}{r^2}$$

$$t = \frac{t_1 r_1^2}{r^2}$$

الف) $EFCH$ به $EFCH'$ تغییر زاویه بین دو سطح $EFCH$ و $EFCH'$ را بدین روش حساب می‌کنیم. بر روی GG'

$$GG' = r dr = (r+dr) d\Phi \rightarrow r dr = r d\Phi + dr d\Phi$$

$$d\Phi = r \frac{dr}{r} = \frac{dr}{r} \frac{t_1 r_1^2}{r^2} = \frac{t_1 r_1^2}{r^3} dr$$

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{t_1 r_1^2}{r^3} dr = \frac{t_1 r_1^2}{-2G} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) = \frac{T_1}{2G} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)$$

$$T_1 (2\pi r_1 t) r_1 = T$$

لرزان

$$\rightarrow \Phi = \frac{T}{4\pi G t} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$

(تمرین فصل ۳)

(۱۳-۴۸) (۱۳-۴۸) استفاده از روابط در دست آمده در سکه (۳-۴۸)

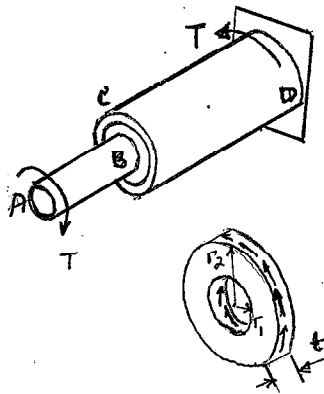
مطلوب مقدار $\Phi_{C/B}$ برای محور آکسیس و سکه $T = 1500 \text{ N.m}$

$G = 27 \text{ GPa}$, $r_2 = 100 \text{ mm}$, $r_1 = 25 \text{ mm}$, $t = 6 \text{ mm}$

، و رانش در سکه در $T = 1500 \text{ N.m}$ سکه آکسیس تیر برش

$r_1 = 25 \text{ mm}$ اعمال می گردد. مطلوب طول سکه برای رانندگی بی پیچ

هک زادی $\Phi_{C/B}$ در حالت "الف" است .



$$\Phi_{C/B} = \frac{1500}{4\pi(27 \times 10^9)(6 \times 10^{-3})} \left[\frac{1}{(25 \times 10^{-3})^2} - \frac{1}{(100 \times 10^{-3})^2} \right] \quad (\text{الف})$$

$$\Phi_{C/B} = 1.105 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.063^\circ$$

(ب)

$$\Phi = \frac{TL}{GJ} \rightarrow 1.105 \times 10^{-3} = \frac{1500 L}{(27 \times 10^9) \left[\frac{\pi}{2} (25 \times 10^{-3})^4 \right]}$$

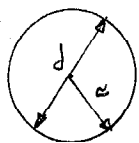
$$\rightarrow L = 0.0122 \text{ m} = 12.204 \text{ mm}$$

(حل سترین مسئله ۱)

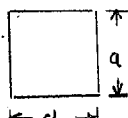
۱۰۲، ۱۰۳) در گیر A، B از یک ماده ساخته شده اند و دارای یک شکل مقطع هستند. آن A دارای مقطع مربعی

و B دایره ای است. ^(الف) مطلوب است محاسبه ضریب درجه T_A و T_B که نشان دهنده این است که در گیر اعمال شوند

همچنین ضریب درجه اعمالی به دو گیر یک است. مطلوب است محاسبه ضریب درجه T_A و T_B



B گیر



A گیر

$$A = \pi c^2 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{\pi} c$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{c a b^2}$$

$$\Phi = \frac{T L}{c a b^3 G}$$

در گیر A

$$a = b \rightarrow c_1 = 0.208$$

$$c_2 = 0.1406$$

$$(\tau_{max})_A = \frac{T_A}{0.208 a^3}$$

$$\Phi_A = \frac{T_A L}{0.1406 a^4 G}$$

در گیر B

$$\tau_{max} = \frac{T c}{J} \Rightarrow (\tau_{max})_B = \frac{T_B c}{\frac{\pi}{2} c^4} \rightarrow (\tau_{max})_B = \frac{2 T_B}{\pi c^3}$$

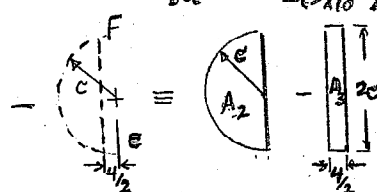
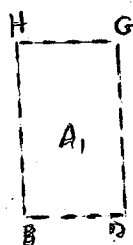
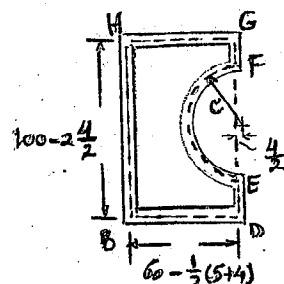
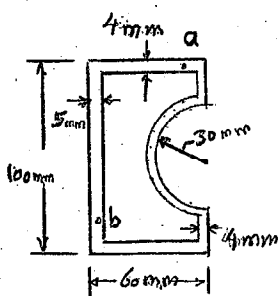
$$\Phi = \frac{T L}{G J}$$

$$\rightarrow \Phi_B = \frac{T_B L}{G \frac{\pi}{2} c^4}$$

$$\Phi_B = \frac{2 T_B L}{\pi G c^4}$$

$$(\tau_{max})_A = (\tau_{max})_B \quad \& \quad \frac{T_A}{0.208 a^3} = \frac{2 T_B}{\pi c^3} \rightarrow \frac{T_A}{T_B} = 2(0.208)\sqrt{\pi} = 0.737$$

$$T_A = T_B \rightarrow \frac{\Phi_A}{\Phi_B} = \frac{\frac{T_A L}{0.1406 a^4}}{\frac{T_B L}{\frac{\pi}{2} c^4}} = 1.132$$



۱۰۴) یک در میله T = 1.2 kN.m به هر دو انتهای آن اعمال می شود

محاسبه ضریب درجه اعمالی به دو گیر A و B

$$\tau = \frac{T}{2 t a}$$

$$Q = A_1 - (A_2 - A_3) = (100 - 4) [60 - \frac{1}{2} (5 + 4)] - [\frac{1}{2} \pi (30 + \frac{4}{2})^2 - 2 \times \frac{4}{2}]$$

$$Q = 3847.5 \text{ mm}^2$$

$$c = 32 \text{ mm}$$

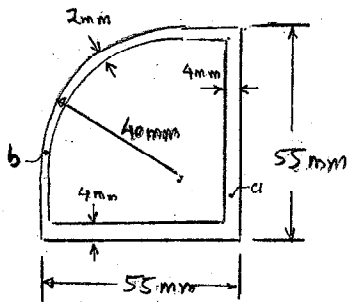
$$\tau_a = \frac{T}{2 t_a Q} = \frac{1.2 \times 10^3}{2 (4 \times 10^{-3}) (3847.5)} = 38.99 \text{ MPa}$$

$$\tau_b = \frac{T}{2 t_b Q} = \frac{1.2 \times 10^3}{2 (5 \times 10^{-3}) (3847.5)} = 31.189 \text{ MPa}$$

(حل تمرین فصل ۳)

۱۳-۱۰۶) شیار $T = 90 \text{ N}\cdot\text{m}$ به هر طرف از مقطع دایره‌ای اعمال می‌گردد

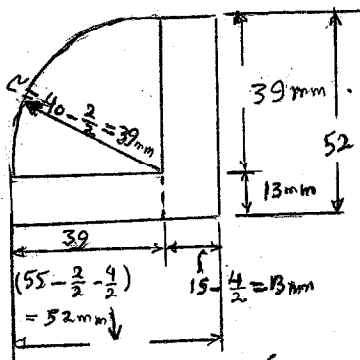
محصولات درون از مرکز شیار تا لبه‌ها a و b



$$\tau_a = \frac{T}{2t_a a}$$

$$a = (55 - 13)(13) + (55)(13) + \frac{1}{4}\pi(40 - \frac{2}{2})^2 = 2377.59 \text{ mm}$$

$$\tau_a = \frac{90}{2(4 \times 10^{-3})(2377.59)} = 4.73 \text{ MPa}$$



$$\tau_b = \frac{T}{2t_b a}$$

$$\tau_b = \frac{90}{2(2 \times 10^{-3})(2377.59)} = 9.46 \text{ MPa}$$

۱۳-۱۱۱) شیار به شیارها در فاصله t از لبه‌ها اعمال می‌گردد. برای تعیین ضرایب τ_b/τ_a

محاسبه می‌کنیم. مطلوب است τ_b/τ_a بر مبنای ضرایب شیارها در هر لبه

$$\tau_a = \frac{T}{2t a} = \frac{T}{2t \pi c^2}$$

$$\tau_b = \frac{T}{c_1 a b^2}$$

$$a = 2\pi c, \quad b = t, \quad c_1 = 0.333$$

$$\tau_b = \frac{T}{0.333(2\pi c)(t^2)}$$

$$\tau_b/\tau_a = \frac{2\pi t c^2}{2 \times 0.333 \pi c t^2} = \frac{c}{0.333 t} = \frac{3c}{t}$$

$$\Phi_b = \frac{TL}{c_2 a b^3 G} = \frac{TL}{(0.333)(2\pi c)t^3 G}$$

$$\Phi_a = \frac{TL}{G J}$$

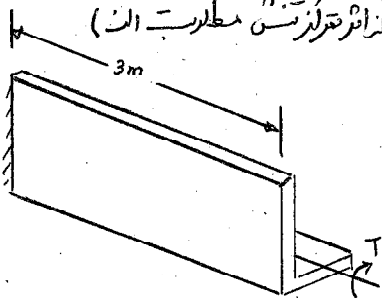
$$J = 2\pi c^3 t$$

$$\Phi_a = \frac{TL}{(2\pi c^3 t) G}$$

$$\frac{\Phi_b}{\Phi_a} = \frac{2\pi c^3 t}{(0.333)(2\pi c)t^3} = 3\left(\frac{c}{t}\right)^2$$

حل تمرین مقاومت مصالح « فصل ۳ »

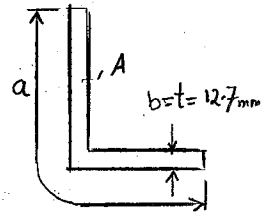
مقطع شش ضلعی فولاد به طول ۳m بصورت 152×12.7 است. این دو به بیوت ج در یک سطح کدشماست این مقطع
۱۲.۷mm سطح آن 4350 mm^2 است. فرض $T_{all} = 50 \text{ MPa}$ و $G = 77.6 \text{ GPa}$ در نظر گرفته شود. (مطابق با استاندارد)
بزرگترین گشت در T که تداک اعمال کرد - از این بیوت.



$$a = \frac{A}{t} = \frac{4350}{12.7} = 342.52 \text{ mm}$$

$$b = t = 12.7 \text{ mm} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{342.52}{12.7} = 26.97$$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{3} (1 - 0.63 \frac{b}{a}) = 0.326$$

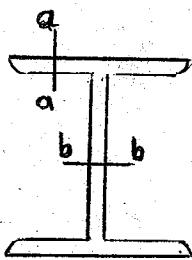


$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 a b^2}$$

$$50 \times 10^6 = \frac{T}{0.326 (342.5 \times 10^{-3}) (12.7 \times 10^{-3})^2} \rightarrow T = 899.24 \text{ N.m}$$

$$\Phi = \frac{TL}{c_2 a b^3 G} = \frac{899.24 (3)}{0.326 (342.5 \times 10^{-3}) (12.7 \times 10^{-3})^3 (77.6 \times 10^9)} = 8.777^\circ$$

یک عضو فولاد به طول ۱۲ft با مقطع $W12 \times 96$ در معرض گشت دور به مقدار ۴۰ kip-in قرار می‌گیرد. فرض
 $G = 11.2 \times 10^6 \text{ Psi}$ را برای فولاد بیوت ج برای ابعاد این مقطع، مطابق با استاندارد (مطابق با استاندارد) b-b
- گشت دور حداکثر در فضا (a-a) را بدین بیوت (را در نظر بگیرید). یک دایره را با همان مرکز بگیرید و با این مرکز درون
را بدین بیوت یک دایره را با این مرکز درون دایره قرار دهید و در مرکز آن دایره (را در نظر بگیرید).



$$\Phi_1 = \frac{T_1 L}{c_{21} a_1 b_1^3 G}$$

$$\Phi_2 = \frac{T_2 L}{c_{22} a_2 b_2^3 G}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = 13.5$$

$$\frac{a_2}{b_2} = 19.84$$

$$c_{11} = c_{21} = \frac{1}{3} (1 - 0.63 \frac{b_1}{a_1}) = 0.318$$

$$c_{12} = c_{22} = \frac{1}{3} (1 - 0.63 \frac{b_2}{a_2}) = 0.323$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \rightarrow \frac{T_1}{(0.318)(12.16)(0.9)^3} = \frac{T_2}{(0.323)(10.91)(0.55)^3}$$

$$\rightarrow T_2 = 0.208 T_1$$

$$T = 2T_1 + T_2 \rightarrow T_1 = 18.116 \text{ kip-in}, T_2 = 3.768 \text{ kip-in}$$

(الف)

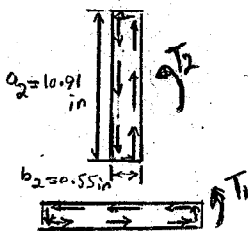
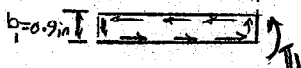
$$\tau_{b-b} = \frac{T_2}{c_{12} a_2 b_2^2} = \frac{3767.8}{0.323 (10.91)(0.55)^2} = 3.535 \text{ ksi}$$

