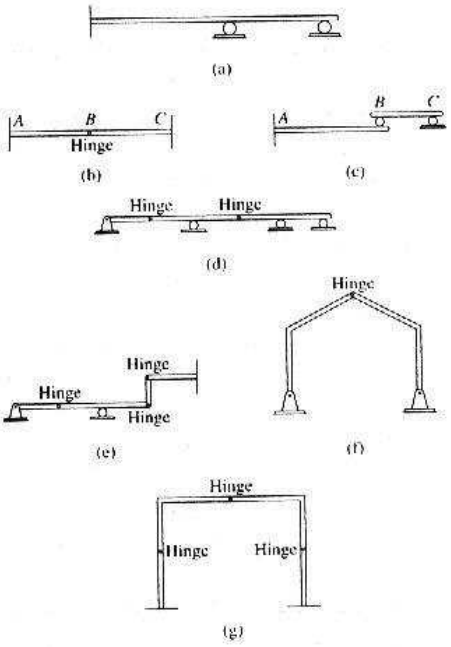
۱-۱ هر یک از سازه‌های نشان داده شده در شکل زیر را تحت عنوان، ناپایدار، معین استاتیکی و نامعین استاتیکی دسته‌بندی کنید. اگر سازه نامعین استاتیکی است، درجهٔ نامعینی آن را تعیین کنید.



شکل ۱-۱

(a) تیر پایدار داخلی است. سازه نامعین استاتیکی است $\Rightarrow$ $r=5>3$

$i_e=r-3=5-3=2$ (درجهٔ نامعینی خارجی)

(b) تیر ناپایدار داخلی است.

$f_i=2$ یا 1 $\Rightarrow$ چون یک مفصل داخلی وجود دارد ، $r=6$

روش اول: سازه نامعین استاتیکی است $\Rightarrow$ $r>3+e_c$

$i_e=r-(3+e_c)=6-(3+1)=2$ (درجهٔ نامعینی خارجی)

روش دوم: سازه نامعین استاتیکی است $\Rightarrow$ $r+f_i>3n_r$ ، $n_r=2$

$i_e=r+f_i-3n_r=6+2-3(2)=2$ (درجهٔ نامعینی خارجی)

(c) سازه ناپایدار داخلی است.

$f_i=1$ ، $e_c=2$ $\Rightarrow$ چون یک غلتک داخلی وجود دارد ، $r=4$

روش اول: سازه ناپایدار استاتیکی است. $\Rightarrow$ $r<3+e_c$

روش دوم: سازه ناپایدار استاتیکی است. $\Rightarrow$ $r+f_i<3n_r$ ، $n_r=2$

(d) تیر ناپایدار داخلی است.

$f_i=2+2=4$ ، $e_c=2$ $\Rightarrow$ چون دو مفصل داخلی وجود دارد ، $r=5$

روش اول: تیر معین استاتیکی است. $\Rightarrow$ $r=3+e_c$

روش دوم: سازه معین استاتیکی است. $\Rightarrow$ $r+f_i=3n_r$ ، $n_r=3$

(e) سازه ناپایدار داخلی است.

چون یک مفصلی داخلی و یک اتصال سادهٔ خرپایی وجود دارد ، $r=6$

$f_i=2+2+2=6$ ، $e_c=3$

روش اول: سازه معین استاتیکی است $\Rightarrow$ $r=3+e_c$

روش دوم: سازه معین استاتیکی است $\Rightarrow$ $r+f_i=3n_r$ ، $n_r=4$

(f) سازه ناپایدار داخلی است. $f_i=2$ ، $e_c=1$ $\Rightarrow$ چون یک مفصل داخلی وجود دارد ، $r=4$

روش اول: سازه معین استاتیکی است $\Rightarrow$ $r=3+e_c$

روش دوم: سازه معین استاتیکی است $\Rightarrow$ $r+f_i=3n_r$ ، $n_r=2$

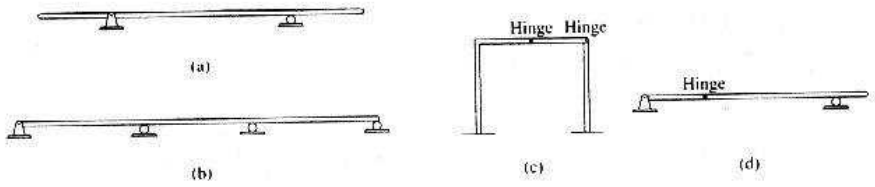
(g) سازه ناپایدار داخلی است. $f_i=2+2+2=6$ ، $e_c=3$ $\Rightarrow$ چون سه مفصل داخلی وجود دارد ، $r=6$

روش اول: سازه معین استاتیکی است $\Rightarrow$ $r=3+e_c$

روش دوم: سازه معین استاتیکی است $\Rightarrow$ $r+f_i=3n_r$ ، $n_r=4$

سازه‌های نشان داده شده در مسایل زیر را تحت عنوان، ناپایدار خارجی، معین استاتیکی خارجی و نامعین استاتیکی خارجی دسته‌بندی کنید. اگر سازه نامعین استاتیکی خارجی است، درجهٔ نامعینی خارجی آن را تعیین کنید.

۲-۱



شکل ۱-۲

Prepared Pdf By Rester

(a) تیر پایدار داخلی است.

$r=۳$ ⇒ سازه معین استاتیکی خارجی است

(b) تیر پایدار داخلی است.

$i_e=r-۳=۵-۳=۲$ (درجهٔ نامعینی خارجی) ، $r=۵>۳$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است

(c) سازه ناپایدار داخلی است.

$e_c=۲$, $f_i=۲+۲=۴$ ⇒ چون دو مفصل داخلی وجود دارد ، $r=۶$

روش اول:

$i_e=r-(۳+e_c)=۶-(۳+۲)=۱$ (درجهٔ نامعینی خارجی) ، $r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است

روش دوم:

$i_e=r+f_i-۳n_r=۶+۴-۳(۳)=۱$ (درجهٔ نامعینی خارجی) ، $n_r=۳$, $r+f_i>۳n_r$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است

(d) سازه ناپایدار داخلی است.

$e_c=۱$, $f_i=۲$ ⇒ چون یک مفصل داخلی وجود دارد ، $r=۳$

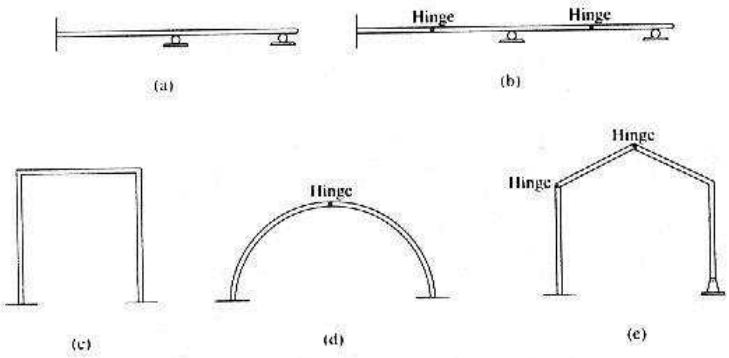
روش اول:

$r<۳+e_c$ ⇒ سازه ناپایدار استاتیکی است

روش دوم:

$n_r=۲$, $r+f_i<۳n_r$ ⇒ سازه ناپایدار استاتیکی است

۳-۱



شکل ۱-۳

(a) تیر پایدار داخلی است.

$r=۵>۳$ ⇒

سازه نامعین استاتیکی است.

درجهٔ نامعینی خارجی:

$i_e=r-۳=۵-۳=۲$

(b) تیر ناپایدار داخلی است. $r=۵$

چون دو مفصل داخلی دارد.

$e_c=۲$, $f_i=۲+۲=۴$

روش اول:

$r=۳+e_c$ ⇒

سازه معین استاتیکی است

روش دوم:

$n_r=۳$, $r+f_i=۳n_r$ ⇒ سازه معین استاتیکی است.

(c) سازه پایدار داخلی است.

$i_e=r-۳=۶-۳=۳$ (درجهٔ نامعینی خارجی) ، $r=۶>۳$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است

(d) سازه ناپایدار داخلی است.

$e_c=۱$, $f_i=۲$ ⇒ چون یک مفصل داخلی وجود دارد ، $r=۶$

روش اول:

$i_e=r-(۳+e_c)=۶-(۳+۱)=۲$ (درجهٔ نامعینی خارجی) ، $r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است

روش دوم:

$i_e=r+f_i-۳n_r=۶+۲-۳(۲)=۲$ درجهٔ نامعینی خارجی) ، $n_r=۲$, $r+f_i>۳n_r$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است

(e) سازه ناپایدار داخلی است.

$e_c=۲$, $f_i=۲+۲=۴$ ⇒ چون دو مفصل داخلی وجود دارد ، $r=۵$

روش اول:

$r=۳+e_c$ ⇒ سازه معین استاتیکی است

روش دوم:

$n_r=۳$, $r+f_i=۳n_r$ ⇒ سازه معین استاتیکی است

۴-۱

(a) تیر ناپایدار داخلی است.

$r=۵$

$e_c=۳$, $f_i=۲+۲+۲=۶$ ⇒ چون سه مفصل داخلی وجود دارد.

روش اول:

$r<۳+e_c$ ⇒ سازه ناپایدار استاتیکی است

روش دوم:

$n_r=۴$, $r+f_i<۳n_r$ ⇒ سازه ناپایدار استاتیکی است

(b) تیر ناپایدار داخلی است.

$r=۴$

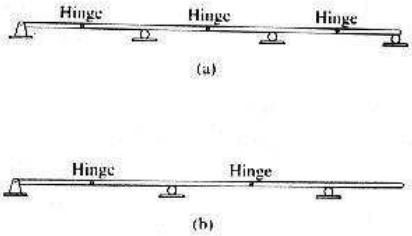
$e_c=۲$, $f_i=۲+۲=۴$ ⇒ چون دو مفصل داخلی وجود دارد.

روش اول:

$r<۳+e_c$ ⇒ سازه ناپایدار استاتیکی است

روش دوم:

$n_r=۳$, $r+f_i<۳n_r$ ⇒ سازه ناپایدار استاتیکی است



(c) سازه پایدار داخلی است.

سازه نامعین استاتیکی است $\Rightarrow$ $r = ۴ > ۳$

$i_e = r - ۳ = ۴ - ۳ = ۱$ (درجهٔ نامعینی خارجی)

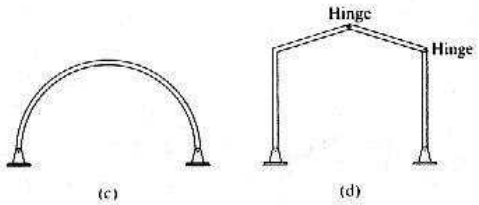
(d) سازه ناپایدار داخلی است.

$r = ۴$

$f_i = ۲ + ۲ = ۴$, $e_c = ۲$ $\Rightarrow$ چون دو مفصل داخلی وجود دارد

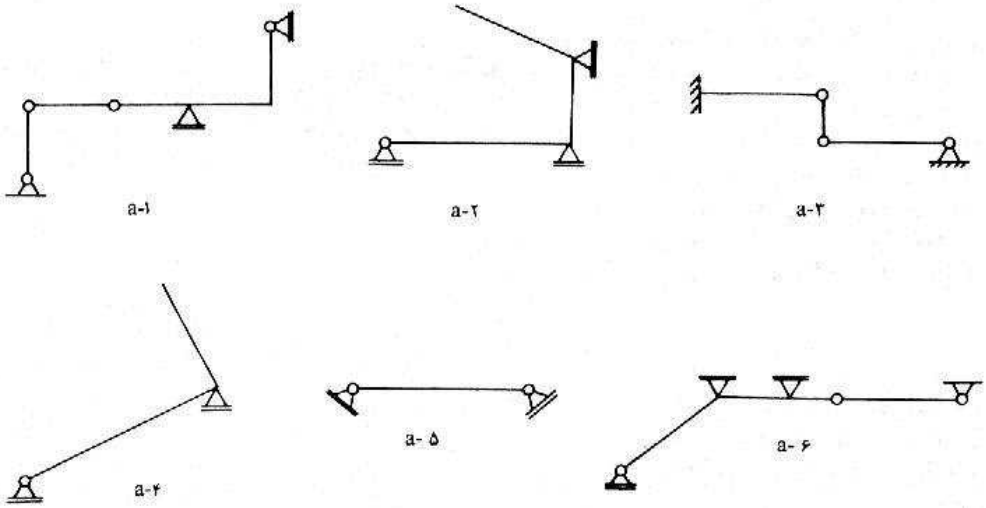
روش اول: سازه ناپایدار استاتیکی است $\Rightarrow$ $r < ۳ + e_c$

روش دوم: سازه ناپایدار استاتیکی است $\Rightarrow$ $r + f_i < ۳n_r$, $n_r = ۳$

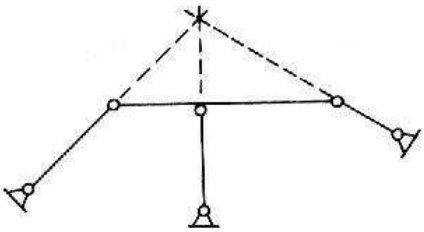


شکل ۱-۴

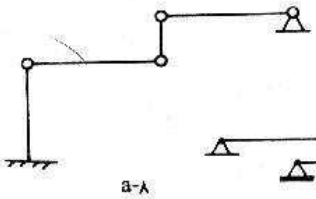
۱-۵ هر یک از سازه‌های نشان داده شده در اشکال زیر را تحت عنوان پایدار، ناپایدار، معین و یا نامعین استاتیکی دسته‌بندی کنید. در صورت ناپایدار بودن علت ناپایداری را تشریح کرده و در صورت نامعین بودن درجهٔ نامعینی آن را تعیین کنید.



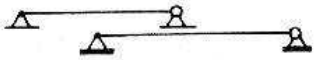
شکل ۱-۵



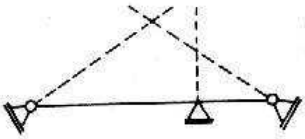
a- ۷



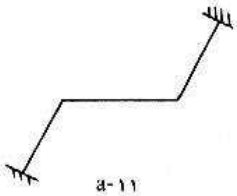
a-۸



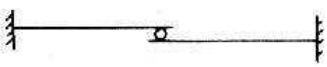
a-۹



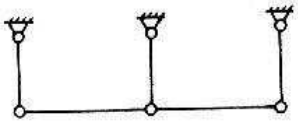
a-۱۰



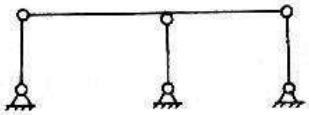
a-۱۱



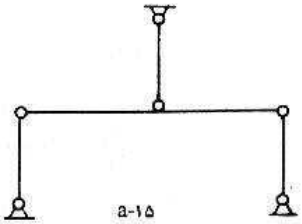
a-۱۲



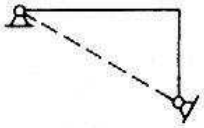
a-۱۳



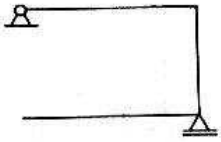
a-۱۴



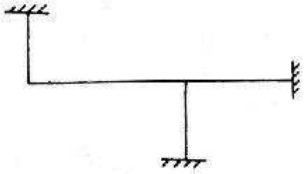
a-۱۵



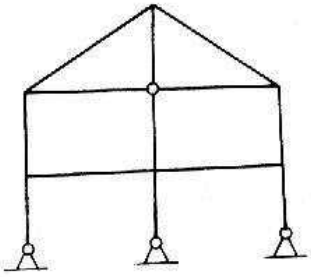
a-۱۶



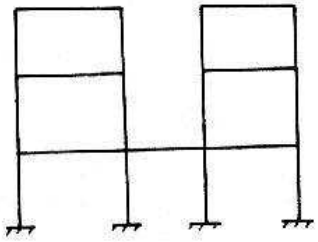
a-۱۷



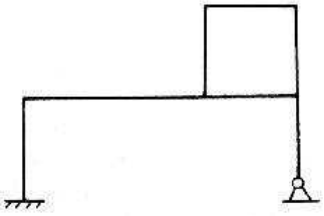
a-۱۸



a-۱۹

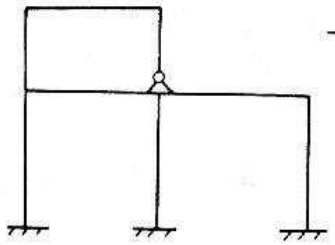


a-۲۰

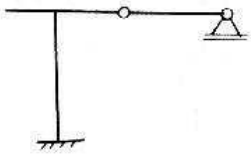


a-۲۱

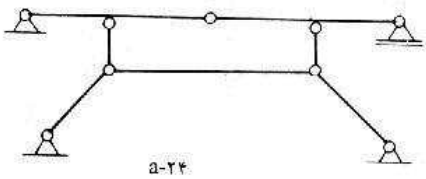
ادامهٔ شکل ۱-۵



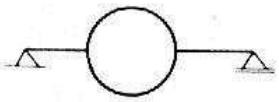
a-۲۲



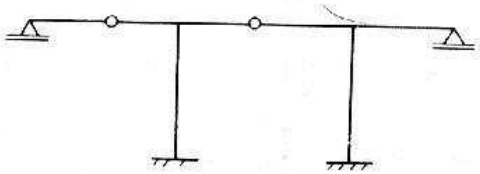
a-۲۳



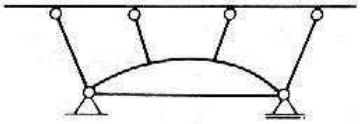
a-۲۴



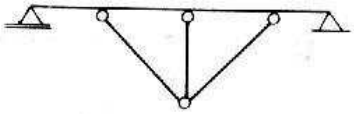
a-۲۵



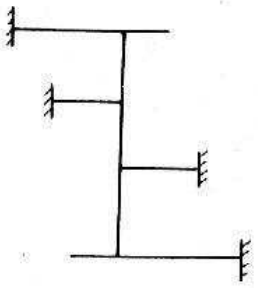
a-۲۶



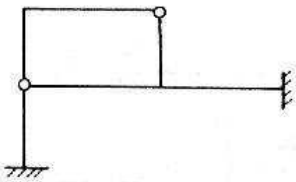
a-۲۷



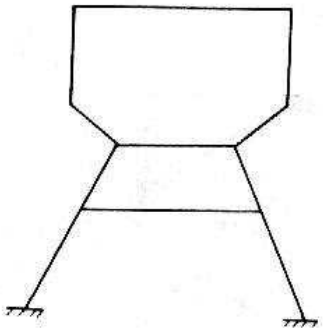
a-۲۸



a-۲۹



a-۳۰



a-۳۱

ادامهٔ شکل ۱-۵

(a-۱) سازه ناپایدار داخلی است.

$r=۴$ ، چون دو مفصل داخلی وجود دارد ⇒ $e_c=۲$ ، $۳+e_c=۵$

$r<۳+e_c$ ⇒ سازه ناپایدار استاتیکی است

(a-۲) سازه پایدار داخلی است

$r=۳$ ⇒ سازه معین استاتیکی است

(a-۳) سازه ناپایدار داخلی است.

$r=۵$ ، چون دو مفصل داخلی وجود دارد ⇒ $e_c=۲$ ، $۳+e_c=۵$

$r=۳+e_c$ ⇒ سازه معین استاتیکی است

(a-۴) سازه پایدار داخلی است.

(a-۵) سازه پایدار داخلی است.

(a-۶) سازه ناپایدار داخلی است. $r=۵$ ، $۳+e_c=۴$ ، $e_c=۱$ ⇒ چون یک مفصل داخلی وجود دارد ، $r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است ، $i_e=r-(۳+e_c)=۵-(۳+۱)=۱$

(a-۷) سازه ناپایدار هندسی است. چون واکنشهای تکیه‌گاهی متقاربند. $r=۶$ ، $e_c=۱+۱+۱=۳$ ⇒ $r=۳+e_c$

(a-۸) سازه ناپایدار داخلی است. $r=۵$ ، $۳+e_c=۶$ ، $e_c=۳$ ⇒ چون سه مفصل داخلی وجود دارد ، $r<۳+e_c$ ⇒ سازه ناپایدار استاتیکی است

(a-۹) سازه ناپایدار داخلی است. $r=۴$ ، $۳+e_c=۵$ ، $e_c=۲$ ⇒ چون غلتک داخلی وجود دارد ، $r<۳+e_c$ ⇒ سازه ناپایدار استاتیکی است

(a-۱۰) سازه پایدار داخلی است. $r=۳$ ⇒ سازه معین استاتیکی است

(a-۱۱) سازه پایدار داخلی است. $r=۶>۳$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است

(a-۱۲) سازه ناپایدار داخلی است. $r=۶$ ، $۳+e_c=۵$ ، $e_c=۲$ ⇒ چون یک غلتک داخلی وجود دارد ، $r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است ، $i_e=r-(۳+e_c)=۶-(۳+۲)=۱$

(a-۱۳) سازه ناپایدار داخلی است. $r=۶$ ، $۳+e_c=۷$ ، $e_c=۱+۲+۱=۴$ ⇒ چون سه مفصل داخلی وجود دارد ، $r<۳+e_c$ ⇒ سازه ناپایدار استاتیکی است

(a-۱۴) سازه ناپایدار هندسی است. چون مؤلفه‌های واکنشهای تکیه‌گاهی موازی یکدیگرند. $r=۶$ ، $e_c=۱+۱+۱=۳$ ⇒ $r=۳+e_c$

(a-۱۵) سازه ناپایدار هندسی است. چون مؤلفه‌های واکنشهای تکیه‌گاهی موازی یکدیگرند. $r=۶$ ، $e_c=۱+۱+۱=۳$ ⇒ $r=۳+e_c$

(a-۱۶) سازه پایدار داخلی است. $r=۴>۳$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است ، $i_e=r-۳=۴-۳=۱$

(a-۱۷) سازه پایدار داخلی است. $r=۳$ ⇒ سازه معین استاتیکی است

(a-۱۸) سازه پایدار داخلی است. $r=۹>۳$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است ، $i_e=r-۳=۹-۳=۶$

(a-۱۹) سازه مسدود است. $۳n_l+r=۱۸$ ، $n_l=۴$ ، $۳+e_c=۶$ ، $e_c=۳$ ⇒ چون یک مفصل داخلی وجود دارد ، $r=۶$ ، $۳n_l+r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین خارجی و نامعین داخلی است ، $i_e=r-۳=۶-۳=۳$ ، $i_i=۳n_l-e_c=۳(۴)-۳=۹$

(a-۲۰) سازه مسدود است. $۳n_l+r=۲۴$ ، $n_l=۴$ ، $۳+e_c=۳$ ، $e_c=۰$ ⇒ مفصل یا غلتک داخلی وجود ندارد ، $r=۱۲$ ، $۳n_l+r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین خارجی و نامعین داخلی است ، $i_e=r-۳=۱۲-۳=۹$ ، $i_i=۳n_l-e_c=۳(۴)-۰=۱۲$

(a-۲۱) سازه مسدود است. $۳n_l+r=۸$ ، $n_l=۱$ ، $۳+e_c=۳$ ، $e_c=۰$ ⇒ چون مفصل یا غلتک داخلی وجود ندارد ، $r=۵$ ، $۳n_l+r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین خارجی و نامعین داخلی است ، $i_e=r-۳=۵-۳=۲$ ، $i_i=۳n_l-e_c=۳(۱)-۰=۳$

(a-۲۲) سازه مسدود است. $۳n_l+r=۱۲$ ، $n_l=۱$ ، $۳+e_c=۴$ ، $e_c=۱$ ⇒ چون یک مفصل داخلی وجود دارد ، $r=۹$ ، $۳n_l+r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین خارجی و نامعین داخلی است ، $i_e=r-۳=۹-۳=۶$ ، $i_i=۳n_l-e_c=۳(۱)-۱=۲$

(a-۲۳) سازه ناپایدار داخلی است. $r=۴$ ، $۳+e_c=۴$ ، $e_c=۱$ ⇒ چون یک مفصل داخلی وجود دارد ، $r=۳+e_c$ ⇒ سازه معین استاتیکی است

(a-۲۴) سازه مسدود است. $۳n_l+r=۱۰$ ، $n_l=۱$ ، $۳+e_c=۱۰$ ، $e_c=۲+۲+۱+۱+۱=۷$ ⇒ چون پنج مفصل داخلی وجود دارد ، $r=۷$ ، $۳n_l+r=۳+e_c$ ⇒ سازه معین استاتیکی است

(a-۲۵) سازه مسدود است. $۳n_l+r=۶$ ، $n_l=۱$ ، $۳+e_c=۳$ ، $e_c=۰$ ⇒ چون مفصل یا غلتک داخلی وجود ندارد ، $r=۳$ ، $۳n_l+r>۳+e_c$ ⇒ سازه معین خارجی و نامعین داخلی است ، $i_i=۳n_l-e_c=۳(۱)-۰=۳$

(a-۲۶) سازه ناپایدار داخلی است. $r=۸$ ، $۳+e_c=۵$ ، $e_c=۲$ ⇒ چون دو مفصل داخلی وجود دارد ، $r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است ، $i_e=r-(۳+e_c)=۸-(۳+۲)=۳$

(a-۲۷) $۳n_l+r=۱۷$ ، $n_l=۴$ ، $۳+e_c=۱۱$ ، $e_c=۲+۲+۱+۱+۱+۱=۸$ ⇒ شش مفصل داخلی وجود دارد ، $r=۳$ ، $۳n_l+r>۳+e_c$ ⇒ سازه معین خارجی و نامعین داخلی است ، $i_i=۳n_l-e_c=۳(۴)-۸=۴$

(a-۲۸) سازه مسدود است.

$r=۳$ ، چون چهار مفصل داخلی وجود دارد ⇒ $e_c=۲+۱+۱+۱=۵$ ، $۳+e_c=۸$ ، $n_l=۲$ ، $۳n_l+r=۹$

$۳n_l+r>۳+e_c$ ⇒ سازه معین خارجی و نامعین داخلی است ، $i_i=۳n_l-e_c=۳(۲)-۵=۱$

$r=۱۲>۳$ ⇒ سازه نامعین استاتیکی است ، $i_e=r-۳=۱۲-۳=۹$

(a-۲۹) سازه پایدار داخلی است.

$r=۶$ ، چون دو مفصل داخلی وجود دارد ⇒ $e_c=۲+۱=۳$ ، $۳+e_c=۶$ ، $n_l=۱$ ، $۳n_l+r=۹$

(a-۳۰) سازه مسدود است.

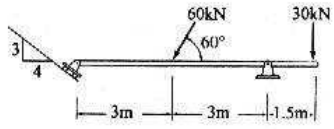
$۳n_l+r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین خارجی و معین داخلی است ، $i_e=r-۳=۶-۳=۳$

$r=۶$ ، چون مفصل با غلتک داخلی وجود ندارد ⇒ $e_c=۰$ ، $۳+e_c=۳$ ، $n_l=۲$ ، $۳n_l+r=۱۲$

(a-۳۱) سازه مسدود است.

$۳n_l+r>۳+e_c$ ⇒ سازه نامعین خارجی و نامعین داخلی است ، $i_e=r-۳=۶-۳=۳$ ، $i_i=۳n_l-e_c=۳(۲)-۰=۶$

۱-۶ برای تیر نشان داده شده در شکل، واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.



شکل ۱-۶

$+\circlearrowleft \sum M_B=۰$: $-\frac{۴}{۵}R_A(۶)+۶۰\sin ۶۰^\circ(۳)-۳۰\times ۱/۵=۰$

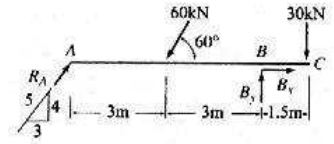
$\vec{R}_A=۲۳/۱ \quad kN \nearrow$

مثبت بودن R_A نشان دهندهٔ این است که جهت اولیهٔ فرض شده برای واکنش صحیح بوده است.

$\pm\rightarrow \sum F_x=۰$: $\frac{۳}{۵}(۲۳/۱)-۶۰\cos ۶۰^\circ+B_x=۰ \Rightarrow B_x=۱۶/۱۴ \quad kN$

مثبت بودن B_x نشان دهندهٔ این است که جهت اولیهٔ فرض شده برای واکنش صحیح بوده است.

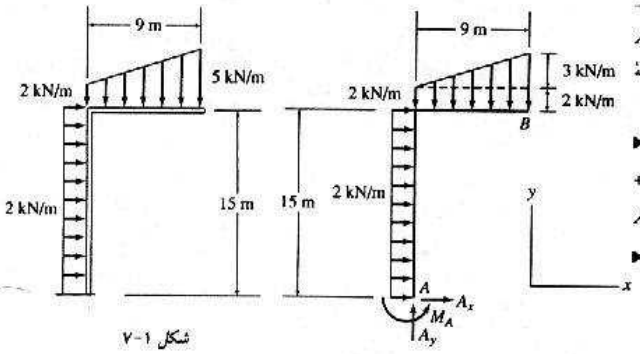
$\blacktriangleright \vec{B}_x=۱۶/۱۴ \quad kN \rightarrow$



$+\uparrow \sum F_y=۰$: $\frac{۴}{۵}(۲۳/۱)-۶۰\sin ۶۰^\circ+B_y-۳۰=۰ \Rightarrow B_y=۶۳/۴۸ \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{B}_y=۶۳/۴۸ \quad kN \uparrow$

۱-۷ برای قاب نشان داده شده در شکل، واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.



شکل ۱-۷

$\pm\rightarrow \sum F_x=۰$: $A_x+۲(۱۵)=۰$

$A_x=-۳۰ \quad kN$

علامت منفی A_x نشان دهندهٔ این است که جهت اولیهٔ فرض شده برای واکنش صحیح نبوده است.

$\blacktriangleright \vec{A}_x=۳۰ \quad kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y=۰$: $A_y-۲(۹)-\frac{۱}{۲}(۳)(۹)=۰$

$A_y=۳۱/۵ \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y=۳۱/۵ \quad kN \uparrow$

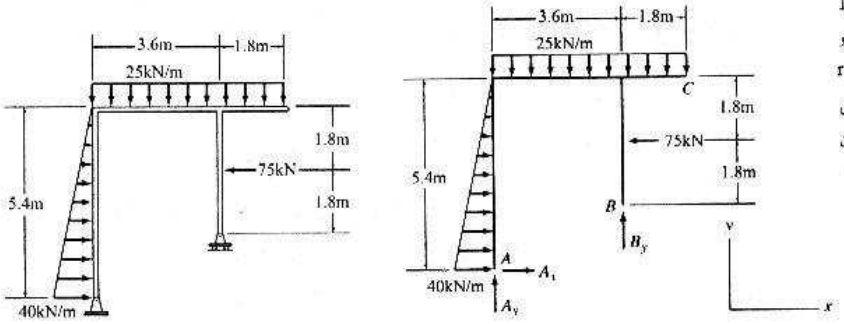
$+\circlearrowleft \sum M_A=۰$: $M_A-\left[۲(۱۵)\right]\left[\frac{۱۵}{۲}\right]-\left[۲(۹)\right]\left[\frac{۹}{۲}\right]-\left[\frac{۱}{۲}(۳)(۹)\right]\frac{۲}{۳}(۹)=۰ \Rightarrow M_A=۳۸۷ \quad kN.m$

$\blacktriangleright \vec{M}_A=۳۸۷ \quad kN.m \circlearrowleft$

کنترل محاسبات: $+\circlearrowleft \sum M_B=-۳۰(۱۵)-۳۱/۵(۹)+۳۸۷+\left[۲(۱۵)\right]\left[\frac{۱۵}{۲}\right]+\left[۲(۹)\right]\left[\frac{۹}{۲}\right]+\left[\frac{۱}{۲}(۳)(۹)\right]\left[\frac{۹}{۳}\right]=۰$ *O.K.*

۱-۸ برای قاب نشان داده شده در شکل، واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.

قاب مزبور از لحاظ داخلی پایدار بوده و چون دارای $r = 3$ واکنش تکیه‌گاهی است، پس معین استاتیکی نیز است.



شکل ۱-۸

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x + \tfrac{1}{2}(40)(5/4) - 75 = 0 \;\Rightarrow\; A_x = -33 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 33 \;\; kN \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; -\left[\tfrac{1}{2}(40)(5/4)\right]\left[\tfrac{5/4}{3}\right] - \left[25(5/4)\right](2/7) + 75(3/6) + B_y(3/6) = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 80/25 \;\; kN$$

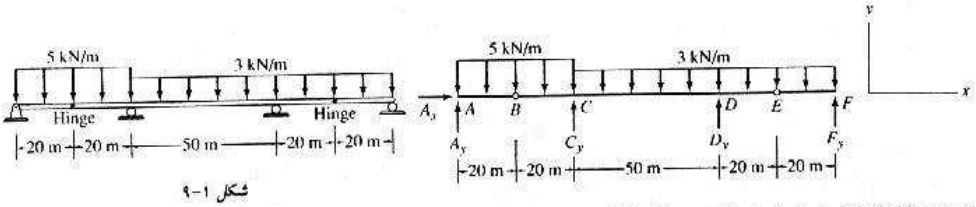
$$\blacktriangleright \vec{B}_y = 80/25 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - 25(5/4) + 80/25 = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 54/75 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 54/75 \;\; kN \uparrow$$

کنترل محاسبات:

$$+\circlearrowleft \sum M_C = -33(5/4) - 54/75(5/4) + \left[\tfrac{1}{2}(40)(5/4)\right]\tfrac{2}{3}(5/4) + 25(5/4)\left[\tfrac{5/4}{2}\right] - 75(1/8) - 80/25(1/8) = 0 \qquad O.K.$$

۱-۹ برای تیر نشان داده شده در شکل، واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.



شکل ۱-۹

تیر مزبور ناپایدار داخلی است. این تیر دارای دو مفصل داخلی بوده، پس $e_c = 2$ و همچنین دارای $r = 5$ واکنش تکیه‌گاهی است، چون $e_c + 3 = r$، پس کل سازه معین استاتیکی است.

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; -A_y(20) + \left[5(20)\right](10) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 50 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 50 \;\; kN \uparrow$$

منظور از رابطهٔ $\sum M_z^{xy}$، مجموع کل لنگرهای ناشی از نیروهای مؤثر بر عضو xy حول نقطهٔ z است.

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{EF} = 0 \;:\; -\left[3(20)\right](10) + F_y(20) = 0 \;\Rightarrow\; F_y = 30 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{F}_y = 30 \;\; kN \uparrow$$

با نوشتن دو معادلهٔ تعادل باقی‌مانده، برای کل سازه، واکنشهای تکیه‌گاهی C_y و D_y را به دست می‌آوریم.

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \;:\; -50(90) + \left[5(40)\right](70) - C_y(50) + \left[3(90)\right](5) + 30(40) = 0 \;\Rightarrow\; C_y = 241 \;\; kN$$

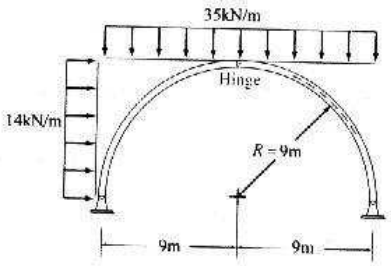
$$\blacktriangleright \vec{C}_y = 241 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 50 - 5(40) + 241 - 3(90) + D_y + 30 = 0 \;\Rightarrow\; D_y = 149 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y = 149 \;\; kN \uparrow$$

کنترل محاسبات:

$$+\circlearrowleft \sum M_F = -50(130) + \left[5(40)\right](110) - 241(90) + \left[3(90)\right](45) - 149(40) = 0 \qquad O.K.$$

۱-۱۰ برای قوس سه مفصلی نشان داده شده در شکل، واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.



شکل ۱-۱۰

قوس ناپایدار داخلی است. قوس مزبور دارای یک مفصل داخلی بوده، پس $e_c = 1$، همچنین دارای $r = 4$ واکنش تکیه‌گاهی است. چون $e_c + 1 = r$، پس کل سازه معین استاتیکی است.

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \quad : \quad -A_y(18) - \left[14(9)\right](4/5) + \left[35(18)\right](9) = 0$$

$$A_y = 283/5 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 283/5 \ kN \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \quad :$$

$$A_x(9) - 283/5(9) + \left[14(9)\right](4/5) + \left[35(9)\right](4/5) = 0$$

$$A_x = 63 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 63 \ kN \rightarrow$$

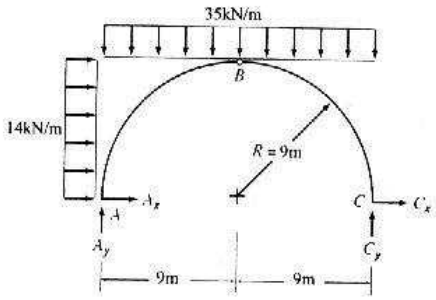
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad 63 + 14(9) + C_x = 0$$

$$C_x = -189 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_x = 189 \ kN \leftarrow$$

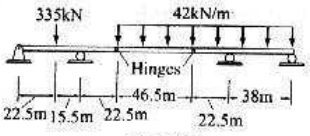
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad 283/5 - 35(18) + C_y = 0$$

$$C_y = 346/5 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = 346/5 \ kN \uparrow$$

کنترل محاسبات: $+\circlearrowleft \sum M_B = 63(9) - 283/5(9) + \left[14(9)\right](4/5) + \left[35(18)\right](0) - 189(9) + 346/5(9) = 0$ *O.K.*

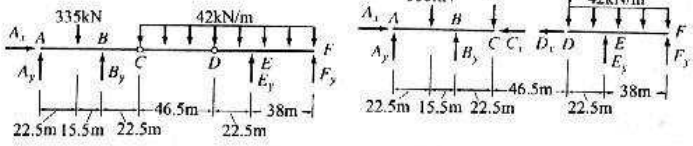


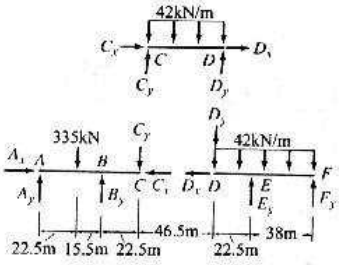
۱-۱۱ برای تیر نشان داده شده در شکل، واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.



شکل ۱-۱۱

تیر مورد نظر ناپایدار داخلی است. این تیر دارای $r = 5$ واکنش تکیه‌گاهی و $e_c = 2$ مفصل داخلی است. چون $e_c + 3 = r$، پس کل سازه معین استاتیکی است.





$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad A_x = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \quad :$$

$$-A_y(60/5) + 335(38) - B_y(22/5) = 0$$

$$60/5A_y + 22/5B_y = 12730 \quad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{AD} = 0 \quad : \quad -A_y(107) + 335(82/5) - B_y(69) + \left[(42)(46/5)\right](23/25) = 0$$

$$107A_y + 69B_y = 7371/75 \quad (II)$$

از حل همزمان معادلات (I) و (II) مقادیر A_y و B_y به دست می‌آیند:

$$A_y = -441/55 \ kN \ , \ B_y = 1753/05 \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 441/55 \ kN \downarrow \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 1753/05 \ kN \uparrow$$

جهت محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی E_y و F_y از دو معادلهٔ باقی‌مانده برای کل سازه استفاده می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_F = 0 \quad : \quad 441/55(167/5) + 335(145) - 1753/05(129/5) + \left[42(107)\right](53/5) - E_y(38) = 0$$

$$E_y = 3577/46 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y = 3577/46 \ kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad -441/55 - 335 + 1753/05 - 42(107) + 3577/46 + F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = -59/96 \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{F}_y = 59/96 \ kN \downarrow$$

راه حل دوم:

با نوشتن معادلات تعادل برای هر یک از سه قسمت AC، CD و DF می‌توانیم واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنیم. نمودار جسم آزاد سه قطعهٔ AC، CD و DF در اشکال فوق نشان داده شده‌اند.