(ب)

$$\tau_{a-a} = \frac{T_1}{c_{11} a_1 b_1^2} = \frac{18.116 \times 10^3}{(0.318)(12.16)(0.9)^2} = 5.783 \text{ ksi}$$

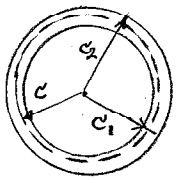
(ج)

$$\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = \frac{(18.116)(12)(12)}{(0.318)(12.16)(0.9)^3 (11.2 \times 10^6)} = 0.0826 \text{ rad} = 4.73^\circ$$



(حل سترین فصل ۳)

روابط مربوط به پهنای نازک تحت پیچش را برای دو سیستم دایره ای شکل با ضخامت یکسان و یکسان



$$\tau = \frac{T}{2tQ} \quad c = \frac{c_1 + c_2}{2} \quad Q = \pi c^2 \quad \tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \quad t = c_2 - c_1$$

در دو مقطع دایره ای تحت پیچش داریم

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{T c_1}{J} = \frac{T c_1}{\frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4)} \\ \tau = \frac{\tau_1 J}{c_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_2 = \frac{T c_2}{J} = \frac{T c_2}{\frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4)} \\ \tau = \frac{\tau_2 J}{c_2} \end{cases}$$

$$\rightarrow T = \frac{\pi}{4} (c_2^4 - c_1^4) \left(\frac{\tau_1}{c_1} + \frac{\tau_2}{c_2} \right) = \frac{\pi}{4} (c_2^2 - c_1^2) (c_2^2 + c_1^2) \left(\frac{\tau_1}{c_1} + \frac{\tau_2}{c_2} \right)$$

لذا

$$c_2^2 + c_1^2 = (c_2 + c_1)^2 - 2c_1 c_2 = (2c)^2 - 2(c - t/2)(c + t/2) = 4c^2 - 2c^2 + 2(t/2)^2 = 2c^2 \approx 2c^2$$

$$T = \frac{\pi c^2}{2} (c_2^2 - c_1^2) \left(\frac{\tau_1}{c_1} + \frac{\tau_2}{c_2} \right) = \frac{\pi c^2}{2} (c_2^2 - c_1^2) \left(\frac{\tau_1}{c_1} + \frac{\tau_2}{c_2} \right)$$

لذا

$$\frac{c_1}{c} = \frac{c - t/2}{c} = 1 - \frac{t}{2c} \approx 1 \quad \frac{c_2}{c} = \frac{c + t/2}{c} = 1 + \frac{t}{2c} \approx 1$$

$$\rightarrow T = \pi c^2 (c_2^2 - c_1^2) \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) = \pi c^2 (c_2^2 - c_1^2) \tau = \pi c^2 (c_2 + c_1) (c_2 - c_1) \tau$$

$$\rightarrow T = 2\pi c^2 (c_2 - c_1) \tau = 2Q (c_2 - c_1) \tau = 2Q t \tau$$

$$\rightarrow \tau = \frac{T}{2tQ}$$

برای زاویه پیچش

$$\Phi = \frac{TL}{4Q^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

$$ds = c d\theta$$

$$\Phi = \frac{\pi L}{4Q^2 G} \int_0^{2\pi} \frac{c}{t} d\theta = \frac{\pi c L}{2Q^2 G t} = \frac{TL}{G \frac{2Q^2 t}{\pi c}}$$

$$\text{لذا} \quad \Phi = \frac{TL}{GJ} \quad \text{است. و از این رابطه می توان نوشت}$$

$$J = \frac{2Q^2 t}{\pi c} \quad \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{2Q^2 t}{\pi c}$$

$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} (c_2^2 - c_1^2) (c_2^2 + c_1^2) = \frac{2\pi c^2}{2} (c_2^2 - c_1^2) = \pi c^2 (c_2 - c_1) (c_2 + c_1)$$

$$J = 2\pi c^3 t = 2t \frac{(\pi c^2)^2}{\pi c} = \frac{2t Q^2}{\pi c}$$

$$u = \int \tau_{xy} d\gamma_{xy} = \int \tau_{xy} d \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{1}{G} \int \tau_{xy} d\tau_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 \quad \text{رابطه دایره ای}$$

$$dV = u dV \rightarrow V = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV$$

$$\tau = \frac{T}{2tQ} \quad dV = t ds dx$$

$$V = \int_0^L \oint \frac{T^2}{8Gt^2Q^2} (t dx ds) = \frac{T^2}{8GQ^2} \int_0^L dx \oint \frac{ds}{t} = \frac{T^2 L}{8GQ^2} \oint \frac{ds}{t}$$

$$V = \frac{1}{2} \Phi T \rightarrow \Phi = \frac{TL}{4GQ^2} \oint \frac{ds}{t}$$

$$\tau = \frac{TQ}{J}$$

رابطه متقاطع دایره ای

رابطه متقاطع دایره ای

$$\tau = \frac{T}{2tQ}$$

رابطه دایره ای

رابطه دایره ای

$$\frac{c}{J} = \frac{1}{2tQ}$$

$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) - \frac{\pi}{2} (c_2^2 - c_1^2)(c_2^2 + c_1^2) = \frac{\pi}{2} (2tc)(2c^2)$$

$$c_2^2 - c_1^2 = (c_2 - c_1)(c_1 + c_2) = 2tc$$

$$c_2 - c_1 = t$$

$$c_1 + c_2 = 2c$$

$$c_2^2 + c_1^2 = (c_2 - c_1)^2 + 2c_1c_2 = 2c^2$$

$$c_1c_2 = (c - t/2)(c + t/2) = c^2 - \frac{t^2}{4} = c^2$$

$$J = 2\pi tc^3$$

$$\frac{c}{J} = \frac{1}{2\pi tc^2} = \frac{1}{2(\pi c^2)t} = \frac{1}{2tQ}$$

$$Q = \pi c^2$$

حل تمرین فصل چهارم

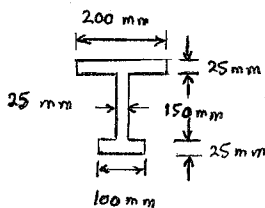
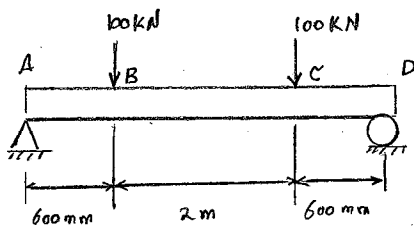
حمش خالص

صفحه: ۴۰

(تدریس فصل ۴)

۴-۶، ۴-۱۲) دو نیروی عمودی به سیمک با مقطع 25×200 mm² در دو نقطه A و B وارد شده است. سیمک دارای یک تکیه‌گاه در نقطه C و یک تکیه‌گاه در نقطه D است. (محاسبه تنش در سیمک)

ج. ۱) سطح مقطع سیمک 25×200 mm² و نیرو در هر نقطه از سیمک با مقدار 100 kN است. سیمک دارای $E = 200 \text{ GPa}$ در نظر گرفته شود.



تغییر استاتیکی در سیمک AD:

$$\sum F_y = 0 : R_A + R_B = 200 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : R_B (3.2) = 100(2.6) + 100(0.6)$$

$$\rightarrow R_B = 100 \text{ kN} \rightarrow R_A = 100 \text{ kN}$$

تغییر استاتیکی در سیمک AE:

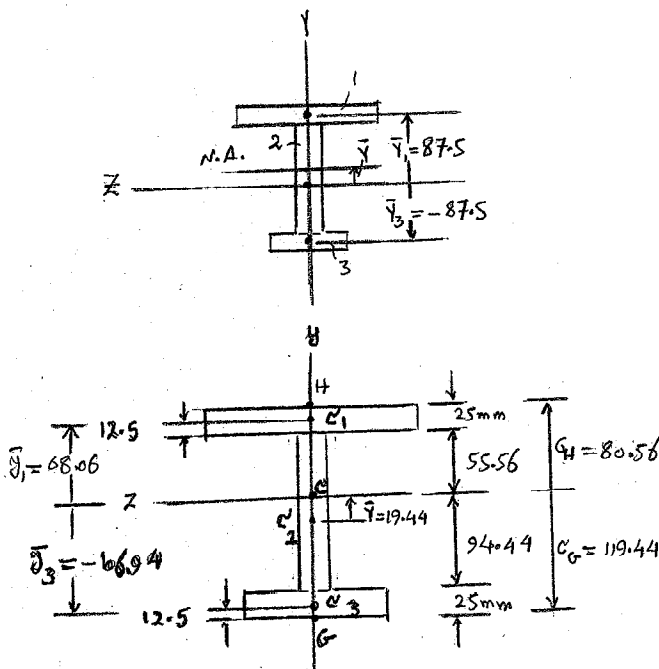
$$\sum M_A = 0 : M = 100(0.6) = 60 \text{ kN.m}$$

تعیین موقعیت محور خنثی:

	A_{red}, mm^2	$\bar{Y}, \text{mm}$	$\bar{Y}A, \text{mm}^3$
1	25×200	87.5	437500
2	25×150	0	0
3	25×100	-87.5	-218750
	$\sum A = 11250$		218750

$$\bar{Y} \sum A = \sum \bar{Y}A \rightarrow \bar{Y} = 19.44 \text{ mm}$$

تعیین مکان مرکز جرم مقطع:



$$I = \sum (\bar{I} + A d^2)$$

$$I = \frac{1}{12} (200)(25)^3 + (25 \times 200) \left(\frac{68.06}{2} + 12.5 \right)^2 + \frac{1}{12} (25)(150)^3 + (25 \times 150) (19.44)^2 + \frac{1}{12} (100)(25)^3 + (25 \times 100) \left(\frac{68.06}{2} - 12.5 \right)^2$$

$$I = 60.59 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 6.059 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

الان محاسبه تنش در نقطه H:

$$c_H = 55.56 + 25 = 80.56 \text{ mm}$$

(حل سؤال ۴)

$$\sigma_H = \frac{-M C_H}{I} = - \frac{(60 \times 10^3) (80.56 \times 10^{-3})}{60.059 \times 10^{-5}}$$

اداسه حل سئله ۴-۲۴

$$\sigma_H = -79.795 \text{ MPa}$$

ب) محاسبه تنش کششی در نقطه G:

$$C_G = 94.44 + 25 = 119.44 \text{ mm}$$

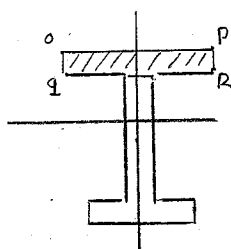
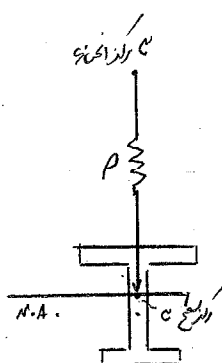
$$\sigma_G = - \frac{M C_G}{I} = - \frac{(60 \times 10^3) (-119.44 \times 10^{-3})}{60.059 \times 10^{-5}}$$

$$\sigma_G = 118.276 \text{ MPa}$$

ج) رفع اعضاء:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{60 \times 10^3}{(200 \times 10^9) (60.059 \times 10^{-5})} = 4.951 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$\rho = 201.968 \text{ m}$$



د) محاسبه نیرو در بالای سیر در سمت چپ و در سمت راست

$$\sigma_x = - \frac{M y}{I}$$

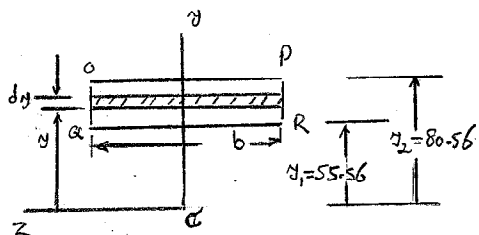
$$dF = \sigma_x dA = - \frac{M}{I} y (b dy)$$

$$dF = - \frac{M b}{I} y dy$$

نتیجه در نقطه

$$F = \int_{y_1}^{y_2} - \frac{M b}{I} y dy$$

$$F = - \frac{M b}{I} \int_{y_1}^{y_2} y dy = - \frac{M b}{2I} (y_2^2 - y_1^2)$$

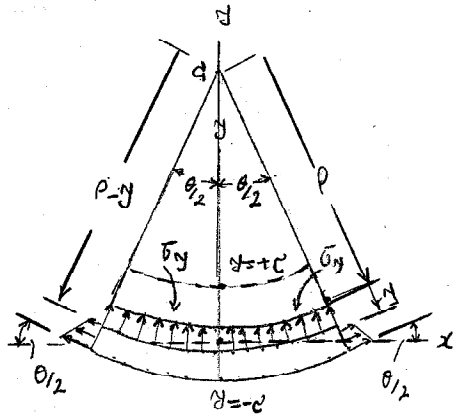


$$F = - \frac{(60 \times 10^3) (0.2)}{2(60.059 \times 10^{-5})} [(80.56 \times 10^{-3})^2 - (55.56 \times 10^{-3})^2]$$

$$F = -336.99 \text{ kN}$$

«حاکمیت مصالح»

(حل سترین فصل ۴)



۱۴-۳۴ درجه ۴۰۴ وزن سترگ درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴

معمولاً درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴

معمولاً درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴

معمولاً درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴ درجه ۴۰۴

$$\sum F_{y1} = 0$$

$$\sigma_y (p-y) \theta b = -2 \int \sigma_x b dy \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m \quad y = -y \rightarrow \sigma_x = \frac{y}{c} \sigma_m$$

$$\int \sigma_x dy = \frac{-\sigma_m}{c} \int y dy = \frac{\sigma_m}{2c} (y^2 - c^2)$$

$$\sigma_y (p-y) \theta b = -b \theta \left[\frac{-\sigma_m}{2c} (y^2 - c^2) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{+\sigma_m}{2c} \frac{y^2 - c^2}{p-y}$$

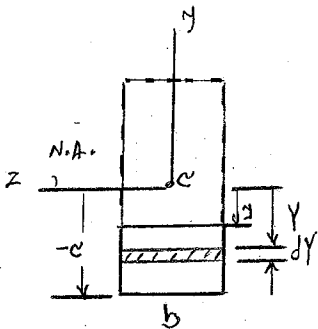
لطفی $p \gg y$

$$\sigma_y \approx \frac{-\sigma_m}{2c} \frac{c^2 - y^2}{p}$$

(۴) درجه ۴۰۴

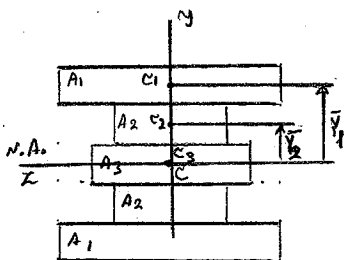
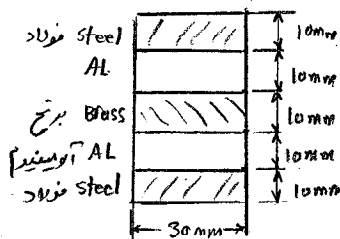
$$(\sigma_y)_{max} \approx \frac{-\sigma_m c}{2p}$$

$$p \gg c \rightarrow (\sigma_y)_{max} \approx 0$$



(حل سؤالی فصل ۴)

۴-۴۶) پنج قطعه در یک سطح مقطع $10 \times 30 \text{ mm}$ به یکدیگر متصل شده اند. جدول گشتاها برای فولاد
 210 GPa برای برنج 105 GPa و برای آلومینیم 70 GPa است. این گشتاها را برای حل سؤالی
 توسط لنگر خنثی $M = 1500 \text{ N.m}$ برای لنگرهای گرد. مطلوب است جداسازی:



الف) فولاد ب) برنج ج) آلومینیم

$$n_1 = \frac{E_s}{E_{AL}} = \frac{210}{70} = 3$$

$$n_2 = \frac{E_{br}}{E_{AL}} = \frac{105}{70} = 1.5$$

$$\bar{y}_1 = 20 \text{ mm}, \quad \bar{y}_2 = 10 \text{ mm}$$

$$I_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 \bar{y}_1^2 = \frac{1}{12} (90)(10)^3 + (90 \times 10)(20)^2 = 367.5 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 \bar{y}_2^2 = \frac{1}{12} (30)(10)^3 + (30 \times 10)(10)^2 = 32.5 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_3 = \frac{1}{12} b_3 h_3^3 = \frac{1}{12} (45)(10)^3 = 3750 \text{ mm}^4$$

$$I = 2(I_1 + I_2) + I_3 = 807.5 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 8.075 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

(۱)

$$(\sigma_{st})_{\max} = n_1 \frac{M c_1}{I} \quad c_1 = 25 \text{ mm}$$

$$= 3 \frac{1500 (25 \times 10^{-3})}{8.075 \times 10^{-7}} = 139.97 \text{ MPa}$$

(۲)

$$(\sigma_{br})_{\max} = n_2 \frac{M c_3}{I} \quad c_3 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 1.5 \frac{1500 (5 \times 10^{-3})}{8.075 \times 10^{-7}} = 13.997 \text{ MPa}$$

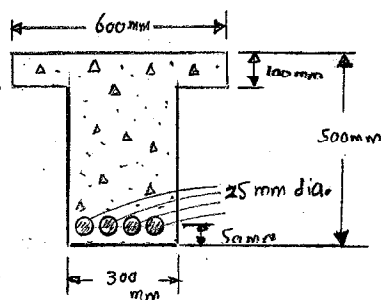
(۳)

$$(\sigma_{AL})_{\max} = \frac{M c_2}{I} \quad c_2 = 15 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$= \frac{1500 (15 \times 10^{-3})}{8.075 \times 10^{-7}} = 27.994 \text{ MPa}$$

۱) مقاومت مصالح

۱) حل بهترین فعل (۱)



۴۴۴) بتن مسلح داره سازه تحت بار مرده است $120 \text{ kN}\cdot\text{m}$ برای لیرد.

هراسف که مودل کشا بتن 25 G-PH دیرک فولاد 200 G-PH است. مطلوب است:

الف) استی در فولاد ب) محاسبه استی در بتن

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{Y}_i}{\sum A_i} \rightarrow \sum A_i \bar{Y}_i = 0$$

$$A_1 \bar{Y}_1 + A_2 \bar{Y}_2 + A_3 \bar{Y}_3 = 0$$

$$A_1 = 100 \times 600 = 6 \times 10^4 \text{ mm}^2 \quad A_2 = 300 \times (500 - 100) = 300 \times 400 = 3 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = n A_s = 8 \left[4 \frac{\pi}{4} (25)^2 \right] = 15707.96 \text{ mm}^2$$

$$\bar{Y}_1 = x - \frac{100}{2} = x - 50 \quad \bar{Y}_2 = \frac{1}{2} (x - 100) = \frac{1}{2} x - 50$$

$$\bar{Y}_3 = -(d - x) = -[(500 - 50) - x] = x - 450$$

$$6 \times 10^4 (x - 50) + (300 \times 400) \left(\frac{1}{2} x - 50 \right) + 15707.96 (x - 450) = 0$$

$$150x^2 + 45707.96x - 8.5685 \times 10^6 = 0 \rightarrow x = 131.078 \text{ mm}$$

$$\bar{Y}_1 = 81.078 \text{ mm} \quad \bar{Y}_2 = 15.539 \text{ mm} \quad \bar{Y}_3 = -318.922 \text{ mm}$$

$$I_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 \bar{Y}_1^2 = \frac{1}{12} (600)(100)^3 + (600 \times 100) (81.078)^2 = 444.419 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 \bar{Y}_2^2 = \frac{1}{12} (300) (400)^3 + [(300)(400)] (15.539)^2 = 3.0016 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_3 = n A_s \bar{Y}_3^2 = 15707.96 (-318.922)^2 = 1597.676 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

در ضلع:

$$\bar{Y}_1 = 131.078 - 50 = 81.078 \text{ mm}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{2} (131.078 - 100) = 15.539 \text{ mm}$$

$$\bar{Y}_3 = x - 450 = -318.922 \text{ mm}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 2045.0995 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 2045.0995 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

الف) - استی کشش:

$$\sigma_{st} = \sigma_t = n \left(-\frac{M c_2}{I} \right)$$

$$c_2 = d - x = -318.92 \text{ mm}$$

$$\sigma_t = -8 \frac{(120 \times 10^3) (-318.92 \times 10^{-3})}{2045.0995 \times 10^{-6}} = 149.706 \text{ MPa}$$

ب) - استی فشرش:

$$(\sigma_c)_{\max} = -\frac{M c_1}{I}$$

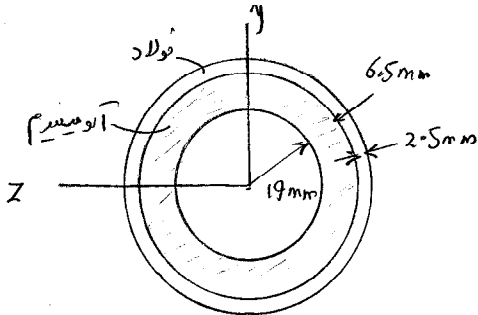
$$c_1 = x = 131.078 \text{ mm}$$

$$(\sigma_c)_{\max} = -\frac{(120 \times 10^3) (131.078 \times 10^{-3})}{2045.0995 \times 10^{-6}} = -7.691 \text{ MPa}$$

حل تمرین درس مقاومت مصالح

(مسئله ۴)

۴-۵۸) از دو ورق آلومینیوم و فولاد که در داخل یکدیگر مطابق شکل قرار دارند یک تیر مرکب را بوجود آورده اند. برای
 محاسبه $M = 1 \text{ kN.m}$ مطلوب است محاسبه تنش در آلومینیوم (ب) در فولاد (ج) و شعاع خنثی



$$\int_A -\sigma_x y dA = \int_{A_1} -\sigma_1 y dA + \int_{A_2} -\sigma_2 y dA = M$$

$$\sigma_1 = -E_1 \frac{y}{\rho}, \quad \sigma_2 = -E_2 \frac{y}{\rho}, \quad \frac{E_2}{E_1} = n$$

$$\rightarrow \sigma_2 = n \sigma_1$$

$$\int_{A_1} -\sigma_1 y dA + n \int_{A_2} -\sigma_1 y dA = M$$

$$-\frac{E_1}{\rho} \left[\int_{A_1} y^2 dA + n \int_{A_2} y^2 dA \right] = M$$

$$-\frac{E_1}{\rho} (I_1 + n I_2) = M$$

$$-\frac{E_1}{\rho} I = M$$

از فرض اول داریم
 $I = I_1 + n I_2$

$$I = I_1 + n I_2$$

در شکل I نگه داریم و به تبدیل یافته و I_2 و I_1 مربوط به ربع واقعی است

$$I = I_a + n I_s \quad n = \frac{E_s}{E_a} = \frac{200}{72} = 2.778$$

$$I_a = \frac{\pi}{4} [(25.5)^4 - (19)^4] = 0.2297 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_s = \frac{\pi}{4} [(28)^4 - (25.5)^4] = 0.1506 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I = 0.6482 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_a = -\frac{M y}{I}$$

$$\sigma_a = -\frac{M y}{I} \quad (\sigma_a)_m = \frac{M c_a}{I} = \frac{(1000)(25.5 \times 10^{-3})}{0.6482 \times 10^{-6}}$$

$$(\sigma_a)_m = 39.337 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = -n \frac{M y}{I} \quad (\sigma_s)_m = n \frac{M c_s}{I} = 2.778 \frac{(1000)(28 \times 10^{-3})}{0.6482 \times 10^{-6}}$$

$$(\sigma_s)_m = 119.98 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1000}{(72 \times 10^9)(0.6482 \times 10^{-6})}$$

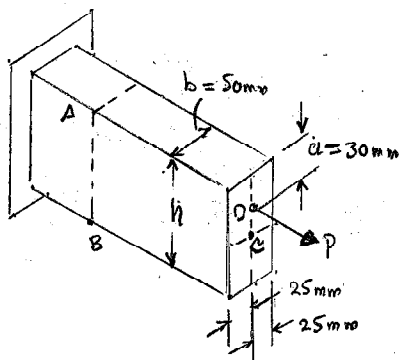
$$\rho = 46.67 \text{ m}$$

در ربع تبدیل یافته

الغ (تنش در آلومینیوم)

ب) تنش در فولاد

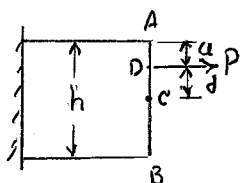
ج) شعاع خنثی



محل بیشترین تنش
۱۳۴- (اگر بار را از مرکز P در نقطه D اثر دهیم. محل بیشترین تنش و

$P = 90 \text{ kN}$ زیر سطح بالای میلگرد است. برای
مطلوب است (الف) ارتفاع h میلگردی که در A حاصل شود

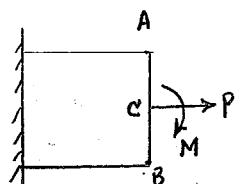
(ب) مقدار تنش در نقطه A



$$M = Pd = P \left(\frac{h}{2} - a \right) \quad (۱)$$

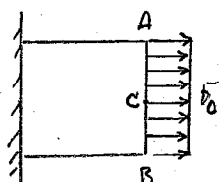
تنش بار را از مرکز P :

$$\sigma_o = \frac{P}{A} = \frac{P}{bh}$$



تنش بار را از مرکز M :

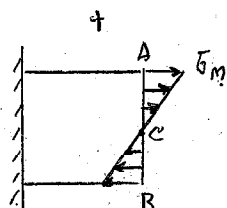
$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{P \left(\frac{h}{2} - a \right) \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} bh^3} = \frac{3P(h-2a)}{bh^2}$$



$$\sigma_A = \sigma_o + \sigma_m$$

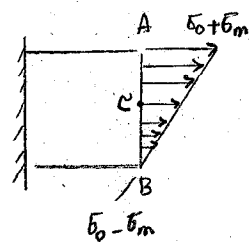
در نقطه A :

$$\sigma_A = \frac{P}{bh} + \frac{3P(h-2a)}{bh^2}$$



$$\frac{\partial \sigma_A}{\partial h} = 0$$

$$\frac{3P}{b} \left[\frac{h^2 - 2h(h-2a)}{h^4} \right] - \frac{P}{bh^2} = 0$$



$$-4h^2 + 12ah = 0 \rightarrow h = 0, h = 3a = 90 \text{ mm}$$

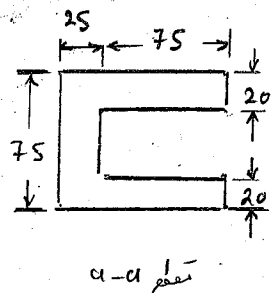
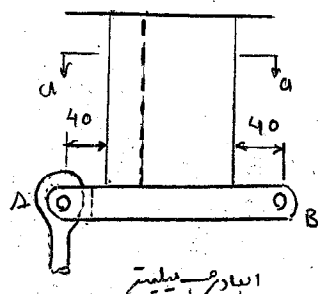
(۲)

$$\sigma_o = \frac{P}{bh} = \frac{90 \times 10^3}{50 \times 90} = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{3P(h-2a)}{bh^2} = \frac{3(90 \times 10^3)(90 - 2 \times 30)}{(50)(90)^2} = 20 \text{ MPa}$$