تعداد کل مجهولات (با در نظر گرفتن واکنشهای موجود در محل مفصلهای داخلی) ۹ است. چون ۵ = r و ۴ = ۲ × ۲ = f_i، پس ۹ = f_i + r و سازه معین استاتیکی است. یعنی با نوشتن معادلات تعادل به تنهایی، می‌توان کل واکنشهای تکیه‌گاهی را تعیین کرد.

$+\circlearrowleft \sum M_C^{CD} = 0 \quad : \quad -\left[42(46/5)\right](23/25) + D_y(46/5) = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = 976/5 \quad kN$

$+\uparrow \sum F_y^{CD} = 0 \quad : \quad C_y - 42(46/5) + 976/5 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 976/5 \quad kN$

$\left.\begin{array}{l} \pm\rightarrow \sum F_x^{CD} = 0 \quad : \quad C_x + D_x = 0 \\ \pm\rightarrow \sum F_x^{DF} = 0 \quad : \quad D_x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_F^{DF} = 0 \quad : \quad 976/5(60/5) + \left[42(60/5)\right](30/25) - E_y(38) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 3577/46 \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{E}_y = 3577/46 \quad kN \uparrow$

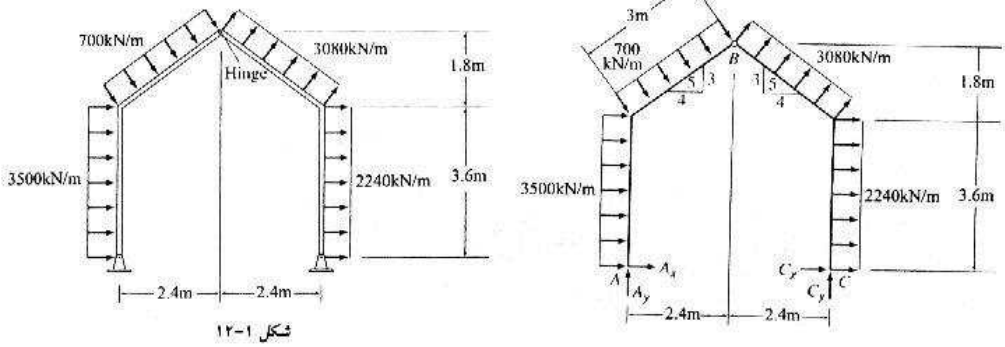
$+\uparrow \sum F_y^{DF} = 0 \quad : \quad -976/5 - 42(60/5) + 3577/46 + F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = -59/96 \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{F}_y = 59/96 \quad kN \downarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A^{AC} = 0 \quad : \quad -335(22/5) + B_y(38) - 976/5(60/5) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 1753/05 \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 1753/05 \quad kN \uparrow$

$\pm\rightarrow \sum F_x^{AC} = 0 \quad : \quad A_x - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

$+\uparrow \sum F_y^{AC} = 0 \quad : \quad A_y - 335 + 1753/05 - 976/5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -441/55 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 441/55 \quad kN \downarrow$

۱-۱۲ قاب نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر بار باد قرار دارد. واکنشهای تکیه‌گاهی قاب مزبور را برای بارگذاری نشان داده شده به دست آورید.



شکل ۱-۱۲

قاب ناپایدار داخلی است. قاب مزبور دارای یک مفصل داخلی بوده، پس ۱ = e_c. همچنین دارای ۴ = r واکنش تکیه گاهی است. چون e_c + ۳ = r، پس کل سازه معین استاتیکی است.

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \quad : \quad -A_y(4/8) - \left[3500(3/6)\right](1/8) - \left[\frac{3}{5}(700)(3)\right](3/6 + 0/9) + \left[\frac{4}{5}(700)(3)\right](2/4 + 1/2) -$

$\left[\frac{3}{5}(308\text{-})(3)\right](3/6 + 0/9) - \left[\frac{4}{5}(3080)(3)\right](1/2) - \left[2240(3/6)\right](1/8) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -14715/75 \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 14715/75 \quad kN \downarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \quad : \quad A_x(5/4) + 14715/75(2/4) + \left[3500(3/6)\right](1/8 + 1/8) + \left[700(3)\right](1/5) = 0$

$A_x = -15523/66 \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 15523/66 \quad kN \leftarrow$

$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad : \quad -15523/66 + 3500(3/6) + \frac{3}{5}(700)(3) + \frac{3}{5}(3080)(3) + 2240(3/6) + C_x = 0$

$C_x = -۱۱۹۴۴/۳۴ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_x} = ۱۱۹۴۴/۳۴ \quad kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad : \quad -۱۴۷۱۵/۷۵ - \frac{۴}{۵}(۷۰۰)(۳) + \frac{۴}{۵}(۳۰۸۰)(۳) + C_y = ۰ \quad \Rightarrow \quad C_y = ۹۰۰۳/۷۵ \quad kN$

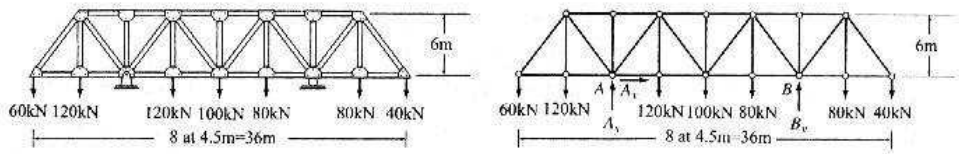
$\blacktriangleright \vec{C_y} = ۹۰۰۳/۷۵ \quad kN \uparrow$

کنترل محاسبات:

$+\circlearrowleft \sum M_B = (-۱۵۵۲۳/۶۶ - ۱۱۹۴۴/۳۴)(۵/۴) + (۱۴۷۱۵/۷۵ + ۹۰۰۳/۷۵)(۲/۴) + \left[(۳۵۰۰ + ۲۲۴۰)(۳/۶)\right](۳/۶) +$

$\left[(۷۰۰ + ۳۰۸۰)(۳)\right](۱/۵) = ۰ \qquad O.K.$

۱-۱۳ برای خرپای نشان داده شده در شکل، واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.



شکل ۱-۱۳

خرپا پایدار داخلی بوده و دارای $r = ۳$ واکنش تکیه‌گاهی است. پس کل سازه معین استاتیکی است.

$\pm \sum F_x = ۰ \quad : \quad \blacktriangleright \vec{A_x} = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \quad : \quad -A_y(۱۸) + ۶۰(۲۷) + ۱۲۰(۲۲/۵) + ۱۲۰(۱۳/۵) + ۱۰۰(۹) + ۸۰(۴/۵) - ۸۰(۴/۵) - ۴۰(۹) = ۰$

$A_y = ۳۶۰ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{A_y} = ۳۶۰ \quad kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \quad : \quad B_y(۱۸) - ۴۰(۲۷) - ۸۰(۲۲/۵) - ۸۰(۱۳/۵) - ۱۰۰(۹) - ۱۲۰(۴/۵) + ۱۲۰(۴/۵) + ۶۰(۹) = ۰$

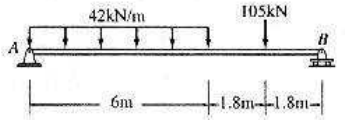
$B_y = ۲۴۰ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{B_y} = ۲۴۰ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = -۶۰ - ۱۲۰ - ۱۲۰ - ۱۰۰ - ۸۰ - ۸۰ - ۴۰ + ۳۶۰ + ۲۴۰ = ۰ \qquad O.K.$

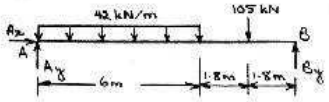
کنترل محاسبات:

برای سازه‌های نشان داده شده در مسایل زیر، واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.

۱-۱۴



شکل ۱-۱۴



$\pm \sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{A_x} = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \quad :$

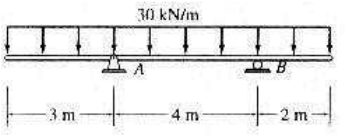
$-A_y(۹/۶) + ۴۲(۶)(۳ + ۳/۶) +$

$۱۰۵(۱/۸) = ۰ \quad \Rightarrow \quad A_y = ۱۹۲/۹۴ \quad kN$

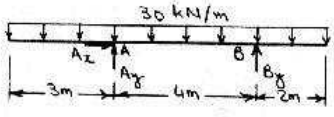
$\blacktriangleright \vec{A_y} = ۱۹۲/۹۴ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad : \quad ۱۹۲/۹۴ - ۴۲(۶) - ۱۰۵ + B_y = ۰ \quad \Rightarrow \quad B_y = ۱۶۴/۰۶ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{B_y} = ۱۶۴/۰۶ \quad kN \uparrow$

۱-۱۵



شکل ۱-۱۵



$\pm \sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{A_x} = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \quad :$

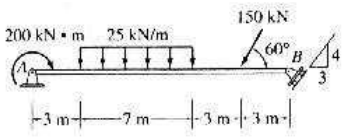
$-A_y(۴) + ۳۰(۹)(۴/۵ - ۲) = ۰$

$A_y = ۱۶۸/۷۵ \quad kN$

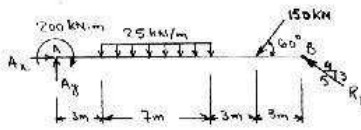
$\blacktriangleright \vec{A_y} = ۱۶۸/۷۵ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; -۳۰(۹) + ۱۶۸/۷۵ + B_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y = ۱۰۱/۲۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۱۰۱/۲۵ \;\; kN \uparrow$

۱۶-۱



شکل ۱-۱۶



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:$

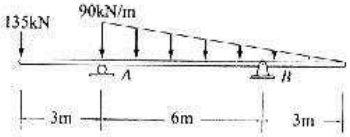
$-۲۰۰ - ۲۵(۷)(۶/۵) - ۱۵۰ \sin ۶۰^\circ (۱۳) + \frac{۳}{۵} R_B (۱۶) = 0$

$R_B = ۳۱۵/۲ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{R}_B = ۳۱۵/۲ \;\; kN \nwarrow$

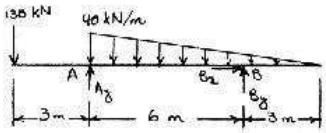
$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x - ۱۵۰ \cos ۶۰^\circ - \frac{۴}{۵}(۳۱۵/۲) = 0 \;\Rightarrow\; A_x = ۳۲۷/۲ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۳۲۷/۲ \;\; kN \rightarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - ۲۵(۷) - ۱۵۰ \sin ۶۰^\circ + \frac{۳}{۵}(۳۱۵/۲) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = ۱۱۵/۸ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۱۵/۸ \;\; kN \uparrow$

۱۷-۱



شکل ۱-۱۷



$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \;\; \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

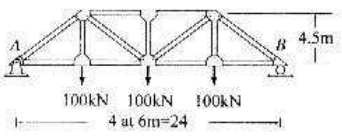
$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:$

$۱۳۵(۹) - A_y(۶) + \frac{۱}{۲}(۹۰)(۹)(۳) = 0$

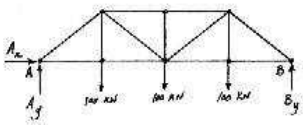
$A_y = ۴۰۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۴۰۵ \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; -۱۳۵ + ۴۰۵ - \frac{۱}{۲}(۹۰)(۹) + B_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y = ۱۳۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۱۳۵ \;\; kN \uparrow$

۱۸-۱



شکل ۱-۱۸



$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \;\; \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

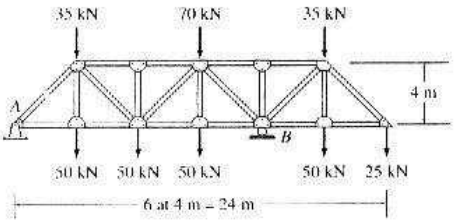
$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:$

$-A_y(۲۴) + ۱۰۰(۶ + ۱۲ + ۱۸) = 0$

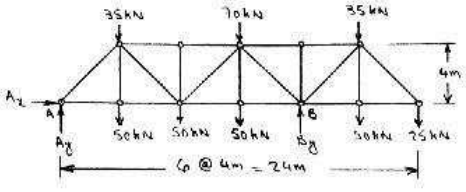
$A_y = ۱۵۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۵۰ \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; B_y - ۳(۱۰۰) + ۱۵۰ = 0 \;\Rightarrow\; B_y = ۱۵۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۱۵۰ \;\; kN \uparrow$

۱۹-۱



شکل ۱-۱۹



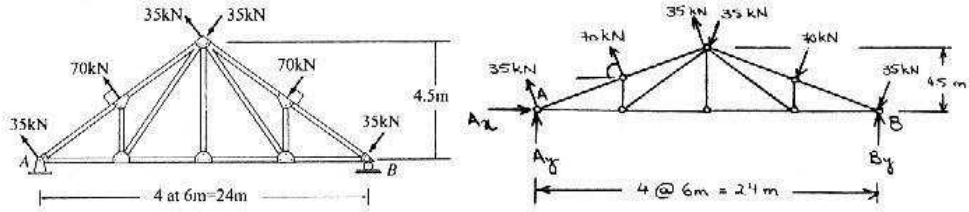
$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; -A_y(16) + (35+50)(12) + 50(8) + (70+50)(4) - (35+50)(4) - 25(8) = 0$

$A_y = 85 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 85 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 85 - 4(50) - 2(35) - 70 - 25 + B_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 280 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 280 \;\; kN \uparrow$

۲۰-۱



شکل ۱-۲۰

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x - (35+70+35+35+70+35)\cos 69/44^\circ = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 98/33 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 98/33 \;\; kN \rightarrow$

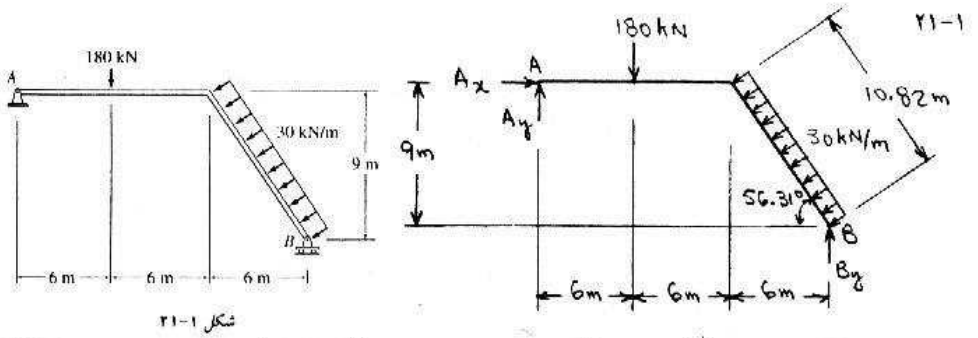
$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; -A_y(24) + 2\left[70(2/25) + 35(4/5)\right]\cos 69/44^\circ + \left[-35(24) - 70(18) + 70(6)\right]\sin 69/44^\circ = 0$

$A_y = -56/32 \;\; kN \qquad \blacktriangleright A_y = 56/32 \;\; kN \downarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; -56/32 + (35+70+35-35-70-35)\sin 69/44^\circ + B_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 56/32 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{B}_y = 56/32 \;\; kN \uparrow$

۲۱-۱



شکل ۱-۲۱

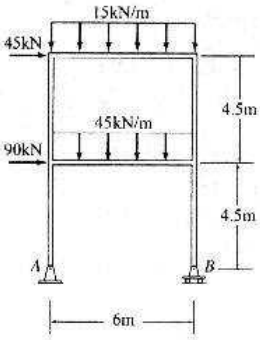
$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x - 30(10/82)\sin 56/31^\circ = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 270/08 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 270/08 \;\; kN \rightarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; -270/08(9) - A_y(18) + 180(12) + 30(10/82)\left[\frac{10/82}{2}\right] = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 82/52 \;\; kN$

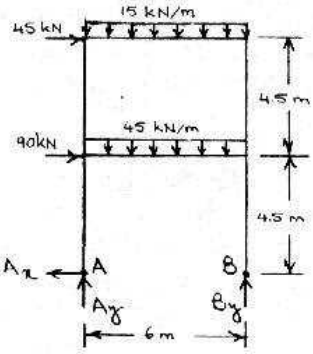
$\blacktriangleright \vec{A}_y = 82/52 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 82/52 - 180 - 30(10/82)\cos 56/31^\circ + B_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 277/54 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 277/54 \;\; kN \uparrow$

۲۲-۱



شکل ۱-۲۲



$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; -A_x + 90 + 45 = 0$

$A_x = 135 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 135 \;\; kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:$

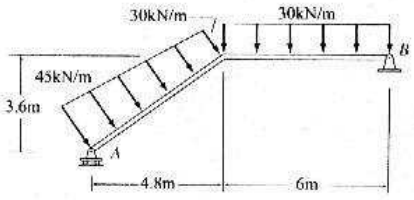
$-A_y(6) - 45(9) - 90(4/5) + (15+45)6(3) = 0$

$A_y = 45 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 45 \;\; kN \uparrow$

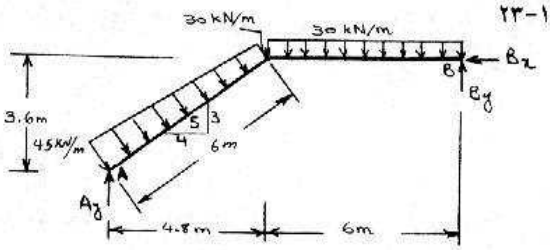
$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 45 - (15+45)6 + B_y = 0$

$B_y = 315 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 315 \;\; kN \uparrow$

۲۳-۱



شکل ۱-۲۳



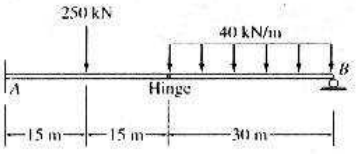
$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; \frac{3}{5}\left[\left(\frac{45+30}{2}\right)(6)\right] - B_x = 0 \;\Rightarrow\; B_x = 135 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 135 \;\; kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; -30(6)(3) - \frac{1}{2}(15)(6)\left[\frac{6}{3}\right] - 30(6)(4/8+3) + 135(3/6) + B_y(10/8) = 0$

$B_y = 143/33 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 143/33 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - \frac{4}{5}\left[\frac{45+30}{2}\right]6 - 30(6) + 143/33 = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 216/67 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 216/67 \;\; kN \uparrow$

۲۴-۱



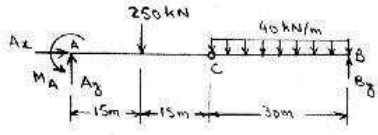
شکل ۱-۲۴

$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} = 0 \;:\; -40(30)(15) + B_y(30) = 0$

$B_y = 600 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 600 \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - 250(15) - 40(30)(45) + 600(60) = 0$

$M_A = 2750 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = 2750 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$

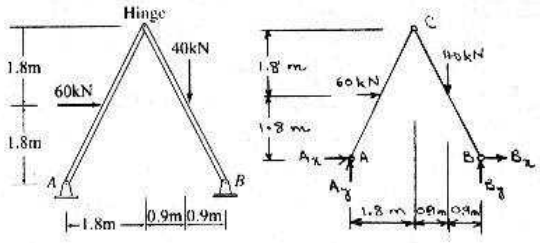


$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - 250 - 40(30) + 600 = 0$

$A_y = 850 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 850 \;\; kN \uparrow$

$\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

۲۵-۱



شکل ۱-۲۵

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; -A_y(۳/۶) - ۶۰(۱/۸) + ۴۰(۰/۹) = 0$

$A_y = -۲۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۲۰ \;\; kN \downarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \;:\; ۲۰(۱/۸) + A_x(۳/۶) + ۶۰(۱/۸) = 0$

$A_x = -۴۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۴۰ \;\; kN \leftarrow$

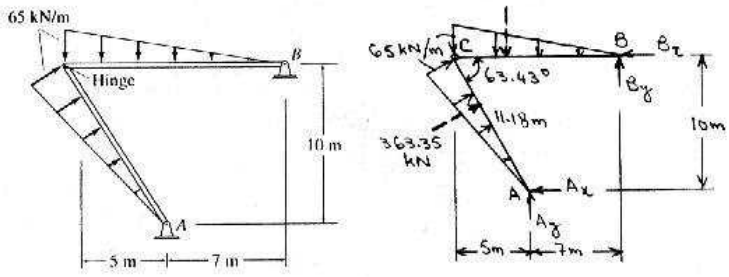
$\pm \sum F_x = 0 \;:\; -۴۰ + ۶۰ + B_x = 0$

$B_x = -۲۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = ۲۰ \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; -۲۰ - ۴۰ + B_y = 0$

$B_y = ۶۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۶۰ \;\; kN \uparrow$

۲۶-۱



شکل ۱-۲۶

$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} = 0 \;:$

$-۳۹۰\left[\frac{۱۲}{۲}\right] + B_y(۱۲) = 0$

$B_y = ۱۳۰ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{B}_y = ۱۳۰ \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:$

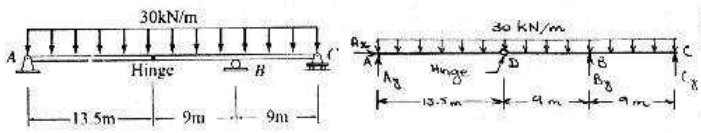
$B_x(۱۰) + ۱۳۰(۷) + ۳۹۰(۱) - ۳۶۳/۳۵\left[\frac{۲}{۳}\right](۱۱/۱۸) = 0$

$B_x = ۱۴۰/۸۲ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = ۱۴۰/۸۲ \;\; kN \uparrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; ۳۶۳/۳۵ \sin ۶۳/۴۳^\circ - A_x - ۱۴۰/۸۲ = 0 \Rightarrow A_x = ۱۸۴/۱۶ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۱۸۴/۱۶ \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + ۳۶۳/۳۵ \cos ۶۳/۴۳^\circ - ۳۹۰ + ۱۳۰ = 0 \Rightarrow A_y = ۹۷/۴۸ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۹۷/۴۸ \;\; kN \uparrow$

۲۷-۱



شکل ۱-۲۷

$\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0$

$\blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_D^{AD} = 0 \;:$

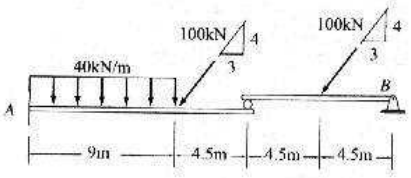
$-A_y(۱۳/۵) + ۳۰(۱۳/۵)\left[\frac{۱۳/۵}{۲}\right] = 0$

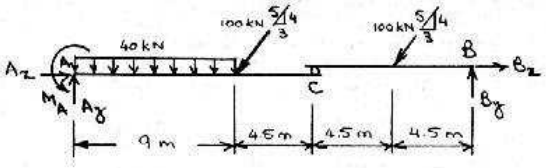
$A_y = ۲۰۲/۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۲۰۲/۵ \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \;:\; -۲۰۲/۵(۳۱/۵) + ۳۰(۳۱/۵)\left[\frac{۳۱/۵}{۲}\right] B_y(۹) = 0 \Rightarrow B_y = ۹۴۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۹۴۵ \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۲۰۲/۵ - ۳۰(۳۱/۵) + ۹۴۵ + C_y = 0 \Rightarrow C_y = -۲۰۲/۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = ۲۰۲/۵ \;\; kN \downarrow$

۲۸-۱





شکل ۱-۲۸

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^{BC}=0 \;:\; -\frac{3}{5}(100)+B_x=0 \Rightarrow B_x=60\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x=60\ kN \rightarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC}=0 \;:\; -\frac{4}{5}(100)(4/5)+B_y(9)=0 \Rightarrow B_y=40\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y=40\ kN \uparrow$

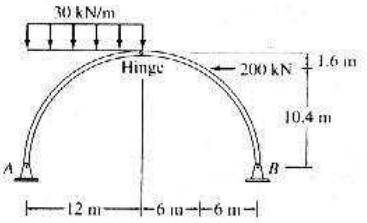
$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \;:\; A_x-2\left[\frac{3}{5}\right](100)+60=0 \Rightarrow A_x=60\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=60\ kN \rightarrow$

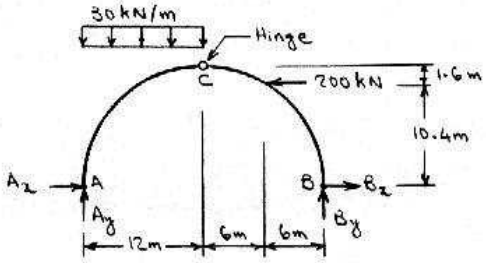
$+\uparrow \sum F_y=0 \;:\; A_y-40(9)-2\left[\frac{4}{5}\right](100)+40=0 \Rightarrow A_y=480\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=480\ kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A=0 \;:\; M_A-40(9)(4/5)-\frac{4}{5}(100)(9+18)+40(22/5)=0 \Rightarrow M_A=2880\ kN.m$

$\blacktriangleright \vec{M}_A=2880\ kN.m \circlearrowleft$

۲۹-۱





شکل ۱-۲۹

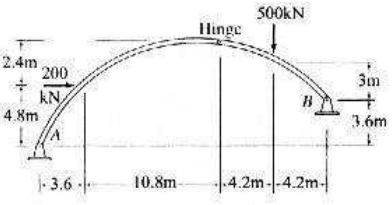
$+\circlearrowleft \sum M_B=0 \;:\; -A_y(24)+30(12)(18)+200(10/4)=0 \Rightarrow A_y=356/67\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=356/67\ kN \uparrow$

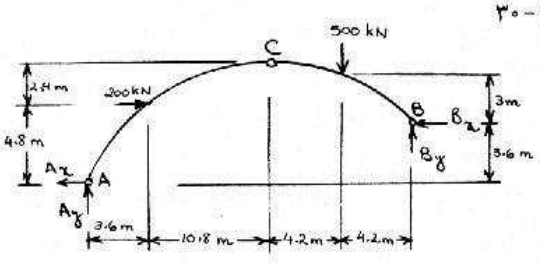
$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC}=0 \;:\; A_x(12)-356/67(12)+30(12)(6)=0 \Rightarrow A_x=176/67\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=176/67\ kN \rightarrow$

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \;:\; 176/67-200+B_x=0 \Rightarrow B_x=23/33\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x=23/33\ kN \rightarrow$

$+\uparrow \sum F_y=0 \;:\; 356/67-30(12)+B_y=0 \Rightarrow B_y=3/33\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y=3/33\ kN \uparrow$

۳۰-۱





شکل ۱-۳۰

$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \;:\; -A_x(۷/۲) - A_y(۱۴/۴) + ۲۰۰(۲/۴) = 0 \;\Rightarrow\; ۳A_x + ۶A_y = ۲۰۰ \qquad (I)$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; -A_x(۳/۶) - A_y(۲۲/۸) - ۲۰۰(۱/۲) + ۵۰۰(۴/۲) = 0 \;\Rightarrow\; ۱/۸A_x + ۱۱/۴A_y = ۹۳۰ \qquad (II)$

از حل همزمان معادلات (I) و (II)، مقادیر A_x و A_y به دست می‌آیند.

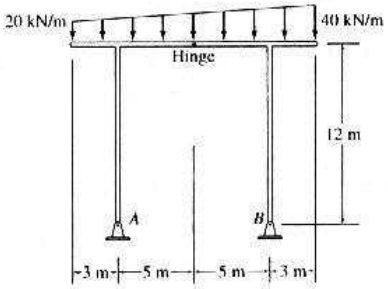
$A_x = -۱۴۱/۰۳ \;\; kN \quad , \quad A_y = ۱۰۳/۸۵ \;\; kN$

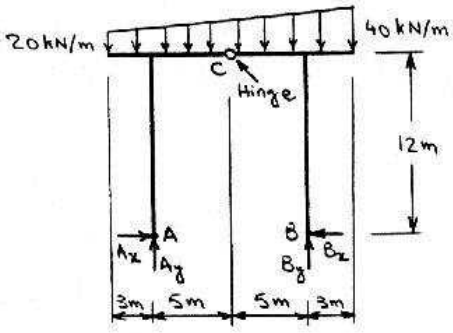
$\blacktriangleright \vec{A}_x = ۱۴۱/۰۳ \;\; kN \rightarrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۰۳/۸۵ \;\; kN \uparrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; ۱۴۱/۰۳ + ۲۰۰ - B_x = 0 \;\Rightarrow\; B_x = ۳۴۱/۰۳ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = ۳۴۱/۰۳ \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۱۰۳/۸۵ - ۵۰۰ + B_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y = ۳۹۶/۱۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۳۹۶/۱۵ \;\; kN \uparrow$

۳۱-۱





شکل ۱-۳۱

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; -A_y(۱۰) + ۲۰(۱۶)(۵) + \frac{۱}{۲}(۲۰)(۱۶)\left[\frac{۱۶}{۳} - ۳\right] = 0 \;\Rightarrow\; A_y = ۱۹۷/۳۳ \;\; kN$

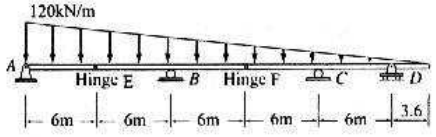
$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۹۷/۳۳ \;\; kN \uparrow$

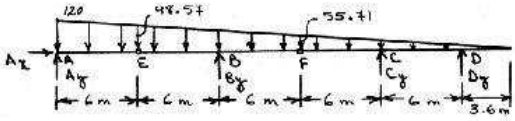
$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \;:\; A_x(۱۲) - ۱۹۷/۳۳(۵) + ۲۰(۸)(۴) + \frac{۱}{۲}(۱۰)(۸)\left[\frac{۸}{۳}\right] = 0 \;\Rightarrow\; A_x = ۲۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۲۰ \;\; kN \rightarrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; ۲۰ - B_x = 0 \;\Rightarrow\; B_x = ۲۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = ۲۰ \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۱۹۷/۳۳ - \left[\frac{۲۰ + ۴۰}{۲}\right](۱۶) + B_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y = ۲۸۲/۶۷ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۲۸۲/۶۷ \;\; kN \uparrow$

۳۲-۱





شکل ۱-۳۲

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_E^{AE} = 0 \;:\; -A_y(۶) + ۹۸/۵۷(۶)(۳) + \frac{۱}{۲}(۱۲۰ - ۹۸/۵۷)(۶)(۴) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = ۳۳۸/۵۷ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۳۳۸/۵۷ \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_F^{AF} = 0 \;:\; -۳۳۸/۵۷(۱۸) - B_y(۶) + ۵۵/۷۱(۱۸)(۹) + \frac{۱}{۲}(۱۲۰ - ۵۵/۷۱)(۱۸)(۱۲) = 0 \;\Rightarrow\; B_y = ۱۶۴۵/۶۸ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{B}_y = ۱۶۴۵/۶۸ \;\; kN \uparrow$

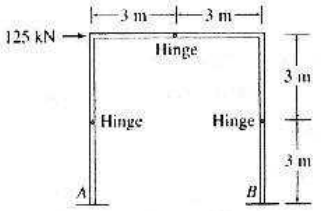
$+\circlearrowleft \sum M_D = ۰ \;:\; -۳۳۸/۵۷(۳۰) - ۱۶۴۵/۶۸(۱۸) - C_y(۶) + \frac{۱}{۲}(۱۲۰)(۳۳/۶)(۱۸/۸) = ۰ \;\Rightarrow\; C_y = -۳۱۳/۰۹ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{C_y} = ۳۱۳/۰۹ \;\; kN \downarrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \;:\; ۳۳۸/۵۷ + ۱۶۴۵/۶۸ - ۳۱۳/۰۹ + D_y - \frac{۱}{۲}(۱۲۰)(۳۳/۶) = ۰ \;\Rightarrow\; D_y = ۳۴۴/۸۴ \quad \blacktriangleright \vec{D_y} = ۳۴۴/۸۴ \;\; kN \uparrow$

۳۳-۱

قاب مزبور را به دو قسمت تحتانی و فوقانی تقسیم کرده و نیروهای موجود در محل مفصلهای داخلی C و D را محاسبه می‌کنیم.



شکل ۱-۳۳

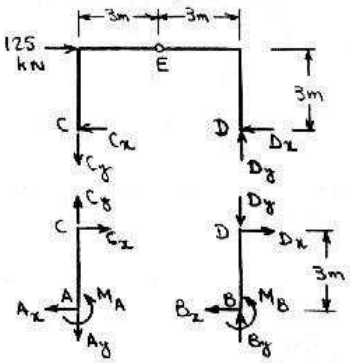
$+\circlearrowleft \sum M_D^{CED} = ۰ \;:\; C_y(۶) - ۱۲۵(۳) = ۰ \;\Rightarrow\; C_y = ۶۲/۵ \;\; kN$

$+\circlearrowleft \sum M_E^{CE} = ۰ \;:\; ۶۲/۵(۳) - C_x(۳) = ۰ \;\Rightarrow\; C_x = ۶۲/۵ \;\; kN$

$\pm \sum F_x^{CED} = ۰ \;:\; -۶۲/۵ + ۱۲۵ - D_x = ۰ \;\Rightarrow\; D_x = ۶۲/۵ \;\; kN$

$+\uparrow \sum F_y^{CED} = ۰ \;:\; -۶۲/۵ + D_y = ۰ \;\Rightarrow\; D_y = ۶۲/۵ \;\; kN$

با نوشتن معادلات تعادل برای قسمت AC، واکنشهای تکیه‌گاه A را به دست می‌آوریم.



$\pm \sum F_x^{AC} = ۰ \;:\; -A_x + ۶۲/۵ = ۰ \;\Rightarrow\; A_x = ۶۲/۵ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A_x} = ۶۲/۵ \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y^{AC} = ۰ \;:\; -A_y + ۶۲/۵ = ۰ \;\Rightarrow\; A_y = ۶۲/۵ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A_y} = ۶۲/۵ \;\; kN \downarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A^{AC} = ۰ \;:\; M_A - ۶۲/۵(۳) = ۰ \;\Rightarrow\; M_A = ۱۸۷/۵ \;\; kN.m$

$\blacktriangleright \vec{M_A} = ۱۸۷/۵ \;\; kN.m \circlearrowleft$

با نوشتن معادلات تعادل برای قسمت BD، واکنشهای تکیه‌گاه B را به دست می‌آوریم.

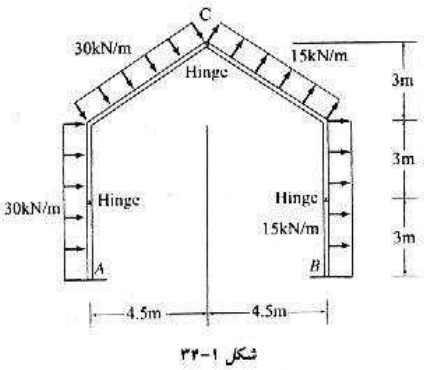
$\pm \sum F_x^{BD} = ۰ \;:\; -B_x + ۶۲/۵ = ۰ \;\Rightarrow\; B_x = ۶۲/۵ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{B_x} = ۶۲/۵ \;\; kN \leftarrow$

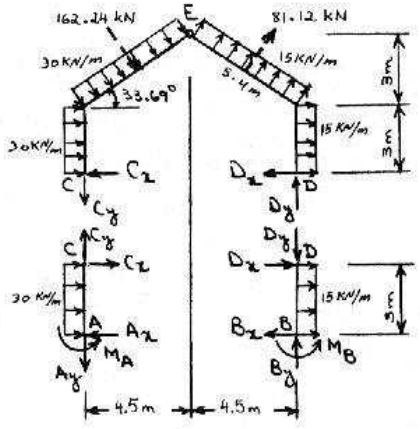
$+\uparrow \sum F_y^{BD} = ۰ \;:\; B_y - ۶۲/۵ = ۰ \;\Rightarrow\; B_y = ۶۲/۵ \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{B_y} = ۶۲/۵ \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{BD} = ۰ \;:\; M_B - ۶۲/۵(۳) = ۰ \;\Rightarrow\; M_B = ۱۸۷/۵ \;\; kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M_B} = ۱۸۷/۵ \;\; kN.m \circlearrowleft$

۳۴-۱



شکل ۱-۳۴



قاب مورد نظر را به دو قسمت تحتانی و فوقانی تقسیم کرده و نیروهای موجود در محل مفصلهای داخلی C و D را محاسبه می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_D^{CED} = 0$:

$C_y(9) - (30 + 15)(3)(1/5) - (162/24 + 81/12)\sin 33/69^\circ (4/5) + 162/24 \cos 33/69^\circ (6/75) - 81/12 \cos 33/69^\circ (2/25) = 0$

$C_y = 5/63 \quad kN$

$+\circlearrowleft \sum M_E^{CE} = 0$: $-C_x(6) + 5/63(4/5) + 30(3)(4/5) + 162/24 \left[\frac{5/408}{2}\right] = 0 \Rightarrow C_x = 144/84 \quad kN$

$\pm \sum F_x^{CED} = 0$: $-144/84 + (30 + 15)(3) + (162/24 + 81/12)\sin 33/69^\circ - D_x = 0 \Rightarrow D_x = 125/15 \quad kN$

$+\uparrow \sum F_y^{CED} = 0$: $-5/63 - 162/24 \cos 33/69^\circ + 81/12 \cos 33/69^\circ + D_y = 0 \Rightarrow D_y = 73/13 \quad kN$

با نوشتن معادلات تعادل برای قطعهٔ AC ، واکنشهای تکیه‌گاه A را به دست می‌آوریم.

$\pm \sum F_x^{AC} = 0$: $144/84 + 30(3) - A_x = 0 \Rightarrow A_x = 234/84 \quad kN$ $\blacktriangleright \vec{A}_x = 234/84 \quad kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y^{AC} = 0$: $-A_y + 5/63 = 0 \Rightarrow A_y = 5/63 \quad kN$ $\blacktriangleright \vec{A}_y = 5/63 \quad kN \downarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A^{AC} = 0$: $M_A - 144/84(3) - 30(3)(1/5) = 0 \Rightarrow M_A = 569/52 \quad kN.m$ $\blacktriangleright \vec{M}_A = 569/52 \quad kN.m \circlearrowleft$

با نوشتن معادلات تعادل برای قسمت BD ، واکنشهای تکیه‌گاه B را به دست می‌آوریم.

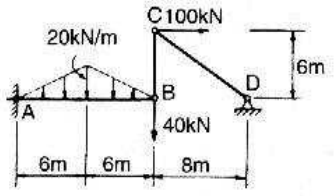
$\pm \sum F_x^{BD} = 0$: $125/15 + 15(3) - B_x = 0 \Rightarrow B_x = 170/15 \quad kN$ $\blacktriangleright \vec{B}_x = 170/15 \quad kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y^{BD} = 0$: $B_y - 73/13 = 0 \Rightarrow B_y = 73/13 \quad kN$ $\blacktriangleright \vec{B}_y = 73/13 \quad kN \uparrow$

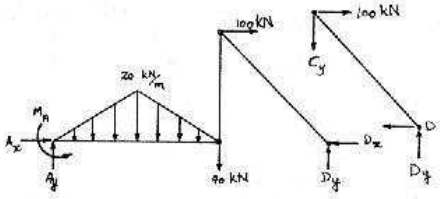
$+\circlearrowleft \sum M_B^{BD} = 0$: $M_B - 125/15(3) - 15(3)(1/5) = 0 \Rightarrow M_B = 442/95 \quad kN.m$ $\blacktriangleright \vec{M}_B = 442/95 \quad kN.m \circlearrowleft$

برای سازه‌های نشان داده در مسایل زیر، واکنشهای تکیه‌گاهی را تعیین کنید.

۱-۳۵



شکل ۱-۳۵



$+\circlearrowleft \sum M_D^{CD} = 0$: $C_y(8) - 100(6) = 0 \Rightarrow C_y = 75 \quad kN$

$\pm \sum F_x^{CD} = 0$: $100 - D_x = 0 \Rightarrow D_x = 100 \quad kN$ $\blacktriangleright \vec{D}_x = 100 \quad kN \leftarrow$

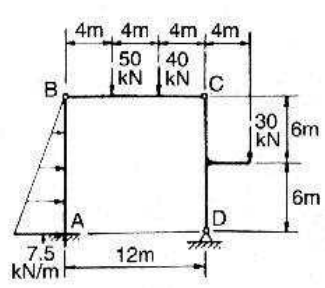
$+\uparrow \sum F_y^{CD} = 0$: $D_y - 75 = 0 \Rightarrow D_y = 75 \quad kN$ $\blacktriangleright \vec{D}_y = 75 \quad kN \uparrow$

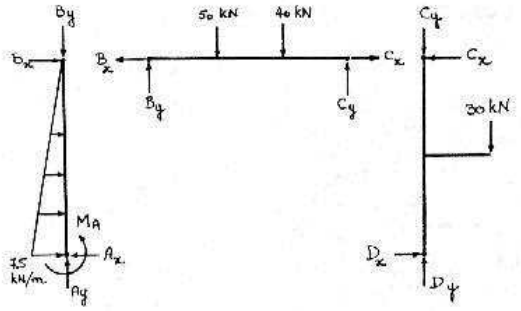
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$: $M_A - \frac{1}{2}(20)(12)(6) - 40(12) - 100(6) + 75(20) = 0 \Rightarrow M_A = 300 \quad kN.m$ $\blacktriangleright \vec{M}_A = 300 \quad kN.m \circlearrowleft$

$+\uparrow \sum F_y = 0$: $A_y - \frac{1}{2}(20)(12) - 40 + 75 = 0 \Rightarrow A_y = 85 \quad kN$ $\blacktriangleright \vec{A}_y = 85 \quad kN \uparrow$

$\pm \sum F_x = 0$: $A_x + 100 - 100 = 0 \Rightarrow A_x = 0$ $\blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

۳۶-۱





شکل ۱-۳۶

$+\circlearrowleft \sum M_D^{CD}=0 \;:\; C_x(12)-30(4)=0 \Rightarrow C_x=10 \;\; kN$

$\pm \sum F_x^{CD}=0 \;:\; D_x-10=0 \Rightarrow D_x=10 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_x=10 \;\; kN \rightarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{BC}=0 \;:\; C_y(12)-40(8)-50(4)=0 \Rightarrow C_y=43/33 \;\; kN$

$+\uparrow \sum F_y^{CD}=0 \;:\; D_y-43/33-30=0 \Rightarrow D_y=73/33 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y=73/33 \;\; kN \uparrow$

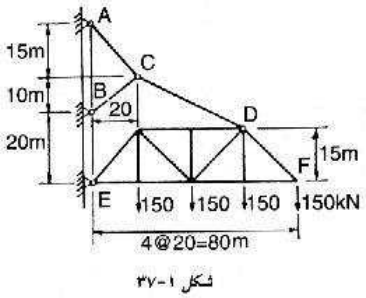
$\pm \sum F_x^{BC}=0 \;:\; B_x-10=0 \Rightarrow B_x=10 \;\; kN$

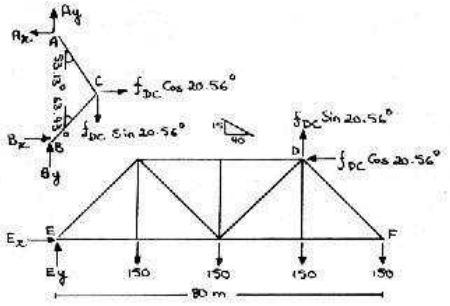
$+\circlearrowleft \sum M_A=0 \;:\; M_A-\frac{1}{2}(7/5)(12)(4)-10(12)=0 \Rightarrow M_A=300 \;\; kNm \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A=300 \;\; kNm$

$\pm \sum F_x^{AB}=0 \;:\; \frac{1}{2}(7/5)(12)-A_x+10=0 \Rightarrow A_x=55 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=55 \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y=0 \;:\; A_y-50-40-30-73/33=0 \Rightarrow A_y=46/67 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=46/67 \;\; kN \uparrow$

۳۷-۱





شکل ۱-۳۷

$+\circlearrowleft \sum M_E^{ED}=0 \;:\; f_{DC}\sin 20/56^\circ(60)+f_{DC}\cos 20/56^\circ(15)-150(20+20+60+80)=0 \Rightarrow f_{DC}=852/31 \;\; kN$

$\pm \sum F_x^{ED}=0 \;:\; E_x-852/31\cos 20/56^\circ=0 \Rightarrow E_x=799/9 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_x=799/9 \;\; kN \rightarrow$

$+\uparrow \sum F_y^{ED}=0 \;:\; E_y-150(4)+852/31\sin 20/56^\circ=0 \Rightarrow E_y=300 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y=300 \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{ABC}=0 \;:\; A_x(25)-852/31\cos 20/56^\circ(10)-852/31\sin 20/56^\circ(20)=0 \Rightarrow A_x=560 \;\; kN$

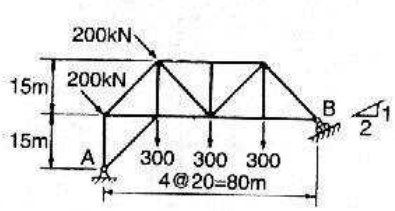
$\blacktriangleright \vec{A}_x=560 \;\; kN \leftarrow$

$\pm \sum F_x=0 \;:\; 799/9-560+B_x=0 \Rightarrow B_x=-239/9 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x=239/9 \;\; kN \leftarrow$

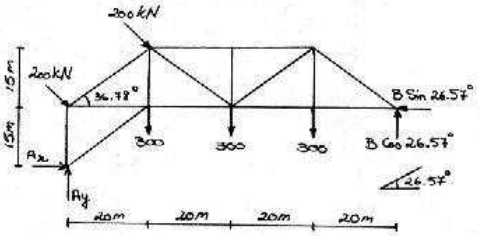
$A_y = A_x \cot ۵۳/۱۳^\circ \Rightarrow A_y = ۵۶۰ \cot ۵۳/۱۳^\circ$ $\blacktriangleright \vec{A}_y = ۴۲۰ \ kN \uparrow$

$B_y = B_x \cot ۶۳/۴۳^\circ \Rightarrow B_y = ۲۳۹/۹ \cot ۶۳/۴۳^\circ$ $\blacktriangleright \vec{B}_y = ۱۲۰ \ kN \downarrow$

۳۸-۱



شکل ۱-۳۸



$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \ : \ B \cos ۲۶/۵۷^\circ (۸۰) + B \sin ۲۶/۵۷^\circ (۱۵) - ۳۰۰(۲۰ + ۴۰ + ۶۰) - ۲۰۰ \cos ۵۳/۱۳^\circ (۱۵) -$

$۲۰۰ \cos ۵۳/۱۳^\circ (۳۰) - ۲۰۰ \sin ۵۳/۱۳^\circ (۲۰) = ۰ \Rightarrow B = ۵۶۹/۸۹ \ kN$ $\blacktriangleright \vec{B} = ۵۶۹/۸۹ \ kN \nwarrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \ : \ A_x + ۲۰۰ \cos ۵۳/۱۳^\circ + ۲۰۰ \cos ۵۳/۱۳^\circ - ۵۶۹/۸۹ \sin ۲۶/۵۷^\circ = ۰ \Rightarrow A_x = ۱۴/۹ \ kN$

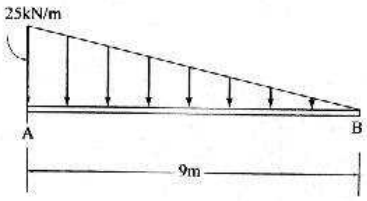
$\blacktriangleright \vec{A}_x = ۱۴/۹ \ kN \rightarrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ A_y - ۲۰۰ \sin ۵۳/۱۳^\circ - ۲۰۰ \sin ۵۳/۱۳^\circ - ۳(۳۰۰) + ۵۶۹/۸۹ \cos ۲۶/۵۷^\circ = ۰ \Rightarrow A_y = ۷۱۰/۲۹ \ kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۷۱۰/۲۹ \ kN \uparrow$

برای تیرهای نشان داده شده در مسایل ۱-۳۹ تا ۱-۴۱ واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورید.

۳۹-۱



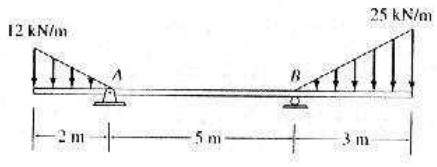
شکل ۱-۳۹

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ A_y - \frac{۱}{۲}(۲۵)(۹) = ۰$ $\blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۱۲/۵ \ kN \uparrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \ : \ A_x = ۰$ $\blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \ : \ M_A - \frac{(۲۵)(۹)}{۲}\left[\frac{۹}{۳}\right] = ۰$ $\blacktriangleright \vec{M}_A = ۳۳۷/۵ \ kN.m \circlearrowleft$

۴۰-۱



شکل ۱-۴۰

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \ : \ B_y(۵) + \frac{(۱۲)(۲)}{۲}\left[\frac{۲}{۳}\right] - \frac{(۲۵)(۳)}{۲}(۵ + ۲) = ۰$

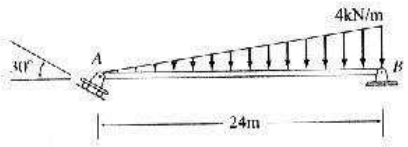
$\blacktriangleright \vec{B}_y = ۴۹/۳ \ kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ ۴۹/۳ + A_y - \frac{(۱۲)(۲)}{۲} - \frac{(۲۵)(۳)}{۲} = ۰$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۰/۲ \ kN \uparrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \ : \ A_x = ۰$ $\blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$

۱-۴۱



شکل ۱-۴۱

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad \frac{(4)(24)}{2}\left[\frac{2A}{3}\right] - B_y(24) = 0$

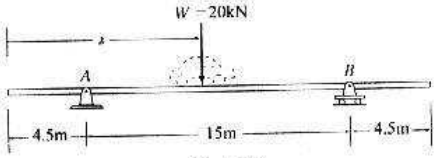
$\blacktriangleright \vec{B_y} = 32 \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad A\cos 30^\circ + 32 - \frac{(4)(24)}{2} = 0$

$\blacktriangleright \vec{A} = 18/275 \quad kN \nearrow$

$\pm \sum F_x = 0 \quad : \quad 18/275 \sin 30^\circ - B_x = 0 \quad \blacktriangleright \vec{B_x} = 9/24 \quad kN \leftarrow$

۱-۴۲ وزن یک ماشین که با سرعت ثابت بر روی شاهتیر پلی در حال حرکت است، به صورت یک بار متمرکز در شکل زیر نشان داده شده است. مقدار واکنشهای تکیه‌گاهی را بر حسب فاصلهٔ x به دست آورده و نمودار آنها را ترسیم کنید.



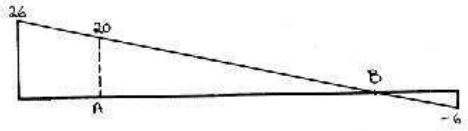
شکل ۱-۴۲

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad : \quad -A_y(15) + 20(19/5 - x) = 0$

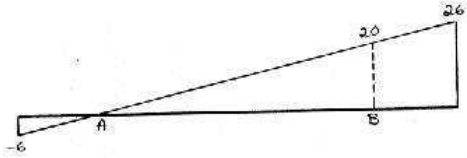
$\blacktriangleright \vec{A_y} = 26 - \frac{4x}{3} \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad B_y - 20 + 26 - \frac{4x}{3} = 0$

$\blacktriangleright \vec{B_y} = -6 + \frac{4x}{3} \uparrow$



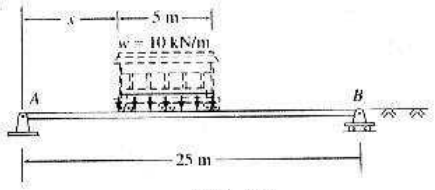
واکنش تکیه‌گاهی A_y، kN



واکنش تکیه‌گاهی B_y، kN

۱-۴۳ وزن یک واگن که با سرعت ثابت بر روی شاهتیر پلی در حال حرکت است، به صورت یک بار متمرکز در شکل زیر نشان داده شده است. مقدار واکنشهای تکیه‌گاهی را بر حسب فاصلهٔ x به دست آورده و نمودار آنها را ترسیم کنید.

$0 \le x \le 20 \text{ m}$:



شکل ۱-۴۳

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad B_y(25) - 10(5)(x + 2/5) = 0$

$\blacktriangleright \vec{B_y} = 5 + 2x \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad A_y - 10(5) + 5 + 2x = 0 \quad \blacktriangleright \vec{A_y} = 45 - 2x \uparrow$

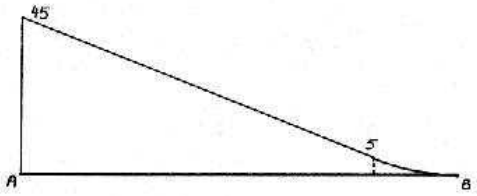
$20 \text{ m} \le x \le 25 \text{ m}$:

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad : \quad \frac{10(25-x)^2}{2} - A_y(25) = 0$

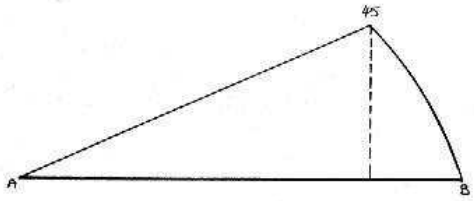
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad -10(25-x) + B_y + \frac{(25-x)^2}{5} = 0$

$\blacktriangleright \vec{A_y} = \frac{(25-x)^2}{5} \uparrow$

$\blacktriangleright \vec{B_y} = \frac{625 - x^2}{5} \uparrow$



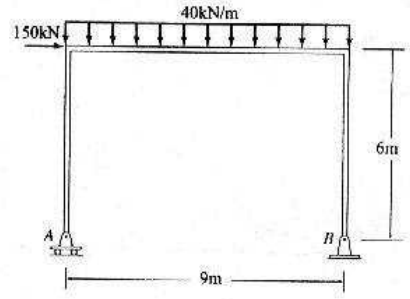
واکنش تکیه‌گاهی A_y ، kN



واکنش تکیه‌گاهی B_y ، kN

برای سازه‌های نشان داده شده در مسایل ۱-۴۴ تا ۱-۴۹ ، واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورید.

۱-۴۴



شکل ۱-۴۴

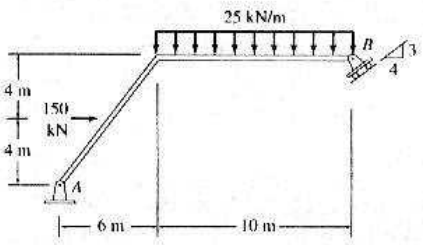
$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad : \quad -A_y(9) + \frac{(40)(9)^2}{2} - 150(6) = 0$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 80 \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad 80 + B_y - (40)(9) = 0 \quad \blacktriangleright \vec{B}_y = 280 \quad kN \uparrow$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad 150 - B_x = 0 \quad \blacktriangleright \vec{B}_y = 150 \quad kN \leftarrow$

۱-۴۵



شکل ۱-۴۵

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad :$

$-150(4) - (25)(10)(11) + B\left[\frac{4}{5}\right](16) + B\left[\frac{3}{5}\right](8) = 0$

$\blacktriangleright \vec{B} = 190/34 \quad kN \nwarrow$

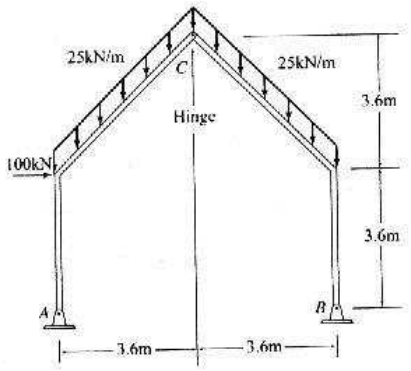
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad (190/34)\left[\frac{4}{5}\right] + A_y - (25)(10) = 0$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 97/73 \quad kN \uparrow$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad -(190/34)\left[\frac{3}{5}\right] + 150 + A_x = 0$

$\blacktriangleright \vec{A}_x = 35/8 \quad kN \leftarrow$

۴۶-۱



شکل ۱-۴۶

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$:

$B_y(۷/۲) - ۱۰۰(۳/۶) - \frac{(۲۵)(۳/۶)^۲}{۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)} - \frac{(۲۵)(۳/۶)(۵/۲)}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)} = 0$

$\blacktriangleright \vec{B}_y = ۱۷۷/۲۸ \ kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0$: $۱۷۷/۲۸ + A_y - ۲\frac{(۲۵)(۳/۶)}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)} = 0$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۷۷/۲۸ \ kN \uparrow$

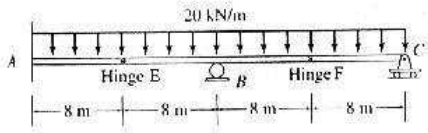
$+\circlearrowleft \sum M_C = 0$:

$\frac{(-۲۵)(۳/۶)(۱/۸)}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)} + ۱۷۷/۲۸(۳/۶) - B_x(۷/۲) = 0$

$\blacktriangleright \vec{B}_x = ۵۶/۸۲ \ kN \leftarrow$

$\pm \sum F_x = 0$: $۱۰۰ - ۵۶/۸۲ - A_x = 0 \quad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۴۳/۱۸ \ kN \leftarrow$

۴۷-۱



شکل ۱-۴۷

$+\circlearrowleft \sum M_F^{CF} = 0$: $C_y(۸) - \frac{۲۰(۸)^۲}{۲} = 0 \quad \blacktriangleright \vec{C}_y = ۸۰ \ kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_E^{EC} = 0$: $۸۰(۲۴) + B_y(۸) - \frac{۲۰(۲۴)^۲}{۲} = 0$

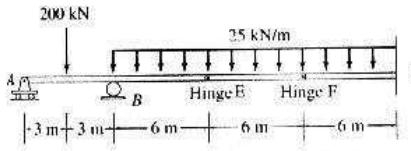
$\blacktriangleright \vec{B}_y = ۴۸۰ \ kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0$: $A_y + ۸۰ + ۴۸۰ - (۲۰)(۳۲) = 0$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۸۰ \ kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$: $M_A - \frac{(۲۰)(۳۲)^۲}{۲} + ۴۸۰(۱۶) + ۸۰(۳۲) = 0 \quad \blacktriangleright \vec{M}_A = 0$, $\pm \sum F_x = 0$: $A_x = 0 \quad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

۴۸-۱



شکل ۱-۴۸

$+\circlearrowleft \sum M_F^{EF} = 0$: $-E_y(۶) + \frac{۲۵(۶)^۲}{۲} = 0 \Rightarrow E_y = ۷۵ \ kN$

$+\circlearrowleft \sum M_A^{AE} = 0$: $B_y(۶) - ۲۰۰(۳) - (۲۵)(۶)(۹) - ۷۵(۱۲) = 0$

$\blacktriangleright \vec{B}_y = ۴۷۵ \ kN \uparrow$

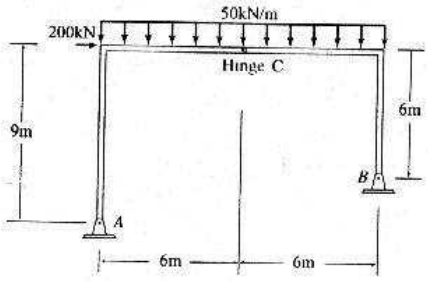
$+\uparrow \sum F_y^{AE} = 0$: $A_y + ۴۷۵ - ۲۰۰ - ۷۵ - (۲۵)(۶) = 0$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۵۰ \ kN \downarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0$: $-۵۰ + ۴۷۵ + C_y - ۲۰۰ - (۲۵)(۱۸) = 0 \quad \blacktriangleright \vec{C}_y = ۲۲۵ \ kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{CF} = 0$: $-M_C + \frac{(۲۵)(۶)^۲}{۲} + (۷۵)(۶) = 0 \quad \blacktriangleright \vec{M}_C = ۹۰۰ \ kN.m \circlearrowright$, $\pm \sum F_x = 0$: $C_x = 0 \quad \blacktriangleright \vec{C}_x = 0$

۱-۴۹



شکل ۱-۴۹

$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} = 0 \;:\; B_y(6) - \frac{50(6)^2}{2} - B_x(6) = 0$

$B_y - B_x = 150 \quad (I)$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \;:\; \frac{(50)(6)^2}{2} - A_y(6) - A_x(9) = 0$

$2A_y + 3A_x = 300 \quad (II)$

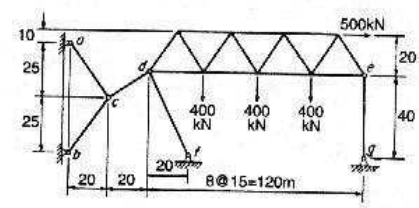
$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + B_y - 50(12) = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 600 \quad (III)$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x + B_x - 200 = 0 \Rightarrow A_x + B_x = 200 \quad (IV)$

$\blacktriangleright \vec{A}_x = 40 \;\; kN \rightarrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{A}_y = 210 \;\; kN \uparrow$

$\blacktriangleright \vec{B}_x = 240 \;\; kN \leftarrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{B}_y = 390 \;\; kN \uparrow$

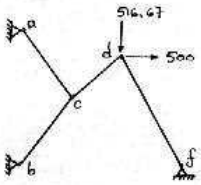
۱-۵۰ واکنشهای تکیه‌گاهی خرپای نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.



شکل ۱-۵۰

$+\circlearrowleft \sum M_d^{deg} = 0 \;:\; g_y(120) - 500(20) - 400(30+60+90) = 0$

$\blacktriangleright \vec{g}_y = 683/33 \;\; kN \uparrow$



$+\uparrow \sum F_y^{deg} = 0 \;:$

$683/33 + d_y - 3(400) = 0$

$\blacktriangleright \vec{d}_y = 516/67 \;\; kN \uparrow$

$\pm \sum F_x^d = 0 \;:\; F_{df}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - F_{dc}\left(\frac{2}{5}\right) = -500 \quad , \quad +\uparrow \sum F_y^d = 0 \;:\; F_{df}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + F_{dc}\left(\frac{3}{5}\right) = -516/67$

$F_{df} = 725/03 \;\; kN \;\; (C) \;\; , \;\; F_{dc} = 219/70 \;\; kN \;\; (T)$

$f_y = 725/03\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 648/49 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{f}_y = 648/49 \;\; kN \uparrow$

$f_x = 725/03\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 324/24 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{f}_x = 324/24 \;\; kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_a^{abc} = 0 \;:\; -b_x(50) + 219/70(0/8)(25) + 219/70(0/6)(20) = 0 \quad \blacktriangleright \vec{b}_x = 140/61 \;\; kN \leftarrow$

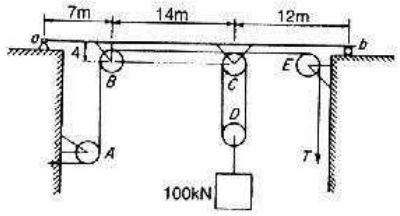
$+\circlearrowleft \sum M_b^{abc} = 0 \;:\; a_x(50) + 219/07(0/6)(20) - 219/70(0/8)(25) = 0 \quad \blacktriangleright \vec{a}_x = 35/15 \leftarrow$

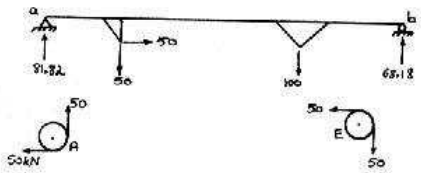
$a_y = \left[\frac{25}{20}\right] 35/15 = 43/94 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{a}_y = 43/94 \;\; kN \uparrow \;\; , \;\; b_y = \left[\frac{25}{20}\right] 140/61 = 175/76 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{b}_y = 175/76 \;\; kN \downarrow$

در سازه‌های نشان داده شده در مسایل ۱-۵۱ تا ۱-۵۳ واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورید. (شعاع ترقره‌ها 1 m است).

۵۱-۱





شکل ۱-۵۱

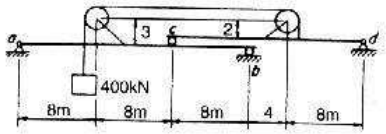
$\blacktriangleright \vec{A}_x = ۵۰ \ kN \rightarrow$, $\blacktriangleright \vec{A}_y = ۵۰ \ kN \downarrow$, $\blacktriangleright \vec{E}_x = ۵۰ \ kN \rightarrow$, $\blacktriangleright \vec{E}_y = ۵۰ \ kN \uparrow$

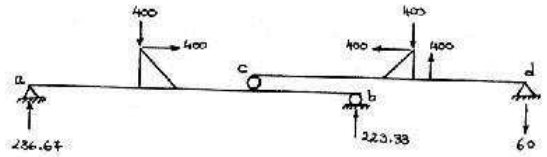
$+\circlearrowleft \sum M_a^{ab} = ۰ \ : \ b_y(۳۳) - ۱۰۰(۲۱) - ۵۰(۷) + ۵۰(۴) = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{b}_y = ۶۸/۱۸ \ kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y^{ab} = ۰ \ : \ ۶۸/۱۸ - ۱۰۰ - ۵۰ + a_y = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{a}_y = ۸۱/۸۲ \ kN \uparrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x^{ab} = ۰ \ : \ a_x + ۵۰ = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{a}_x = ۵۰ \ kN \leftarrow$

۵۲-۱





شکل ۲-۵۲

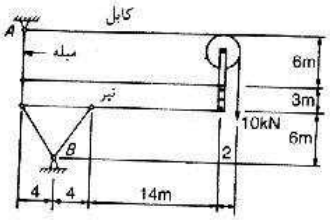
$+\circlearrowleft \sum M_c^{cd} = ۰ \ : \ d_y(۲۰) + ۴۰۰(۲) + ۴۰۰(۱۳) - ۴۰۰(۱۳) = ۰ \Rightarrow d_y = -۶۰ \ kN \quad \blacktriangleright \vec{d}_y = ۶۰ \ kN \downarrow$

$+\uparrow \sum F_y^{cd} = ۰ \ : \ C_y + ۴۰۰ - ۴۰۰ - ۶۰ = ۰ \Rightarrow \vec{C}_y = ۶۰ \ kN \uparrow$, $\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x^{cd} = ۰ \ : \ d_x - ۴۰۰ = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{d}_x = ۴۰۰ \ kN \rightarrow$

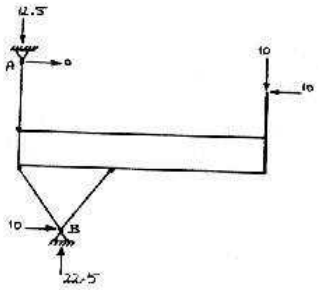
$+\circlearrowleft \sum M_a^{ab} = ۰ \ : \ -۴۰۰(۸) - ۴۰۰(۳) - ۶۰(۱۶) + b_y(۲۴) = ۰ \Rightarrow b_y = ۲۲۳/۳۳ \ kN \quad \blacktriangleright \vec{b}_y = ۲۲۳/۳۳ \ kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ a_y + ۲۲۳/۳۳ - ۶۰ - ۴۰۰ - ۴۰۰ + ۴۰۰ = ۰ \Rightarrow a_y = ۲۳۶/۶۷ \ kN \quad \blacktriangleright \vec{a}_y = ۲۳۶/۶۷ \ kN \uparrow$

۵۳-۱



شکل ۱-۵۳



$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \ :$

$(۱۰)(۱۳) - ۱۰(۱۸) + A_y(۴) = ۰$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۲/۵ \ kN \downarrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ B_y - ۱۰ - ۱۲/۵ = ۰$

$\blacktriangleright \vec{B}_y = ۲۲/۵ \ kN \uparrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \ : \ B_x - ۱۰ = ۰$

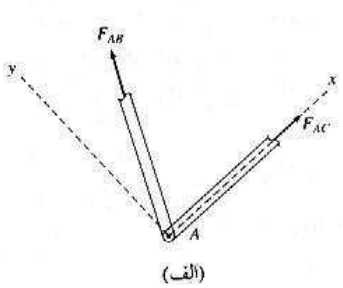
$\blacktriangleright \vec{B}_x = ۱۰ \ kN \rightarrow$

اعضای صفر - نیرویی در خرپاها

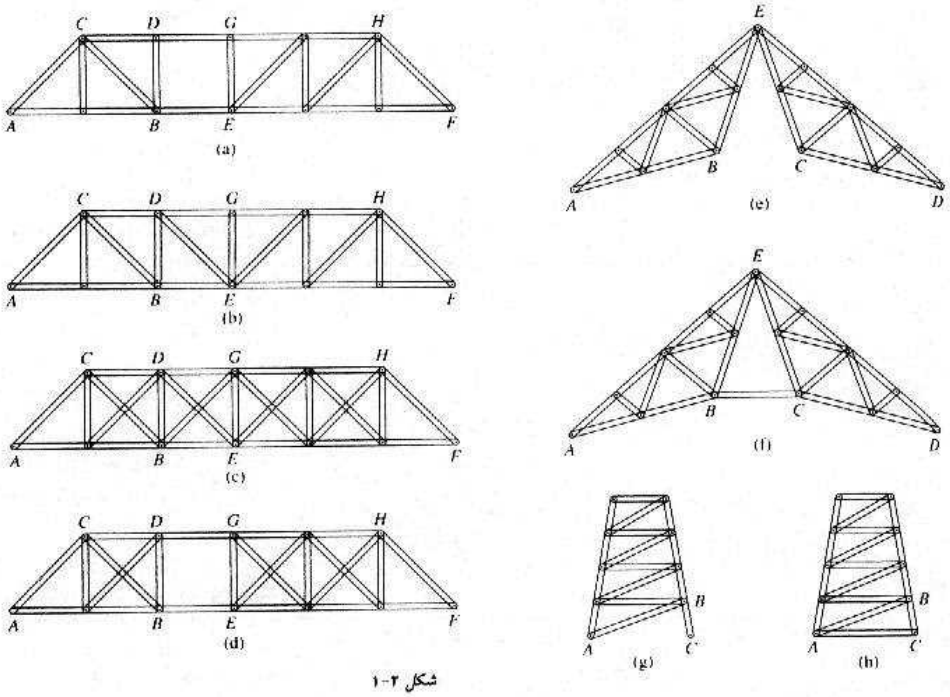
اصولاً بدون حل معادلات تعادل می‌توان پیش از تحلیل خرپا پاره‌ای از اعضا راکه نیروی محوری آنها صفر است، تعیین کرد. برای این منظور از دو دستور کلی زیر استفاده می‌کنیم:

(الف) اگر در یک گره فقط دو عضو غیر همراستا وجود داشته باشند و هیچ نیروی خارجی نیز به این گره وارد نشود، هر دو عضو مزبور صفر - نیرویی هستند.

(ب) اگر سه عضو که دوتای آنها همراستایند بر یک گره وارد شده باشند، در صورتی که هیچ نیروی خارجی بر این گره وارد نشود، عضو غیرهمراستا با دو عضو همراستا صفر - نیرویی خواهد بود.



۲-۱ هر یک از خرپاهای نشان داده شده در شکل زیر را تحت عنوان، ناپایدار و پایدار داخلی دسته‌بندی کنید.



شکل ۲-۱

(a) خرپا ناپایدار داخلی است. $J = ۱۲ \Rightarrow ۲J = ۲۴ \;,\; m = ۲۰ \;,\; m + ۳ < ۲J$

(b) خرپا پایدار داخلی است. $J = ۱۲ \Rightarrow ۲J = ۲۴ \;,\; m = ۲۱ \;,\; m + ۳ = ۲J$

(c) خرپا پایدار داخلی است. $J = ۱۲ \Rightarrow ۲J = ۲۴ \;,\; m = ۲۵ \;,\; m + ۳ > ۲J$

(d) با وجود آن که $m + ۳ > ۲J$، خرپا ناپایدار داخلی است. $J = ۱۲ \Rightarrow ۲J = ۲۴ \;,\; m = ۲۳$

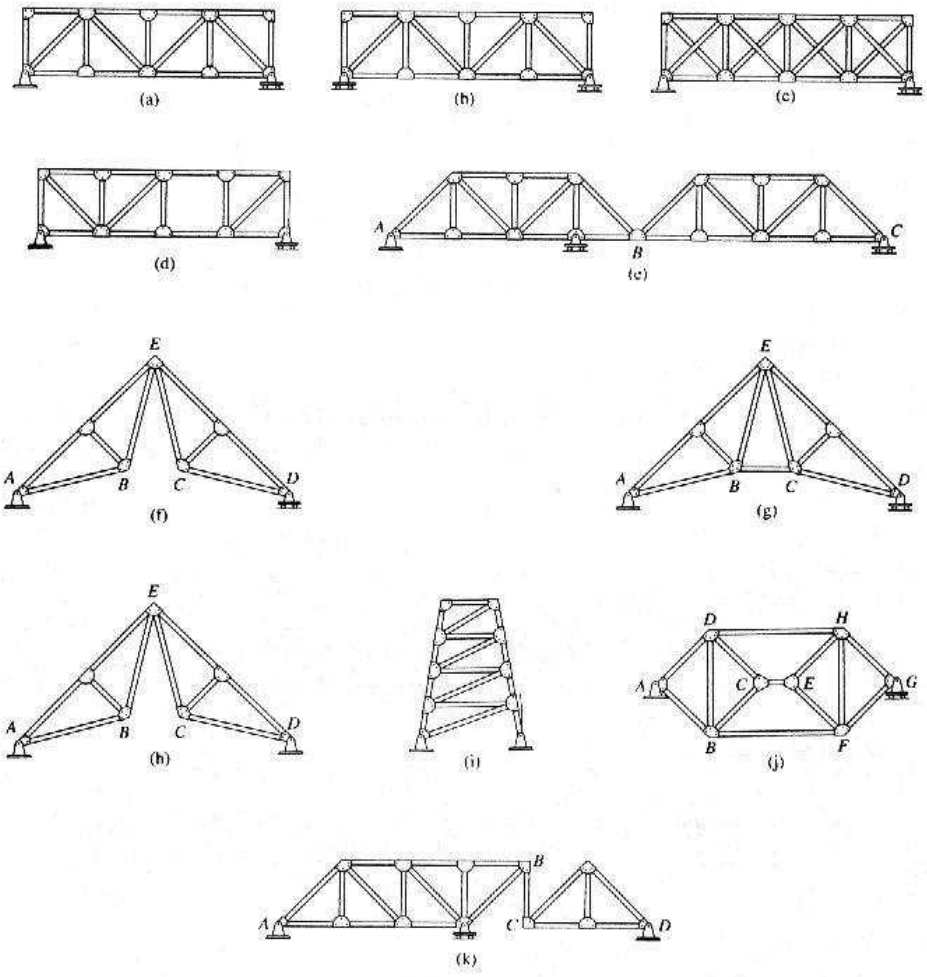
(e) خرپا ناپایدار داخلی است. $J = ۱۵ \Rightarrow ۲J = ۳۰ \;,\; m = ۲۶ \;,\; m + ۳ < ۲J$

(f) خرپا پایدار داخلی است. $J=۱۵ \Rightarrow ۲J=۳۰ \ , \ m=۲۷ \ , \ m+۳=۲J \Rightarrow$

(g) خرپا ناپایدار داخلی است. $J=۱۰ \Rightarrow ۲J=۲۰ \ , \ m=۱۶ \ , \ m+۳<۲J \Rightarrow$

(h) خرپا پایدار داخلی است. $J=۱۰ \Rightarrow ۲J=۲۰ \ , \ m=۱۷ \ , \ m+۳=۲J \Rightarrow$

۲-۲ هر یک از خرپاهای نشان داده شده در شکل زیر را تحت عنوان ناپایدار، معین و نامعین استاتیکی دسته‌بندی کنید. اگر خرپا نامعین است، درجهٔ نامعینی آن را تعیین کنید.



شکل ۲-۲

(a) $e_c=۰ \Rightarrow r=۳+e_c=۳ \ , \ J=۱۰ \Rightarrow ۲J=۲۰ \ , \ m=۱۷ \Rightarrow m+r=۲۰ \ , \ R=۳$

$R=r \ , \ ۲J=m+r \Rightarrow$ خرپا معین خارجی و داخلی است.

(b) $e_c=۰ \Rightarrow r=۳+e_c=۳ \ , \ J=۱۰ \Rightarrow ۲J=۲۰ \ , \ m=۱۷ \Rightarrow m+r=۲۰ \ , \ R=۲$

$R<r$ ⇒ خرپا ناپایدار استاتیکی است.

(c) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3$, $J=10 \Rightarrow 2J=20$, $m=21 \Rightarrow m+r=24$, $R=3$

$R=r$, $2J<m+r$ ⇒ خرپا معین خارجی و نامعین داخلی است. , $i_i=(m+r)-2J=24-20=4$

(d) $e_c=1 \Rightarrow r=3+e_c=4$, $J=10 \Rightarrow 2J=20$, $m=16 \Rightarrow m+r=20$, $R=3$

$R<r$ ⇒ خرپا ناپایدار استاتیکی است.

(e) $e_c=1 \Rightarrow r=3+e_c=4$, $J=15 \Rightarrow 2J=30$, $m=26 \Rightarrow m+r=30$, $R=4$

$R=r$, $2J=m+r$ ⇒ خرپا معین خارجی و داخلی است.

(f) $e_c=1 \Rightarrow r=3+e_c=4$, $J=7 \Rightarrow 2J=14$, $m=10 \Rightarrow m+r=14$, $R=3$

$R<r$ ⇒ خرپا ناپایدار استاتیکی است.

(g) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3$, $J=7 \Rightarrow 2J=14$, $m=11 \Rightarrow m+r=14$, $R=3$

$R=r$, $2J=m+r$ ⇒ خرپا معین خارجی و داخلی است.

(h) $e_c=1 \Rightarrow r=3+e_c=4$, $J=7 \Rightarrow 2J=14$, $m=10 \Rightarrow m+r=14$, $R=4$

$R=r$, $2J=m+r$ ⇒ خرپا معین خارجی و داخلی است.

(i) $e_c=1 \Rightarrow r=3+e_c=4$, $J=10 \Rightarrow 2J=20$, $m=16 \Rightarrow m+r=20$, $R=4$

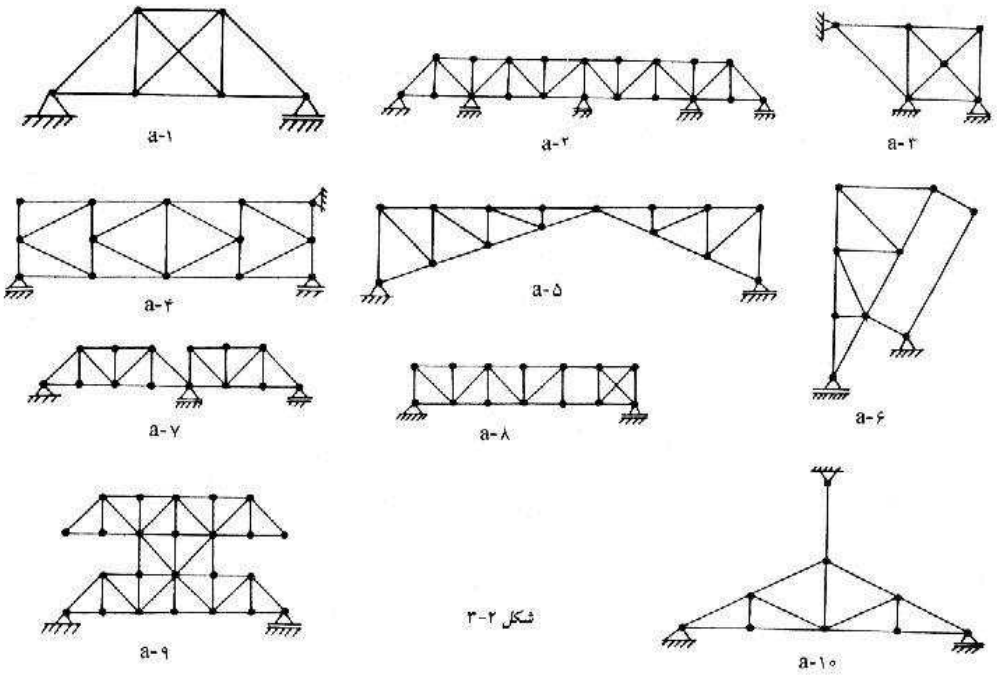
$R=r$, $2J=m+r$ ⇒ خرپا معین خارجی و داخلی است.