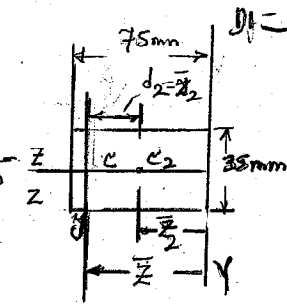
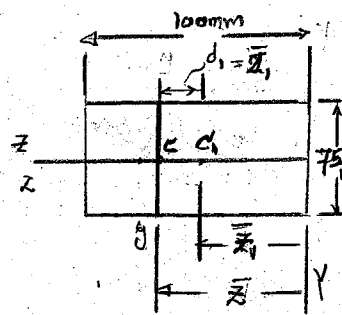
$$\sigma_A = \sigma_o + \sigma_m = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \sigma_o - \sigma_m = 0$$



(محل ۴)

از طریق
 ۴-۱۲۸) برای محاسبه منحنی به کل A، نیروی عمودی به
 تقاطع جبرونی اعمال می‌شود. ضرایب تنش‌های تراز در مقطع جبرونی
 $\sigma_{all} = 35 \text{ MPa}$ ، $\sigma_{all} = -85 \text{ MPa}$



مطلوبه شد حداکثر نیروی عمودی به است. این‌ها، حداکثر نیروی عمودی است

$$\bar{x} = \frac{A_1 \bar{x}_1 - A_2 \bar{x}_2}{A_1 - A_2}$$

$$A_1 = 100 \times 75$$

$$A_2 = 75 \times 35$$

$$\bar{x}_1 = 50 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_2 = 37.5 \text{ mm}$$

$$\bar{x} = 56.731 \text{ mm}$$

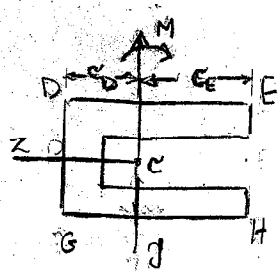
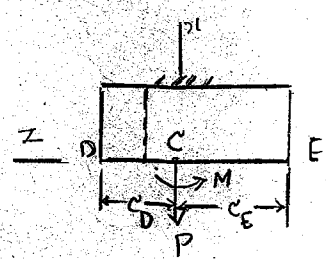
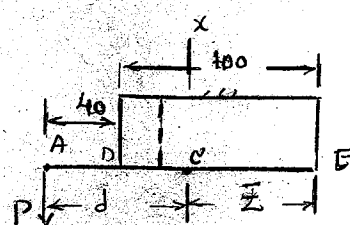
$$I_y = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 d_1^2 = \frac{1}{12} (75)(100)^3 + (75 \times 100)(6.731)^2 = 6.5898 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 d_2^2 = \frac{1}{12} (35)(75)^3 + (35 \times 75)(19.231)^2 = 2.201 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I = 4.389 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

برای ابر به است این



$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{P}{4875} = 2.051 \times 10^{-4} P$$

$$(\sigma_D)_M = \frac{M c_D}{I}$$

$$c_D = 100 - \bar{x} = 100 - 56.731 = 43.269 \text{ mm}$$

$$c_E = \bar{x} = 56.731 \text{ mm}$$

$$M = P d \quad d = 100 - \bar{x} + 40 = 83.269 \text{ mm}$$

$$(\sigma_D)_M = \frac{P(83.269)(43.269)}{4.389 \times 10^6} = 8.209 \times 10^{-4} P$$

$$(\sigma_E)_M = - \frac{M c_E}{I} = -10.763 \times 10^{-4} P$$

این‌ها، تنش‌های کششی و فشاری در نقاط D و E است. تنش‌های کششی و فشاری در نقاط D و E است.

$$(\sigma_t)_m = \sigma_0 + (\sigma_D)_M = 2.051 \times 10^{-4} P + 8.209 \times 10^{-4} P = 10.26 \times 10^{-4} P$$

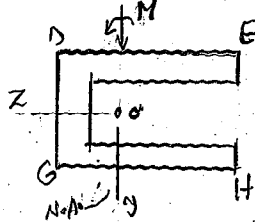
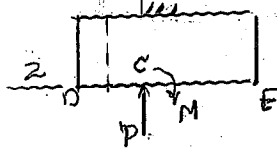
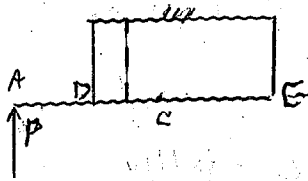
$$(\sigma_t)_m = 35 \text{ MPa} \rightarrow P = 34.11 \text{ kN} \downarrow$$

$$(\sigma_c)_m = \sigma_0 + (\sigma_E)_M = 2.051 \times 10^{-4} P - 10.763 \times 10^{-4} P = -8.712 \times 10^{-4} P$$

$$(\sigma_c)_m = -85 \text{ MPa} \rightarrow P = 97.567 \text{ kN} \downarrow$$

$$P_{max} = 34.11 \text{ kN} \downarrow$$

مسئله ۱



$$\sigma_0 = -\frac{P}{A} = -2.05 \times 10^{-4} P$$

$$(\sigma_D)_M = -\frac{M c_D}{I} = -8.209 \times 10^{-4} P$$

$$(\sigma_E)_M = \frac{M c_E}{I} = 10.763 \times 10^{-4} P$$

$$(\sigma_t)_m = (\sigma_E)_M + \sigma_0 = 10.763 \times 10^{-4} P - 2.05 \times 10^{-4} P = 8.712 \times 10^{-4} P$$

$$(\sigma_t)_m = 35 \text{ MPa} \rightarrow P = 40.174 \text{ kN} \uparrow$$

$$(\sigma_c)_m = (\sigma_D)_M + \sigma_0 = -8.209 \times 10^{-4} P - 2.05 \times 10^{-4} P = -10.259 \times 10^{-4} P$$

$$(\sigma_c)_m = -85 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow P = 82.85 \text{ kN} \uparrow$$

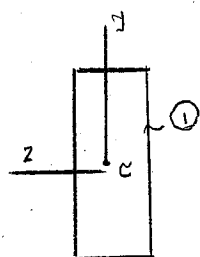
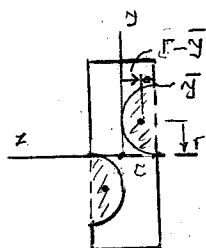
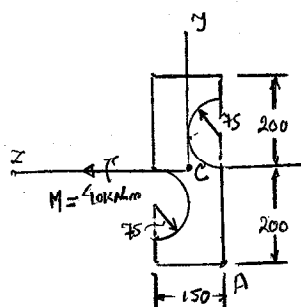
$$P_{max} = 40.174 \text{ kN} \uparrow$$

درست

(حل تمرین شکل ۴)

۴-۱۳۴) گستره M در صند عمودی به تقاطع یک دایره سه اعمال می‌گردد. مطلوب است: A

تعیین مرکز ثقل و عزم انحنای I_z و I_y



$$I_z = (I_z)_1 - 2(I_z)_2$$

$$(I_z)_1 = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (150) (400)^3 = 800 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$(I_z)_2 = \left(\frac{1}{8} \pi r^4 \right) + A r^2 = \frac{1}{8} \pi r^4 + \frac{1}{2} \pi r^4 = \frac{3}{8} \pi r^4 = \frac{3}{8} \pi (75)^4 = 62.126 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 675.748 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = (I_y)_1 - 2(I_y)_2$$

$$(I_y)_1 = \frac{1}{12} h b^3 = \frac{1}{12} (400) (150)^3 = 112.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$(I_y)_2 = \left(\frac{1}{8} \pi r^4 - A \bar{y}^2 \right) + A (r - \bar{y})^2$$

$$(I_y)_2 = \frac{1}{8} \pi r^4 + A r^2 - 2A r \bar{y} = (I_z)_2 - 2 \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) r \left(\frac{4r}{3\pi} \right) = (I_z)_2 - \frac{4}{3} r^4$$

$$(I_y)_2 = 62.126 \times 10^6 - \frac{4}{3} (75)^4 = 19.939 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 72.623 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$P_{yz} = I_{yz} = (I_{yz})_1 - (I_{yz})_2 - (I_{yz})_3$$

تعیین حاصلضرب اینرسی تقاطع:

$$(I_{yz})_1 = 0$$

برای تقاطع ۱: بدلیل تقارن

$$(I_{yz})_2 = (I_{y'z'})_2 = 0$$

برای تقاطع ۲: بدلیل تقارن

$$(I_{yz})_2 = (I_{y'z'})_2 + A_2 (dy)_2 (dz)_2$$

تقاطع ۲: مرکز ثقلی

$$A_2 = \frac{1}{2} \pi r^2 \quad (dy)_2 = -(r - \bar{y}) \quad (dz)_2 = r$$

$$(I_{yz})_2 = \frac{1}{2} \pi r^2 \left[-(r - \frac{4r}{3\pi}) \right] (r) = -\frac{1}{2} \pi r^4 \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right)$$

$$(I_{yz})_3 = (I_{y'z'})_3 = 0$$

برای تقاطع ۳: بدلیل تقارن

$$(I_{yz})_3 = (I_{y'z'})_3 + A_3 (dy)_3 (dz)_3$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \pi r^2 \quad (dy)_3 = (r - \bar{y}) \quad (dz)_3 = -r$$

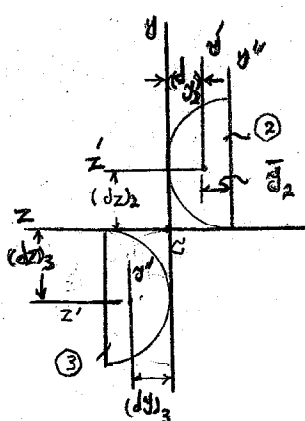
$$(I_{yz})_3 = \frac{1}{2} \pi r^2 \left(r - \frac{4r}{3\pi} \right) (-r) = -\frac{1}{2} \pi r^4 \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right)$$

$$I_{yz} = 2 \left(\frac{1}{2} \pi r^4 \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right) \right) = \pi (75)^4 \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right) = 57.214 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

تعیین موقعیت محور اصلی: θ_m

$$\tan 2\theta_m = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2(57.214 \times 10^6)}{(675.748 \times 10^6 - 72.623 \times 10^6)}$$

$$\theta_m = 5.371^\circ$$



(حل مسئله فصل ۱)

ادامه حل (۴۳۴) تعیین مقدار متوسط حد اقل و حد اکثر شعاع

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\theta - I_{yz} \sin 2\theta$$

$$\theta = \theta_m$$

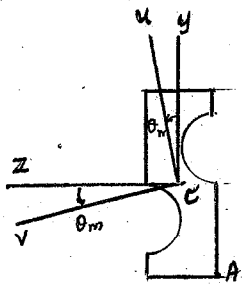
$$I_{y'} = \frac{(72.623 + 675.748) \times 10^6}{2} + \frac{(72.623 - 675.748) \times 10^6}{2} \cos 2(5.371) - 57.214 \times 10^6 \sin 2(5.371)$$

$$I_{y'} = 67.243 \times 10^6 \text{ mm}^4 = I_{min} = I_u$$

برای این محور حد اقل مقدار I (گور u) به هر دو طرف از مرکز برابر θ_m خواهد بود. برای محاسبه I داریم

$$I_{max} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}$$

$$I_{max} = 681.127 \times 10^6 \text{ mm}^4 = I_v$$



روش رسم و محاسبه دایره:

$$\bar{OC} = I_{ave} = \frac{I_y + I_z}{2} = \frac{(72.623 + 675.748)}{2} = 374.3$$

$$\bar{CF} = \bar{OC} - \bar{OF} = I_{ave} - I_y = 301.7$$

$$\tan 2\theta_m = \frac{\bar{FY}}{\bar{CF}} = \frac{I_{xy}}{\bar{CF}} = \frac{57.214}{301.7} \rightarrow \theta_m = 5.37^\circ \uparrow$$

$$R = \sqrt{\bar{CF}^2 + \bar{FY}^2} = 307.07$$

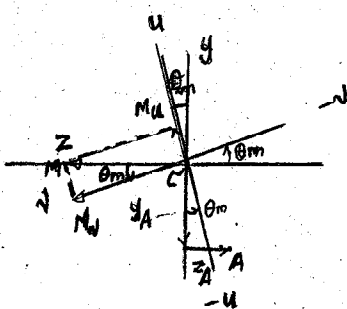
$$\bar{OF} = I_{ave} - R = 67.243$$

$$I_u = I_{min} = 67.243 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{OV} = I_{ave} + R = 681.127$$

$$I_v = I_{max} = 681.127 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

تعیین موقعیت A در گور اصلی:



$$u_A = -y_A \cos \theta_m - z_A \sin \theta_m$$

$$y_A = 200 \text{ mm} \quad z_A = 75 \text{ mm} \rightarrow u_A = -206.139 \text{ mm}$$

$$v_A = y_A \sin \theta_m - z_A \cos \theta_m \rightarrow v_A = -55.96 \text{ mm}$$