(j) خرپا ناپایدار هندسی است. چراکه دو قطعهٔ صلب ABCD و EFGH توسط سه میلهٔ موازی به یکدیگر متصل شده‌اند.

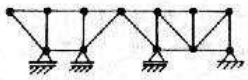
(k) $e_c=2 \Rightarrow r=3+e_c=5$, $J=12 \Rightarrow 2J=24$, $m=19 \Rightarrow m+r=24$, $R=5$

$R=r$, $2J=m+r$ ⇒ خرپا معین خارجی و داخلی است.

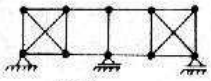
۲-۳ هر یک از خرپاهای نشان داده شده در اشکال زیر را تحت عنوان خرپاهای پایدار، ناپایدار، معین و یا نامعین استاتیکی دسته‌بندی کنید. اگر خرپا نامعین است، درجهٔ نامعینی آن را تعیین کنید.



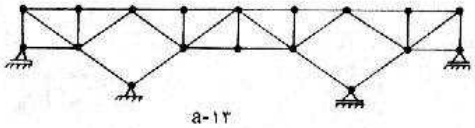
شکل ۲-۳



a-۱۱



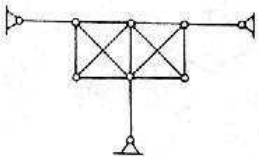
a-۱۲



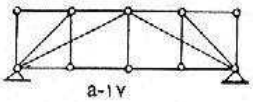
a-۱۳



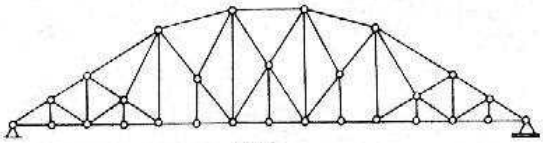
a-۱۴



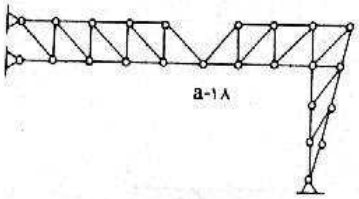
a-۱۵



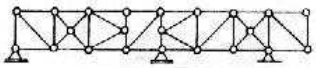
a-۱۷



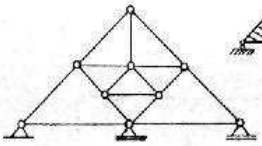
a-۱۶



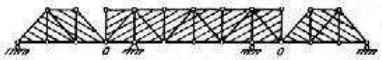
a-۱۸



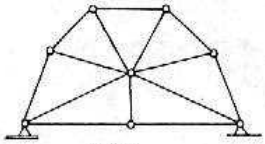
a-۱۹



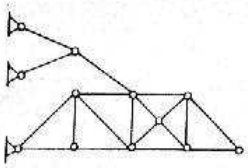
a-۲۰



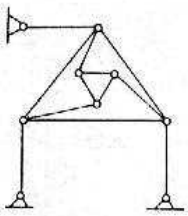
a-۲۱



a-۲۲

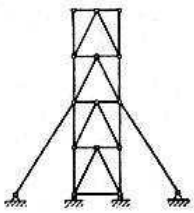


a-۲۳

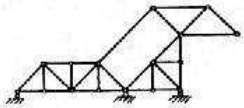


a-۲۴

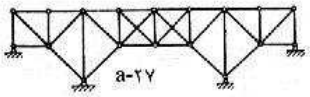
ادامهٔ شکل ۲-۳



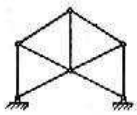
a-۲۵



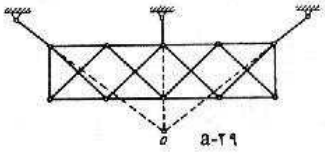
a-۲۶



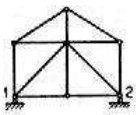
a-۲۷



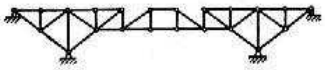
a-۲۸



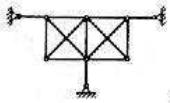
a-۲۹



a-۳۰



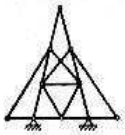
a-۳۱



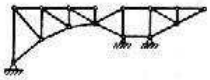
a-۳۲



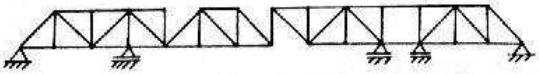
a-۳۳



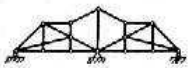
a-۳۴



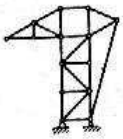
a-۳۶



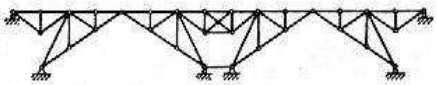
a-۳۵



a-۳۷

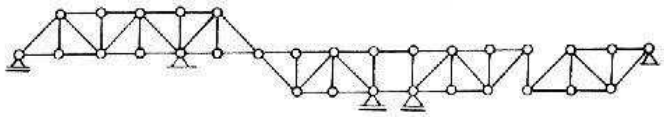


a-۳۸

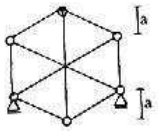


a-۳۹

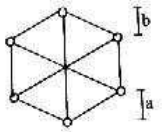
ادامهٔ شکل ۲-۳



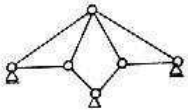
a-۴۰



a-۴۱



a-۴۲



a-۴۳

ادامهٔ شکل ۲-۳

(a-۱) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=6 \Rightarrow 2J=12 \;,\; m=10 \Rightarrow m+r=13 \;,\; R=3$

$R=r \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خرپا معین خارجی و نامعین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2J=13-12=1$

(a-۲) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=20 \Rightarrow 2J=40 \;,\; m=37 \Rightarrow m+r=40 \;,\; R=6$

$R>r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خرپا نامعین خارجی و معین داخلی است. $\;,\; i_e=R-r=6-3=3$

(a-۳) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=6 \Rightarrow 2J=12 \;,\; m=10 \Rightarrow m+r=13 \;,\; R=5$

$R>r \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خرپا نامعین خارجی و نامعین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2J=13-12=1 \;,\; i_e=R-r=5-3=2$

(a-۴) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=14 \Rightarrow 2J=28 \;,\; m=25 \Rightarrow m+r=28 \;,\; R=4$

$R>r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خرپا نامعین خارجی و معین داخلی است. $\;,\; i_e=4-3=1$

(a-۵) $e_c=1 \Rightarrow r=3+e_c=4 \;,\; J=15 \Rightarrow 2J=15 \;,\; m=26 \Rightarrow m+r=30 \;,\; R=3$

$R<r \Rightarrow$ خرپا ناپایدار استاتیکی است.

(a-۶) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=9 \Rightarrow 2J=18 \;,\; m=14 \Rightarrow m+r=17 \;,\; R=3$

$R=r \;,\; 2J>m+r \Rightarrow$ خرپا ناپایدار استاتیکی است.

(a-۷) $e_c=1 \Rightarrow r=3+e_c=4 \;,\; J=14 \Rightarrow 2J=28 \;,\; m=24 \Rightarrow m+r=24 \;,\; R=4$

$R=r \;,\; 2J+m+r \Rightarrow$ خرپا معین خارجی و داخلی است.

(a-۸) $e_c=1 \Rightarrow r=3+e_c=4 \;,\; J=14 \Rightarrow 2J=14 \;,\; m=25 \Rightarrow m+r=29 \;,\; R=3$

$R<r \Rightarrow$ خرپا ناپایدار استاتیکی است.

(a-۹) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=24 \Rightarrow 2J=48 \;,\; m=47 \Rightarrow m+r=50 \;,\; R=3$

$R=r \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خرپا معین خارجی و نامعین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2J=50-48=2$

(a-۱۰) $e_c=1 \Rightarrow r=3+e_c=4 \;,\; J=9 \Rightarrow 2J=18 \;,\; m=14 \Rightarrow m+r=18 \;,\; R=5$

$R>r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خرپا نامعین خارجی و معین داخلی است. $\;,\; i_e=R-r=5-4=1$

(a-۱۱) $e_c=2 \Rightarrow r=3+e_c=5 \;,\; J=12 \Rightarrow 2J=24 \;,\; m=19 \Rightarrow m+r=24 \;,\; R=5$

$R=r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خرپا معین خارجی و داخلی است.

(a-۱۲) $e_c=2 \Rightarrow r=5 \;,\; J=10 \Rightarrow 2J=20 \;,\; m=17 \Rightarrow m+r=22 \;,\; R=4$

$R<r \Rightarrow$ خرپا ناپایدار استاتیکی است.

(a-۱۳) خرپا ناپایدار هندسی است.

(a-۱۴) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=14 \Rightarrow 2J=28 \;,\; m=26 \Rightarrow m+r=29 \;,\; R=3$

$R=r \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خرپا معین خارجی و نامعین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2J=29-28=1$

(a-۱۵) خربا ناپایدار هندسی است، چراکه سه واکنش تکیه‌گاهی موجود متقارنند.

(a-۱۶) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=28 \Rightarrow 2J=56 \;,\; m=56 \Rightarrow m+r=59 \;,\; R=3$

$R=r \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خربا نامعین خارجی و نامعین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2J=59-56=3$

(a-۱۷) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=10 \Rightarrow 2J=20 \;,\; m=17 \Rightarrow m+r=20 \;,\; R=3$

$R=r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خربا معین خارجی و داخلی است.

(a-۱۸) خربا ناپایدار آنی است. چراکه یک گره توسط دو میلهٔ همراستا به خربا متصل شده است.

(a-۱۹) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=22 \Rightarrow 2J=44 \;,\; m=43 \Rightarrow m+r=46 \;,\; R=4$

$R>r \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خربا نامعین خارجی و نامعین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2J=46-44=2 \;,\; i_e=R-r=4-3=1$

(a-۲۰) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=9 \Rightarrow 2J=18 \;,\; m=16 \Rightarrow m+r=19 \;,\; R=4$

$R>3 \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خربا نامعین خارجی و نامعین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2J=19-18=1 \;,\; i_e=R-r=4-3=1$

(a-۲۱) $e_c=2 \Rightarrow r=3+e_c=5 \;,\; J=24 \Rightarrow 2J=48 \;,\; m=43 \Rightarrow m+r=48 \;,\; R=5$

$R=r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خربا معین خارجی و داخلی است.

(a-۲۲) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=8 \Rightarrow 2J=16 \;,\; m=14 \Rightarrow m+r=17 \;,\; R=3$

$R=r \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خربا معین خارجی و نامعین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2J=17-16=1$

(a-۲۳) $e_c=3 \Rightarrow r=3+e_c=6 \;,\; J=12 \Rightarrow 2J=24 \;,\; m=19 \Rightarrow m+r=25 \;,\; R=6$

$R=r \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خربا معین خارجی و نامعین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2J=25-24=1$

(a-۲۴) $e_c=3 \Rightarrow r=3+e_c=6 \;,\; J=9 \Rightarrow 2J=18 \;,\; m=12 \Rightarrow m+r=18 \;,\; R=6$

$R=r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خربا معین خارجی و داخلی است.

(a-۲۵) $e_c=2 \Rightarrow r=3+e_c=5 \;,\; J=16 \Rightarrow 2J=32 \;,\; m=27 \Rightarrow m+r=32 \;,\; R=6$

$R>r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خربا نامعین خارجی و معین داخلی است. $\;,\; i_e=R-r=6-5=1$

(a-۲۶) $e_c=1 \Rightarrow r=3+e_c=4 \;,\; J=16 \Rightarrow 2J=32 \;,\; m=28 \Rightarrow m+r=32 \;,\; R=4$

$R=r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خربا معین خارجی و داخلی است.

(a-۲۷) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=18 \Rightarrow 2J=36 \;,\; m=35 \Rightarrow m+r=38 \;,\; R=5$

$R>r \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خربا نامعین خارجی و نامعین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2J=38-36=2 \;,\; i_e=R-r=5-3=2$

(a-۲۸) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=6 \Rightarrow 2J=12 \;,\; m=9 \Rightarrow m+r=12 \;,\; R=4$

$R>r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خربا نامعین خارجی و معین داخلی است. $\;,\; i_e=R-r=4-3=1$

(a-۲۹) خربا ناپایدار هندسی است، چراکه سه واکنش تکیه‌گاهی موجود متقارنند.

(a-۳۰) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=7 \Rightarrow 2J=14 \;,\; m=12 \Rightarrow m+r=15 \;,\; R=2$

$R<r \Rightarrow$ خربا ناپایدار استاتیکی است.

(a-۳۱) $e_c=3 \Rightarrow r=3+e_c=6 \;,\; J=22 \Rightarrow 2J=44 \;,\; m=37 \Rightarrow m+r=43 \;,\; R=6$

$R=r \;,\; 2J>m+r \Rightarrow$ خربا ناپایدار استاتیکی است.

(a-۳۲) خربا ناپایدار هندسی است، زیرا سه واکنش تکیه‌گاهی موجود متقارنند.

(a-۳۳) $e_c=2 \Rightarrow r=3+e_c=5 \;,\; J=14 \Rightarrow 2J=28 \;,\; m=25 \Rightarrow m+r=30 \;,\; R=4$

$R<r \Rightarrow$ خربا ناپایدار استاتیکی است.

(a-۳۴) $e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=10 \Rightarrow 2J=20 \;,\; m=17 \Rightarrow m+r=20 \;,\; R=4$

$R>r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خربا نامعین خارجی و معین داخلی است. $\;,\; i_e=R-r=4-3=1$

(a-۳۵) $e_c=4 \Rightarrow r=3+e_c=7 \;,\; J=28 \Rightarrow 2J=56 \;,\; m=49 \Rightarrow m+r=56 \;,\; R=7$

$R=r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خربا معین خارجی و داخلی است.

(a-۳۶) $e_c=2 \Rightarrow r=3+e_c=5 \;,\; J=15 \Rightarrow 2J=30 \;,\; m=25 \Rightarrow m+r=30 \;;\; R=5$

$R=r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خربا معین خارجی و داخلی است.

$e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=14 \Rightarrow 2J=28 \;,\; m=25 \Rightarrow m+r=28 \;,\; R=4$ (a-۳۷)

$R>r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خرپا نامعین خارجی و معین داخلی است. $\;,\; i_e=R-r=4-3=1$

$e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=14 \Rightarrow 2J=28 \;,\; m=25 \Rightarrow m+r=28 \;,\; R=3$ (a-۳۸)

$R=r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خرپا معین خارجی و داخلی است.

$e_c=5 \Rightarrow r=3+e_c=8 \;,\; J=32 \Rightarrow 2J=64 \;,\; m=57 \Rightarrow m+r=65 \;,\; R=8$ (a-۳۹)

$R=r \;,\; 2J<m+r \Rightarrow$ خرپا نامعین خارجی و معین داخلی است. $\;,\; i_i=(m+r)-2j=65-64=1$

$e_c=2 \Rightarrow r=3+e_c=7 \;,\; J=31 \Rightarrow 2J=62 \;,\; m=55 \Rightarrow m+r=62 \;,\; R=7$ (a-۴۰)

$R=r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خرپا معین خارجی و داخلی است.

(a-۴۱) خرپا ناپایدار هندسی است.

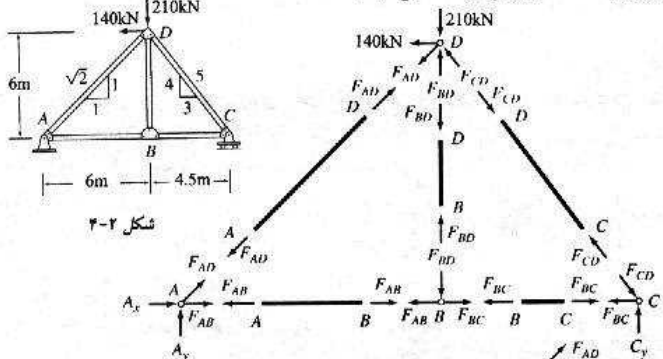
$e_c=0 \Rightarrow r=3+e_c=3 \;,\; J=6 \Rightarrow 2J=12 \;,\; m=9 \Rightarrow m+r=12 \;,\; R=3$ (a-۴۲)

$R=r \;,\; 2J=m+r \Rightarrow$ خرپا معین خارجی و داخلی است.

(a-۴۳) خرپا ناپایدار هندسی است.

۲-۴ خرپای سادهٔ نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش گره‌ها تحلیل کنید.

شکل ۲-۴



$\pm\sum F_x=0 \;:\; A_x-140=0$

$\blacktriangleright \vec{A}_x=140 \;\; kN \rightarrow$

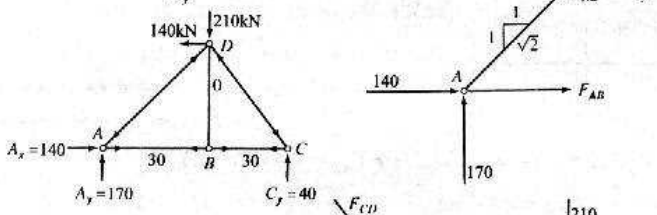
$+\circlearrowleft \sum M_C=0 \;:$

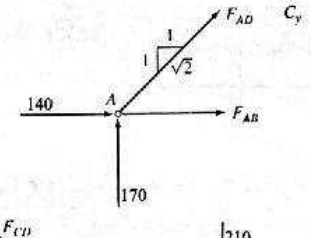
$-A_y(10/5)+140(6)+210(4/5)=0$

$\blacktriangleright \vec{A}_y=170 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow\sum F_y=0 \;:\; 170-210+C_y=0$

$\blacktriangleright \vec{C}_y=40 \;\; kN \uparrow$





$+\uparrow\sum F_y^A=0 \;:\; F_{AD}\frac{\sqrt{2}}{2}+170=0$

$F_{AD}=-240/42 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{AD}=240/42 \;\; kN \;\; (C)$

● علامت (C) برای اعضای فشاری و علامت (T) برای اعضای کششی به کار می‌رود.

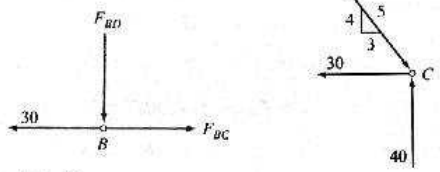
● بالانویس ○، در روابط $\sum F_y^\circ$ و $\sum F_x^\circ$، نشان دهندهٔ گره‌ای است که روابط مزبور برای آن نوشته شده‌اند.

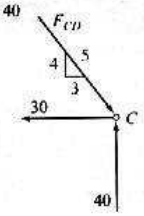
$\pm\sum F_x^A=0 \;:$

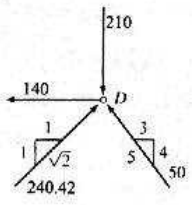
$140-240/42\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]+F_{AB}=0$

$F_{AB}=+30 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{AB}=30 \;\; kN \;\; (T)$







$+\uparrow\sum F_y^B=0 \;:\; -F_{BD}=0 \Rightarrow F_{BD}=0$ $\qquad \blacktriangleright F_{BD}=0$

$\pm\sum F_x^B=0 \;:\; F_{BC}-30=0 \Rightarrow F_{BC}=+30 \;\; kN$ $\qquad \blacktriangleright F_{BC}=30 \;\; kN \;\; (T)$

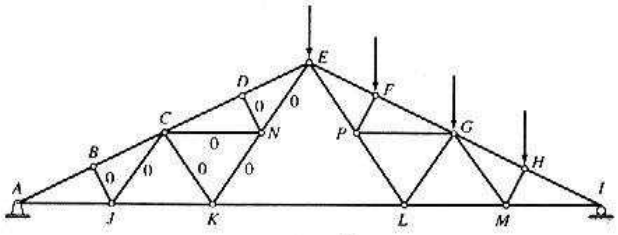
$+\uparrow\sum F_y^C=0 \;:\; 40-\frac{4}{5}F_{CD}=0 \Rightarrow F_{CD}=+50 \;\; kN$ $\qquad \blacktriangleright F_{CD}=50 \;\; kN \;\; (C)$

کنترل محاسبات:

$\pm\rightarrow \sum F_x^C = 50\left[\frac{3}{5}\right] - 30 = 0$ O.K.

$\pm\rightarrow \sum F_x^D = -140 + 240/\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - 50\left[\frac{3}{5}\right] = 0$ O.K. ، $+\uparrow \sum F_y^D = 240/\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - 210 + 50\left[\frac{4}{5}\right] = 0$ O.K.

۲-۵ در خرپای فینک نشان داده شده در شکل زیر که تحت اثر بار نامتعادل برف قرار دارد، اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید.



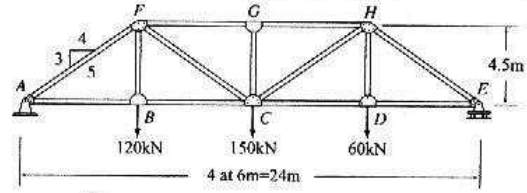
شکل ۲-۵

در گره B، سه عضو AB، BC و BJ به یکدیگر متصل شده‌اند. دو عضو AB و BC همراستا هستند و هیچ نیروی خارجی بر این گره وارد نمی‌شود، پس عضو BJ صفر - نیرویی است ($F_{BJ} = 0$). در گره D به دلیلی مشابه، عضو DN نیز صفر - نیرویی خواهد بود ($F_{DN} = 0$).

در گره J، چهار عضو AJ، BJ، CJ و JK به یکدیگر متصل شده‌اند. همان طور که گفته شد، عضو BJ صفر - نیرویی است. پس در گره J، سه عضو AJ، CJ و JK به یکدیگر متصل شده‌اند که اعضای AJ و JK همراستایند. همچنین در گره J هیچ نیروی خارجی وارد نمی‌شود، پس عضو CJ باید صفر - نیرویی باشد ($F_{CJ} = 0$).

در گره N به دلیلی مشابه، صفر - نیرویی بودن عضو CN مشخص است ($F_{CN} = 0$). با به کارگیری اصول بیان شده در بالا برای گره C، صفر - نیرویی بودن عضو CK نیز مشخص خواهد شد ($F_{CK} = 0$).

۲-۶ با استفاده از روش گره‌ها، نیروهای داخلی اعضای خرپای وارن نشان داده شده در شکل زیر را تعیین کنید.



شکل ۲-۶

در گره G سه عضو CG، HG و FG به یکدیگر متصل شده‌اند. دو عضو HG و FG همراستایند و هیچ نیروی خارجی به این گره وارد نمی‌شود. پس عضو CG صفر - نیرویی است: $\blacktriangleright \vec{F}_{CG} = 0$

$+) \sum M_A = 0 \;:\; E_y(24) - 60(18) - 150(12) - 120(6) = 0$

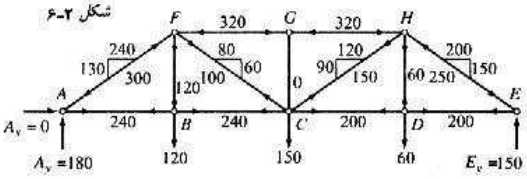
$E_y = 150 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y = 150 \;\; kN \uparrow$

$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - 120 - 150 - 60 + 150 = 0$

$A_y = 180 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 180 \;\; kN \uparrow$

در نوشتن روابط تعادل همهٔ اعضا کششی فرض شده‌اند. منفی بودن علامت نشان دهندهٔ این است که عضو فشاری است.



$+\uparrow \sum F_y^A = 0 \;:\; 180 + \frac{3}{5}F_{AF} = 0 \Rightarrow F_{AF} = -300 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{AF} = 300 \;\; kN \;\; (C)$

$\pm\rightarrow \sum F_x^A = 0 \;:\; 0 + F_{AB} - 300\left[\frac{4}{5}\right] = 0 \Rightarrow F_{AB} = +240 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{AB} = 240 \;\; kN \;\; (T)$

$+\uparrow \sum F_y^B = 0 \;:\; -120 + F_{BF} = 0 \Rightarrow F_{BF} = +120 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{BF} = 120 \;\; kN \;\; (T)$

$\pm\rightarrow \sum F_x^B = 0 \;:\; -240 + F_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BC} = +240 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{BC} = 240 \;\; kN \;\; (T)$

$+\uparrow \sum F_y^F = 0 \;:\; -120 + 300\left[\frac{3}{5}\right] - \frac{3}{5}F_{FC} = 0 \Rightarrow F_{FC} = +100 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{FC} = 100 \;\; kN \;\; (T)$

$\pm\rightarrow \sum F_x^F = 0 \;:\; 300\left[\frac{4}{5}\right] + 100\left[\frac{4}{5}\right] + F_{FG} = 0 \Rightarrow F_{FG} = -320 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{FG} = 320 \;\; kN \;\; (C)$

$\pm\rightarrow \sum F_x^G = 0 \;:\; 320 + F_{GH} = 0 \Rightarrow F_{GH} = -320 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{GH} = 320 \;\; kN \;\; (C)$

$+\uparrow \sum F_y^E = 0 \;:\; 150 + \frac{3}{5}F_{HE} = 0 \Rightarrow F_{HE} = -250 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{HE} = 250 \;\; kN \;\; (C)$

$\pm\rightarrow \sum F_x^E = 0 \;:\; 250\left[\frac{4}{5}\right] - F_{ED} = 0 \Rightarrow F_{ED} = +200 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{ED} = 200 \;\; kN \;\; (T)$

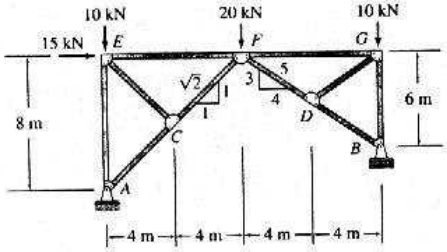
$+\uparrow \sum F_y^D = 0 \;:\; F_{HD} - 60 = 0 \Rightarrow F_{HD} = +60 \;\; kN$ $\quad \blacktriangleright F_{HD} = 60 \;\; kN \;\; (T)$

$\pm \rightarrow \sum F_x^D = 0 \;:\; 200 - F_{CD} = 0 \Rightarrow F_{CD} = +200 \;\; kN$ $\quad \blacktriangleright F_{CD} = 200 \;\; kN \;\; (T)$

$+\uparrow \sum F_y^H = 0 \;:\; \frac{3}{5}(250) - \frac{3}{5}F_{CH} - 60 = 0 \Rightarrow F_{CH} = +150 \;\; kN$ $\quad \blacktriangleright F_{CH} = 150 \;\; kN \;\; (T)$

$\pm \rightarrow \sum F_x^H = 0 \;:\; -F_{GH} - \frac{4}{5}(150) - \frac{4}{5}(250) = 0 \Rightarrow F_{GH} = -320 \;\; kN$ $\quad \blacktriangleright F_{GH} = 320 \;\; kN \;\; (C)$

۲-۷ با استفاده از روش گره‌ها، نیروهای داخلی قوس خرپایی سه مفصلی نشان داده شده در شکل زیر را تعیین کنید.



شکل ۲-۷

در گره C، سه عضو CF، CA و CB به یکدیگر متصل شده‌اند. دو عضو CA و CF همراستایند و هیچ نیروی خارجی بر گره C وارد نمی‌شود، پس عضو CE صفر - نیرویی است:

$\blacktriangleright F_{CE} = 0$

در گره D، سه عضو DF، DB و DG به یکدیگر متصل شده‌اند. دو عضو DF و DB همراستایند و هیچ نیروی خارجی بر گره D وارد نمی‌شود، پس عضو DG نیز، صفر - نیرویی است:

$\blacktriangleright F_{DG} = 0$

$\pm \rightarrow \sum F_x^E = 0 \;:\; 15 + F_{EF} = 0 \Rightarrow F_{EF} = -15 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{EF} = 15 \;\; kN \;\; (C)$

$+\uparrow \sum F_y^E = 0 \;:\; -10 - F_{EA} = 0 \Rightarrow F_{EA} = -10 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{EA} = 10 \;\; kN \;\; (C)$

$\pm \rightarrow \sum F_x^G = 0 \;:\; F_{FG} = 0$ $\quad \blacktriangleright F_{FG} = 0$

$+\uparrow \sum F_y^G = 0 \;:\; -10 - F_{BG} = 0 \Rightarrow F_{BG} = -10 \;\; kN$

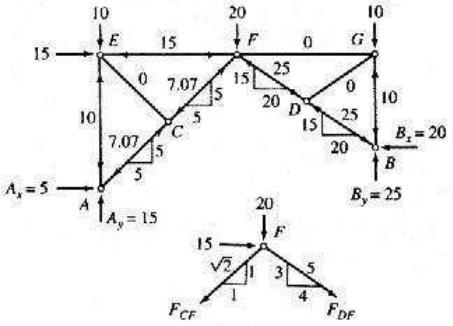
$\blacktriangleright F_{BG} = 10 \;\; kN \;\; (C)$

$\pm \rightarrow \sum F_x^F = 0 \;:\; 15 + 0 - F_{CF}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + F_{DF}\left[\frac{4}{5}\right] = 0$

$5\sqrt{2}F_{CF} - 8F_{DF} = 150 \qquad (I)$

$+\uparrow \sum F_y^F = 0 \;:\; -20 - F_{CF}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - F_{DF}\left[\frac{3}{5}\right] = 0$

$5\sqrt{2}F_{CF} + 6F_{DF} = -200 \qquad (II)$



از حل همزمان معادلات (I) و (II) مقادیر F_{CF} و F_{DF} به دست می‌آیند:

$F_{CF} = -7/07 \;\; kN \;\; , \;\; F_{DF} = -25 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{CF} = 7/07 \;\; kN \;\; (C) \;\; , \;\; \blacktriangleright F_{DF} = 25 \;\; kN \;\; (C)$

با توجه به این که در گره C دو عضو CF و CA همراستا بوده و عضو CE نیز صفر - نیرویی است، پس:

$\blacktriangleright F_{CA} = 7/07 \;\; kN \;\; (C)$

با توجه به این که در گره D، دو عضو DF و DB همراستا بوده و عضو DG نیز صفر - نیرویی است، پس:

$\blacktriangleright F_{DB} = 25 \;\; kN \;\; (C)$

با نوشتن معادلات تعادل برای گره‌های A و B واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست می‌آوریم:

$\pm \rightarrow \sum F_x^A = 0 \;:\; A_x - 7/07\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0 \Rightarrow A_x = 5 \;\; kN$ $\quad \blacktriangleright \vec{A}_x = 5 \;\; kN \rightarrow$

$+\uparrow \sum F_y^A = 0 \;:\; A_y - 7/07\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - 10 = 0 \Rightarrow A_y = 15 \;\; kN$ $\quad \blacktriangleright \vec{A}_y = 15 \;\; kN \uparrow$

$\pm \rightarrow \sum F_x^B = 0 \;:\; B_x + 25\left[\frac{4}{5}\right] = 0 \Rightarrow B_x = -20 \;\; kN$ $\quad \blacktriangleright \vec{B}_x = 20 \;\; kN \leftarrow$

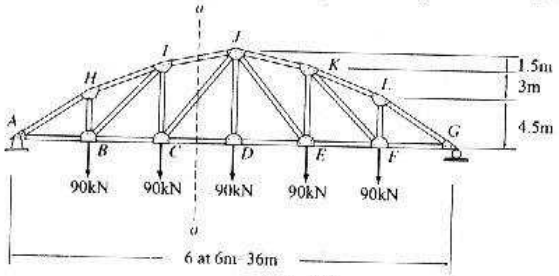
$+\uparrow \sum F_y^B = 0 \;:\; B_y - 25\left[\frac{3}{5}\right] - 10 = 0 \Rightarrow B_y = 25 \;\; kN$ $\quad \blacktriangleright \vec{B}_y = 25 \;\; kN \uparrow$

کنترل محاسبات:

$\pm \rightarrow \sum F_x = 15 + 5 - 20 = 0 \quad O.K. \;\; , \;\; +\uparrow \sum F_y = 15 + 25 - 10 - 20 - 10 = 0 \quad O.K.$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 5(32) - 15(16) - 15(6) + 10(16) + 20(8) = 0 \quad O.K.$

۲-۸ با استفاده از روش مقاطع، نیروهای داخلی اعضای CJ و IJ از خرپای نشان داده شده در شکل زیر را تعیین کنید.



شکل ۲-۸

$$+\circlearrowleft \sum M_G = 0 \quad :$$

$$90(6+12+18+24+30) - A_y(36) = 0$$

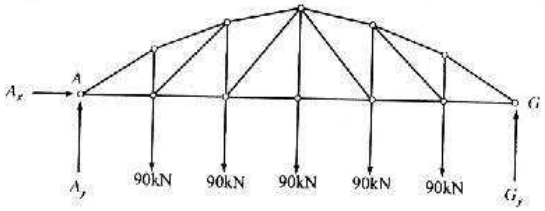
$$A_y = 225 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 225 \ kN \uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad G_y + 225 - 5(90) = 0$$

$$G_y = 225 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{G}_y = 225 \ kN \uparrow$$

مقطع a-a، اعضای IJ، CJ و CD را قطع کرده و خرپا را به دو قسمت ACI و DGI تقسیم می‌کند. برای محاسبهٔ نیروی داخلی در اعضای CJ و IJ از قسمت ACI استفاده می‌کنیم:

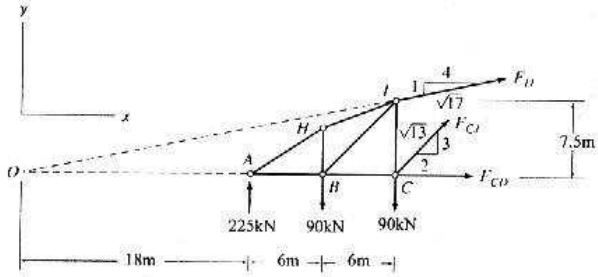


$$+\circlearrowleft \sum M_C^{ACI} = 0 \quad :$$

$$-225(12) + 90(6) - F_{IJ}\left[\frac{4}{\sqrt{17}}\right](7/5) = 0$$

$$F_{IJ} = -296/86 \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{IJ} = 296/86 \ kN \quad (C)$$



$$+\circlearrowleft \sum M_o^{ACI} = 0 \quad :$$

$$225(18) - 90(24) - 90(30) +$$

$$F_{CJ}\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right](30) = 0 \ \Rightarrow \ F_{CJ} = 32/45 \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{CJ} = 32/45 \ kN \quad (T)$$

کنترل محاسبات:

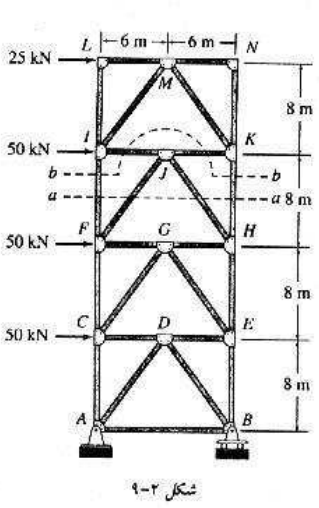
$$+\uparrow \sum F_y^{ACI} = 225 - 90 - 90 - 296/86\left[\frac{1}{\sqrt{17}}\right] + 32/45\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right] = 0 \qquad O.K.$$

۲-۹ نیروی داخلی اعضای FJ، HJ و HK از خرپای K نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش مقاطع تعیین کنید.

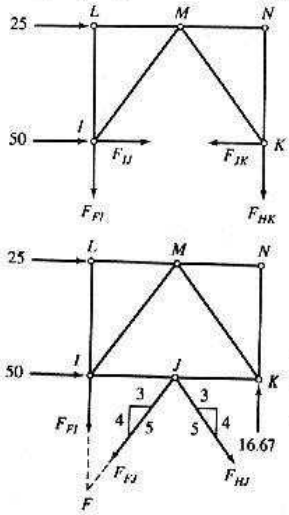
همان طور که در شکل مقابل دیده می‌شود، مقطع a-a سه عضو مورد نظر (FJ، HJ و HK) و یک عضو اضافی دیگر (FI) را قطع می‌کند. با توجه به وجود سه معادلهٔ تعادل و چهار مجهول، مشخص کردن نیروی داخلی اعضا با استفاده از مقطع a-a میسر نیست.

در خرپاهای مشابه با این خرپا که در آنها آرایش اعضا به شکل حرف K است، برای تحلیل خرپا از مقاطع منحنی شکل مانند مقطع b-b که در شکل نشان داده شده است، استفاده می‌کنیم.

برای اجتناب از محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی از بخش فوقانی IKNL استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب با استفاده از مقطع b-b ابتدا نیروی داخلی اعضای HK و FI را محاسبه کرده، سپس با توجه به مقطع a-a، نیروی داخلی اعضای FJ و HJ را به دست می‌آوریم.



شکل ۲-۹



مقطع b-b:

$+\circlearrowleft \sum M_I^{IKNL} = 0 \;:\; -۲۵(۸) - F_{HK}(۱۲) = 0 \;\Rightarrow\; F_{HK} = -۱۶/۶۷ \;kN \qquad \blacktriangleright F_{HK} = ۱۶/۶۷ \;kN \;\; (C)$

مقطع a-a:

$+\circlearrowleft \sum M_F^{IKNL} = 0 \;:\; -۲۵(۱۶) - ۵۰(۸) + ۱۶/۶۷(۱۲) - \frac{۳}{۵}F_{HJ}(۸) - \frac{۴}{۵}F_{HJ}(۶) = 0 \;\Rightarrow\; F_{HJ} = -۶۲/۵ \;kN$

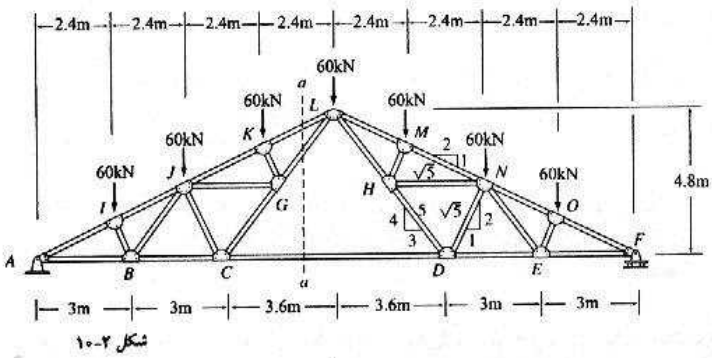
$\blacktriangleright F_{HJ} = ۶۲/۵ \;kN \;\; (C)$

$\pm \rightarrow \sum F_x^{IKNL} = 0 \;:\; ۲۵ + ۵۰ - F_{FJ}\left[\frac{۳}{۵}\right] - ۶۲/۵\left[\frac{۳}{۵}\right] = 0 \;\Rightarrow\; F_{FJ} = +۶۲/۵ \;kN \qquad \blacktriangleright F_{FJ} = ۶۲/۵ \;kN \;\; (T)$

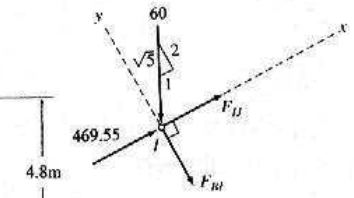
کنترل محاسبات:

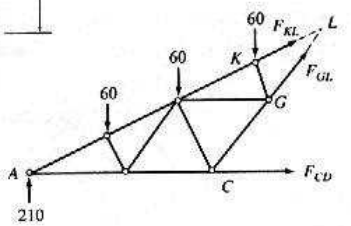
$+\circlearrowleft \sum M_I^{IKNL} = -۲۵(۸) - ۶۲/۵\left[\frac{۴}{۵}\right](۶) + ۶۲/۵\left[\frac{۴}{۵}\right](۶) + ۱۶/۶۷(۱۲) = 0 \qquad O.K.$

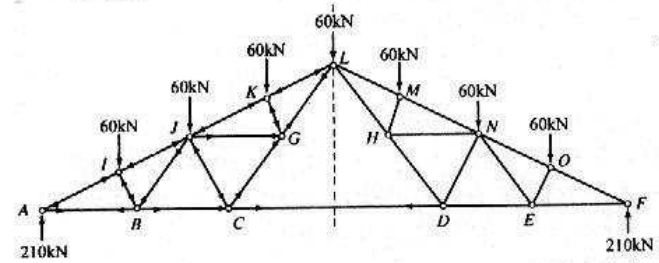
۲-۱۰ نیروهای داخلی اعضای خرپای فینک نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.

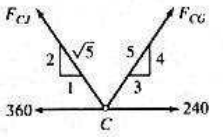


شکل ۲-۱۰









خرپای فینک یک خرپای مرکب است و از دو خرپای سادهٔ ACL و DFL تشکیل شده است که توسط مفصل L و عضو CD به یکدیگر متصل شده‌اند.

$m = ۲۷ \;,\; r = ۳ \;,\; J = ۱۵ \;\Rightarrow\; m + r = ۲J \;\Rightarrow$ خرپا معین استاتیکی است.

$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

به دلیل وجود تقارن در سازه و بارگذاری:

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + F_y - ۷(۶۰) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = F_y = ۲۱۰ \;kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = \vec{F}_y = ۲۱۰ \;kN \uparrow$

برای محاسبهٔ A_y و F_y می‌توان از معادلهٔ $+\circlearrowleft \sum M_F = 0$ نیز استفاده کرد.

$+\uparrow \sum F_y^A = 0 \;:\; ۲۱۰ + F_{AI}\left[\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right] = 0 \;\Rightarrow\; F_{AI} = -۴۶۹/۵۷ \;kN \qquad \blacktriangleright F_{AI} = ۴۶۹/۵۷ \;kN \;\; (C)$

$\pm \rightarrow \sum F_x^A = 0 \;:\; F_{AB} - ۴۶۹/۵۷\left[\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right] = 0 \;\Rightarrow\; F_{AB} = +۴۲۰ \;kN \qquad \blacktriangleright F_{AB} = ۴۲۰ \;kN \;\; (T)$

در گره I دستگاه مختصات محلی $\bar{x}$-$\bar{y}$ را تعریف می‌کنیم، به طوری که محور $\bar{x}$ در امتداد عضو AI (IJ) بوده و محور $\bar{y}$ نیز بر آن عمود باشد.

$+\nwarrow \sum F_{\bar{y}}^I = 0 \;:\; -۶۰\left[\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right] - F_{BI} = 0 \;\Rightarrow\; F_{BI} = -۵۳/۶۵ \;kN \qquad \blacktriangleright F_{BI} = ۵۳/۶۵ \;kN \;\; (C)$

$+\nearrow \sum F_x^I = 0 \;:\; ۴۶۹/۵۷ + F_{IJ} - ۶۰\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; F_{IJ} = -۴۴۲/۷۴ \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{IJ} = ۴۴۲/۷۴ \;\; (C)$

$+\uparrow \sum F_y^B = 0 \;:\; F_{BJ}\left(\frac{۴}{۵}\right) - ۵۳/۶۵\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; F_{BJ} = +۶۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{BJ} = ۶۰ \;\; kN \;\; (T)$

$\pm \sum F_x^B = 0 \;:\; -۴۲۰ + ۵۳/۶۵\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right) + ۶۰\left(\frac{۳}{۵}\right) + F_{BC} = 0 \;\Rightarrow\; F_{BC} = +۳۶۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{BC} = ۳۶۰ \;\; kN \;\; (T)$

در ادامه برای محاسبهٔ نیروی داخلی عضو CD از روش مقاطع استفاده می‌کنیم. مقطع a-a خریا را به دو بخش سمت چپ ACL و سمت راست FDL تقسیم می‌کند. برای محاسبهٔ F_{CD}، در نمودار جسم آزاد ACL، معادلهٔ تعادل لنگر را حول نقطهٔ L می‌نویسیم.

$+\circlearrowleft \sum M_L^{ACL} = 0 \;:\; -۲۱۰(۹/۶) + ۶۰(۷/۲) + ۶۰(۴/۸) + ۶۰(۲/۴) + F_{CD}(۴/۸) = 0 \;\Rightarrow\; F_{CD} = +۲۴۰ \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{CD} = ۲۴۰ \;\; kN \;\; (T)$

$+\uparrow \sum F_y^C = 0 \;:\; F_{CJ}\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right) + F_{CG}\left(\frac{۴}{۵}\right) = 0 \;\Rightarrow\; ۲\sqrt{۵}F_{CJ} + ۴F_{CG} = 0 \qquad (I)$

$\pm \sum F_x^C = 0 \;:\; -۳۶۰ + ۲۴۰ - F_{CJ}\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right) + F_{CG}\left(\frac{۳}{۵}\right) = 0 \;\Rightarrow\; -\sqrt{۵}F_{CJ} + ۳F_{CG} = ۶۰۰ \qquad (II)$

از حل همزمان معادلات (I) و (II)، مقادیر F_{CG} و F_{CJ} به دست می‌آیند:

$F_{CG} = -۱۰۷/۳۳ \;\; kN \;\; , \;\; F_{CJ} = +۱۲۰ \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{CG} = ۱۰۷/۳۳ \;\; kN \;\; (C) \qquad \blacktriangleright F_{CJ} = ۱۲۰ \;\; kN \;\; (T)$

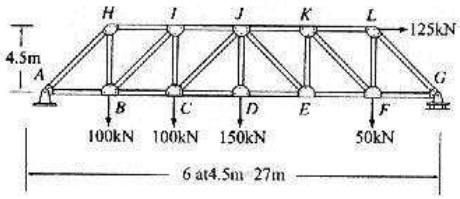
با استفاده از معادلات تعادل در گره‌های J، K و G، مقادیر نیروهای داخلی در سایر اعضا به دست می‌آیند.

$\blacktriangleright F_{JK} = ۴۱۵/۹ \;\; kN \;\; (C) \;\; , \;\; \blacktriangleright F_{GJ} = ۶۰ \;\; kN \;\; (T) \;\; , \;\; \blacktriangleright F_{KL} = ۳۸۹/۰۵ \;\; kN \;\; (C)$

$\blacktriangleright F_{GK} = ۵۳/۶۵ \;\; kN \;\; (C) \;\; , \;\; \blacktriangleright F_{GL} = ۱۸۰ \;\; kN \;\; (T)$

در خریاهای نشان داده شده در مسایل زیر، با استفاده از روش گره‌ها، نیروهای داخلی اعضا را محاسبه کنید.

۲-۱۱



شکل ۲-۱۱

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x - ۱۲۵ = 0 \;\Rightarrow\; A_x = ۱۲۵ \;\; kN$

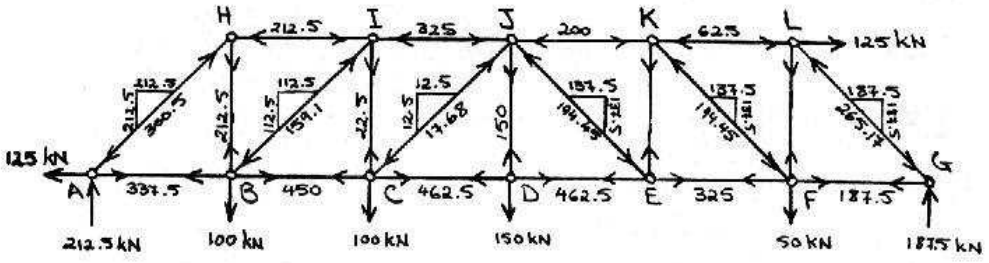
$\blacktriangleright \vec{A}_x = ۱۲۵ \;\; kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; G_y(۲۷) - ۵۰(۲۲/۵) - ۱۵۰(۱۳/۵) - ۱۰۰(۹) - ۱۰۰(۴/۵) - ۱۲۵(۴/۵) = 0 \;\Rightarrow\; G_y = ۱۸۷/۵ \;\; kN$

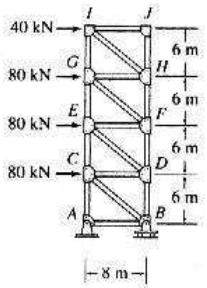
$\blacktriangleright \vec{G}_y = ۱۸۷/۵ \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - ۱۰۰ - ۱۰۰ - ۱۵۰ - ۵۰ + ۱۸۷/۵ = 0$

$A_y = ۲۱۲/۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۲۱۲/۵ \;\; kN \uparrow$



۱۲-۲



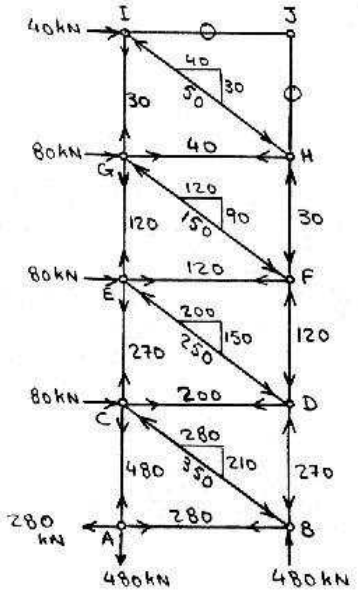
شکل ۲-۱۲

$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x - 3(80) - 40 = 0 \Rightarrow A_x = 280 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 280 \;\; kN \leftarrow$

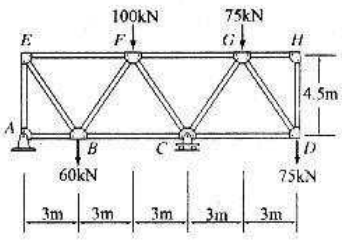
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; B_y(8) - 80(6 + 12 + 18) - 40(24) = 0 \Rightarrow B_y = 480 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{B}_y = 480 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + 480 = 0 \Rightarrow A_y = -480 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 480 \;\; kN \downarrow$



۱۳-۲



شکل ۲-۱۳

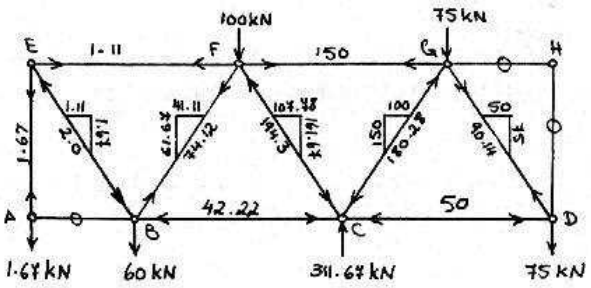
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; C_y(9) - 60(3) - 100(6) - 75(12) - 75(15) = 0$

$C_y = 311/67 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = 311/67 \;\; kN \uparrow$

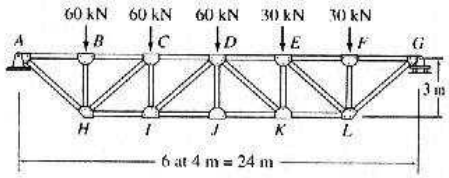
$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + 311/67 - 60 - 100 - 75 - 75 = 0$

$A_y = -1/67 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 1/67 \;\; kN \downarrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$



۱۴-۲



شکل ۲-۱۴

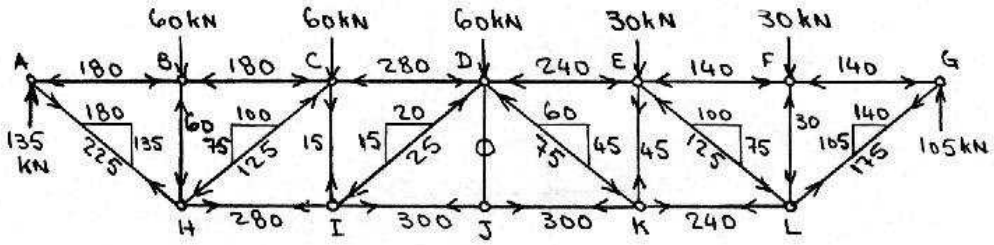
$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; G_y(۲۴) - ۶۰(۴+۸+۱۲) - ۳۰(۱۶+۲۰) = 0$

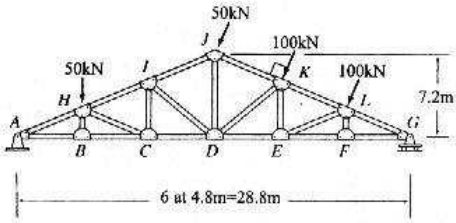
$G_y = ۱۰۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{G}_y = ۱۰۵ \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۱۰۵ - ۳(۶۰) - ۲(۳۰) + A_y = 0$

$A_y = ۱۳۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۳۵ \;\; kN \uparrow$



۱۵-۲



شکل ۲-۱۵

$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x - (۵۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰)\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right) = 0$

$A_x = ۱۱۱/۷۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۱۱۱/۷۵ \;\; kN \rightarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_G = 0 \;:$

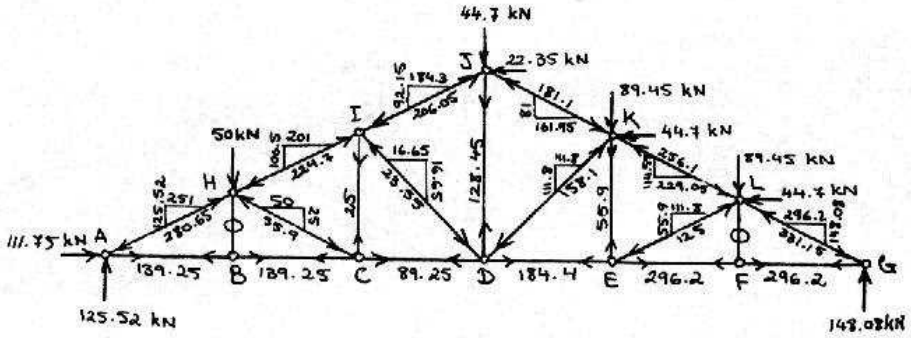
$۵۰(۲۴) + ۵۰(۱۶/۱) + ۱۰۰(۱۰/۷۳) + ۱۰۰(۵/۳۷) - A_y(۲۸/۸) = 0$

$A_y = ۱۲۵/۵۲ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۲۵/۵۲ \;\; kN \uparrow$

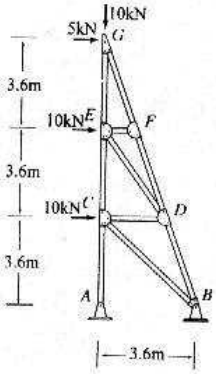
$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:$

$۱۲۵/۵۲ + G_y - ۵۰ - (۵۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰)\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right) = 0$

$G_y = ۱۴۸/۰۸ \qquad \blacktriangleright \vec{G}_y = ۱۴۸/۰۸ \;\; kN \uparrow$



۱۶-۲



شکل ۲-۱۶

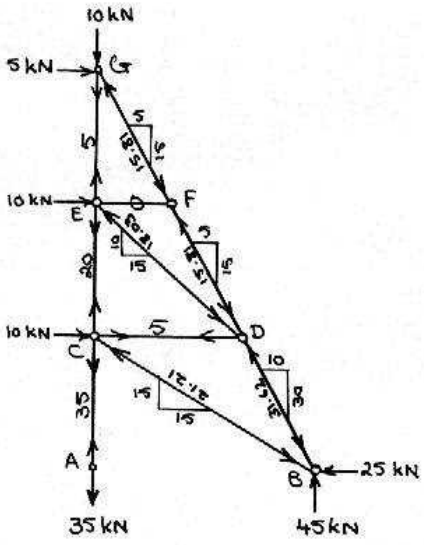
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; A_y(۳/۶) - ۱۰(۳/۶) - ۱۰(۷/۲) - ۵(۱۰/۸) + ۱۰(۳/۶) = 0$$

$$A_y = ۳۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۳۵ \;\; kN \downarrow$$

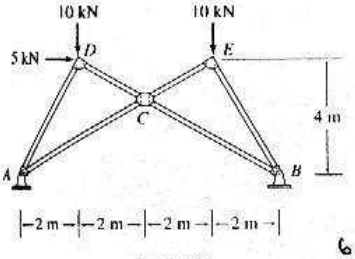
$$\pm \rightarrow \sum F_x^A = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; -۳۵ - ۱۰ + B_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y = ۴۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۴۵ \;\; kN \uparrow$$

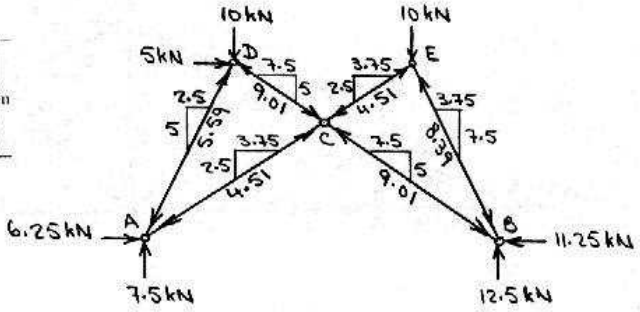
$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; B_x + ۵ + ۱۰ + ۱۰ = 0 \;\Rightarrow\; B_x = -۲۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = ۲۵ \;\; kN \leftarrow$$



۱۷-۲

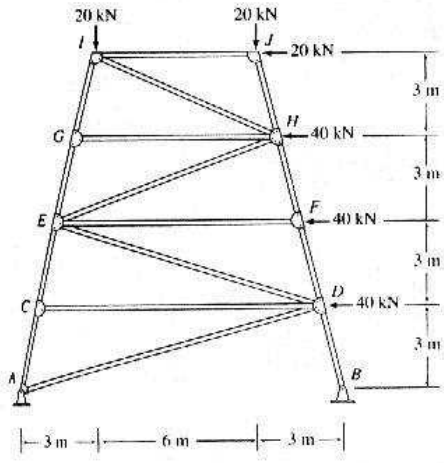


شکل ۲-۱۷



در این مسئله واکنشهای تکیه‌گاهی نیز از تعادل گره‌های A و B محاسبه می‌شوند.

۱۸-۲



شکل ۲-۱۸

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$:

$40(3+6+9) + 20(12) - 20(3+9) - B_y(12) = 0$

$B_y = 60 \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 60 \quad kN \downarrow$

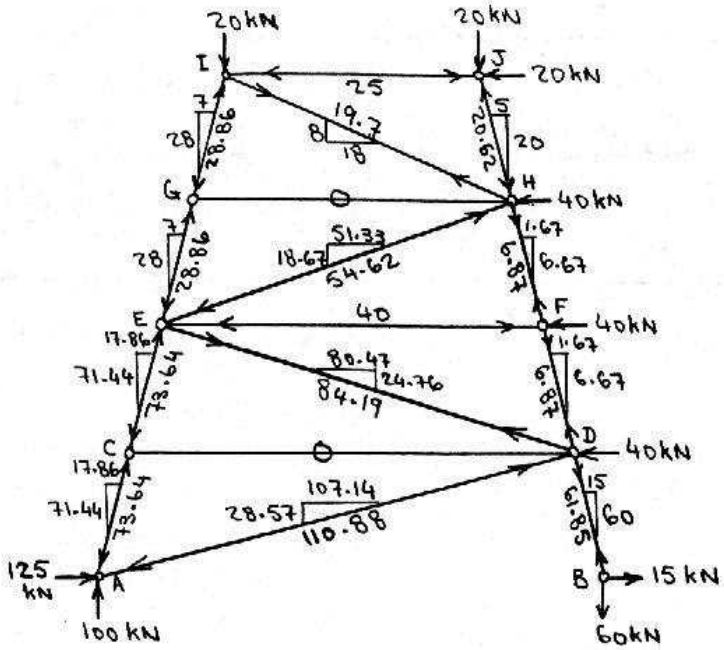
$+\uparrow \sum F_y = 0 \; : \; A_y - 60 - 20 - 20 = 0 \Rightarrow A_y = 100 \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 100 \quad kN \uparrow$

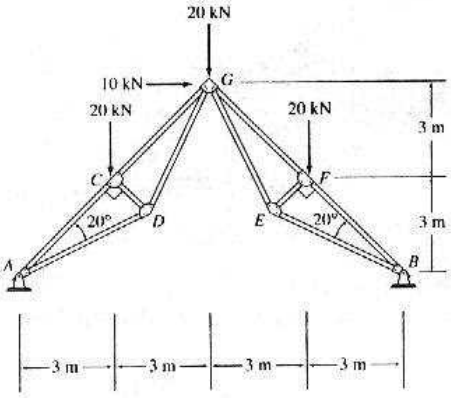
$B_x = B_y\left[\frac{3}{12}\right] = 60\left[\frac{3}{12}\right] = 15 \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 15 \quad kN \rightarrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \; : \; A_x - 3(40) - 20 + 15 = 0$

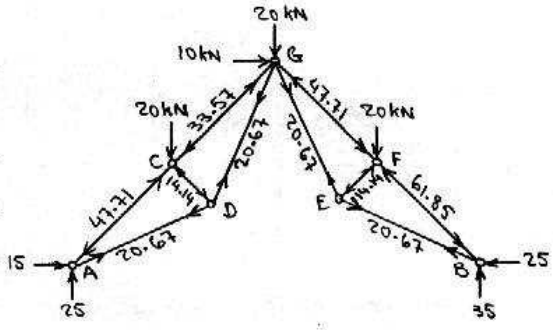
$A_x = 125 \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 125 \quad kN \rightarrow$



۱۹-۲

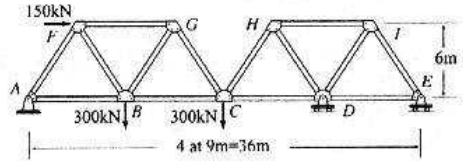


شکل ۲-۱۹



در این مسئله واکنشهای تکیه‌گاهی نیز از تعادل گره‌های A و B محاسبه می‌شوند.

۲۰-۲



شکل ۲-۲۰

$\pm\sum F_x = 0 \;:\; A_x + 150 = 0 \;\Rightarrow\; A_x = -150 \;\; kN$

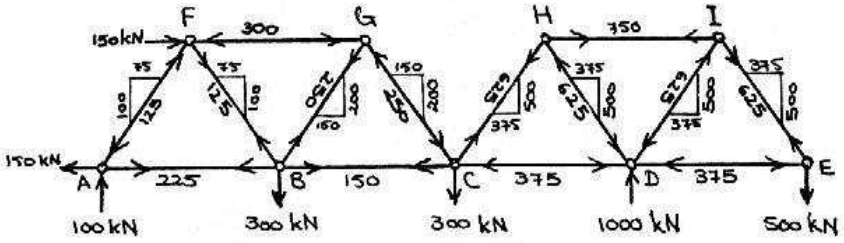
$\blacktriangleright \vec{A}_x = 150 \;\; kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{ACGF} = 0 \;:\; 300(9) - 150(6) - A_y(18) = 0$

$A_y = 100 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 100 \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \;:\; 300(18+27) - 150(6) - 100(36) - D_y(9) = 0 \;\Rightarrow\; D_y = 1000 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{D_y} = 1000 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 1000 + 100 - 300 - 300 + E_y = 0 \;\Rightarrow\; E_y = -500 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{E_y} = 500 \;\; kN \downarrow$



۲۱-۲

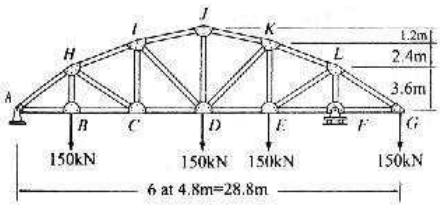
$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A_x} = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; F_y(24) - 150(4/8 + 14/4 + 19/2 + 28/8) = 0$

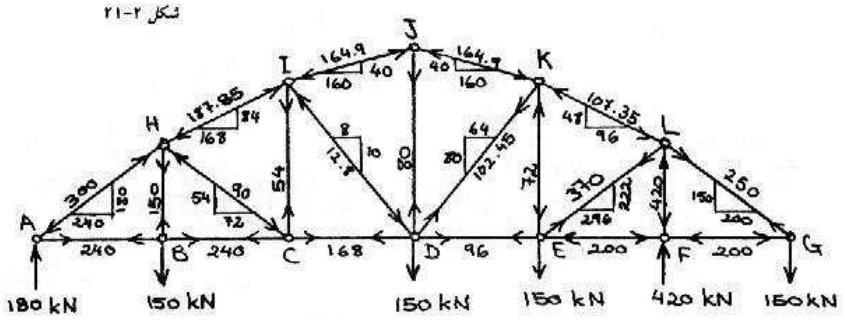
$F_y = 420 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{F_y} = 420 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + 420 - 4(150) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 180 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A_y} = 180 \;\; kN \uparrow$



شکل ۲-۲۱



در خرپاهای نشان داده شده در مسایل زیر، با استفاده از روش مقاطع، نیروهای داخلی اعضایی را که با علامت «×» مشخص شده‌اند، به دست آورید.

۲۲-۲

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:$

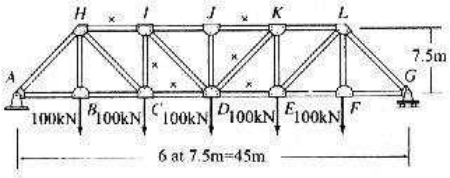
$G_y(25) - 100(7/5 + 15 + 22/5 + 30 + 37/5) = 0$

$G_y = 250 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{G_y} = 250 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 250 - 5(100) + A_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 250 \;\; kN$

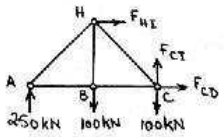
$\blacktriangleright \vec{A_y} = 250 \;\; kN \uparrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A_x} = 0$



شکل ۲-۲۲

مقطعی که اعضای CD ، CI ، HI را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد ACH از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.



$+\uparrow \sum F_y^{ACH} = 0 \;:\; F_{CI} + 250 - 2(100) = 0 \Rightarrow F_{CI} = -50 \;\; kN$

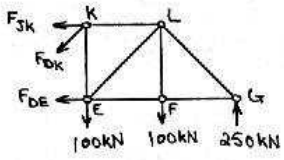
$\blacktriangleright F_{CI} = 50 \;\; kN \quad (C)$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{ACH} = 0 \;:\; 100(7/5) - 250(15) - F_{HI}(7/5) = 0 \Rightarrow F_{HI} = -400 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{HI} = 400 \;\; kN \quad (C)$

$\pm \sum F_x^{ACH} = 0 \;:\; F_{CD} - 400 = 0 \Rightarrow F_{CD} = 400 \;\; kN \quad \blacktriangleright F_{CD} = 400 \;\; kN \;\; (T)$

مقطعی که اعضای DE ، DK و JK را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد EGLK از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.



$+\uparrow \sum F_y^{EGLK} = 0 \;:\; 250 - 2(100) - F_{DK}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0 \Rightarrow F_{DK} = 70/7 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{DK} = 70/71 \;\; kN \;\; (T)$

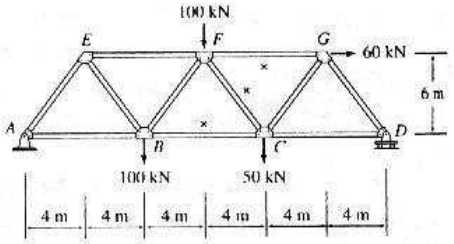
$+\circlearrowleft \sum M_K^{EGLK} = 0 \;:\; 250(15) - 100(7/5) - F_{DE}(7/5) = 0 \Rightarrow F_{DE} = 400 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{DE} = 400 \;\; kN \;\; (T)$

$\pm \sum F_x^{EGLK} = 0 \;:\; -400 - 70/71\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - F_{JK} = 0 \Rightarrow F_{JK} = -450 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{JK} = 450 \;\; kN \;\; (C)$

۲۳-۲



شکل ۲-۲۳

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:$

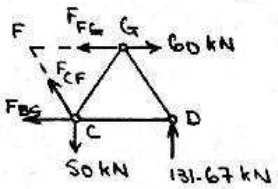
$D_y(24) - 100(8) - 50(16) - 100(12) - 60(6) = 0$

$D_y = 131/67 \;\; kN \quad \blacktriangleright D_y = 131/67 \;\; kN \uparrow$

مقطعی که اعضای BC ، CF و FG را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد CGD از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.

$+\uparrow \sum F_y^{CGD} = 0 \;:\; 131/67 - 50 + F_{CF}\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right] = 0$

$F_{CF} = -98/16 \;\; kN \quad \blacktriangleright F_{CF} = 98/16 \;\; kN \;\; (C)$



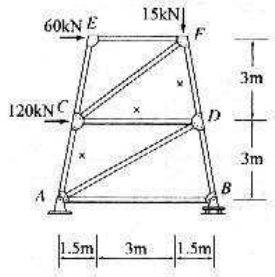
$+\circlearrowleft \sum M_C^{CGD} = 0 \;:\; 131/67(8) - 60(6) + F_{FG}(6) = 0 \Rightarrow F_{FG} = 115/56 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{FG} = 115/56 \;\; kN \;\; (C)$

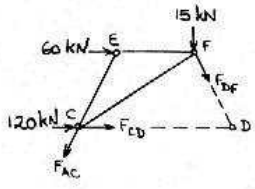
$+\circlearrowleft \sum M_P^{CGD} = \;:\; 131/67(12) - 50(4) - F_{BC}(6) = 0 \Rightarrow F_{BC} = +230 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{BC} = 230 \;\; kN \;\; (T)$

۲۴-۲



شکل ۲-۲۴



مقطعی که اعضای AC ، CD و DF را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد CEF از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_D^{CEF} = 0 \;:$

$15(0/75) - 60(3) + F_{AC}\left[\frac{4}{\sqrt{17}}\right](4/5) = 0$

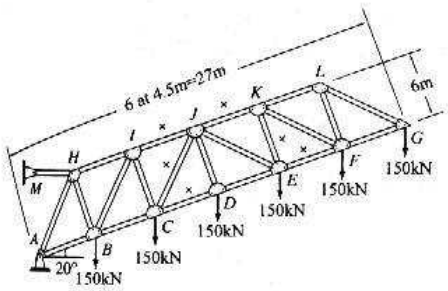
$F_{AC} = 38/56 \;\; kN \quad \blacktriangleright F_{AC} = 38/65 \;\; kN \;\; (T)$

$$+\uparrow \sum F_y^{CEF} = 0 \quad : \quad -15 - 38/65\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) - F_{DF}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DF} = -54/11 \ kN \quad \blacktriangleright F_{DF} = 54/11 \ kN \ (C)$$

$$\pm \sum F_x^{CEF} = 0 \quad : \quad 60 + 120 - 38/65\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + F_{CD} - 54/11\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = -157/5 \ kN$$
$$\blacktriangleright F_{CD} = 157/5 \ kN \ (C)$$

۲۵-۲

مقطعی که اعضای EF ، EK و JK را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد KFGL از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.



شکل ۲-۲۵

$$+\uparrow \sum F_y^{KFGL} = 0 \quad : \quad -F_{EK} - 140/95 - 70/47 = 0$$

$$F_{EK} = -211/42 \ kN \quad \blacktriangleright F_{EK} = 211/42 \ kN \ (C)$$

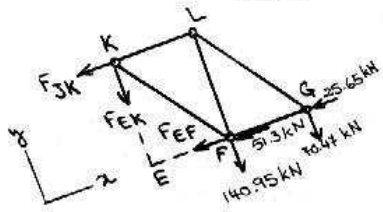
$$+\circlearrowleft \sum M_K^{KFGL} = 0 \quad :$$

$$-F_{EF}(6) - 140/95(4/5) - 70/47(9) - (25/65 + 51/30)(6) = 0$$

$$F_{EF} = -288/37 \ kN \quad \blacktriangleright F_{EF} = 288/37 \ kN \ (C)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{KFGL} = 0 \quad :$$

$$F_{JK}(6) - 140/95(4/5) - 70/47(9) = 0$$



$$F_{JK} = +211/42 \ kN \quad \blacktriangleright F_{JK} = 211/42 \ kN \ (T)$$

مقطعی که اعضای CD ، CJ و IJ را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد DGLJ از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.

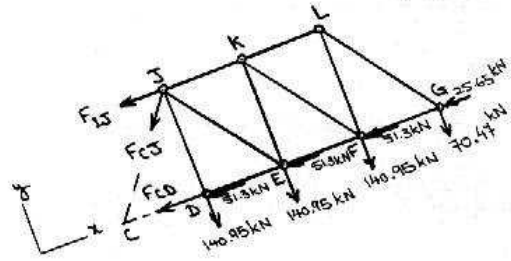
$$+\uparrow \sum F_y^{DGLJ} = 0 \quad : \quad -3(140/95) - 70/47 - F_{CJ}\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$F_{CJ} = -616/65 \ kN \quad \blacktriangleright F_{CJ} = 616/65 \ kN \ (C)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_J^{DGLJ} = 0 \quad :$$

$$-F_{CD}(6) - \left[3(51/3) + 25/65\right](6) - 140/95(4/5 + 9) -$$
$$70/47(13/5) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = -655/25 \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{CD} = 655/25 \ kN \ (C)$$

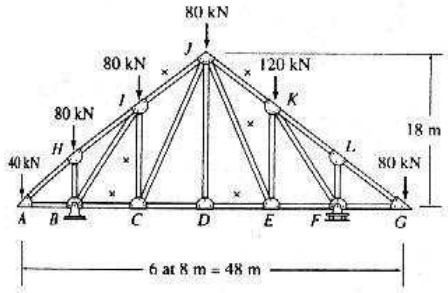


$$+\circlearrowleft \sum M_C^{DGLJ} = 0 \quad :$$

$$F_{IJ}(6) - 140/95(4/5 + 9 + 13/5) - 70/47(18) = 0$$

$$F_{IJ} = 845/14 \ kN \quad \blacktriangleright F_{IJ} = 845/14 \ kN \ (T)$$

۲۶-۲



$$\pm \sum F_x = 0 \quad : \quad B_x = 0 \quad \blacktriangleright B_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_F = 0 \quad :$$

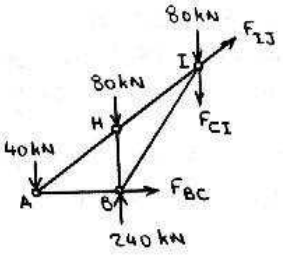
$$80(16 + 24 + 32 - 8) + 40(40) + 120(8) - B_y(32) = 0$$

$$B_y = 240 \ kN \quad \blacktriangleright \vec{B}_y = 240 \ kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad F_y + 240 - 40 - 4(80) - 120 = 0$$

$$F_y = 240 \ kN \quad \blacktriangleright \vec{F}_y = 240 \ kN \uparrow$$

شکل ۲-۲۶



مقطعی که اعضای BC ، CI و IJ را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد ABI از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_I^{ABI} = 0 \quad : \quad 40(16) + 80(8) - 240(8) + F_{BC}(12) = 0$$

$$F_{BC} = +53/33 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{BC} = 53/33 \ kN \ (T)$$

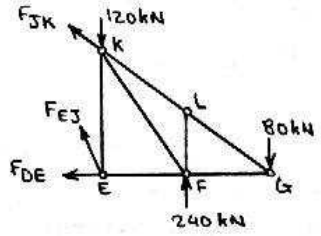
$$\pm \sum F_x^{ABI} = 0 \quad : \quad 53/33 + F_{IJ}\left[\frac{4}{5}\right] = 0 \ \Rightarrow \ F_{IJ} = -66/67 \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{IJ} = 66/67 \ kN \ (C)$$

$$+\uparrow \sum F_y^{ABI} = 0 \quad : \quad -40 - 2(80) + 240 - F_{CI} - 66/67\left[\frac{3}{5}\right] = 0 \ \Rightarrow \ F_{CI} = 0$$

$$\blacktriangleright F_{CI} = 0$$

مقطعی که اعضای DE ، EJ و JK را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد EGK از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.



$$+\circlearrowleft \sum M_E^{EGK} = 0 \quad : \quad -80(16) + 240(8) + F_{JK}\left[\frac{4}{5}\right](12) = 0$$

$$F_{JK} = -66/67 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{JK} = 66/67 \ kN \ (C)$$

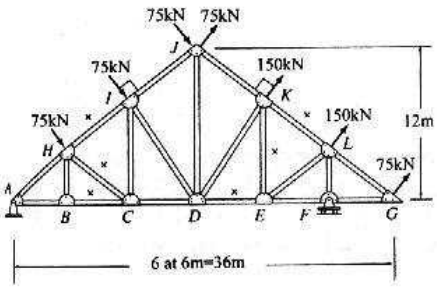
$$\pm \sum F_x^{EGK} = 0 \quad : \quad 66/67\left[\frac{4}{5}\right] - F_{DE} = 0 \ \Rightarrow \ F_{DE} = 53/33 \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{DE} = 53/33 \ kN \ (T)$$

$$+\uparrow \sum F_y^{EGK} = 0 \quad : \quad \left[\frac{9}{\sqrt{97}}\right] F_{EJ} - 120 + 240 - 80 - 66/67\left[\frac{3}{5}\right] = 0$$

$$F_{EJ} = 0 \qquad \blacktriangleright F_{EJ} = 0$$

۲۷-۲



شکل ۲-۲۷

$$\pm \sum F_x = 0 \quad : \quad \left[5(75) + 2(150)\right]\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right] - A_x = 0$$

$$A_x = 374/42 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 374/42 \ kN \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad -75(7/211 + 14/222 + 21/633) -$$

$$75\left[\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right](12) - \left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right](18)\right] -$$

$$150\left[\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right](8) - \left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right](24) + \left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right](4) - \left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right](30)\right] +$$

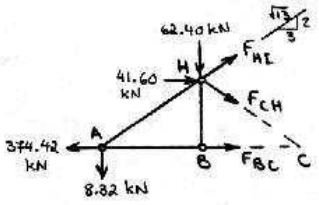
$$75\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right](36) + F_y(30) = 0 \ \Rightarrow \ F_y = -178/89 \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{F}_y = 178/89 \ kN \downarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad -178/89 - 3(75)\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right] + (75 + 150 + 150 + 75)\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right] + A_y = 0 \ \Rightarrow \ A_y = -8/32 \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 8/32 \ kN \downarrow$$

مقطعی که اعضای BC ، CH و HI را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد ABH از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.



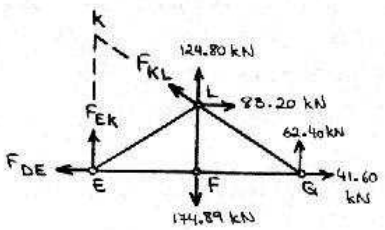
$$+\circlearrowleft \sum M_H = 0 \quad : \quad -374/42(4) + 8/32(6) + F_{BC}(4) = 0$$

$$F_{BC} = +361/94 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{BC} = 361/94 \ kN \ (T)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \quad :$$

$$8/32(12) + 62/4(6) - 41/6(4) - F_{HI}\left[\frac{3}{\sqrt{13}}(4) + \frac{2}{\sqrt{13}}(6)\right] = 0$$

$F_{HI} = +۴۶/۲۵ \ kN$ ▶ $F_{HI} = ۴۶/۲۵ \ kN \ (T)$



مقطعی که اعضای DE ، EK و KL را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد EGL از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_K^{EGL} = ۰$:

$(۱۲۴/۸۰ - ۱۷۸/۸۹)(۶) + ۶۲/۴۰(۱۲) + ۸۳/۲۰(۴) + ۴۱/۶(۸) - F_{DE}(۸) = ۰$

$F_{DE} = +۱۳۶/۲۳ \ kN$ ▶ $F_{DE} = ۱۳۶/۲۳ \ kN \ (T)$

$+\circlearrowleft \sum M_G^{EGL} = ۰$:

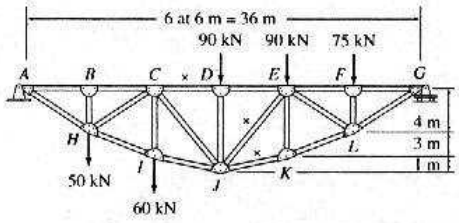
$(۱۷۸/۸۹ - ۱۲۴/۸)(۶) - ۸۳/۲(۴) - F_{EK}(۱۲) = ۰$

$F_{EK} = -۰/۶۹ \ kN$ ▶ $F_{EK} = ۰/۶۹ \ kN \ (C)$

$+\circlearrowleft \sum M_E^{EGL} = ۰$: $(۱۲۴/۸۰ - ۱۷۰/۸۹)(۶) + ۶۲/۴(۱۲) - ۸۳/۲(۴) + F_{KL}\left[\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}(۴) + \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}(۶)\right] = ۰$

$F_{KL} = -۱۳/۷۴ \ kN$ ▶ $F_{KL} = ۱۳/۷۴ \ kN \ (C)$

۲۸-۲



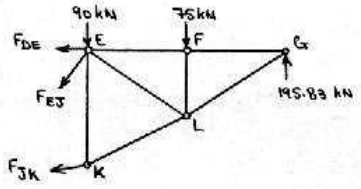
شکل ۲-۲۸

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰$:

$G_y(۳۶) - ۵۰(۶) - ۶۰(۱۲) - ۹۰(۱۸) - ۹۰(۲۴) - ۹۰(۳۰) = ۰$

$G_y = ۱۹۵/۸۳ \ kN$ ▶ $\vec{G_y} = ۱۹۵/۸۳ \ kN \uparrow$

مقطعی که اعضای DE ، EJ و JK را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد KGE از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.