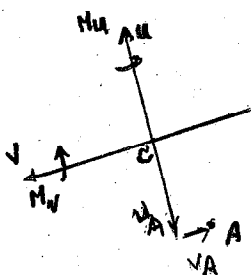
$$M_u = M \cos \theta_m = 40 \cos 5.371 = 39.825 \text{ kN.m} \quad \text{تعیین مؤلفه افقی نیروی}$$

$$M_v = M \sin \theta_m = 3.742 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_A = -\frac{M_u u_A}{I_u} + \frac{M_v v_A}{I_v} \quad \text{تعیین تنش در نقطه A}$$

$$\sigma_A = -\frac{(39.825)(-206.139)}{681.127 \times 10^6} + \frac{(3.742)(-55.96)}{67.243}$$

$$\sigma_A = 8.934 \text{ MPa}$$



حل تمرین فصل پنجم

بارگذاری عرضی

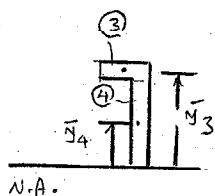
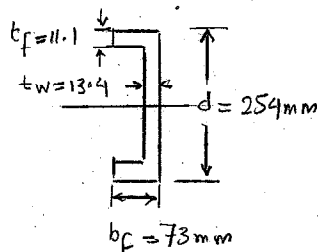
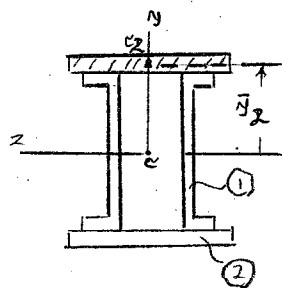
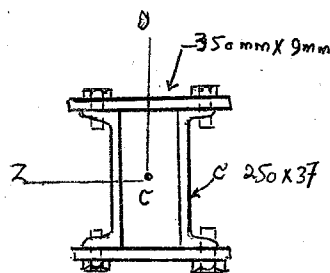
(حل تمرین فصل ۷)

۸-۵) تیر یکپارچه انتقال صغی فولادی به تقاطع ناواکن در صورت زیر:

چنانچه برای انتقال از پیچهای با قطر ۱۸mm در هر ضلع طولی ۱۵۰mm

استفاده شده است. محاسبه تنش برشی متوسط در پیچها و سلبه منبری برشی ۱۲۵kN

در محازات محور y. همچنین در اکثر تنش برشی در مقطع



$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$I = 2I_1 + 2I_2$$

$$I_1 = 38 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad d = 254 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{254 + 9}{2} = 131.5 \text{ mm}$$

$$I_2 = \frac{1}{12} (350)(9)^3 + (350 \times 9)(131.5)^2 = 54.492 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\rightarrow I = 184.984 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q_2 = A_2 \bar{y}_2 = (350 \times 9)(131.5) = 414.225 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{(125 \times 10^3)(414.225 \times 10^{-6})}{(184.984 \times 10^6)} = 279.906 \times 10^{-3}$$

$$\Delta H = q \Delta x \quad , \quad \Delta x = 150 \text{ mm}$$

$$\Delta H = (279.906)(150 \times 10^{-3}) = 41.986 \text{ kN}$$

$$\tau_{ave} = \frac{\Delta H}{2A}$$

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (18)^2 = 254.47 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{ave} = \frac{41.986 \times 10^3}{2(254.47 \times 10^{-6})} = 82.497 \text{ MPa}$$

میانگین تنش برشی:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{I(2t_w)}$$

$$Q = Q_2 + 2(Q_3 + Q_4)$$

$$Q_2 = A_2 \bar{y}_2 = 414.225 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

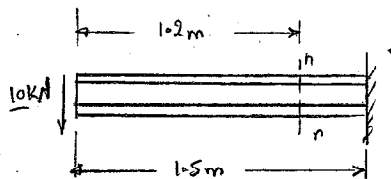
$$Q_3 = A_3 \bar{y}_3 = (t_f \cdot b_f) \bar{y}_3 = (11.1)(73) \left[\frac{254}{2} - \frac{11.1}{2} \right] = 98.91 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$Q_4 = A_4 \bar{y}_4 = t_w \cdot (d/2 - t_f) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{d}{2} - t_f \right) = \frac{1}{2} t_w \left(\frac{d}{2} - t_f \right)^2 = 90 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$Q = 791.04 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{(125 \times 10^3)(791.04 \times 10^{-6})}{(184.984 \times 10^6) [2(13.4 \times 10^{-3})]} = 19.95 \text{ MPa}$$

(حل سترین فصل ۵)



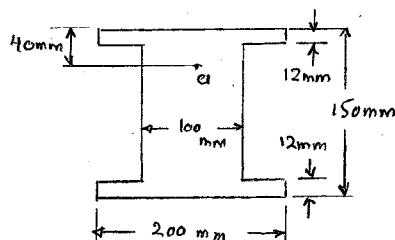
۱۰-۵) برای سترین بارگذاری که داده شده مطلوب برتقاع n-n

الف) حداکثر تنش عمودی (ب) حداکثر تنش برشی (ج) تنش برشی در d

$$M = PL_1 = 10(1.2) = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

تعداد ریت ۱

$$V = 10 \text{ kN}$$



$$I = 2 I_1 + 2 I_2$$

$$A_1 = 12 \times 200 = 2400 \text{ mm}^2 \quad A_2 = 63 \times 100 = 6300 \text{ mm}^2$$

$$I_1 = \frac{1}{12} (200)(12)^3 + (2400)(69)^2 = 11.455 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} (100)(63)^3 + (6300)(31.5)^2 = 8.285 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I = 39.58 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(12 \times 10^3)(75 \times 10^{-3})}{39.58 \times 10^{-6}} = 22.739 \text{ MPa} \quad (\text{ا ب})$$

$$(\tau_{ave})_{max} = \frac{V Q_{max}}{I t} \quad (\text{ب})$$

$$Q = A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 = (2400)(69) + (6300)(31.5)$$

$$Q = 364.05 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$(\tau_{ave})_{max} = \frac{(10 \times 10^3)(364.05 \times 10^{-6})}{(39.58 \times 10^{-6})(100 \times 10^{-3})} = 919.778 \text{ kPa}$$

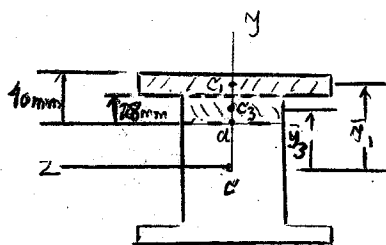
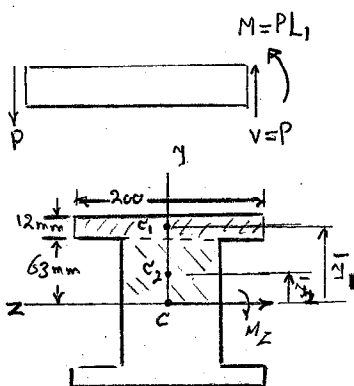
$$(\tau_{ave}) = \frac{V Q}{I t} \quad (\text{ج})$$

$$Q = A_1 \bar{y}_1 + A_3 \bar{y}_3$$

$$A_3 = 100 \times 28 = 2800 \text{ mm}^2 \quad \bar{y}_3 = 63 - 14 = 49 \text{ mm}$$

$$Q = (2400)(69) + (2800)(49) = 302.8 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$(\tau_{ave}) = \frac{(10 \times 10^3)(3.028 \times 10^{-4})}{(3.958 \times 10^{-5})(100 \times 10^{-3})} = 765.029 \text{ kPa}$$



$$I = 2 \left\{ \frac{1}{12} (240)(40)^3 + (240)(40)(60)^2 \right\} + \frac{1}{12} (40)(80)^3$$

$$I = 73.387 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q = A' \bar{y}' = (100 \times 40)(60) = 240 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xz} = 350 \text{ kPa} \quad t = 40 \text{ mm}$$

$$35 \times 10^3 = \frac{V [240 \times 10^6]}{(73.736 \times 10^6) (40 \times 10^3)}$$

$$V = 4.281 \text{ kN}$$

۳۰-۵) ضعیف نیروی برشی عمودی 250 kN بر مقطع $360 \times 122 \text{ W}$ فولادی اعمال گردد منظور از:

شش برشی الف، در نقطه α ب، در مرکز β .

برای متعق $W 360 \times 122$ داریم:

$$d = 363 \text{ mm} \quad b_f = 287 \text{ mm} \quad t_f = 21.7 \text{ mm} \quad t_w = 13 \text{ mm} \quad I_z = 367 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(الف)

$$\tau_{xz} = \frac{VQ_z}{It_z}$$

$$I = 367 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \bar{y}'_1 = \frac{d}{2} - \frac{t_f}{2} = \frac{1}{2} (363 - 21.7) = 170.65 \text{ mm}$$

$$Q_1 = A_1' \bar{y}_1' = (105 \times 21.7)(170.65) = 388.83 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$t_i = t_f = 21.7 \text{ mm}$$

$$t_{xz} = \frac{(250 \times 10^3)(388.83 \times 10^6)}{(367 \times 10^6)(21.7 \times 10^3)} = 12.21 \text{ MPa}$$

$$Q_2 = A_2' \bar{Y}_2 + A_3' \bar{Y}_3$$

$$A_g' = b_f t_f = (257)(210.7) = 5576.9 \text{ mm}^2$$

$$\bar{y}'_2 = \frac{1}{2} (d - t_f) = 170.65 \text{ mm}$$

$$A_3' = \left(\frac{d}{2} - t_f\right) t_w = \left(\frac{363}{2} - 210.7\right)(13) = 2077.4 \text{ mm}^2$$

$$\bar{y}'_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2} - t_f \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{363}{2} - 21.7 \right) = 79.9 \text{ mm}$$

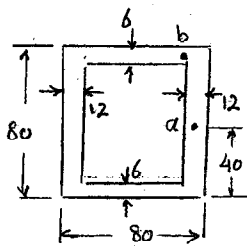
$$Q_2 = (5576.9)(170.65) + (2077.4)(79.9) = 1.118 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ_2}{It_2} = \frac{(950 \times 10^3)(1.18 \times 10^{-3})}{(367 \times 10^6)(13 \times 10^{-3})} = 58.57 \text{ MPa}$$

(حل تقریبی شکل ۵)

۵-۳۴) مقطع زک دارد نسبت تأثیر برش عموداً قرار دارد. مطلوب است برش

الف) نقطه a ب) نقطه b



$$I = 2I_1 + 2I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{12} (80-24)(6)^3 + [(80-24)(6)](37)^2 = 460.992 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} (12)(80)^3 = 512 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I = 1.946 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q = A' \bar{y}'$$

$$A' = \frac{1}{2} [6(80-24)] = 168 \text{ mm}^2$$

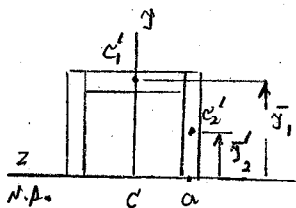
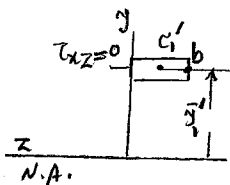
(الف)

$$\bar{y}' = 40 - \frac{6}{2} = 37 \text{ mm}$$

$$Q = 6216 \text{ mm}^3$$

$$t = 6 \text{ mm}$$

$$\tau_{xz} = \frac{VQ}{It} = \frac{(75 \times 10^3)(6216 \times 10^{-9})}{(1.946 \times 10^6)(6 \times 10^{-3})} = 39.928 \text{ MPa}$$



$$Q_1 = 2(6216) = 12432 \text{ mm}^3$$

(ب)

$$Q_2 = 2(12 \times 40) \left(\frac{40}{2} \right) = 19200 \text{ mm}^3$$

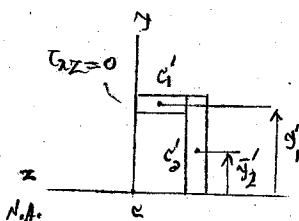
$$Q = Q_1 + Q_2 = 31632 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It}$$

$$t = 2(12) = 24 \text{ mm}$$

$$\tau_{xy} = \frac{(75 \times 10^3)(31632 \times 10^{-9})}{(1.946 \times 10^6)(24 \times 10^{-3})} = 50.797 \text{ MPa}$$

(ج)



$$Q_1 = 6216 \text{ mm}^3$$

$$Q_2 = (12 \times 40) \left(\frac{40}{2} \right) = 9600 \text{ mm}^3$$

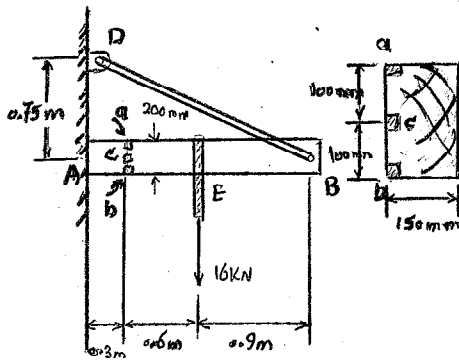
$$Q = Q_1 + Q_2 = 15816 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It}$$

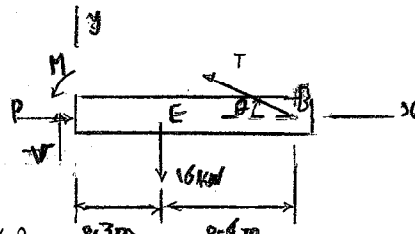
$$t = 12 \text{ mm}$$

$$\tau_{xy} = \frac{(75 \times 10^3)(15816 \times 10^{-9})}{(1.946 \times 10^6)(12 \times 10^{-3})} = 50.797 \text{ MPa}$$

(حل تمرین فصل ۵)



۵-۶۴) تیرکشی می‌دارد AB دارای مقطع مستطیلی $150 \times 200 \text{ mm}$ است.
 مدال کش درگاه BD، 10.4 kN و وزن تیر در هر متر طول
 را به سطر، مطلوب است که عموماً و برشی در سطر را داشته باشد.