$+\circlearrowleft \sum M_E^{KGE} = ۰$: $۱۹۵/۸۳(۱۲) - ۷۵(۶) - F_{JK}\left[\frac{۶}{\sqrt{۴۷}}\right](۷) = ۰$

$F_{JK} = +۲۷۵/۱۷ \ kN$ ▶ $F_{JK} = ۲۷۵/۱۷ \ kN \ (T)$

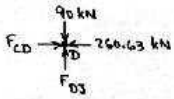
$+\uparrow \sum F_y^{KGE} = ۰$: $۱۹۵/۸۳ - ۷۵ - ۹۰ - F_{EJ}\left[\frac{۴}{۵}\right] - ۲۷۵/۱۷\left[\frac{۱}{\sqrt{۴۷}}\right] = ۰$

$F_{EJ} = -۱۸/۰ \ kN$ ▶ $F_{EJ} = ۱۸/۰ \ kN \ (C)$

$\pm \sum F_x^{KGE} = ۰$: $۱۸\left[\frac{۳}{۵}\right] - F_{DE} - ۲۷۵/۱۷\left[\frac{۶}{\sqrt{۴۷}}\right] = ۰$

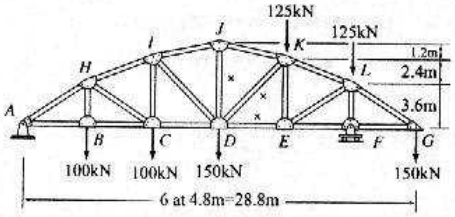
$F_{DE} = -۲۶۰/۶۳ \ kN$ ▶ $F_{DE} = ۲۶۰/۶۳ \ kN \ (C)$

در گره D :



$\pm \sum F_x^D = ۰$: $F_{CD} - ۲۶۰/۶۳ = ۰ \Rightarrow F_{CD} = ۲۶۰/۶۳ \ kN$ ▶ $F_{CD} = ۲۶۰/۶۳ \ kN \ (C)$

۲۹-۲



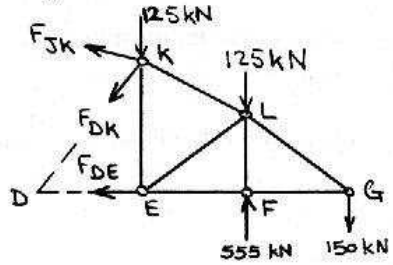
شکل ۲-۲۹

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰$:

$F_y(۲۴) - ۱۵۰(۲۸/۸ + ۱۴/۴) - ۱۲۵(۱۹/۲ + ۲۴) - ۱۰۰(۴/۸ + ۹/۶) = ۰$

$F_y = ۵۵۵ \ kN$ ▶ $\vec{F_y} = ۵۵۵ \ kN \uparrow$

مقطعی که اعضای DE ، DK و JK را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد EGK از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.



$+\circlearrowleft \sum M_K = 0 \;:\; (555-125)(4/8)-150(9/6)-F_{DE}(6)=0$

$F_{DE} = +104 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{DE} = 104 \;\; kN \;\; (T)$

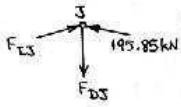
$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \;:$

$555(9/6)-150(14/4)-125(4/8+9/6)+F_{JK}\left[\frac{4}{\sqrt{17}}(6)+\frac{1}{\sqrt{17}}(4/8)\right]=0$

$F_{JK} = -195/85 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{JK} = -195/85 \;\; kN \;\; (C)$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 555-150-2(125)-195/85\left[\frac{1}{\sqrt{17}}\right]-F_{DK}\left[\frac{5}{\sqrt{41}}\right]=0$

$F_{DK} = 137/67 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{DK} = 137/67 \;\; kN \;\; (T)$



در گره J:

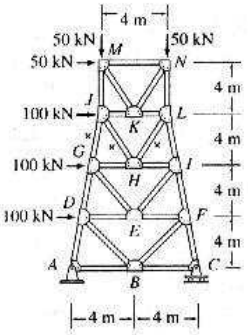
$\pm \sum F_x = 0 \;:\; F_{IJ}\left[\frac{4}{\sqrt{17}}\right]-195/85\left[\frac{4}{\sqrt{17}}\right]=0 \;\Rightarrow\; F_{IJ} = 195/85 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{IJ} = 195/85 \;\; kN \;\; (C)$

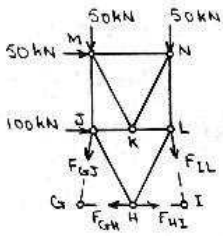
$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 2(195/85)\left[\frac{1}{\sqrt{17}}\right]-F_{DJ}=0 \;\Rightarrow\; F_{DJ} = 95/0 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{DJ} = 95/0 \;\; kN \;\; (T)$

۲-۳۰

مقطعی که اعضای GH ، GJ ، HI و IL را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد HNM از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.



شکل ۲-۳۰



$+\circlearrowleft \sum M_I^{HNM} = 0 \;:\; 50(0/67+4/67)-50(8)-100(2)+$

$F_{GJ}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\right)(4)+\frac{6}{\sqrt{37}}(4/67)\right]=0$

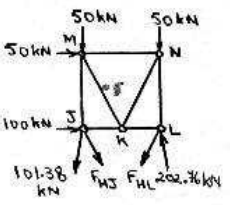
$F_{GJ} = +101/38 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{GJ} = 101/38 \;\; kN \;\; (T)$

$+\uparrow \sum F_y^{HNM} = 0 \;:$

$-2(50)-101/38\left[\frac{6}{\sqrt{37}}\right]-F_{IL}\left[\frac{6}{\sqrt{37}}\right]=0$

$F_{IL} = -202/76 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{IL} = 202/76 \;\; kN \;\; (C)$

مقطعی که اعضای GJ ، HJ ، HI و IL را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد JLNM از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.



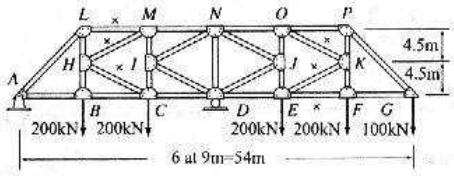
$+\circlearrowleft \sum M_J^{JLNM} = 0 \;:\; 202/76\left[\frac{6}{\sqrt{37}}\right](4)-50(4+4)-F_{HL}\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right](4)=0$

$F_{HL} = +111/8 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{HL} = 111/8 \;\; kN \;\; (T)$

$+\circlearrowleft \sum M_L^{JLNM} = 0 \;:\; 50(4)-50(4)+F_{HJ}\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right](4)+101/38\left[\frac{6}{\sqrt{37}}\right](4)=0$

$F_{HJ} = -111/8 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{HJ} = 111/8 \;\; kN \;\; (C)$

۲-۳۱



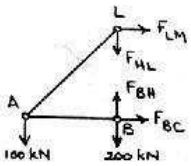
شکل ۲-۳۱

$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \;:$

$A_y(27)+200(9+18)-200(9+18)-100(27)=0$

$A_y = 100 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 100 \;\; kN \downarrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

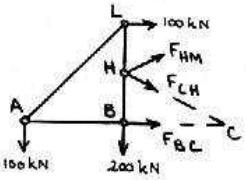


مقطعی که اعضای BC ، BH ، HL و LM را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد ABL از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{ABL} = 0 \quad : \quad 100(9) - F_{LM}(9) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{LM} = +100 \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{LM} = 100 \ kN \quad (T)$$

مقطعی که اعضای BC ، CH ، HM و LM را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد ABL مجدداً از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.

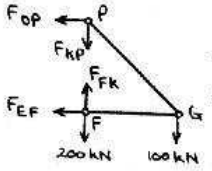


$$+\circlearrowleft \sum M_C^{ABL} = 0 \quad : \quad 100(18) + 200(9) - 100(9) - F_{HM}\left[\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right](4/5) + \frac{1}{\sqrt{5}}(9)\right] = 0$$

$$F_{HM} = 335/41 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{HM} = 335/41 \ kN \quad (T)$$

$$+\uparrow \sum F_y^{ABL} = 0 \quad : \quad 335/41\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right] - 100 - 200 - F_{CH}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right] = 0$$

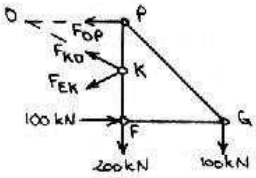
$$F_{CH} = -335/41 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{CH} = 335/41 \ kN \quad (C)$$



مقطعی که اعضای EF ، FK ، KP و OP را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد FGP از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_P^{FGP} = 0 \quad : \quad -F_{EF}(9) - 100(9) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EF} = -100 \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{EF} = 100 \ kN \quad (C)$$



مقطعی که اعضای EF ، EK ، KO و OP را قطع می‌کند: در نمودار جسم آزاد FGP از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_O = 0 \quad : \quad 100(9) - 100(18) - 200(9) - F_{EK}\left[\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right](4/5) + \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right](9)\right] = 0$$

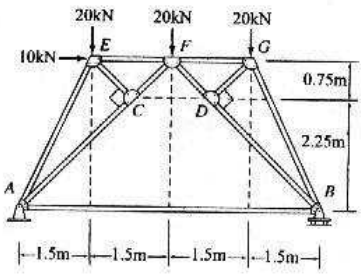
$$F_{EK} = -335/41 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{EK} = 335/41 \ kN \quad (C)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad 335/41\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right] + F_{KO}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right] - 200 - 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{KO} = +335/41 \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{KO} = 335/41 \ kN \quad (T)$$

در خرپاهای نشان داده شده در مسایل زیر، نیروهای داخلی کلیهٔ اعضای خرپا را محاسبه کنید.

۲-۳۲



شکل ۲-۳۲

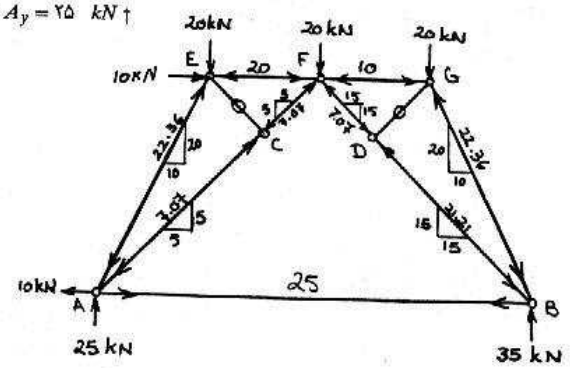
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad B_y(6) - 20(1/5 + 3 + 4/5) - 10(3) = 0$$

$$B_y = 35 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 35 \ kN \uparrow$$

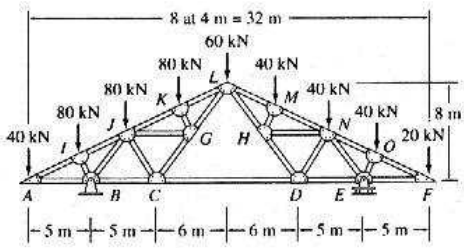
$$\pm \sum F_x = 0 \quad : \quad A_x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 10 \ kN \quad \blacktriangleright \vec{A}_x = 10 \ kN \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad 35 - 3(20) + A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 25 \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 25 \ kN \uparrow$$



۲-۳۳



شکل ۲-۳۳

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0$:

$E_y(22) + 40(5 - 15 - 19 - 23) + 80(1 - 3 - 7) - 60(11) - 20(27) = 0$

$E_y = 181/8 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y = 181/82 \ kN \uparrow$

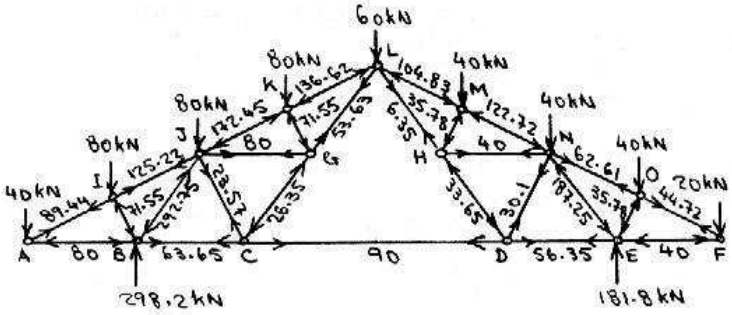
$\pm \sum F_x = 0 \ : \ B_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \ : \ 181/82 + B_y - 4(40) - 3(80) - 60 - 20 = 0$

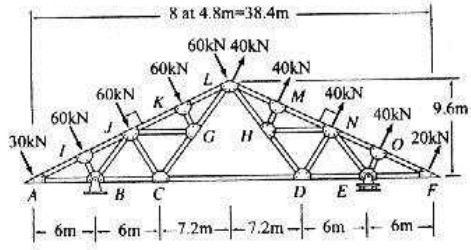
$B_y = 298/18 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 298/18 \ kN \uparrow$

ابتدا مقطعی را در نظر می‌گیریم که اعضای CD ، GL و KL را قطع می‌کند. با توجه به مقطع مزبور نیروی داخلی عضو CD را محاسبه کرده، سپس برای محاسبهٔ نیروهای داخلی در سایر اعضا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_L^{ACL} = 0 \ : \ F_{CD}(8) - 298/18(11) + 40(16) + 80(12 + 8 + 4) = 0 \ \Rightarrow \ F_{CD} = 90 \ kN \ \blacktriangleright F_{CD} = 90 \ kN \ (T)$



۲-۳۴



شکل ۲-۳۴

$\pm \sum F_x = 0 \ : \ \left[4(60) + 4(40) + 30 + 20\right]\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right] - B_x = 0$

$B_x = 201/25 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 201/25 \ kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0$:

$30(5/366) - 60(5/366 + 10/732 + 16/098) +$

$40\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right](13/2 + 18 + 22/8 + 27/6) - 40\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right](9/6 + 7/2 +$

$4/8 + 2/4) + 20\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right](32/4) + E_y(26/4) = 0$

$E_y = -49/2 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y = 49/2 \ kN \downarrow$

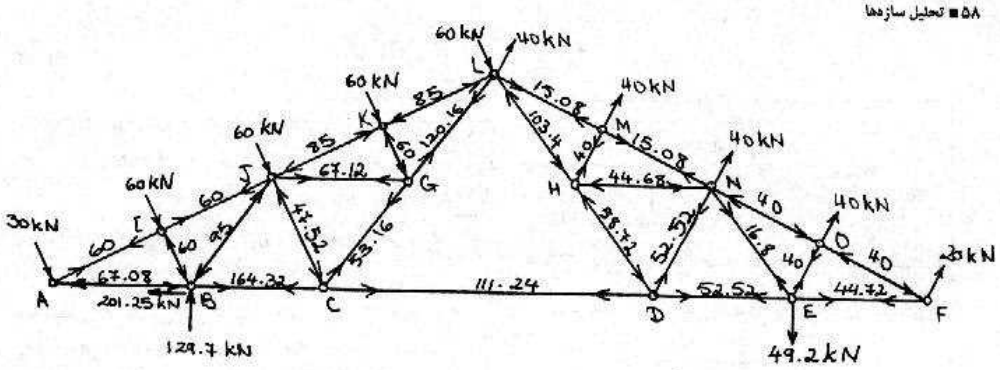
$+\uparrow \sum F_y = 0 \ : \ B_y - 49/2 - \left[30 + 4(60)\right]\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right] + \left[20 + 4(40)\right]\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right] = 0 \ \Rightarrow \ B_y = 129/7 \ kN$

$\blacktriangleright \vec{B}_y = 129/7 \ kN \uparrow$

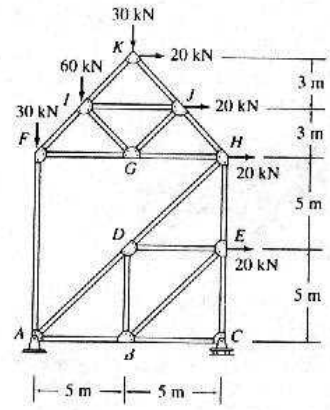
ابتدا مقطعی را در نظر می‌گیریم که اعضای CD ، GL و KL را قطع می‌کند. با توجه به مقطع مزبور نیروی داخلی عضو CD را محاسبه کرده، سپس برای محاسبهٔ نیروی داخلی در سایر اعضا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_L^{ACL} = 0 \ : \ 60(5/366 + 10/732 + 16/098) + 30(21/464) - 129/7(13/2) - 201/25(9/6) + F_{CD}(9/6) = 0$

$F_{CD} = +111/26 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{CD} = 111/26 \ kN \ (T)$



۲-۳۵



شکل ۲-۳۵

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; C_y(10) - 60(2/5) - 30(5) - 20(16+13+10+5) = 0$$

$$C_y = 118 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = 118 \;\; kN \uparrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; A_x + 4(20) = 0 \;\Rightarrow\; A_x = -80 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 80 \;\; kN \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - 2(30) - 60 + 118 = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 2 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 2 \;\; kN \uparrow$$

مقطعی که اعضای AI ، DH و EH را قطع می‌کند؛ از معادلات تعادل در نمودار جسم آزاد FHK استفاده می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_H = 0 \;:\; F_{AF}(10) + 30(10) + 60(7/5) + 30(5) - 20(6+3) = 0$$

$$F_{AF} = -72 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{AF} = 72 \;\; kN \;\; (C)$$

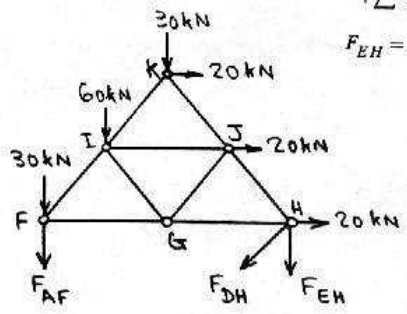
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; 3(20) - F_{DH}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0 \;\Rightarrow\; F_{DH} = +84/85 \;\; kN$$

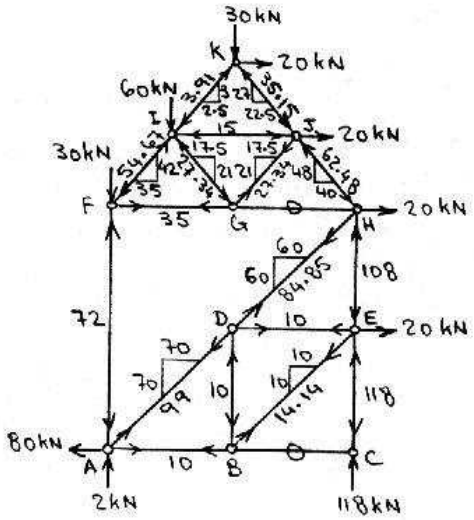
$$\blacktriangleright F_{DH} = 84/85 \;\; kN \;\; (T)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 72 - 2(30) - 60 - 84/85\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - F_{EH} = 0$$

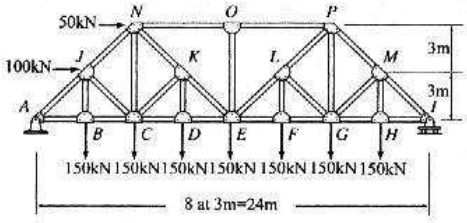
$$F_{EH} = -108 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{EH} = 108 \;\; kN \;\; (C)$$

برای محاسبهٔ نیروهای داخلی در سایر اعضا می‌توان از روش گره‌ها استفاده کرد.





۳۶-۲



شکل ۲-۳۶

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$:

$I_y(24) - 150(3+6+9+12+15+18+21) - 100(3) - 50(6) = 0$

$I_y = 550 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{I}_y = 550 \ kN \uparrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 : \ A_x - 100 - 50 = 0 \Rightarrow A_x = 150 \ kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_x = 150 \ kN \leftarrow$

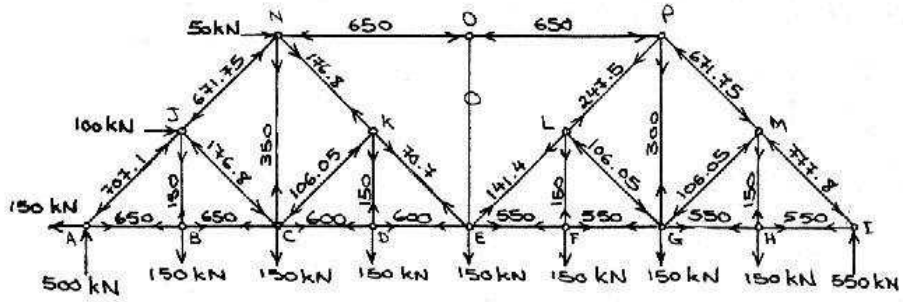
$+\uparrow \sum F_y = 0 : \ 550 - 7(150) + A_y = 0 \Rightarrow A_y = 500 \ kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 500 \ kN \uparrow$

ابتدا مقطعی را در نظر می‌گیریم که اعضای EK ، DE و NO را قطع می‌کند. با توجه به مقطع مزبور نیروی داخلی عضو NO را محاسبه کرده، سپس برای محاسبهٔ نیروهای داخلی سایر اعضاء از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.

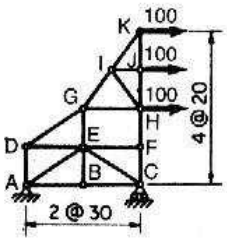
$+\circlearrowleft \sum M_E^{AEN} = 0 : \ 150(3+6+9) - 100(3) - 50(6) - 500(12) - F_{NO}(6) = 0 \Rightarrow F_{NO} = -650 \ kN$

$\blacktriangleright F_{NO} = 650 \ kN \quad (C)$



خرپاهای نشان داده شده در مسایل زیر را تحلیل کرده و نیروهای داخلی کلیهٔ اعضای آنها را مشخص کنید. (در تمامی موارد زیر، واحد نیرو، کیلونیوتن و واحد طول، متر است.)

۲-۳۷



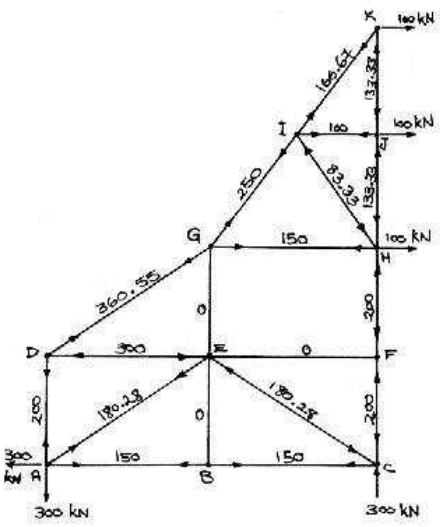
شکل ۲-۳۷

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; C_y(60) - 100(20+60+80) = 0 \;\Rightarrow\; C_y = 300 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{C}_y = 300 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 300 - A_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 300 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 300 \;\; kN \downarrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A - 3(100) = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 300 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 300 \;\; kN \leftarrow$



ابتدا مقطعی را در نظر می‌گیریم که اعضای FH، GH و GI را قطع می‌کند. با توجه به مقطع مزبور نیروی داخلی اعضای FH و GI را محاسبه کرده، سپس برای محاسبهٔ نیروی داخلی سایر اعضا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.

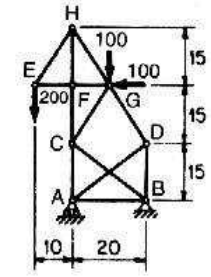
$+\circlearrowleft \sum M_G^{IHK} = 0 \;:\; -100(20+40) - F_{FH}(30) = 0$

$F_{FH} = -200 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{FH} = 200 \;\; kN \;\; (C)$

$+\uparrow \sum F_y^{IHK} = 0 \;:\; 200 - F_{GI}\left(\frac{4}{5}\right) = 0$

$F_{GI} = +250 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{GI} = 250 \;\; kN \;\; (T)$

۲-۳۸



شکل ۲-۳۸

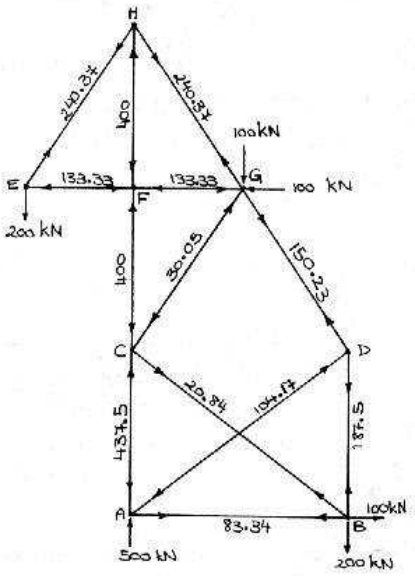
$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; 200(3) + 100(30) + 100(10) - A_y(20) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 500 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 500 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 500 - 200 - 100 - B_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 200 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 200 \;\; kN \downarrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; B_x - 100 = 0 \;\Rightarrow\; B_x = 100 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 100 \;\; kN \rightarrow$

مقطعی را در نظر می‌گیریم که اعضای DG ، CG و CF را قطع می‌کند. با توجه به مقطع مزبور نیروی داخلی اعضای DG و CG را تعیین کرده، سپس از روش گره‌ها برای محاسبهٔ نیروی داخلی سایر اعضا استفاده می‌کنیم.



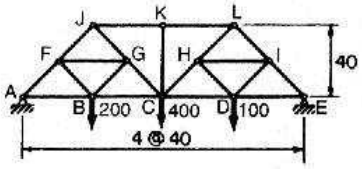
$$+\circlearrowleft \sum M_C^{ABDC} = 0 \quad : \quad 100(15) - 200(20) + F_{DG}\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right](20) = 0$$

$$F_{DG} = +150/23 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{DG} = 150/23 \ kN \ (T)$$

$$\pm \sum F_x^{ABDC} = 0 \quad : \quad F_{CG}\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right] - 150/23\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right] + 100 = 0$$

$$F_{CG} = -30/05 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{CG} = 30/05 \ kN \ (C)$$

۲-۳۹



شکل ۲-۳۹

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad E_y(160) - 200(40) - 400(80) - 100(120) = 0$$

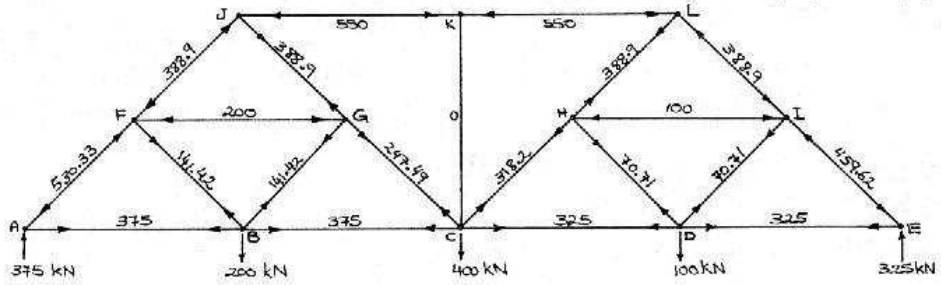
$$E_y = 325 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{E_y} = 325 \ kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad 325 - 200 - 400 - 100 + A_y = 0 \ \Rightarrow \ A_y = 375 \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A_y} = 375 \ kN \uparrow$$

$$\pm \sum F_x = 0 \quad : \quad A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A_x} = 0$$

مقطعی را در نظر می‌گیریم که اعضای KL، CH و CD را قطع می‌کند. با توجه به مقطع مزبور نیروی داخلی اعضای KL ، CH و CD را محاسبه کرده و سپس از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.

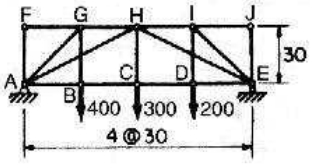


$$+\circlearrowleft \sum M_C^{CEL} = 0 \quad : \quad 325(80) - 100(40) + F_{KL}(40) = 0 \ \Rightarrow \ F_{KL} = -550 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{KL} = 550 \ kN \ (C)$$

$$+\uparrow \sum F_y^{CEL} = 0 \quad : \quad 325 - 100 - F_{CH}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0 \ \Rightarrow \ F_{CH} = +318/2 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{CH} = 318/2 \ kN \ (T)$$

$$\pm\sum F_x^{CEL}=0 \;:\; 550-318/2\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right]-F_{CD}=0 \;\Rightarrow\; F_{CD}=+325\ kN \qquad \blacktriangleright F_{CD}=325\ kN\ (T)$$

۲-۴۰



شکل ۲-۴۰

$$+\circlearrowleft\sum M_A=0 \;:\; E_y(120)-400(30)-300(60)-200(90)=0$$

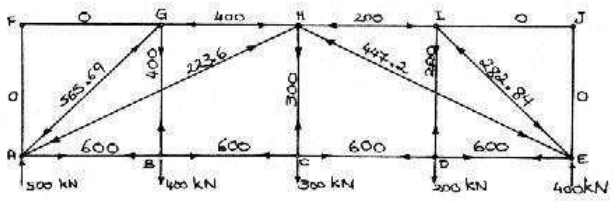
$$E_y=400\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y=400\ kN\uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \;:\; A_y+400-400-300-200=0 \;\Rightarrow\; A_y=500\ kN$$

$$\vec{A}_y=500\ kN\uparrow$$

$$\pm\sum F_x=0 \;:\; A_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=0$$

ابتدا مقطعی را در نظر می‌گیریم که اعضای GH، AH و BC را قطع می‌کند. با توجه به مقطع مزبور نیروی داخلی اعضای GH، AH و BC را محاسبه کرده و سپس از روش گره‌ها برای تعیین نیروی داخلی در سایر اعضای خرپا استفاده می‌کنیم.

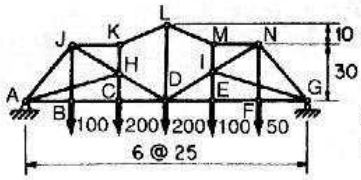


$$+\circlearrowleft\sum M_H^{ABGF}=0 \;:\; 400(30)-500(60)+F_{BC}(30)=0 \;\Rightarrow\; F_{BC}=+600\ kN \qquad \blacktriangleright F_{BC}=600\ kN\ (T)$$

$$+\uparrow\sum F_y^{ABGF}=0 \;:\; 500-400+F_{AC}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right]=0 \;\Rightarrow\; F_{AC}=-223/6\ kN \qquad \blacktriangleright F_{AC}=223/6\ kN\ (C)$$

$$\pm\sum F_x^{ABGF}=0 \;:\; 600+F_{GH}-223/6\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right]=0 \;\Rightarrow\; F_{GH}=-400\ kN \qquad \blacktriangleright F_{GH}=400\ kN\ (C)$$

۲-۴۱



شکل ۲-۴۱

$$+\circlearrowleft\sum M_A=0 \;:\; G_y(150)-100(25+100)-200(50+75)-50(125)=0$$

$$G_y=291/67\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{G}_y=291/67\ kN\uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \;:\; 291/67-2(100+200)-50+A_y=0$$

$$A_y=358/33\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=358/33\ kN\uparrow$$

$$\pm\sum F_x=0 \;:\; A_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=0$$

از دو مقطع استفاده می‌کنیم. مقطع اول اعضای KL، HD و CD را قطع کرده و با استفاده از آن نیروهای داخلی اعضای مزبور محاسبه می‌شوند. مقطع دوم اعضای JK، JH، AH و BC را قطع کرده که با استفاده از آن نیروی داخلی عضو AH تعیین می‌شود.

$$+\circlearrowleft\sum M_D^{ACKJ}=0 \;:\; 200(25)+100(50)-358/33(75)-F_{KL}\left[\left[\frac{2}{\sqrt{29}}\right](25)+\left[\frac{5}{\sqrt{29}}\right](30)\right]=0$$

$$F_{KL}=-454/37\ kN \qquad \blacktriangleright F_{KL}=454/37\ kN\ (C)$$

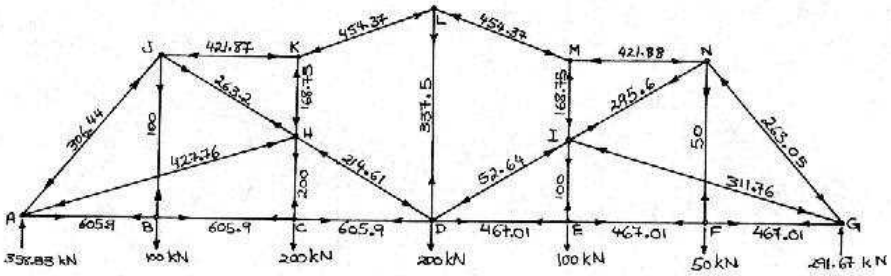
$$+\uparrow\sum F_y^{ACKJ}=0 \;:\; 358/33-100-200-454/37\left[\frac{2}{\sqrt{29}}\right]-F_{HD}\left[\frac{3}{\sqrt{34}}\right]=0 \;\Rightarrow\; F_{HD}=-214/61\ kN\ (C)$$

$$F_{HD}=214/61\ kN\ (C)$$

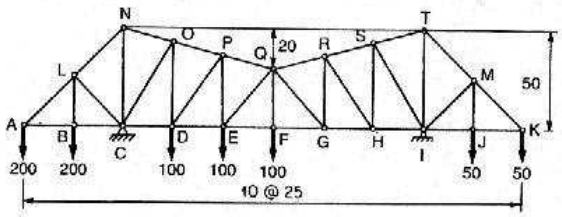
$$\pm\sum F_x^{ACKJ}=0 \;:\; F_{CD}-454/37\left[\frac{5}{\sqrt{29}}\right]-214/61\left[\frac{5}{\sqrt{34}}\right]=0 \;\Rightarrow\; F_{CD}=+605/9\ kN \qquad \blacktriangleright F_{CD}=605/9\ kN\ (T)$$

$$+\circlearrowleft\sum M_J^{ABJ}=0 \;:\; 605/9(30)-358/33(25)+F_{AH}\left[\left[\frac{10}{\sqrt{109}}\right](30)-\left[\frac{3}{\sqrt{109}}\right](25)\right]=0$$

$F_{AH} = -۴۲۷/۷۹ \ kN$ $\quad \blacktriangleright F_{AH} = ۴۲۷/۷۹ \ kN \ (C)$



۴۲-۲



شکل ۲-۴۲

$+\circlearrowleft \sum M_C = ۰ \ : \ ۲۰۰(۲۵+۵۰) - ۱۰۰(۲۵+۵۰+۷۵) - ۵۰(۱۷۵+۲۰۰) + I_y(۱۵۰) = ۰$

$I_y = ۱۲۵ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{I}_y = ۱۲۵ \ kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ :$

$C_y - ۲(۲۰۰) - ۳(۱۰۰) - ۲(۵۰) + ۱۲۵ = ۰$

$C_y = ۶۷۵ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = ۶۷۵ \ kN \uparrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \ : \ C_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{C}_x = ۰$

با استفاده از مقطعی که اعضای PQ، EQ و EF را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو EF را تعیین می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_Q^{AEPN} = ۰ \ : \ ۲۰۰(۱۲۵+۱۰۰) + ۱۰۰(۲۵+۵۰) - ۶۷۵(۷۵) + F_{EF}(۳۰) = ۰ \ \Rightarrow \ F_{EF} = -۶۲/۵ \ kN$

$\blacktriangleright F_{EF} = ۶۲/۵ \ kN \ (C)$

با استفاده از مقطعی که اعضای OP، DP و DE را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو DE را محاسبه می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_P^{ADON} = ۰ \ : \ ۲۰۰(۱۰۰+۷۵) + ۱۰۰(۲۵) - ۶۷۵(۵۰) + F_{DE}(۳۶/۶۶۷) = ۰ \ \Rightarrow \ F_{DE} = -۱۰۲/۲۷ \ kN$

$\blacktriangleright F_{DE} = ۱۰۲/۲۷ \ kN \ (C)$

با استفاده از مقطعی که اعضای SR، HR و HG را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو HG را تعیین می‌کنیم

$+\circlearrowleft \sum M_R^{HKTS} = ۰ \ : \ ۱۲۵(۵۰) - ۵۰(۷۵+۱۰۰) - F_{HG}(۳۶/۶۶۷) = ۰ \ \Rightarrow \ F_{HG} = -۶۸/۱۸ \ kN$

$\blacktriangleright F_{HG} = ۶۸/۱۸ \ kN \ (C)$

با استفاده از مقطعی که اعضای RS، HS و HI را قطع می‌کند، نیروی داخلی اعضای مزبور را محاسبه می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_S^{IKTS} = ۰ \ : \ ۱۲۵(۲۵) - ۵۰(۵۰+۷۵) - F_{HI}(۴۳/۳۳۳) = ۰ \ \Rightarrow \ F_{HI} = -۷۲/۱۲ \ kN$

$\blacktriangleright F_{HI} = ۷۲/۱۲ \ kN \ (C)$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x^{IKTS} = ۰ \ : \ ۷۲/۱۲ - F_{RS}\left(\frac{۱۵}{\sqrt{۲۴۱}}\right) = ۰ \ \Rightarrow \ F_{RS} = +۷۴/۶۴ \ kN \qquad \blacktriangleright F_{RS} = ۷۴/۶۴ \ kN \ (T)$

$+\uparrow \sum F_y^{IKTS} = ۰ \ : \ ۱۲۵ - ۲(۵۰) - F_{HS} - ۷۴/۶۴\left(\frac{۴}{\sqrt{۲۴۱}}\right) = ۰ \ \Rightarrow \ F_{HS} = +۵/۷۷ \ kN \qquad \blacktriangleright F_{HS} = ۵/۷۷ \ kN \ (T)$

با استفاده از مقطعی که اعضای PO، DO و CD را قطع می‌کند، نیروی داخلی اعضای مزبور را محاسبه می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_O^{ACON} = ۰ \ : \ ۲۰۰(۵۰+۷۵) - ۶۷۵(۲۵) + F_{CD}(۴۳/۳۳۳) = ۰ \ \Rightarrow \ F_{CD} = -۱۸۷/۵ \ kN$

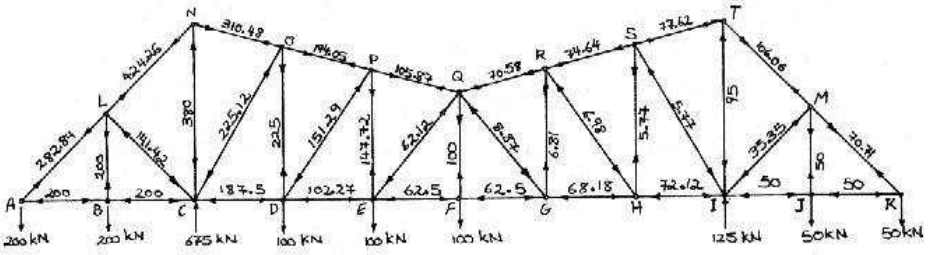
$\blacktriangleright F_{CD} = ۱۸۷/۵ \ kN \ (C)$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x^{ACON} = ۰ \ : \ F_{PO}\left(\frac{۱۵}{\sqrt{۲۴۱}}\right) - ۱۸۷/۵ = ۰ \ \Rightarrow \ F_{PO} = +۱۹۴/۰۵ \ kN \qquad \blacktriangleright F_{PO} = ۱۹۴/۰۵ \ kN \ (T)$