پایه (کلیل استاتی)

$$\sum F_x = 0$$

$$P - T \cos \theta = 0 \rightarrow P = 10.4 \cos 22.62^\circ$$

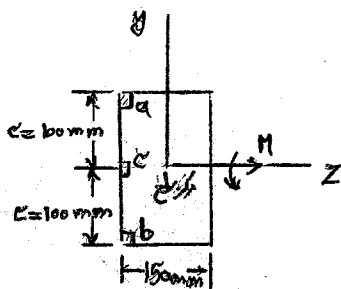
$$\rightarrow P = 9.6 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : V = 16 - T \sin \theta = 12 \text{ kN}$$

$$\sum M_z = 0 \quad M = 16(0.3) - T \sin \theta (0.9) \rightarrow M = 3.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$I_z = I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (150)(200)^3 = 100 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 100 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$A = 150 \times 200 = 30 \times 10^3 \text{ mm}^2 = 30 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$



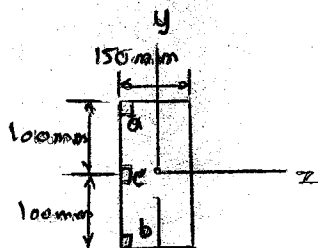
$$\sigma_a = -\frac{P}{A} + \frac{M_z \cdot c}{I_z} = -\frac{9.6 \times 10^3}{30 \times 10^3} + \frac{(3.6 \times 10^3)(100 \times 10^{-3})}{100 \times 10^{-6}}$$

$$\sigma_a = 3.28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = -\frac{P}{A} = -\frac{9.6 \times 10^3}{30 \times 10^3} = -320 \text{ kPa} = -0.32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = -\frac{P}{A} - \frac{M_z \cdot c}{I_z} = -\frac{9.6 \times 10^3}{30 \times 10^3} - \frac{(3.6 \times 10^3)(100 \times 10^{-3})}{100 \times 10^{-6}} = -3.92 \text{ MPa}$$

تکامل تنش عموماً



$$\tau_a = 0 \quad \tau_b = 0$$

در نقطه a و b

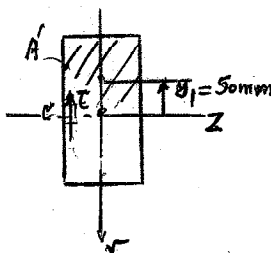
$$\tau_c = \frac{V Q}{I t}$$

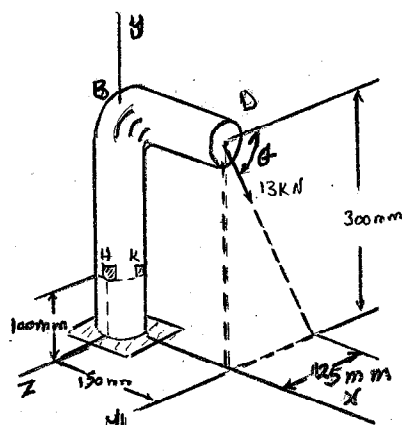
در نقطه c

$$t = b = 150 \text{ mm}$$

$$Q = A' \bar{y}' = (150 \times 100) \times (50) = 750 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 750 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_c = \frac{(12 \times 10^3)(750 \times 10^{-6})}{(100 \times 10^{-6})(150 \times 10^{-3})} = 600 \text{ kPa} = 0.6 \text{ MPa}$$





(حل تمرین فصل ۵)

(۷۲-۵) میز قطر میلگردی ۶۰ mm، شیب ثابت شکلی عمودی در برشی

در نقطه A (الف) H (ب) K

بخش، تیل استاتی: $\Sigma F_y = 0 : V_y = P = 13 \sin \theta = 15 \text{ kN}$

$\Sigma F_z = 0 : V_z = 13 \cos \theta = 5 \text{ kN}$

$$\theta = 67.38^\circ \quad \tan \theta = \frac{300}{125}$$

$\Sigma M_y = 0 \rightarrow M_y = T = (13 \cos \theta)(0.15) = 0.75 \text{ kN.m}$

$\Sigma M_z = 0 \rightarrow M_z = (13 \sin \theta)(0.15) = 1.8 \text{ kN.m}$

$\Sigma M_x = 0 \rightarrow M_x = (13 \cos \theta)(0.2) = 1 \text{ kN.m}$

$$I_x = I_z = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} \pi (30)^4 = 636.2 \times 10^{-6} \text{ mm}^4 = 0.6362 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J = 2I_x = 2I_z = \frac{1}{2} \pi r^4 = 1.272 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad A = \pi r^2 = 2.827 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\sigma_H = -\frac{P}{A} + \frac{M_z c}{I_x} = -\frac{12 \times 10^3}{2.827 \times 10^{-3}} + \frac{(1 \times 10^3)(30 \times 10^{-3})}{0.6362 \times 10^{-6}} = -4209 \text{ MPa}$$

$$\tau_H = \frac{T c}{J} = \frac{(0.75 \times 10^3)(30 \times 10^{-3})}{1.272 \times 10^{-6}} = 17.68 \text{ MPa}$$

$$\sigma_K = -\frac{P}{A} - \frac{M_z c}{I_z} = -\frac{12 \times 10^3}{2.827 \times 10^{-3}} - \frac{(1.8 \times 10^3)(30 \times 10^{-3})}{0.6362 \times 10^{-6}} = -8213 \text{ MPa}$$

$$\tau_K = \frac{T c}{J} + \frac{V_z Q}{I_x t}$$

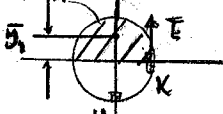
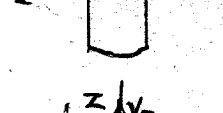
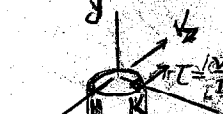
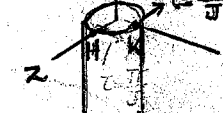
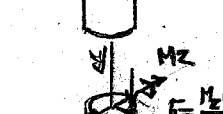
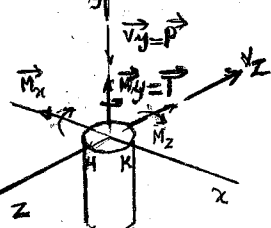
$$I = I_x, \quad t = 2r, \quad Q = A' \bar{y}_1$$

$$A' = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} A, \quad \bar{y}_1 = \frac{4r}{3\pi} \rightarrow Q = 18 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_K = \frac{(0.75 \times 10^3)(30 \times 10^{-3})}{1.272 \times 10^{-6}} + \frac{(5 \times 10^3)(18 \times 10^{-6})}{(0.6362 \times 10^{-6})(60 \times 10^{-3})} = 20.04 \text{ MPa}$$

۱۷.۶۸

۲.۳۵۸



معرفه: ۸۸

حل تمرین «فصل ۵»

۷۸-۱۵) سیم پیچ شده در انتهای دانه در بطن ABDE مطابق شکل

اعمال می گردند. ضعیف ترین نقطه H در J مقطع مستطیلی را بنویسید

۲۰×۴۰ mm باشد. مطلوب است: تنش عمودی در نقاط (الف) H و (ب) J

$$M_y = 250(0.15) + 120(0.16) = 18.3 \text{ N.m}$$

$$M_z = 120(0.1) = 12 \text{ N.m}$$

$$P = 300 + 120 = 420 \text{ N} \quad V_x = 250 \text{ N}$$

$$I_y = \frac{1}{12} 20(40)^3 = 0.1067 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 0.1067 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} 40(20)^3 = 0.0267 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 0.0267 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$A = 20 \times 40 = 800 \text{ mm}^2 = 800 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

الف) تنش در نقطه H:

$$\sigma_H = -\frac{P}{A} + \frac{M_z c_z}{I_z} = -\frac{420}{800 \times 10^{-6}} + \frac{12(10 \times 10^{-3})}{0.0267 \times 10^{-6}} = 3.969 \text{ MPa}$$

$$\tau_H = \frac{VQ}{It} \quad Q = A' \bar{z}_1, \quad t = 20 \text{ mm}$$

$$A' = 20 \times 20 = 400 \text{ mm}^2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2, \quad \bar{z}_1 = 10 \text{ mm}$$

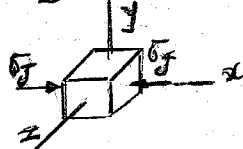
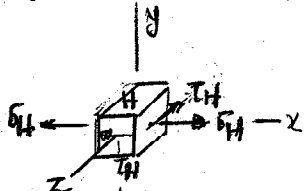
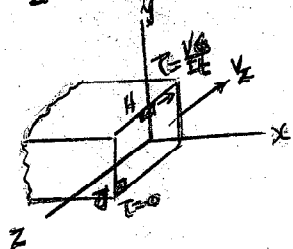
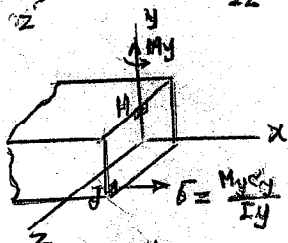
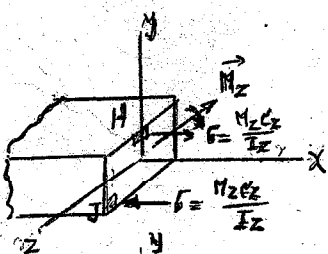
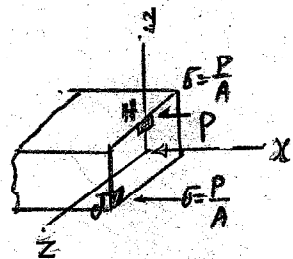
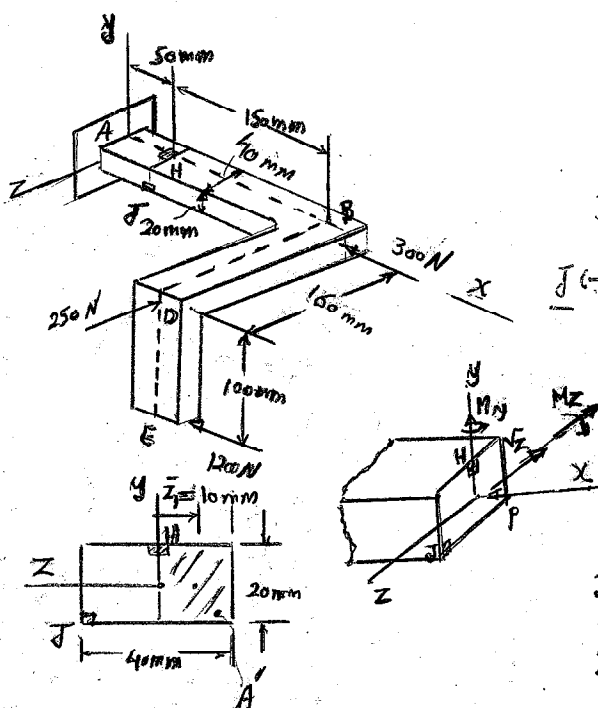
$$Q = (400 \times 10^{-6})(10 \times 10^{-3}) = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

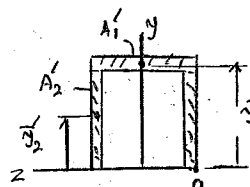
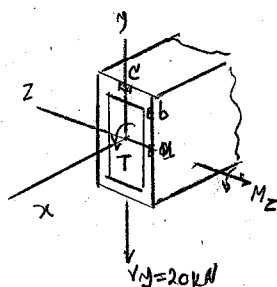
$$\tau_H = \frac{(250)(4 \times 10^{-6})}{(0.1067 \times 10^{-6})(20 \times 10^{-3})} = 0.469 \text{ MPa}$$

ب) تنش در نقطه J:

$$\sigma_J = -\frac{P}{A} + \frac{M_y c_y}{I_y} - \frac{M_z c_z}{I_z} = -\frac{420}{800 \times 10^{-6}} + \frac{18.3(20 \times 10^{-3})}{0.1067 \times 10^{-6}} - \frac{12(10 \times 10^{-3})}{0.0267 \times 10^{-6}} = -1.589 \text{ MPa}$$

$$\tau_J = 0$$





$$V_T = 20 \text{ kN} \quad t_a = 6 \text{ mm}$$

$$A'_1 = 50 \times 6 = 300 \text{ mm}^2 \quad \checkmark \quad y_1 = 50 - \frac{6}{2} = 47 \text{ mm}$$

$$A_2' = (50-6)(6) = 264 \text{ mm}^2 \quad \frac{y'}{2} = \frac{50-6}{2} = 22 \text{ mm}$$

$$Q_u = 25.716 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I = \frac{1}{12} (50)(100)^3 - \frac{1}{12} (50-12)(100-12)^3 = 2.0087 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$T = 20 \times 10^3 [(80 + 25) \times 10^{-3}] = 2100 \text{ N.m}$$

$$Q = (100 - 6)(50 - 6) = 4136 \text{ mm}^2$$

$$\tau_a = -\frac{(20 \times 10^3)(25.716 \times 10^6)}{2(2.0087 \times 10^6)(6 \times 10^3)} + \frac{2100}{216 \times 10^3(4136 \times 10^6)}$$

$$\tau_a = -21.3274 \times 10^6 + 42.311 \times 10^6 = 20.977 \text{ MPa}$$

$$\tau_b = \frac{-V_y Q_b}{2 I t_b} + \frac{T}{2 t_b Q}$$

$$Q_b = A'_1 \bar{y}'_1 = (50 \times 6)(47) = 14.1 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\tau_b = -\frac{(20 \times 10^3)(14 \times 10^{-6})}{2(20087 \times 10^{-6})(6 \times 10^{-3})} + \frac{2/00}{2(6 \times 10^{-3})(4136 \times 10^{-6})}$$

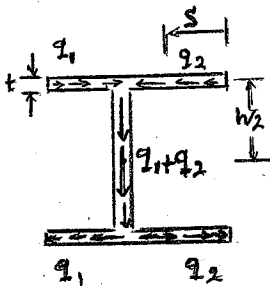
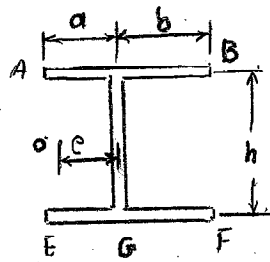
$$\tau_b = -11.699 \times 10^6 + 412.311 \times 10^6$$

$$\tau_b = 30.612 \text{ MPa}$$

$$\tau_c = \frac{T}{2t_{bg}} = \frac{260}{2(6 \times 10^{-3})(4136 \times 10^6)} = 42.311 \text{ MPa}$$