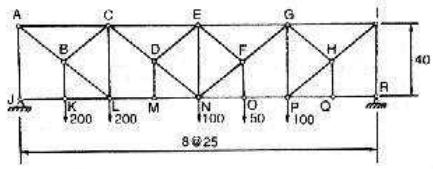
$$+\uparrow \sum F_y^{A\,CON} = 0 \;:\; ۶۷۵ - ۲(۲۰۰) - F_{DO} - ۱۹۴/۰۵\left[\frac{۴}{\sqrt{۲۴۱}}\right] = 0 \;\Rightarrow\; F_{DO} = ۲۲۵/۰ \;\; kN$$

$$\blacktriangleright F_{DO} = ۲۲۵/۰ \;\; kN \;\; (T)$$

برای محاسبهٔ نیروی داخلی سایر اعضا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۴۳-۲



شکل ۲-۴۳

$$+\circlearrowleft \sum M_J = 0 \;:$$

$$R_y(۲۰۰) - ۲۰۰(۲۵+۵۰) - ۱۰۰(۱۰۰+۱۵۰) - ۵۰(۱۲۵) = 0$$

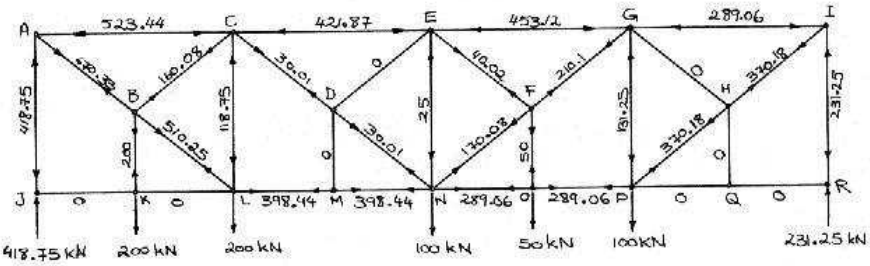
$$R_y = ۲۳۱/۲۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{R_y} = ۲۳۱/۲۵ \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۲۳۱/۲۵ - ۲(۲۰۰) - ۲(۱۰۰) - ۵۰ + J_y = 0$$

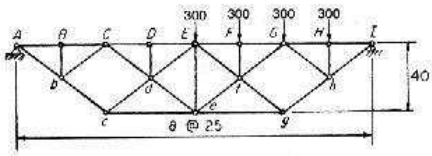
$$J_y = ۴۱۸/۷۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{J_y} = ۴۱۸/۷۵ \;\; kN \uparrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; J_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{J_x} = 0$$

برای محاسبهٔ نیروی داخلی کلیهٔ اعضاء از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۴۴-۲



شکل ۲-۴۴

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:$$

$$I_y(۲۰۰) - ۳۰۰(۱۷۵+۱۵۰+۱۲۵+۱۰۰) = 0$$

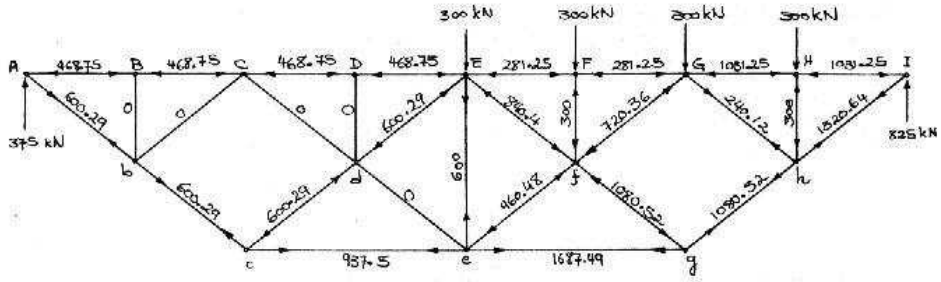
$$I_y = ۸۲۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{I_y} = ۸۲۵ \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۸۲۵ + A_y - ۴(۳۰۰) = 0$$

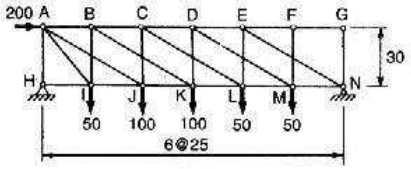
$$A_y = ۳۷۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A_y} = ۳۷۵ \;\; kN \uparrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A_x} = 0$$

برای تعیین نیروهای داخلی کلیهٔ اعضا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۲-۴۵



شکل ۲-۴۵

$+\circlearrowleft \sum M_H = 0$:

$N_y(۱۵۰) - ۵۰(۱۲۵ + ۱۰۰ + ۲۵) - ۱۰۰(۵۰ + ۷۵) - ۲۰۰(۳۰) = 0$

$N_y = ۲۰۶/۶۷ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{N}_y = ۲۰۶/۶۷ \quad kN \uparrow$

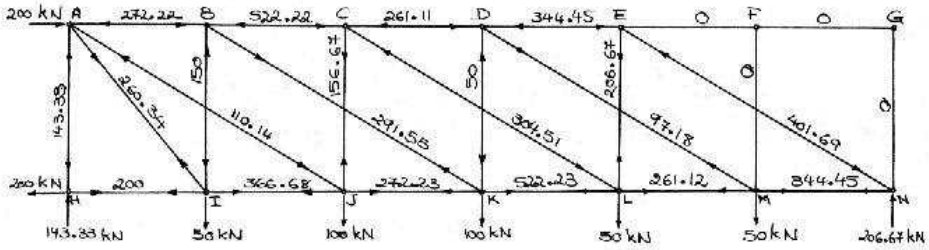
$+\uparrow \sum F_y = 0$: $۲۰۶/۶۷ + H_y - ۳(۵۰) - ۲(۱۰۰) = 0$

$H_y = ۱۴۳/۳۳ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{H}_y = ۱۴۳/۳۳ \quad kN \uparrow$

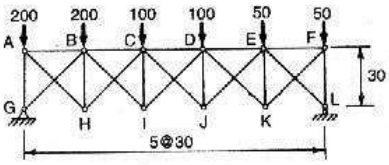
$\pm \sum F_x = 0$: $H_x - ۲۰۰ = 0 \Rightarrow H_x = ۲۰۰ \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{H}_x = ۲۰۰ \quad kN \leftarrow$

برای تعیین نیروهای داخلی اعضا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۲-۴۶



شکل ۲-۴۶

$+\circlearrowleft \sum M_G = 0$:

$L_y(۱۵۰) - ۲۰۰(۳۰) - ۱۰۰(۶۰ + ۹۰) - ۵۰(۱۲۰ + ۱۵۰) = 0$

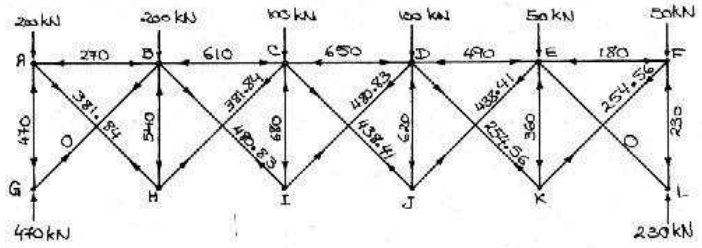
$L_y = ۲۳۰ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{L}_y = ۲۳۰ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0$: $۲۳۰ - ۲(۵۰) - ۲(۱۰۰) - ۲(۲۰۰) = 0$

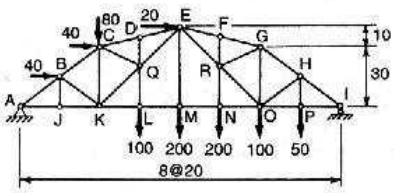
$G_y = ۲۷۰ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{G}_y = ۲۷۰ \quad kN \uparrow$

$\pm \sum F_x = 0$: $G_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{G}_x = 0$

برای محاسبهٔ نیروی داخلی اعضا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۴۷-۲



شکل ۲-۴۷

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; I_y(۱۶۰) - ۴۰(۱۵+۳۰) - ۲۰(۴۰) - ۱۰۰(۶۰+۱۲۰) - ۲۰۰(۸۰+۱۰۰) - ۵۰(۱۴۰) - ۸۰(۴۰) = 0$$

$$I_y = ۴۱۷/۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{I}_y = ۴۱۷/۵ \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۴۱۷/۵ - ۲(۱۰۰) - ۲(۲۰۰) - ۵۰ - ۸۰ + A_y = 0$$

$$A_y = ۳۱۲/۵ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۳۱۲/۵ \;\; kN \uparrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; ۲(۴۰) + ۲۰ - A_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = ۱۰۰ \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_x = ۱۰۰ \;\; kN \leftarrow$$

با استفاده از مقطعی که اعضای DE، OE و LM را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو LM (NO، MN و KL) را تعیین می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{ALD} = 0 \;:\; F_{LM}(۴۰) + ۸۰(۴۰) + ۴۰(۱۰+۲۵) + ۱۰۰(۲۰) - ۱۰۰(۴۰) - ۳۱۲/۵(۸۰) = 0$$

$$F_{LM} = +۵۶۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{LM} = ۵۶۰ \;\; kN \;\; (T)$$

با استفاده از مقطعی که اعضای CD، CQ، KQ و KL را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو CD را به دست می‌آوریم.

$$+\circlearrowleft \sum M_Q^{AKC} = 0 \;:\; ۵۶۰(۲۰) + ۸۰(۲۰) - ۴۰(۱۰) + ۴۰(۵) - ۱۰۰(۲۰) - ۳۱۲/۵(۶۰) - F_{CD}\left[\left[\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}\right](۱۰) + \frac{۱}{\sqrt{۱۷}}(۲۰)\right] = 0$$

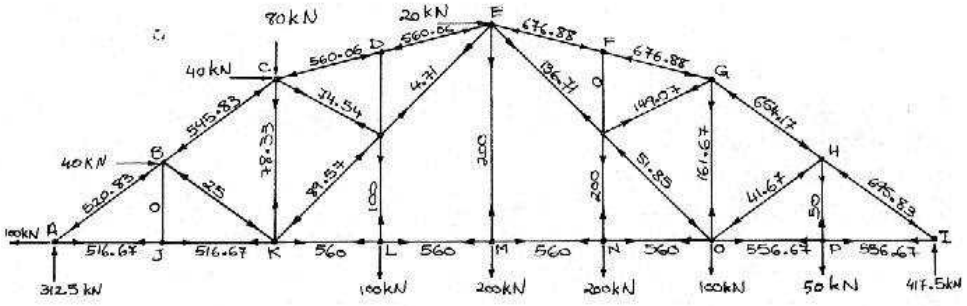
$$F_{CD} = -۵۶۰/۰۶ \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{CD} = ۵۶۰/۰۶ \;\; kN \;\; (C)$$

با استفاده از مقطعی که اعضای GF، GR، OR و ON را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو GF را به دست می‌آوریم.

$$+\circlearrowleft \sum M_R^{IOG} = 0 \;:\; F_{GF}\left[\left[\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}\right](۱۰) + \left[\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}\right](۲۰)\right] - ۱۰۰(۲۰) - ۵۰(۴۰) - ۵۶۰(۲۰) + ۴۱۷/۵(۶۰) = 0$$

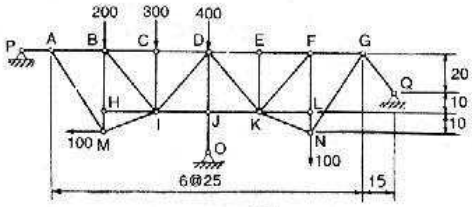
$$F_{GF} = -۶۷۶/۸۸ \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{GF} = ۶۷۶/۸۸ \;\; kN \;\; (C)$$

برای محاسبهٔ نیروی داخلی در سایر اعضای خرپا، از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۴۸-۲

با توجه به وجود نیروی محوری تنها در اعضای خرپا، واکنشهای تکیه‌گاهی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.



شکل ۲-۴۸

$\blacktriangleright P_y = 0$ ، $\blacktriangleright \vec{O}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_G = 0 \;:\; 400(75) + 300(100) + 200(125) + 100(25) - 100(40) - O_y(75) = 0$

$O_y = 1113/33 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{O}_y = 1113/33 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 1113/33 - 200 - 300 - 400 - 100 + Q_y = 0 \Rightarrow Q_y = 113/33 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{Q}_y = 113/33 \;\; kN \downarrow$

$Q_x = 0/75 Q_y = 0/75(113/33) = 85 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{Q}_x = 85 \;\; kN \rightarrow$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; 85 + P_x - 100 = 0 \Rightarrow P_x = 15 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{P}_x = 15 \;\; kN \rightarrow$

با استفاده از مقطعی که اعضای EF ، KF ، KL و KN را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو EF را تعیین می‌کنیم.

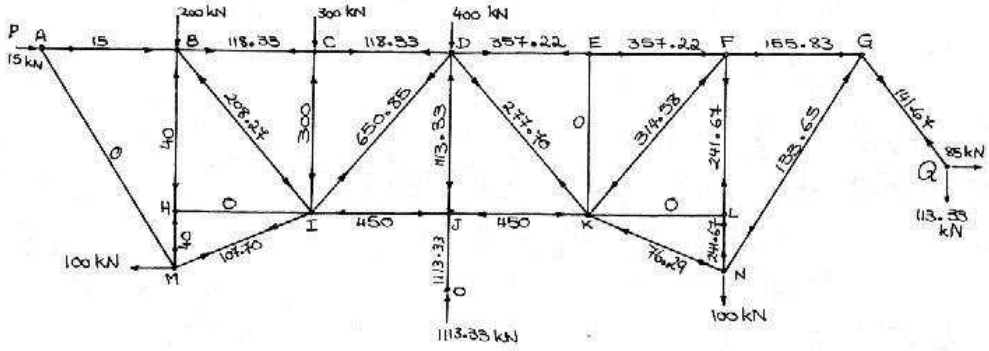
$+\circlearrowleft \sum M_K^{NQGF} = 0 \;:\; F_{EF}(30) - 100(25) - 113/33(65) - 85(10) = 0 \Rightarrow F_{EF} = +357/22 \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{EF} = 357/22 \;\; kN \;\; (T)$

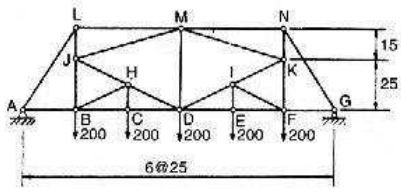
با استفاده از مقطعی که اعضای BC ، BI و MI را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو BC را تعیین می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_I^{PMBA} = 0 \;:\; -100(10) - F_{BC}(30) - 15(30) = 0 \Rightarrow F_{BC} = -48/33 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{BC} = 48/33 \;\; kN \;\; (C)$

برای محاسبهٔ نیروی داخلی در سایر اعضاء از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۴۹-۲



شکل ۲-۴۹

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; G_y(150) - 200(25 + 50 + 75 + 100 + 125) = 0$

$G_y = 500 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{G}_y = 500 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + 2500 - 5(200) = 0 \Rightarrow A_y = 500 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 500 \;\; kN \uparrow$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

با استفاده از مقطعی که اعضای MN ، NK ، KF ، IF و EF را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو MN را تعیین می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_P^{FGN} = 0 \;:\; 500(25) + F_{MN}(40) = 0 \Rightarrow F_{MN} = -312/5 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{MN} = 312/5 \;\; kN \;\; (C)$

با استفاده از مقطعی که اعضای MN، MK، ID و DE را قطع می‌کند، نیروی داخلی اعضای MK و ID را به دست می‌آوریم.

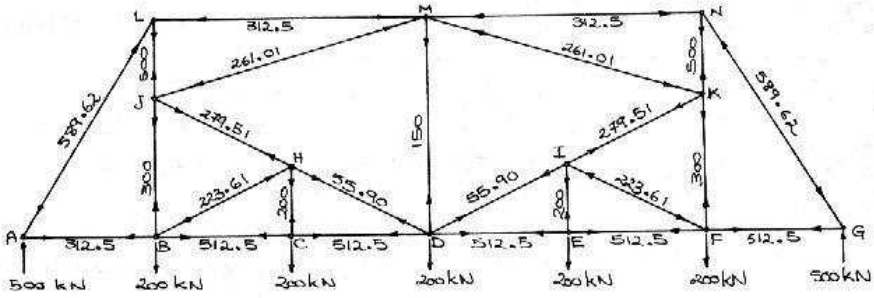
$$+\circlearrowleft \sum M_D^{IEGN} = 0 \;:\; 500(25) - 200(25+50) - 312/5(40) + F_{MK}\left[\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)(50) + \left(\frac{10}{\sqrt{10}}\right)(25)\right] = 0$$

$$F_{MK} = -261/01 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{MK} = 261/01 \;\; kN \;\; (C)$$

$$+\uparrow \sum F_y^{IEGN} = 0 \;:\; 500 - 2(200) - 261/01\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - F_{ID}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; F_{ID} = +55/90 \;\; kN$$

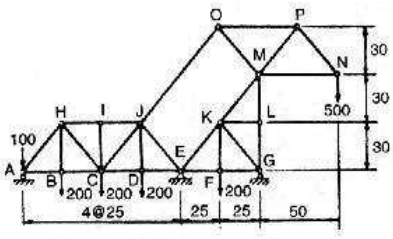
$$\blacktriangleright F_{ID} = 55/90 \;\; kN \;\; (T)$$

برای محاسبهٔ نیروی داخلی سایر اعضا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۵۰-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; E_x = 0 \qquad \blacktriangleright E_x = 0$$



شکل ۲-۵۰

با استفاده از مقطعی که اعضای JO، KM و LM را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو JO را محاسبه می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_M^{MNPO} = 0 \;:$$

$$F_{JO}\left[\left(\frac{6}{\sqrt{61}}\right)(25) + \left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)(30)\right] - 500(50) = 0$$

$$F_{JO} = +650/85 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{JO} = 650/85 \;\; kN \;\; (T)$$

با استفاده از مقطعی که اعضای JO، EK و EF را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو EK و واکنش تکیه‌گاهی G_y را محاسبه می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{FGMNPO} = 0 \;:\; 650/85\left[\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)(90) - \left(\frac{6}{\sqrt{61}}\right)(25)\right] - 500(100) - 200(25) + G_y(50) = 0$$

$$G_y = 600 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{G_y} = 600 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y^{FGMNPO} = 0 \;:\; 600 - 200 - 650/85\left(\frac{6}{\sqrt{61}}\right) - F_{EK}\left(\frac{6}{\sqrt{61}}\right) - 500 = 0 \;\Rightarrow\; F_{EK} = -781/03 \;\; kN$$

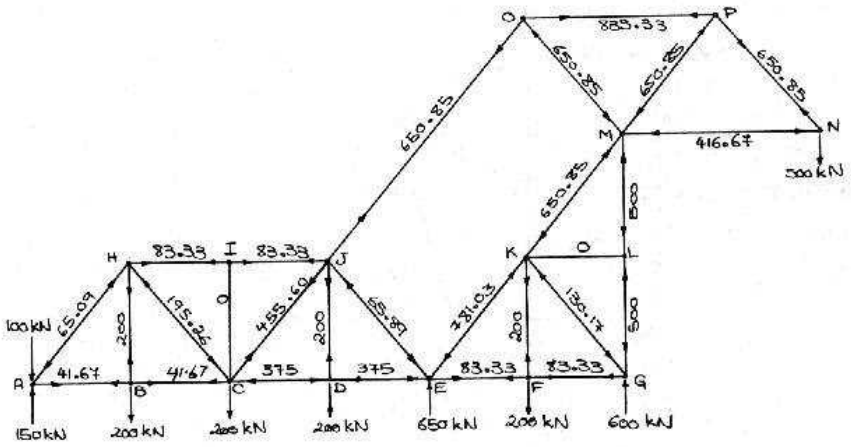
$$\blacktriangleright F_{EK} = 781/03 \;\; kN \;\; (C)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; 600(150) - 200(25+50+75+125) + E_y(100) - 500(200) = 0 \;\Rightarrow\; E_y = 650 \;\; kN$$

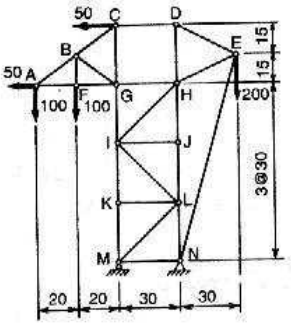
$$\blacktriangleright \vec{E_y} = 650 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 600 + 650 - 500 - 3(200) + A_y - 100 = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 150 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A_y} = 150 \;\; kN \uparrow$$

برای تعیین نیروی داخلی در سایر اعضا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۲-۵۱



شکل ۲-۵۱

$+\circlearrowleft \sum M_N = 0 \;:\; 100(50+70) + 50(90+120) - M_y(30) - 200(30) = 0$

$M_y = 550 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{M}_y = 550 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 550 - 2(100) - 200 + N_y = 0 \;\Rightarrow\; N_y = -150 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{N}_y = 150 \;\; kN \downarrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; N_x - 2(50) = 0 \;\Rightarrow\; N_x = 100 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{N}_x = 100 \;\; kN \rightarrow$

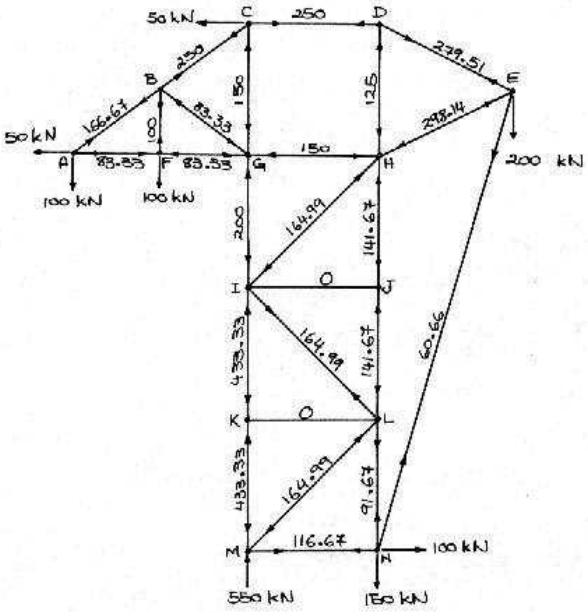
با استفاده از مقطعی که اعضای IG، IH، IJ، LJ و NE را قطع می‌کند، نیروی داخلی اعضای IH و NE را محاسبه می‌کنیم.

$+\circlearrowleft \sum M_N^{IMNL} = 0 \;:\; 200(30) - 550(30) - F_{IH}\left[\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right](60) + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right](30)\right] = 0$

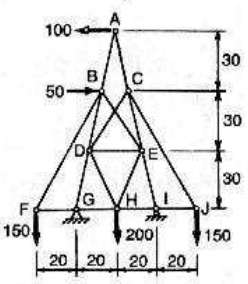
$F_{IH} = -164/99 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{IH} = 164/99 \;\; kN \;\; (C)$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; 100 - 164/99\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + F_{NE}\left[\frac{2}{\sqrt{53}}\right] = 0 \;\Rightarrow\; F_{NE} = +60/66 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{NE} = 60/66 \;\; kN \;\; (T)$

برای تعیین نیروی داخلی در سایر اعضا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۵۲-۲



شکل ۲-۵۲

$$+\circlearrowleft \sum M_G = 0 \;:\; I_y(۴۰) + ۱۵۰(۲۰) - ۱۵۰(۶۰) - ۲۰۰(۲۰) - ۵۰(۶۰) + ۱۰۰(۹۰) = 0$$

$$I_y = ۱۰۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{I}_y = ۱۰۰ \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; G_y + ۱۰۰ - ۲(۱۵۰) - ۲۰۰ = 0 \;\Rightarrow\; G_y = ۴۰۰ \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{G}_y = ۴۰۰ \;\; kN \uparrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; G_x + ۵۰ - ۱۰۰ = 0 \;\Rightarrow\; G_x = ۵۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{G}_x = ۵۰ \;\; kN \rightarrow$$

با استفاده از تعادل گره J، نیروی داخلی عضو JC و IJ را محاسبه می‌کنیم.

$$+\uparrow \sum F_y^J = 0 \;:\; F_{JC}\left[\frac{۹}{\sqrt{۱۰۶}}\right] - ۱۵۰ = 0 \;\Rightarrow\; F_{JC} = +۱۷۱/۵۹ \;\; kN$$

$$\blacktriangleright F_{JC} = ۱۷۱/۵۹ \;\; kN \;\; (T)$$

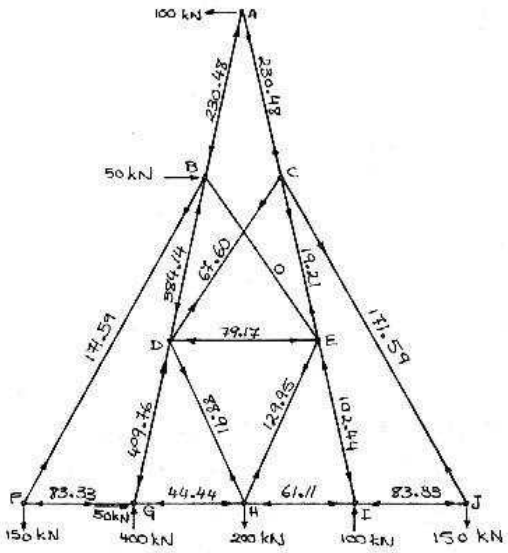
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x^J = 0 \;:\; -۱۷۱/۵۹\left[\frac{۵}{\sqrt{۱۰۶}}\right] - F_{IJ} = 0 \;\Rightarrow\; F_{IJ} = -۸۳/۳۳ \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{IJ} = ۸۳/۳۳ \;\; kN \;\; (C)$$

با استفاده از مقطعی که اعضای AB، CD، CE و IJ را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو AB را محاسبه می‌کنیم.

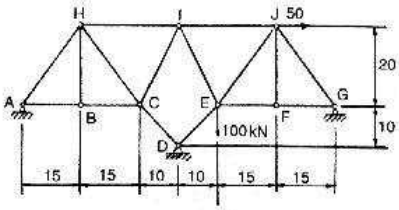
$$+\circlearrowleft \sum M_C^{ACJ} = 0 \;:\; ۸۳/۳۳(۶۰) + ۱۰۰(۳۰) - ۱۵۰(۳۳/۳۳) + F_{AB}\left[\left[\frac{۲}{\sqrt{۸۵}}\right](۳۰) + \left[\frac{۹}{\sqrt{۸۵}}\right](۶/۶۶۶)\right] = 0$$

$$F_{AB} = -۲۳۰/۴۸ \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{AB} = ۲۳۰/۴۸ \;\; kN \;\; (C)$$

برای تعیین نیروی داخلی در سایر اعضای خرپا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



۵۳-۲



شکل ۲-۵۳

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad A_y + D_y + G_y - 100 = 0$$

$$A_y + D_y + G_y = 100 \qquad (I)$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad D_x + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_x = -50 \quad kN$$

$$\blacktriangleright \vec{D}_x = 50 \quad kN \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \quad : \quad -40A_y + 40G_y - 100(10) - 50(30) = 0$$

$$-4A_y + 4G_y = 250 \qquad (II)$$

با استفاده از مقطعی که اعضای HI، IC و CD را قطع می‌کند، واکنش تکیه‌گاهی A_y را بر حسب F_{CD} به دست می‌آوریم.

$$+\circlearrowleft \sum M_I^{ACIH} = 0 \quad : \quad F_{CD}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(20) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(10)\right] - A_y(40) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8A_y = 3\sqrt{2}F_{CD} \qquad (a)$$

با استفاده از مقطعی که اعضای IJ، IE و DE را قطع می‌کند، واکنش تکیه‌گاهی G_y را بر حسب F_{DE} به دست می‌آوریم.

$$+\circlearrowleft \sum M_I^{EGJI} = 0 \quad : \quad G_y(40) - 100(10) - F_{DE}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(20) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(10)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 8G_y - 3\sqrt{2}F_{DE} = 200 \qquad (b)$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_y^D = 0 \quad : \quad F_{DE}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + F_{CD}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + D_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}F_{CD} + \sqrt{2}F_{DE} + 2D_y = 0 \qquad (c)$$

با جایگزینی روابط (a) و (b) در (c):

$$\frac{8}{3}A_y + \frac{8}{3}G_y - \frac{200}{3} + 2D_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 8A_y + 6D_y + 8G_y = 200 \qquad (III)$$

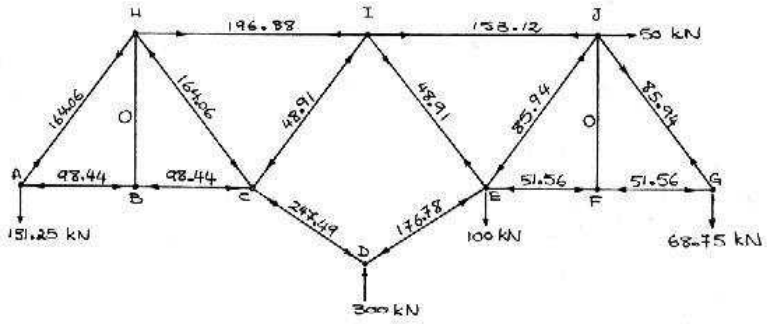
از حل همزمان معادلات (I)، (II) و (III)، واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، D_y و G_y به دست خواهند آمد.

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 131/25 \quad kN \downarrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{D}_y = 300 \quad kN \uparrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{G}_y = 68/75 \quad kN \downarrow$$

با استفاده از روابط (a) و (b)، نیروهای داخلی اعضای DE و CD نیز محاسبه می‌شوند.

$$\blacktriangleright F_{CD} = 247/49 \quad kN \quad (C) \qquad , \qquad \blacktriangleright F_{DE} = 176/78 \quad kN \quad (C)$$

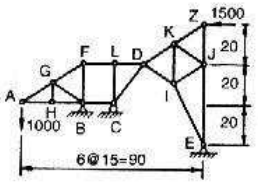
برای تعیین نیروی داخلی در سایر اعضای خرپا از روش گره‌ها استفاده می‌کنیم.



واکنشهای تکیه‌گاهی خرپاهای نشان داده شده در مسایل زیر را به دست آورید.

۵۴-۲

با استفاده از مقطعی که اعضای FL و BC را قطع می‌کند، واکنش تکیه‌گاهی B_y را محاسبه می‌کنیم.



شکل ۲-۵۴

$$+\uparrow \sum F_y^{ABF} = 0 \;:\; B_y - 1000 = 0 \Rightarrow B_y = 1000 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{B}_y = 1000 \;\; kN \uparrow$$

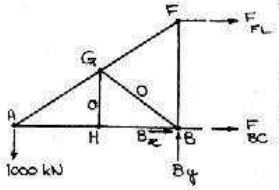
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; B_x + E_x - 1500 = 0 \Rightarrow B_x + E_x = 1500 \qquad (I)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; E_y + C_y + 1000 - 1000 = 0 \Rightarrow C_y + E_y = 0 \qquad (II)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{DEZ} = 0 \;:\; E_x(40) + E_y(30) + 1500(20) = 0$$

$$4E_x + 3E_y = -3000 \qquad (III)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; E_x(20) + E_y(60) + 1500(40) + 1000(30) + C_y(15) = 0$$



$$3C_y + 4E_x + 12E_y = -18000 \qquad (IV)$$

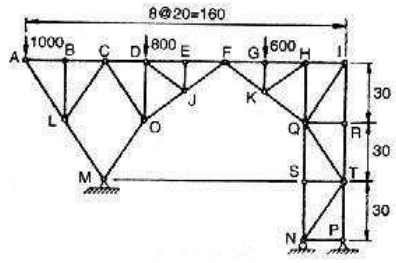
از حل همزمان معادلات (I) تا (IV)، واکنشهای تکیه‌گاهی به دست می‌آیند.

$$B_x = 375 \;\; kN \;\; , \;\; C_y = 2500 \;\; kN \;\; , \;\; E_x = 1125 \;\; kN \;\; , \;\; E_y = -2500 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{B}_x = 375 \;\; kN \rightarrow \;\; , \;\; \vec{C}_y = 2500 \;\; kN \uparrow \;\; , \;\; \vec{E}_x = 1125 \;\; kN \rightarrow$$

$$\vec{E}_y = 2500 \;\; kN \downarrow$$

۵۵-۲



شکل ۲-۵۵

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; M_y + N_y + P_y - 1000 - 800 - 600 = 0$$

$$M_y + N_y + P_y = 2400 \qquad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_F^{FQNPI} = 0 \;:\; N_y(40) + P_y(60) + P_x(90) - 600(20) = 0$$

$$4N_y + 6P_y + 9P_x = 1200 \qquad (II)$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; M_x + P_x = 0 \Rightarrow M_x + P_x = 0 \qquad (III)$$

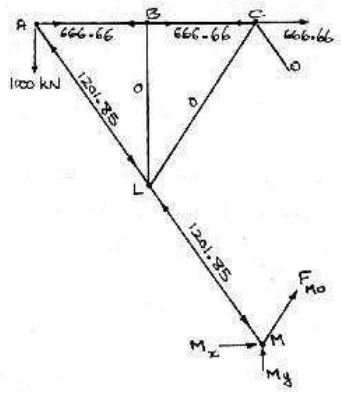
$$+\circlearrowleft \sum M_M = 0 \;:$$

$$1000(40) - 800(20) - 600(80) + N_y(100) + P_y(120) + P_x(30) = 0$$

$$3P_x + 12P_y + 10N_y = 2400 \qquad (IV)$$

با توجه به تعادل گره‌های B، L و C، صفر - نیرویی بودن اعضای BL، LC و CO مشخص می‌گردد. بنابراین:

$$\blacktriangleright F_{BL} = F_{LC} = F_{CO} = 0$$



یا استفاده از روش گره‌ها نیروی اعضای AL ، LM ، AB ، BC و CD را تعیین می‌کنیم.

با توجه به تعادل جسم آزاد AMC که در شکل مقابل نشان داده شده است، داریم:

$$\pm\sum F_x^{AMC}=0 \;:\; F_{MO}\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right]+666/66+M_x=0 \qquad (a)$$

$$+\uparrow\sum F_y^{AMC}=0 \;:\; F_{MO}\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right]-1000+M_y=0 \qquad (b)$$

بین دو رابطهٔ (a) و (b) پارامتر F_{MO} را حذف می‌کنیم.

از (a) و (b) داریم: $M_y\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right]-M_x\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right]-666/66\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right]-1000\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right]=0$

$$-3M_x+2M_y=4000 \qquad (V)$$

از حل همزمان معادلات (I) تا (V) مقادیر واکنشهای تکیه‌گاهی به دست می‌آیند.

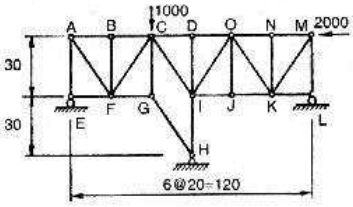
$$M_x=2400/07\ kN\ ,\ M_y=2600/07\ kN\ ,\ P_x=-400/07\ kN$$

$$P_y=2800/47\ kN\ ,\ N_y=-3000/54\ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_y=2600/07\ kN\uparrow\ ,\ \blacktriangleright \vec{P}_y=2800/47\ kN\uparrow\ ,\ \blacktriangleright \vec{N}_y=3000/54\ kN\downarrow$$

$$\blacktriangleright \vec{P}_x=400/07\ kN\leftarrow\ ,\ \blacktriangleright \vec{M}_x=400/07\ kN\rightarrow$$

۲-۵۶



شکل ۲-۵۶

$$\pm\sum F_x=0 \;:\; H_x-2000=0 \Rightarrow H_x=2000\ kN$$

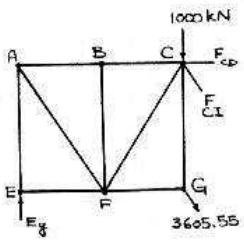
$$\blacktriangleright \vec{H}_x=2000\ kN\rightarrow$$

با استفاده از تعادل افقی گره H، نیروی داخلی عضو GH را به دست می‌آوریم.

$$\pm\sum F_x^H=0 \;:\; 2000-F_{GH}\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right]=0 \Rightarrow F_{GH}=3605/55\ kN$$

$$\blacktriangleright F_{GH}=3605/55\ kN\ (T)$$

با استفاده از مقطعی که اعضای CD ، CI و GH را قطع می‌کند، واکنش تکیه‌گاهی E_y را محاسبه می‌کنیم.



$$+\circlearrowleft\sum M_C^{ACGD}=0 \;:\; 3605/55\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right](30)-E_y(40)=0$$

$$E_y=1500\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y=1500\ kN\uparrow$$

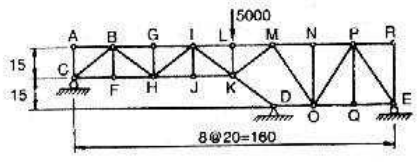
$$+\circlearrowleft\sum M_H=0 \;:\; 1000(20)+2000(60)+G_y(60)-1500(60)=0$$

$$G_y=-833/33\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{G}_y=833/33\ kN\downarrow$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \;:\; 1500-833/33-1000+H_y=0 \Rightarrow H_y=333/33\ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{H}_y=333/33\ kN\uparrow$$

۲-۵۷



شکل ۲-۵۷

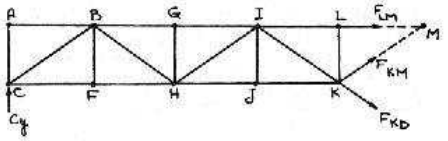
$$\pm\sum F_x=0 \;:\; D_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{D}_x=0$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \;:\; C_y+D_y+E_y-5000=0$$

$$C_y+D_y+E_y=5000 \qquad (I)$$

$$+\circlearrowleft\sum M_D=0 \;:\; 5000(20)+E_y(60)-C_y(100)=0$$

$$5C_y-3E_y=5000 \qquad (II)$$



با استفاده از مقطعی که اعضای LM ، KM و KD را قطع می‌کند، واکنش تکیه‌گاهی C_y را بر حسب F_{KD} به دست می‌آوریم.

$$+\circlearrowleft \sum M_M = 0 \quad :$$

$$0/8F_{KD}(15) + 0/6F_{KD}(20) + 5000(20) - C_y(100) = 0$$

$$6F_{KD} - 25C_y = -2500 \qquad (a)$$

با توجه به تعادل گره D در راستای قائم:

$$+\uparrow \sum F_y^D = 0 \quad : \quad D_y + 0/6F_{KD} = 0 \qquad (b)$$

بین دو رابطهٔ (a) و (b) پارامتر F_{KD} را حذف می‌کنیم.

$$-25C_y - 10D_y = -2500 \qquad (III)$$

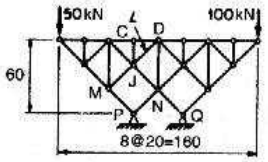
از حل همزمان معادلات (I) ، (II) و (III) ، واکنشهای تکیه‌گاهی به دست می‌آیند.

$$C_y = 2500 \ kN \quad , \quad D_y = -6000 \ kN \quad , \quad E_y = 4000 \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{C_y} = 2500 \ kN \uparrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{D_y} = 6000 \ kN \downarrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{E_y} = 4000 \ kN \uparrow$$

نیروی اعضای نشان داده شده در خرپاهای زیر را محاسبه کنید.

۲-۵۸



شکل ۲-۵۸

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad : \quad P_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{P_x} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_Q = 0 \quad : \quad 50(100) - 100(60) - P_y(40) = 0 \Rightarrow P_y = -25 \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{P_y} = 25 \ kN \downarrow$$

از تعادل گره P در راستای افقی:

$$\rightarrow \sum F_x^P = 0 \quad : \quad -F_{PM}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + F_{PN}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0 \Rightarrow F_{PN} = F_{PM} \qquad (a)$$

$$+\uparrow \sum F_y^P = 0 \quad : \quad F_{PM}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + F_{PN}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - 25 = 0$$

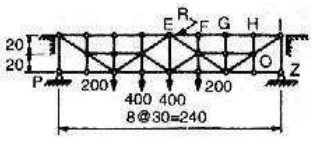
$$F_{PM} + F_{PN} = 35/36 \xrightarrow{\text{با جایگزینی رابطهٔ (a)}} \blacktriangleright F_{PM} = P_{PN} = 17/68 \ kN \quad (T)$$

با توجه به مقطعی که اعضای CD ، JD ، JN و PN را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو L را به دست می‌آوریم.