تقریب «مقلد»

۹۸-۵) مطلوب است محل مرکز برش ۰ برای مقطع چهارضلعی با ضلع‌های موازی



$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$Q = st \cdot h/2$$

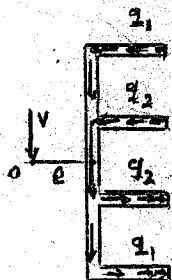
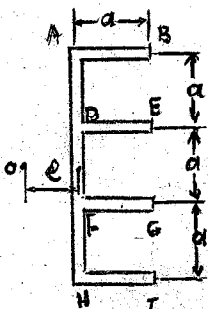
$$I = 2 \left\{ \frac{1}{12} (a+b)t^3 + (a+b)t \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{12} th^3$$

$$I = \frac{1}{2} (a+b)th^2 + \frac{1}{12} th^3$$

$$F = F_1 - F_2 = \int_0^b q ds - \int_0^a q ds = \int_a^b q ds$$

$$F = \int_a^b \frac{Vst}{2I} ds = \frac{Vth}{4I} (b^2 - a^2)$$

$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{th^2(b^2 - a^2)}{2(a+b)th^2 + \frac{1}{3}th^3} = \frac{3(b^2 - a^2)}{6(a+b) + h}$$



$$Q_1 = st \left(\frac{3a}{2} \right)$$

$$q_1 = \frac{VQ_1}{I} = \frac{3Vsta}{2I}$$

(۱۰۰-۵)

$$Q_2 = st \left(\frac{a}{2} \right)$$

$$q_2 = \frac{VQ_2}{I} = \frac{Vsta}{2I}$$

$$I = 2 \left\{ \frac{1}{12} at^3 + at \left(\frac{3a}{2} \right)^2 \right\} + 2 \left\{ \frac{1}{12} t^3 + t \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{12} t(3a)^3$$

$$I = \frac{29ta^3}{4}$$

$$F_1(3a) + F_2(a) = Ve \rightarrow e = \frac{F_1(3a) + F_2(a)}{V}$$

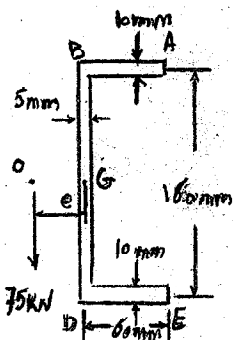
$$F_1 = \int_0^a q_1 ds = \int_0^a \frac{3Vsta}{2I} ds = \frac{3Vta^3}{4I}$$

$$F_2 = \int_0^a q_2 ds = \int_0^a \frac{Vsta}{2I} ds = \frac{Vta^3}{4I}$$

$$\rightarrow e = \frac{10a}{29}$$

۱۰۲-۵) بزرگ مقطع فولاد دارنده سه مطالبات الف) برش در مرکز برش ۰

ب) تقریب برش ۰ بزرگ مقطع فولاد ۷۵ KN



$$Q = st \left(\frac{h}{2} \right)$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vsth}{2I}$$

(الف)

$$I = 2 \left\{ \frac{1}{12} bt^3 + bt \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{12} t'h^3 = \frac{bth^2}{2} + \frac{1}{12} t'h^3$$

$$Fh = Ve \rightarrow e = \frac{Fh}{V}$$

$$F = \int_0^b q ds = \int_0^b \frac{Vsth}{2I} ds = \frac{Vth}{2I} \int_0^b s ds = \frac{Vth}{4I} b^2$$

$$e = \frac{th^2}{4 \left(\frac{bth^2}{2} + \frac{1}{12} t'h^3 \right)} = \frac{3bth^2}{6bth^2 + t'h^3}$$

«مترین مقل»

$$e = \frac{3(10)(60)^2(160)^2}{6(60)(10)(160)^2 + (5)(160)^3} = 24.55 \text{ mm}$$

انبار شده ۲۰۲۵

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{Vh}{2I} s$$

درست با هم

$$Q = b\left(\frac{h}{2}\right) + st'\left(\frac{h}{2} - \frac{s}{2}\right) = \frac{bht}{2} + \frac{t'h}{2}s - \frac{t's^2}{2}$$

درست با هم

$$q = \frac{VQ}{I}, \quad \tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau = \frac{V}{It'} \left(-\frac{t'}{2}s^2 + \frac{t'h}{2}s + \frac{bht}{2} \right)$$

با هم

در بالا: $\tau = \frac{Vh}{2I} s, \quad V = 75 \text{ kN}, \quad h = 160 \text{ mm}$

$$I = \frac{b+h^2}{2} + \frac{1}{12} t'h^3 = \frac{(60)(10)(160)^2}{2} + \frac{1}{12} (5)(160)^3 = 9.387 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 9.387 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

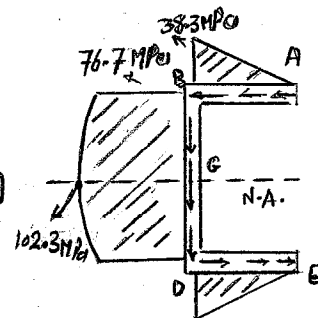
$$\tau = \frac{(75 \times 10^3)(160 \times 10^{-3})}{2(9.387 \times 10^{-6})} s = 639.2 \times 10^6 s$$

$$\tau_B = 639.2 \times 10^6 (60 \times 10^{-3}) = 38.352 \text{ MPa}$$

در بالا: $\tau = 639.2 \times 10^6 (-2.5 \times 10^{-3} s^2 + 4 \times 10^{-4} s + 4.8 \times 10^{-5})$

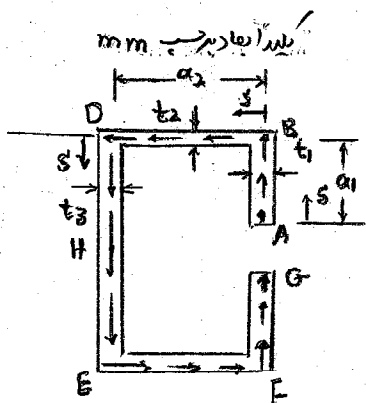
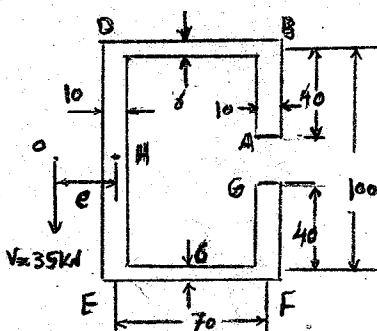
$$s_B = 0 \rightarrow \tau_B = 76.7 \text{ MPa}$$

در پایین: $s_G = 80 \text{ mm} \rightarrow \tau_G = 102.272 \text{ MPa}$



۱-۲ (۵-۱۰۴) برای سازه با مقطع دایره (در سه مطلب اول) و سازه مربعی (در مطلب دوم)

الف) - توزیع تنش برشی



$$Q_1 = (st_1) \frac{1}{2} (AG + s) \quad , \quad q_1 = \frac{VQ_1}{I} = \frac{Vt_1}{2I} (s^2 + AGs)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} a_1 t_1 (AG + a_1) + (st_2) \left(\frac{h}{2}\right)$$

$$q_2 = \frac{VQ_2}{I} = \frac{V}{2I} (ht_2 s + a_1^2 t_1 + a_1 AG t_1)$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} (ht_2 a_2 + a_1^2 t_1 + a_1 AG t_1) + st_3 \left(\frac{h}{2} - \frac{s}{2}\right)$$

$$Q_3 = -\frac{t_3}{2} s^2 + \frac{ht_3}{2} s + \frac{1}{2} (ht_2 a_2 + a_1^2 t_1 + a_1 AG t_1)$$

$$q_3 = \frac{VQ_3}{I}$$

$$I = \left\{ \frac{1}{12} t_1 a_1^3 + t_1 a_1 \left(\frac{AG}{2} + \frac{a_1}{2} \right)^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{12} a_2 t_2^3 + a_2 t_2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{12} t_3 h^3$$

« تمرین فصل ۵ »

$$F_1(a_2) + F_2 h = V e$$

(ارامه شکل ۵-۱۴)

$$F_1 = 2 \int_0^{a_1} q_1 ds = \frac{V t_1}{I} \int_0^{a_1} (s^2 + A \bar{G} s) ds = \frac{V t_1}{I} \left(\frac{a_1^3}{3} + \frac{A \bar{G}}{2} a_1^2 \right)$$

$$F_2 = \int_0^{a_2} q_2 ds = \frac{V}{2I} \int_0^{a_2} (h t_2 s + a_1^2 t_1 + a_1 A \bar{G} t_1) ds$$

$$= \frac{V}{2I} \left[\frac{h t_2}{2} a_2^2 + a_1^2 t_1 a_2 + a_1 A \bar{G} t_1 a_2 \right]$$

$$a_1 = 40 \text{ mm}, \quad a_2 = 70 \text{ mm}, \quad a_3 = 50 \text{ mm}, \quad h = 100 \text{ mm}$$

ایجاد می‌شود:

$$t_1 = 10 \text{ mm}, \quad t_2 = 6 \text{ mm}, \quad t_3 = 6 \text{ mm}, \quad V = 35 \text{ kN}$$

$$\rightarrow I = 3.7625 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad F_1 = 3.473 \text{ kN}, \quad F_2 = 14.661 \text{ kN}$$

$$\rightarrow e = 48.83 \text{ mm}$$

۱-

$$\tau_1 = q_1 / t_1 = \frac{V}{2I} (s^2 + A \bar{G} s)$$

$$\tau_2 = q_2 / t_2 = \frac{V}{2I} (h s + a_1^2 \frac{t_1}{t_2} + a_1 A \bar{G} \frac{t_1}{t_2})$$

$$\tau_3 = q_3 / t_3 = \frac{V}{2I} \left[-s^2 + h s + \left(h \frac{t_2}{t_3} a_2 + a_1^2 \frac{t_1}{t_3} + a_1 A \bar{G} \frac{t_1}{t_3} \right) \right]$$

توانستیم:

نقطه B: $\tau_B = \frac{V}{2I} (a_1^2 + A \bar{G} a_1) = \frac{35 \times 10^3}{2(3.76 \times 10^{-6})} [(40 \times 10^{-3})^2 + (20 \times 10^{-3})(40 \times 10^{-3})]$

$$\tau_B = 11.163 \text{ MPa}$$

نقطه D: $\tau_D = \frac{V}{2I} (h a_2 + a_1^2 \frac{t_1}{t_2} + a_1 A \bar{G} \frac{t_1}{t_2})$

با یک بار:

$$\tau_D = 51.2 \text{ MPa}$$

نقطه B: $\tau_B = \frac{V}{2I} (a_1^2 \frac{t_1}{t_3} + a_1 A \bar{G} \frac{t_1}{t_3})$

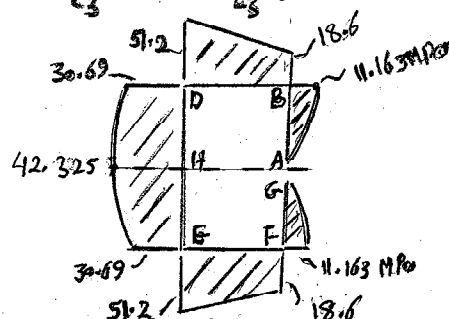
$$\tau_B = 18.6 \text{ MPa}$$

در آن است:

نقطه D: $\tau_D = \frac{V}{2I} \left[\frac{1}{2} (h \frac{t_2}{t_3} a_2 + a_1^2 \frac{t_1}{t_3} + a_1 A \bar{G} \frac{t_1}{t_3}) \right] = 30.69 \text{ MPa}$

نقطه H: $\tau_H = \frac{V}{2I} \left[-\frac{1}{2} a_3^2 + \frac{h}{2} a_3 + \frac{1}{2} (h \frac{t_2}{t_3} a_2 + a_1^2 \frac{t_1}{t_3} + a_1 A \bar{G} \frac{t_1}{t_3}) \right]$

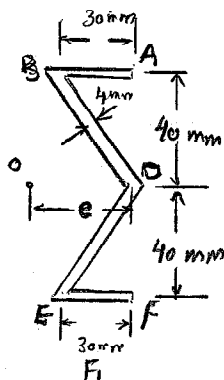
$$\tau_H = 42.325 \text{ MPa}$$



معماری: ۹۴۵

«متمرکز ثقل»

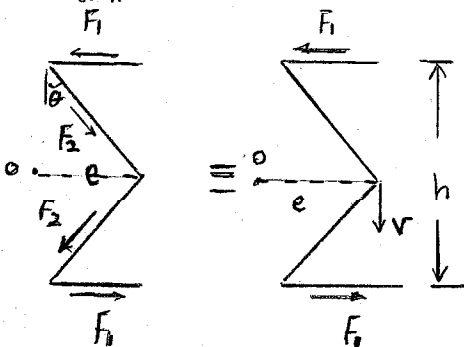
(۱۵-۱۵۴) شرط مرکز ثقل بر روی محور زنگ است.



$$Q_1 = \frac{ths}{2} \quad Q_2 = \frac{\sqrt{th}s}{2I}$$

$$F_1 = \int_0^a \frac{\sqrt{th}}{2I} s ds = \frac{\sqrt{th}}{4I} a^2$$

$$F_1 h = v e \rightarrow e = \frac{F_1 h}{v} = \frac{th^2 a^2}{4I}$$

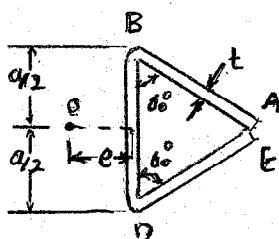


$$I = 2 \left\{ \frac{1}{12} a t^3 + a t \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right\} + 2 \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{t}{\cos \theta} \right) \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right\}$$

$$\tan \theta = \frac{30}{40} \rightarrow \theta = 36.87^\circ$$

$$\rightarrow I = 597.333 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$e = \frac{4(80)^2(30)^2}{4(597.333 \times 10^3)} = 9.64 \text{ mm}$$



$$Q_1 = st \left(\frac{5s \sin 30^\circ}{2} \right) = \frac{1}{4} t s^2$$

(۱۵-۱۱۰)

$$Q_1 = \frac{v t}{4I} s^2 \rightarrow F_1 = \frac{v t}{12I} a^3$$

$$I = 2 \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{t}{\cos 60^\circ} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^3 \right\} + \frac{1}{12} t a^3 = \frac{1}{4} t a^3$$

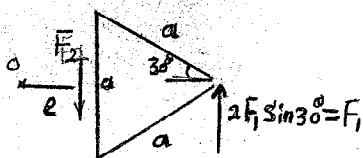
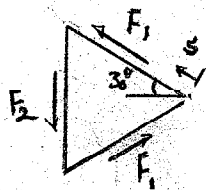
$$\Sigma M_0 = 0$$

$$F_1 (a \cos 30^\circ + e) = F_2 e$$

$$F_1 a \cos 30^\circ = (F_2 - F_1) e$$

$$F_2 - F_1 = v$$

$$e = \frac{F_1 a \cos 30^\circ}{v} = \frac{t a^3 (a \cos 30^\circ)}{12 \left(\frac{1}{4} t a^3 \right)} = \frac{\cos 30^\circ}{3} a = 0.289 a$$



$$Q = \int y dA, \quad y = a \cos \theta, \quad dA = (a d\theta) t \quad (۱۵-۱۱۱)$$

$$Q = \int_0^\theta a^2 t \cos \theta d\theta = a^2 t \sin \theta$$

$$\tau = \frac{v Q}{I t} = \frac{v}{I} a^2 t \sin \theta$$

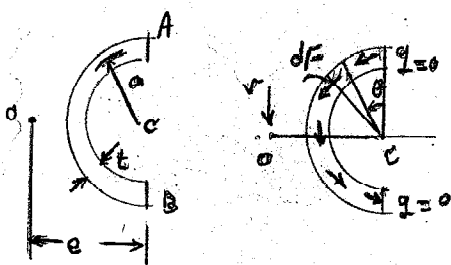
$$dF = \tau dA = \frac{v}{I} a^3 t \sin \theta d\theta$$

$$\Sigma M_c = \int_0^\pi dF a = v e \quad \int_0^\pi \frac{a^4 t}{I} \sin \theta d\theta = e$$

$$e = \frac{-a^4 t}{I} \cos \theta \Big|_0^\pi = \frac{2a^4 t}{I}$$

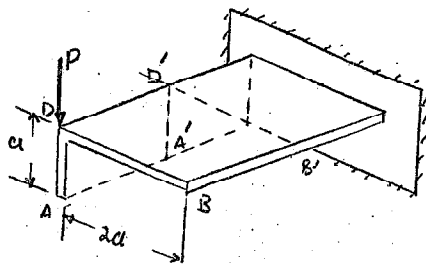
$$I = \frac{1}{8} \pi [(a + \frac{t}{2})^4 - (a - \frac{t}{2})^4] = \frac{\pi a^3 t}{2}$$

$$\rightarrow e = \frac{4a}{\pi}$$



«مقاومت مصالح»

(حل تمرین فصل ۵)



۱۲۸- مطابق توزیع تنش برشی در طول خط $D'B'$ روی باریک است
 که از آنجا که در هر یک از این دو طرفه، ضخامت مقطع یکسان است

$$A\bar{x} = \sum A_i \bar{x}_i$$

تعیین محل مرکز سطح:

$$A = at + 2at = 3at \quad A_1 = at \quad A_2 = 2at$$

$$\bar{x}_1 = a/2, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \bar{y}_1 = 0, \quad \bar{y}_2 = a$$

$$3at\bar{x} = (at)(a/2) \rightarrow \bar{x} = \frac{a}{6}$$

$$A\bar{y} = \sum A_i \bar{y}_i$$

$$(3at)\bar{y} = (2at)(a) \rightarrow \bar{y} = \frac{2a}{3}$$

$$I_x = \frac{1}{3} (t)(2a)^3 + \frac{1}{12} a(t)^3 = \frac{8ta^3}{3}$$

تعیین شیب مرکز سطح:

$$I_y = \frac{1}{3} ta^3 + \frac{1}{12} (2a)t^3 = \frac{ta^3}{3}$$

$$I_x = I_{x'} + A d_x^2 \quad d_x = \bar{y} = \frac{2a}{3}$$

$$I_{x'} = \frac{8ta^3}{3} - (3at) \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{4a^3t}{3}$$

$$I_y = I_{y'} + A d_y^2 \quad d_y = \bar{x} = \frac{a}{6}$$

$$I_{y'} = \frac{ta^3}{3} - (3at) \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{ta^3}{4}$$

تعیین شیب مرکز سطح:

تعیین حاصل جمع برابری:

$$I_{xy} = (I_{xy})_1 + (I_{xy})_2$$

روش اول:

$$(I_{xy})_1 = 0$$

$$(I_{xy})_2 = 0$$

بدلیل تقارن حول مرکز سطح

$$\rightarrow I_{xy} = 0$$

$$I_{x'y'} = I_{x'y} + A d_x d_y$$

تبدیل مختصات مرکز سطح:

$$I_{x'y'} = -A d_x d_y = -(3at) \left(-\frac{2a}{3}\right) \left(-\frac{a}{6}\right) = -\frac{a^3t}{3}$$

$$(I_{x'y'})_1 = 0$$

$$(I_{x'y'})_2 = 0$$

یا: (روش دوم)

$$(I_{x'y'})_1 = (I_{x'y})_1 + A_1 d_{x1} d_{y1}$$

$$A_1 = at \quad d_{x1} = \frac{2a}{3} \quad d_{y1} = \frac{a}{2} - \frac{a}{6}$$

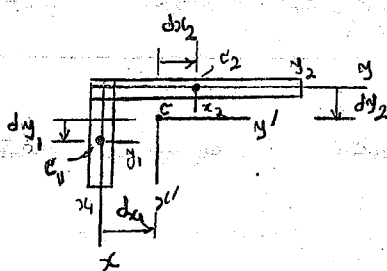
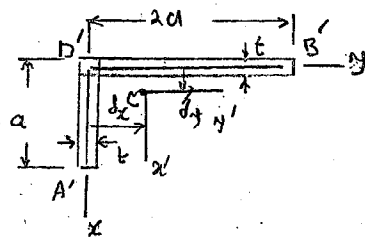
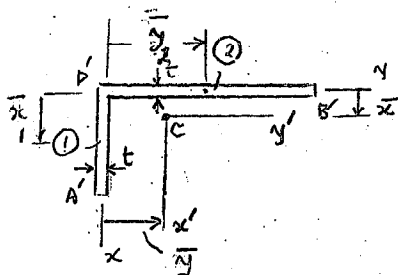
$$(I_{x'y'})_1 = (at) \left(-\frac{2a}{3}\right) \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\right) = -\frac{4a^3t}{18}$$

$$(I_{x'y'})_2 = (I_{x'y})_2 + A_2 d_{x2} d_{y2}$$

$$A_2 = 2at \quad d_{x2} = a - \frac{2a}{3} \quad d_{y2} = -\frac{a}{6}$$

$$(I_{x'y'})_2 = (2at) \left(a - \frac{2a}{3}\right) \left(-\frac{a}{6}\right) = -\frac{a^3t}{9}$$

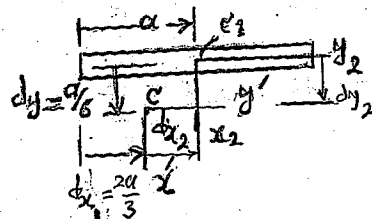
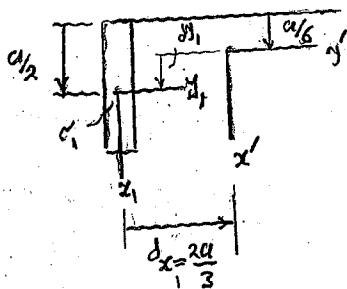
$$I_{x'y'} = (I_{x'y'})_1 + (I_{x'y'})_2 = -\frac{a^3t}{3}$$



(شکل مربوط به تمرین ۱۲۸)

صفحه: ۹۱۳

* روش همگونی



$$I_{x_1} = \frac{1}{12} a t^3$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{12} t a^3$$

$$I_{x'_1} = I_{x_1} + A_1 d_{x_1}^2 = \frac{1}{12} a t^3 + a t \left(\frac{2a}{3} \right)^2 = \frac{4a^3 t}{9}$$

$$I_{y'_1} = I_{y_1} + A_1 \left(\frac{a}{2} - d_{y_1} \right)^2 = \frac{1}{12} t a^3 + a t \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{6} \right)^2 = \frac{7a^3 t}{36}$$

$$I_{x_2} = \frac{1}{12} t (2a)^3$$

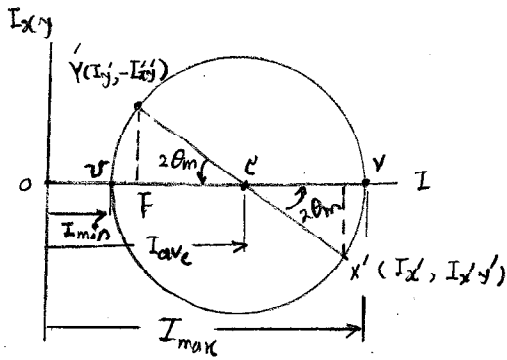
$$I_{y_2} = \frac{1}{12} (2a) t^3 = 0$$

$$I_{x'_2} = I_{x_2} + A_2 \left(\frac{a}{2} - d_{x_2} \right)^2 = \frac{8}{12} t a^3 + (2at) \left(a - \frac{2a}{3} \right)^2 = \frac{8}{9} t a^3$$

$$I_{y'_2} = I_{y_2} + A_2 d_{y_2}^2 = (2at) \left(\frac{a}{6} \right)^2 = \frac{a^3 t}{18}$$

$$I_{x'} = I_{x'_1} + I_{x'_2} = \left(\frac{4}{9} + \frac{8}{9} \right) a^3 t = \frac{4a^3 t}{3}$$

$$I_{y'} = I_{y'_1} + I_{y'_2} = \left(\frac{7}{36} + \frac{1}{18} \right) a^3 t = \frac{a^3 t}{4}$$



(حل تمرین فصل ۵)

از این حل مسئله (۵-۱۸) تعیین کرده‌ایم:

$$c\bar{F} = o\bar{r} - o\bar{F} \quad o\bar{C} = I_{ave} = \frac{I_{x'} + I_{y'}}{2} = \frac{19}{24} ta^3$$

$$o\bar{F} = I_{y'} = \frac{ta^3}{4} \rightarrow c\bar{F} = \frac{13}{24} ta^3$$

$$\bar{F}Y' = -I_{x'y'} = \frac{a^3 t}{3}$$

$$\tan 2\theta_m = \frac{\bar{F}Y'}{c\bar{F}} \Rightarrow \theta_m = 15.8^\circ$$

$$R = \sqrt{c\bar{F}^2 + \bar{F}Y'^2} = 0.636 ta^3$$

$$I_u = I_{min} = I_{ave} - R = 0.15565 ta^3$$

$$I_v = I_{max} = I_{ave} + R = 1.42768 ta^3$$

تعیین در استاد: $\delta B'$

برای موقعیت نقطه δ در دستگاه مختصات اصلی uv داریم:

$$u_{\delta'} = \left(\frac{2}{3}a - \frac{a}{6} \tan \theta_m \right) \cos \theta_m = -0.5961 a$$

$$v_{\delta'} = \left(-\frac{a}{6} + \frac{2}{3}a \tan \theta_m \right) \cos \theta_m = -0.3419 a$$

جزء عمودی P در راستای محورهای اصلی:

$$V_u = P \sin \theta_m = 0.272 P$$

$$V_v = P \cos \theta_m = 0.962 P$$

تأثیر V_u در شش برشی استل $\delta B'$:

$$\tau_1 = \frac{V_u Q_1}{I_u t}$$

$$Q_1 = A' \bar{u}' \quad \bar{u}' = \bar{y}' \cos \theta_m - 0.5961 a$$

$$\bar{y}' = \frac{2a+y}{2}$$

$$A' = (2a-y)t \quad \text{مساحت برش}$$

$$Q_1 = (2a-y)t \left[\left(\frac{2a+y}{2} \right) 0.962 - 0.5961 a \right]$$

$$Q_1 = (-0.481 y^2 + 0.596 a y + 0.732 a^2) t$$

$$\tau_1 = \frac{0.272 P}{1.42768 a^3 t^2} (-0.481 y^2 + 0.596 a y + 0.732 a^2) t$$

$$\tau_1 = \frac{P}{a^3 t} (-0.0917 y^2 + 0.1136 a y + 0.1394 a^2)$$

تأثیر V_v در شش برشی استل $\delta B'$:

$$\tau_2 = \frac{V_v Q_2}{I_v t}$$

$$Q_2 = A' \bar{v}'$$

$$\bar{v}' = \bar{y}' \sin \theta_m - 0.3419 a$$

$$\tau_2 = \frac{P}{ta^3} (-0.84 y^2 + 2.113 a y - 0.859 a^2)$$

$$\tau = \tau_1 - \tau_2$$

اصل جمع اثرها:

$$\tau = \frac{P}{ta^3} (+0.75 y^2 - 2 a y + a^2)$$