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{APC} = 0 \quad : \quad F_{JD}(20\sqrt{2}) + 17/68(40\sqrt{2}) + 50(40) - 25(20) = 0 \Rightarrow F_{JD} = -88/39 \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{JD} = 88/39 \ kN \quad (C)$$

۲-۵۹



شکل ۲-۵۹

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad : \quad P_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{P_x} = 0$$

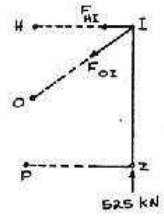
$$+\circlearrowleft \sum M_P = 0 \quad : \quad Z_y(240) - 200(60 + 150) - 400(90 + 120) = 0$$

$$Z_y = 525 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{Z_y} = 525 \ kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad 525 + P_y - 2(200) - 2(400) = 0 \Rightarrow P_y = 675 \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{P_y} = 675 \ kN \uparrow$$

با استفاده از مقطعی که اعضای HI ، OI و PZ را قطع می‌کند، نیروی داخلی اعضای OI و HI را محاسبه می‌کنیم.

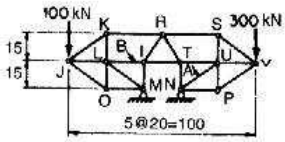


$$+\uparrow \sum F_y^{IZ} = 0 \quad : \quad 525 - F_{OI}\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right] = 0 \Rightarrow F_{OI} = 946/46 \ kN \quad \blacktriangleright F_{OI} = 946/46 \ kN \quad (T)$$

$$\rightarrow \sum F_x^I = 0 \quad : \quad -F_{HI} - 946/46\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right] = 0 \Rightarrow F_{HI} = -787/5 \ kN \quad \blacktriangleright F_{HI} = 787/5 \ kN \quad (C)$$

با توجه به تعادل گره‌های H، G و F در راستای افق، نیروی داخلی عضو J به دست خواهد آمد. $\blacktriangleright F_{EF}=F_{FG}=F_{GH}=۷۸۷/۵\ \ kN\ \ (C)$

۶۰-۲



شکل ۲-۶۰

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0\ :\ M_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{M}_x=0$

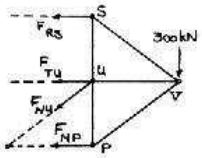
$+\circlearrowleft \sum M_M=0\ :\ N_y(۲۰)+۱۰۰(۴۰)-۳۰۰(۶۰)=0 \Rightarrow N_y=۷۰۰\ \ kN$

$\blacktriangleright \vec{N}_y=۷۰۰\ \ kN\uparrow$

$+\uparrow\sum F_y=0\ :\ ۷۰۰+M_y-۳۰۰-۱۰۰=0 \Rightarrow M_y=-۳۰۰\ \ kN$

$\blacktriangleright \vec{M}_y=۳۰۰\ \ kN\downarrow$

با استفاده از مقطعی که اعضای RS، TU، NU و NP را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو NU را به دست می‌آوریم.



$+\uparrow\sum F_y^{SPV}=0\ :\ -۳۰۰-F_{NU}\left(\frac{۳}{۵}\right)=0 \Rightarrow F_{NU}=-۵۰۰\ \ kN$

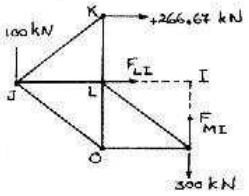
$\blacktriangleright F_{NU}=۵۰۰\ \ kN\ \ (C)$

با استفاده، از مقطعی که اعضای KR، IR و IT را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو KR را به دست می‌آوریم.

$+\circlearrowleft \sum M_I^{JOMIK}=0\ :\ ۱۰۰(۴۰)-F_{KR}(۱۵)=0 \Rightarrow F_{KR}=+۲۶۶/۶۷\ \ kN$

$\blacktriangleright F_{KR}=۲۶۶/۶۷\ \ kN\ \ (T)$

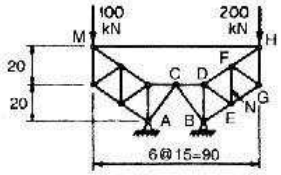
با استفاده از مقطعی که اعضای KR، LI و MI را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو LI را محاسبه می‌کنیم.



$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^{JOMLK}=0\ :\ ۲۶۶/۶۷+F_{LI}=0 \Rightarrow F_{LI}=-۲۶۶/۶۷\ \ kN$

$\blacktriangleright F_{LI}=۲۶۶/۶۷\ \ kN\ \ (C)$

۶۱-۲



$+\circlearrowleft \sum M_A=0\ :\ ۱۰۰(۳۰)-۲۰۰(۶۰)+B_y(۳۰)=0 \Rightarrow B_y=۳۰۰\ \ kN$

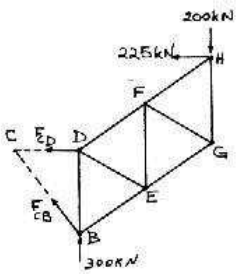
$\blacktriangleright \vec{B}_y=۳۰۰\ \ kN\uparrow$

$+\uparrow\sum F_y=0\ :\ A_y+۳۰۰-۱۰۰-۲۰۰=0 \Rightarrow A_y=0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=0$

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0\ :\ A_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=0$

با استفاده از مقطعی که اعضای CD، CB و MH را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو MH را محاسبه می‌کنیم.

شکل ۲-۶۱



$+\circlearrowleft \sum M_C^{DBGH}=0\ :\ F_{MH}(۲۰)+۳۰۰(۱۵)-۲۰۰(۴۵)=0 \Rightarrow F_{MH}=۲۲۵\ \ kN$

$\blacktriangleright F_{MH}=۲۲۵\ \ kN\ \ (T)$

با توجه به مقطعی که اعضای MH، DF، FE و GE را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو FE را محاسبه می‌کنیم.

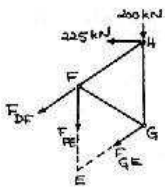
$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^{FGH}=0\ :\ -۲۲۵-F_{DF}\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\right)-F_{GE}\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\right)=0$

$F_{DF}+F_{GE}=-۷۵\sqrt{۱۳} \qquad (I)$

$+\uparrow\sum F_y^{FGH}=0\ :\ -۲۰۰-F_{DF}\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\right)-F_{GE}\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\right)-F_{EF}=0$

$\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}F_{EF}+F_{GE}+F_{DF}=-۱۰۰\sqrt{۱۳} \qquad (II)$

$+\circlearrowleft \sum M_F^{FGH}=0\ :\ ۲۲۵(۱۰)-F_{GE}\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\right)(۱۰)-F_{GE}\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\right)(۱۵)-۲۰۰(۱۵)=0 \Rightarrow F_{GE}=-۴۵/۰۷\ \ kN$



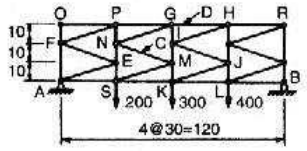
$\blacktriangleright F_{GE} = ۴۵/۰۷ \quad kN \quad (C)$

با جایگزینی مقدار F_{GE} در معادلات (I) و (II)، مقادیر F_{DF} و F_{EF} را محاسبه می‌کنیم.

$F_{DF} = -۲۲۵/۳۵ \quad kN \qquad , \qquad F_{EF} = -۵۰ \quad kN$

$\blacktriangleright F_{DF} = ۲۲۵/۳۵ \quad kN \quad (C) \qquad , \qquad \blacktriangleright F_{EF} = ۵۰ \quad kN \quad (C)$

۶۲-۲



شکل ۲-۶۲

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \; : \; A_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$

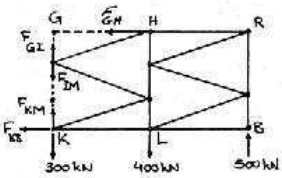
$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \; : \; B_y(۱۲۰) - ۲۰۰(۳۰) - ۳۰۰(۶۰) - ۴۰۰(۹۰) = ۰$

$B_y = ۵۰۰ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۵۰۰ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \; : \; ۵۰۰ - ۲۰۰ - ۳۰۰ - ۴۰۰ + A_y = ۰ \; \Rightarrow \; A_y = ۴۰۰ \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۴۰۰ \quad kN \uparrow$

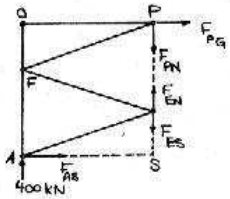
بااستفاده از مقطعی که اعضای GH ، GI ، IM ، KM و KS را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو GH را به دست می‌آوریم.



$+\circlearrowleft \sum M_K^{KBRH} = ۰ \; : \; ۵۰۰(۶۰) - ۴۰۰(۳۰) + F_{GH}(۳۰) = ۰$

$F_{GH} = -۶۰۰ \quad kN \qquad \blacktriangleright F_{GH} = ۶۰۰ \quad kN \quad (C)$

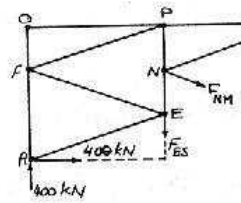
با استفاده از مقطعی که اعضای PG ، PN ، NE ، SE و AS را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو AS را محاسبه می‌کنیم.



$+\circlearrowleft \sum M_P^{POA} = ۰ \; : \; F_{AS}(۳۰) - ۴۰۰(۳۰) = ۰ \; \Rightarrow \; F_{AS} = +۴۰۰ \quad kN$

$\blacktriangleright F_{AS} = ۴۰۰ \quad kN \quad (T)$

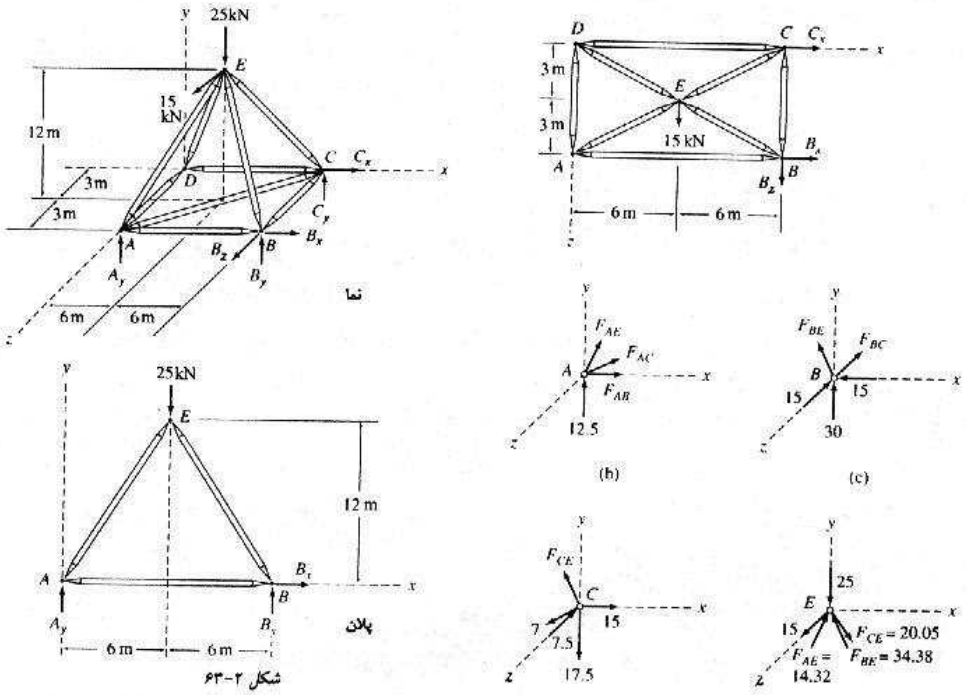
با استفاده از مقطعی که اعضای GH ، GI ، NM ، ES و AS را قطع می‌کند، نیروی داخلی عضو NM محاسبه خواهد شد.



$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x^{GOA} = ۰ \; : \; ۴۰۰ - ۶۰۰ + F_{NM}\left[\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right] = ۰$

$F_{NM} = +۲۱۰/۸۲ \quad kN \qquad \blacktriangleright F_{NM} = ۲۱۰/۸۲ \quad kN \quad (T)$

۲-۶۳ در خرپای فضایی نشان داده شده در شکل زیر، واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی اعضا را تعیین کنید.



شکل ۲-۶۳

با توجه به شکلهای فوق، طول اعضای مختلف خرپا و تصویر آنها در راستای محورهای x و y و z را مشخص می‌کنیم. نتایج حاصل در جدول زیر خلاصه شده‌اند.

عضو	x (m)	y (m)	z (m)	طول عضو (m)
AB	۱۲	۰	۰	۱۲/۰
BC	۰	۰	۶	۶/۰
CD	۱۲	۰	۰	۱۲/۰
AD	۰	۰	۶	۶/۰
AC	۱۲	۰	۶	۱۳/۴۲
AE	۶	۱۲	۳	۱۳/۷۵
BE	۶	۱۲	۳	۱۳/۷۵
CE	۶	۱۲	۳	۱۳/۷۵
DE	۶	۱۲	۳	۱۳/۷۵

همان طور که در شکل ۲-۶۳ نشان داده شده است، در گره D سه عضو AD، CD و DE به یکدیگر متصل شده‌اند. از این سه عضو، اعضای AD و CD در صفحهٔ (xz) واقع شده‌اند، در حالی که DE چنین نیست. از آن جا که هیچ بار خارجی بر گره D وارد نمی‌شود، نتیجه می‌گیریم که عضو DE صفر - نیرویی است.

$\blacktriangleright F_{DE} = 0$

با توجه به آنچه که در بالا بیان شد و این نکته که اعضای AD و CD نیز همراستا نیستند، صفر - نیرویی بودن اعضای مزبور نیز محقق خواهد شد.

$\blacktriangleright F_{AD} = 0 \quad , \quad \blacktriangleright F_{CD} = 0$

$+\swarrow \sum F_z = 0 \; : \; B_z + 15 = 0 \;\Rightarrow\; B = -15 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{B}_z = 15 \;\; kN \nearrow$

$+\circlearrowleft \sum M_y = 0 \; : \; B_x(6) + 15(12) - 15(6) = 0 \;\Rightarrow\; B_x = -15 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 15 \;\; kN \leftarrow$

$\pm \sum F_x = 0 \; : \; C_x - 15 = 0 \;\Rightarrow\; C_x = 15 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_x = 15 \;\; kN \rightarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_x = 0 \; : \; 15(12) + 25(3) - B_y(6) - A_y(6) = 42/5 \;\Rightarrow\; A_y + B_y = 42/5 \qquad (I)$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \; : \; A_y + B_y + C_y - 25 = 0 \;\Rightarrow\; A_y + B_y + C_y = 25 \qquad (II)$

با جایگزین کردن رابطهٔ (I) در (II)، واکنش تکیه‌گاهی C_y به دست می‌آید.

$C_y = -۱۷/۵ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = ۱۷/۵ \ kN \downarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_z = ۰ \ : \ B_y(۱۲) - ۱۷/۵(۱۲) - ۲۵(۶) = ۰ \ \Rightarrow \ B_y = ۳۰ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۳۰ \ kN \uparrow$

با جایگزینی مقدار B_y در رابطهٔ (I)، واکنش تکیه‌گاهی A_y محاسبه می‌شود.

$A_y = ۱۲/۵ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۲/۵ \ kN \uparrow$

تعادل گره A:

$+\uparrow \sum F_y^A = ۰ \ : \ ۱۲/۵ + \left[\frac{y_{AE}}{L_{AE}}\right] F_{AE} = ۰ \ \Rightarrow \ ۱۲/۵ + \left[\frac{۱۲}{۱۳/۷۵}\right] F_{AE} = ۰ \ \Rightarrow \ F_{AE} = -۱۴/۳۲ \ kN$

$\blacktriangleright F_{AE} = ۱۴/۳۲ \ kN \ (C)$

$+\swarrow \sum F_z^A = ۰ \ : \ -\left[\frac{۶}{۱۳/۴۲}\right] F_{AC} + \left[\frac{۳}{۱۳/۷۵}\right](۱۴/۳۲) = ۰ \ \Rightarrow \ F_{AC} = ۷/۰ \ kN \qquad \blacktriangleright F_{AC} = ۷/۰ \ kN \ (T)$

$\pm\rightarrow \sum F_x^A = ۰ \ : \ F_{AB} + \left[\frac{۱۲}{۱۳/۴۲}\right](۷/۰) - \left[\frac{۶}{۱۳/۷۵}\right](۱۴/۳۲) = ۰ \ \Rightarrow \ F_{AB} = ۰/۰ \qquad \blacktriangleright F_{AB} = ۰/۰$

تعادل گره B:

$\pm\rightarrow \sum F_x^B = ۰ \ : \ -\left[\frac{۶}{۱۳/۷۵}\right] F_{BE} - ۱۵ = ۰ \ \Rightarrow \ F_{BE} = -۳۴/۳۸ \ kN \qquad \blacktriangleright F_{BE} = ۳۴/۳۸ \ kN \ (C)$

$+\uparrow \sum F_z^B = ۰ \ : \ -۱۵ - F_{BC} + \left[\frac{۳}{۱۳/۷۵}\right](۳۴/۳۸) = ۰ \ \Rightarrow \ F_{BC} = -۷/۵ \ kN \qquad \blacktriangleright F_{BC} = ۷/۵ \ kN \ (C)$

چون کلیهٔ نیروهای مجهول مؤثر بر گره B محاسبه شده‌اند، از معادلهٔ تعادل باقی‌مانده برای کنترل محاسبات استفاده می‌کنیم.

کنترل محاسبات در گره B:

$+\uparrow \sum F_y^B = ۳۰ - \left[\frac{۱۲}{۱۳/۷۵}\right](۳۴/۳۸) = ۰ \qquad O.K.$

تعادل گره C:

$+\uparrow \sum F_y^C = ۰ \ : \ -۱۷/۵ + \left[\frac{۱۲}{۱۳/۷۵}\right] F_{CE} = ۰ \ \Rightarrow \ F_{CE} = ۲۵/۰۵ \ kN \qquad \blacktriangleright F_{CE} = ۲۵/۰۵ \ kN \ (T)$

کنترل محاسبات در گره C:

$\pm\rightarrow \sum F_x^C = ۱۵ - \left[\frac{۶}{۱۳/۷۵}\right](۲۰/۰۵) - \left[\frac{۱۲}{۱۳/۴۲}\right](۷/۰) = ۰ \qquad O.K.$

$+\swarrow \sum F_z^C = -۷/۵ + \left[\frac{۶}{۱۳/۴۲}\right](۷/۰) + \left[\frac{۳}{۱۳/۷۵}\right](۲۰/۰۵) = ۰ \qquad O.K.$

کنترل محاسبات در گره E:

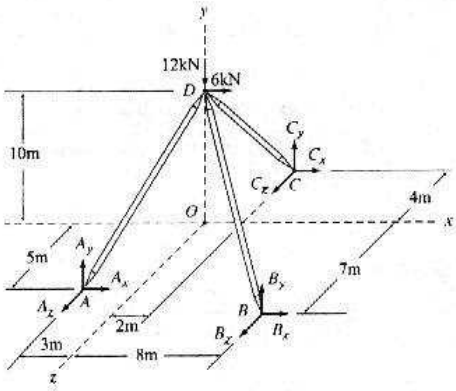
$\pm\rightarrow \sum F_x^E = \left[\frac{۶}{۱۳/۷۵}\right](۱۴/۳۲ - ۳۴/۳۸ + ۲۰/۰۵) = ۰ \qquad O.K.$

$+\uparrow \sum F_y^E = -۲۵ + \left[\frac{۱۲}{۱۳/۷۵}\right](۱۴/۳۲ + ۳۴/۳۸ - ۲۰/۰۵) = ۰ \qquad O.K.$

$+\swarrow \sum F_z^E = ۱۵ - \left[\frac{۳}{۱۳/۷۵}\right](۱۴/۳۲ + ۳۴/۳۸ + ۲۰/۰۵) = ۰ \qquad O.K.$

در خرپاهای فضایی نشان داده شده در مسایل زیر، نیروی داخلی کلیهٔ اعضا را مشخص کنید.

۲-۶۴



شکل ۲-۶۴

عضو	x (m)	y (m)	z (m)	طول عضو (m)
AD	۳	۱۰	۵	۱۱/۵۸
BD	۸	۱۰	۷	۱۴/۵۹
CD	۲	۱۰	۴	۱۰/۹۵

تعادل گره D:

$\pm\rightarrow \sum F_x^D = ۰ \ :$

$-\left[\frac{۳}{۱۱/۵۸}\right] F_{AD} + \left[\frac{۸}{۱۴/۵۹}\right] F_{BD} + \left[\frac{۲}{۱۰/۹۵}\right] F_{CD} + ۶ = ۰ \qquad (I)$

$+\uparrow \sum F_y^D = ۰ \ :$

$-\left[\frac{۱۰}{۱۱/۵۸}\right] F_{AD} - \left[\frac{۱۰}{۱۴/۵۹}\right] F_{BD} - \left[\frac{۱۰}{۱۰/۹۵}\right] F_{CD} - ۱۲ = ۰ \qquad (II)$

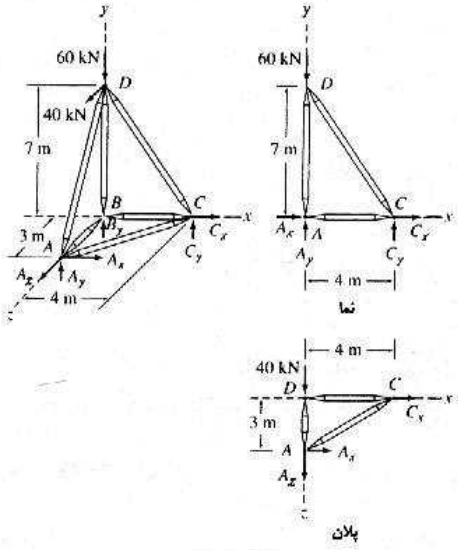
$$+\swarrow \sum F_z^D = 0 \quad : \quad \left[\frac{۵}{۱۱/۵۸}\right] F_{AD} + \left[\frac{۷}{۱۴/۵۹}\right] F_{BD} - \left[\frac{۴}{۱۰/۹۵}\right] F_{CD} = 0 \qquad (III)$$

از حل همزمان معادلات (I)، (II) و (III)، نیروی داخلی اعضای AD، BD و CD محاسبه خواهد شد.

$F_{AD} = ۱/۱۵ \ kN$, $F_{BD} = -۷/۵۵ \ kN$, $F_{CD} = -۸/۵۶ \ kN$

$\blacktriangleright F_{AD} = ۱/۱۵ \ kN \ (T)$, $\blacktriangleright F_{BD} = ۷/۵۵ \ kN \ (C)$, $\blacktriangleright F_{CD} = ۸/۵۶ \ kN \ (C)$

۶۵-۲



شکل ۲-۶۵

عضو	x (m)	y (m)	z (m)	طول عضو (m)
AB	۰	۰	۳	۳
AC	۴	۰	۳	۵
BC	۴	۰	۰	۴
AD	۰	۷	۳	۷/۶۲
BD	۰	۷	۰	۷
CD	۴	۷	۰	۸/۰۶

تعادل گره D :

$$\pm\rightarrow \sum F_x^D = 0 \quad : \quad \left[\frac{۴}{۸/۰۶}\right] F_{CD} = 0 \Rightarrow F_{CD} = 0$$

$\blacktriangleright F_{CD} = 0$

$$+\swarrow \sum F_z^D = 0 \quad : \quad \left[\frac{۳}{۷/۶۲}\right] F_{AD} + ۴۰ = 0$$

$F_{AD} = -۱۰۱/۶ \ kN$ $\blacktriangleright F_{AD} = ۱۰۱/۶ \ kN \ (C)$

$$+\uparrow \sum F_y^D = 0 \quad : \quad \left[\frac{۷}{۷/۶۲}\right] (۱۰۱/۶) - F_{BD} - ۶۰ = 0$$

$F_{BD} = ۳۳/۳۳ \ kN$ $\blacktriangleright F_{BD} = ۳۳/۳۳ \ kN \ (T)$

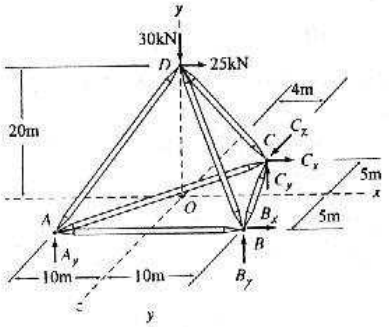
تعادل گره B : $+\swarrow \sum F_z^B = 0 \ : \ F_{AB} = 0$ $\blacktriangleright F_{AB} = 0$

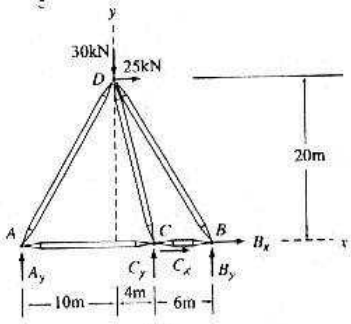
تعادل گره C :

$$\pm\rightarrow \sum F_x^B = 0 \ : \ F_{BC} = 0 \quad \blacktriangleright F_{BC} = 0 \quad , \quad +\swarrow \sum F_z^C = 0 \ : \ \left[\frac{۳}{۵}\right] F_{AC} = 0 \Rightarrow F_{AC} = 0 \quad \blacktriangleright F_{AC} = 0$$

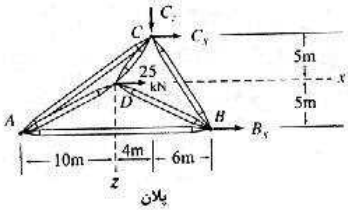
۶۶-۲

عضو	x (m)	y (m)	z (m)	طول عضو (m)
AB	۲۰	۰	۰	۲۰
AC	۱۴	۰	۱۰	۱۷/۲
BC	۶	۰	۱۰	۱۱/۶۶
AD	۱۰	۲۰	۵	۲۲/۹۱
BD	۱۰	۲۰	۵	۲۲/۹۱
CD	۴	۲۰	۵	۲۱





نما



پلان

شکل ۲-۶۶

تعادل گره D:

$$\pm\rightarrow \sum F_x^D = 0 \quad :$$

$$-\left[\frac{10}{22/91}\right]F_{AD} + \left[\frac{10}{22/91}\right]F_{BD} + \left[\frac{4}{21}\right]F_{CD} + 25 = 0 \quad (I)$$

$$+\uparrow \sum F_y^D = 0 \quad :$$

$$-\left[\frac{20}{22/91}\right]F_{AD} - \left[\frac{20}{22/91}\right]F_{BD} - \left[\frac{20}{21}\right]F_{CD} - 30 = 0 \quad (II)$$

$$+\swarrow \sum F_z^D = 0 \quad :$$

$$\left[\frac{5}{22/91}\right]F_{AD} + \left[\frac{5}{22/91}\right]F_{BD} - \left[\frac{5}{21}\right]F_{CD} = 0 \qquad (III)$$

از حل همزمان معادلات (I)، (II) و (III) نیروی داخلی اعضای AD، BD و CD را به دست می‌آوریم.

$$F_{AD} = 16/61 \ kN \ , \ F_{BD} = -33/79 \ kN \ , \ F_{CD} = -15/75 \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{AD} = 16/61 \ kN \ (T) \ , \ \blacktriangleright F_{BD} = 33/79 \ kN \ (C)$$

$$\blacktriangleright F_{CD} = 15/75 \ kN \ (C)$$

تعادل گره A:

$$+\swarrow \sum F_z^A = 0 \ : \ -\left[\frac{5}{22/91}\right](16/61) - \left[\frac{10}{17/2}\right]F_{AC} = 0$$

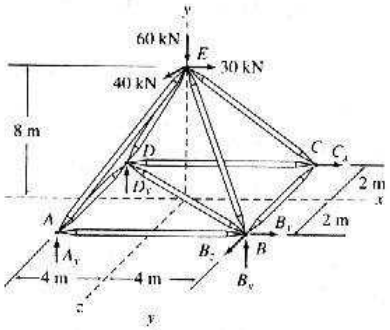
$$F_{AC} = -6/24 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{AC} = 6/24 \ kN \ (C)$$

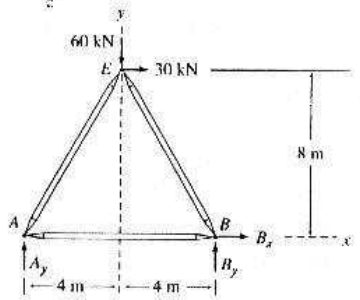
$$\pm\rightarrow \sum F_x^A = 0 \ : \ \left[\frac{10}{22/91}\right](16/61) - \left[\frac{14}{17/2}\right](6/24) + F_{AB} = 0 \ \Rightarrow \ F_{AB} = -2/18 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{AB} = 2/18 \ kN \ (C)$$

تعادل گره B:

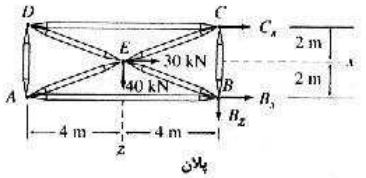
$$+\swarrow \sum F_z^B = 0 \ : \ \left[\frac{5}{22/91}\right](33/79) - \left[\frac{10}{11/66}\right]F_{BC} = 0 \ \Rightarrow \ F_{BC} = 8/61 \ kN \qquad \blacktriangleright F_{BC} = 8/61 \ kN \ (T)$$

۶۷-۲





نما



پلان

شکل ۲-۶۷

عضو	x (m)	y (m)	z (m)	طول عضو (m)
AB	۸	۰	۰	۸
CD	۸	۰	۰	۸
BC	۰	۰	۴	۴
AD	۰	۰	۴	۴
BD	۸	۰	۴	۸/۹۴
AE	۴	۸	۲	۹/۱۷
BE	۴	۸	۲	۹/۱۷
CE	۴	۸	۲	۹/۱۷
DE	۴	۸	۲	۹/۱۷

تعادل گره C:

$$+\uparrow \sum F_y^C = 0 \;:\; \left[\frac{8}{9/17}\right] F_{CE} = 0 \;\Rightarrow\; F_{CE} = 0 \qquad \blacktriangleright F_{CE} = 0$$

$$+\swarrow \sum F_z^C = 0 \;:\; F_{BC} = 0 \qquad \blacktriangleright F_{BC} = 0$$

تعادل گره E:

$$\pm\rightarrow \sum F_x^E = 0 \;:\; \frac{4}{9/17}\left[-F_{AE} + F_{BE} - F_{DE}\right] + 30 = 0 \qquad (I)$$

$$+\uparrow \sum F_y^E = 0 \;:\; -\frac{8}{9/17}\left[F_{AE} + F_{BE} + F_{DE}\right] - 60 = 0 \qquad (II)$$

$$+\swarrow \sum F_z^E = 0 \;:\; \frac{2}{9/17}\left[F_{AE} + F_{BE} - F_{DE}\right] + 40 = 0 \qquad (III)$$

از حل همزمان معادلات (I)، (II) و (III)، نیروی داخلی اعضای AE، BE و DE به دست می‌آیند.

$$F_{AE} = -57/31 \;\; kN \;\; ، \;\; F_{BE} = -68/78 \;\; kN$$
$$F_{DE} = 57/31 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright F_{AE} = 57/31 \;\; kN \;\; (C) \;\; ، \;\; \blacktriangleright F_{BE} = 68/78 \;\; kN \;\; (C) \;\; ، \;\; \blacktriangleright F_{DE} = 57/31 \;\; kN \;\; (T)$$

تعادل گره A:

$$\pm\rightarrow \sum F_x^A = 0 \;:\; -\left[\frac{4}{9/17}\right](57/31) + F_{AB} = 0 \;\Rightarrow\; F_{AB} = 25 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{AB} = 25 \;\; kN \;\; (T)$$

$$+\swarrow \sum F_z^A = 0 \;:\; \left[\frac{2}{9/17}\right](57/31) - F_{AD} = 0 \;\Rightarrow\; F_{AD} = 12/5 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{AD} = 12/5 \;\; kN \;\; (T)$$

تعادل گره D:

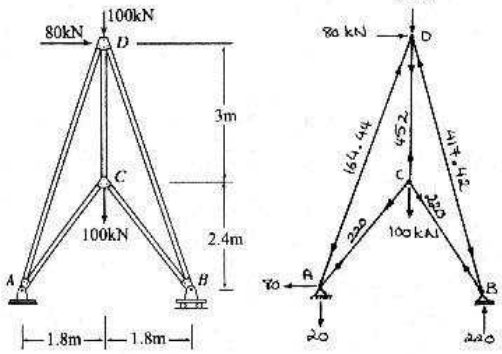
$$+\swarrow \sum F_z^D = 0 \;:\; \left[\frac{2}{9/17}\right](57/31) + 12/5 + \left[\frac{4}{8/94}\right] F_{BD} = 0 \;\Rightarrow\; F_{BD} = -55/87 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright F_{BD} = 55/87 \;\; kN \;\; (C)$$

$$\pm\rightarrow \sum F_x^D = 0 \;:\; \left[\frac{4}{9/17}\right](57/31) - \left[\frac{8}{8/94}\right](55/87) + F_{CD} = 0 \;\Rightarrow\; F_{CD} = 25 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{CD} = 25 \;\; kN \;\; (T)$$

در مسایل ۲-۶۸ تا ۲-۷۵ نیروی داخلی اعضای خرپاهای نشان داده شده را به دست آورید.

۲-۶۸



شکل ۲-۶۸

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad : \quad -A_x + 80 = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 80 \ \ kN \leftarrow$$

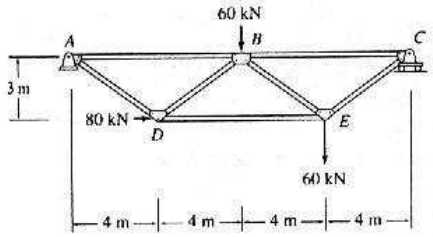
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad B_y(3/6) - 200(1/8) - 80(5/4) = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{B}_y = 220 \ \ kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad 220 - 2(100) + A_y = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 20 \ \ kN \downarrow$$

۲-۶۹



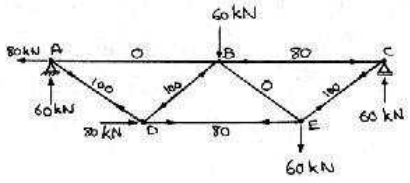
شکل ۲-۶۹

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad C_y(16) - 60(12) - 60(8) + 80(3) = 0$$

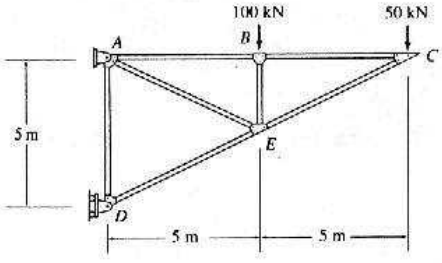
$$\blacktriangleright \vec{C}_y = 60 \ \ kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad 60 - 60 - 60 + A_y = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 60 \ \ kN \uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad : \quad -A_x + 80 = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 80 \ \ kN \leftarrow$$



۲-۷۰



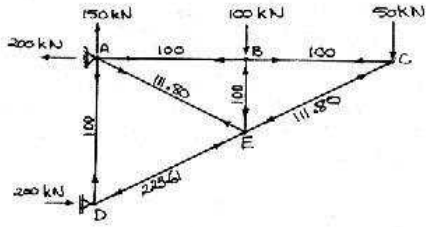
شکل ۲-۷۰

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad D_x(5) - 100(5) - 50(10) = 0$$

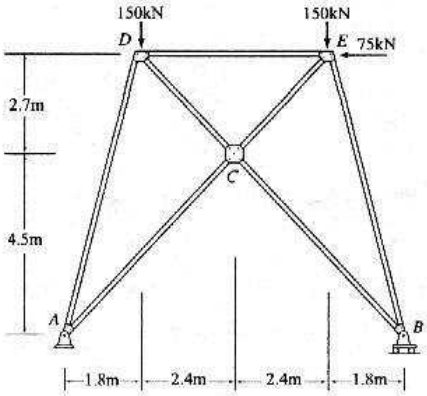
$$\blacktriangleright \vec{D}_x = 200 \ \ kN \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad A_y - 100 - 50 = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 150 \ \ kN \uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad : \quad -A_x + 200 = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 200 \ \ kN \leftarrow$$



۲-۷۱



شکل ۲-۷۱

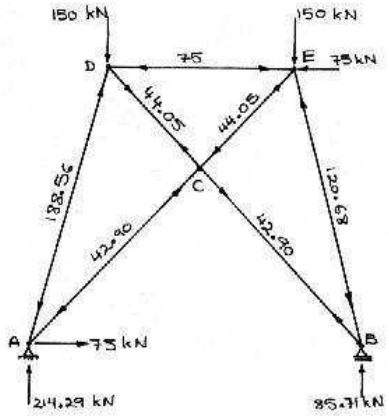
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad B_y(۸/۴) - ۱۵۰(۱/۸) - ۱۵۰(۶/۶) + ۷۵(۷/۲) = 0$

$\blacktriangleright \vec{B_y} = ۸۵/۷۱ \quad kN \uparrow$

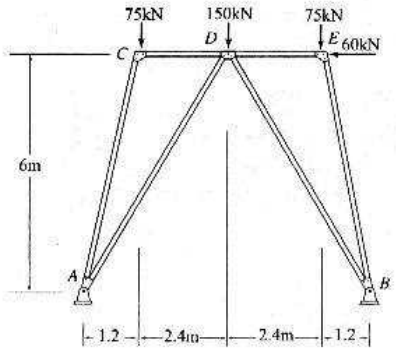
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad ۸۵/۷۱ + A_y - ۱۵۰ - ۱۵۰ = 0$

$\blacktriangleright \vec{A_y} = ۲۱۴/۲۹ \quad kN \uparrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad A_x - ۷۵ = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A_x} = ۷۵ \quad kN \rightarrow$



۲-۷۲



شکل ۲-۷۲

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad B_y(۷/۲) - ۷۵(۱/۲ + ۶) - ۱۵۰(۳/۶) + ۶۰(۶) = 0$

$\blacktriangleright \vec{B_y} = ۱۰۰ \quad kN \uparrow$

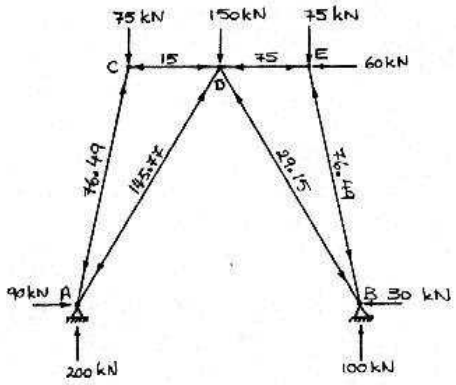
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad ۱۰۰ + A_y - ۲(۷۵) - ۱۵۰ = 0$

$\blacktriangleright \vec{A_y} = ۲۰۰ \quad kN \uparrow$

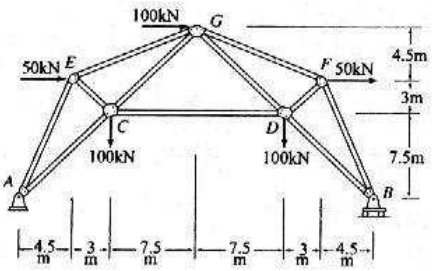
$+\circlearrowleft \sum M_D^{ACD} = 0 \quad : \quad ۷۵(۲ - ۴) - ۲۰۰(۳/۶) + A_x(۶) = 0$

$\blacktriangleright \vec{A_x} = ۹۰ \quad kN \rightarrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad ۹۰ - ۶۰ + B_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B_x} = ۳۰ \quad kN \leftarrow$



۲-۷۳



شکل ۲-۷۳

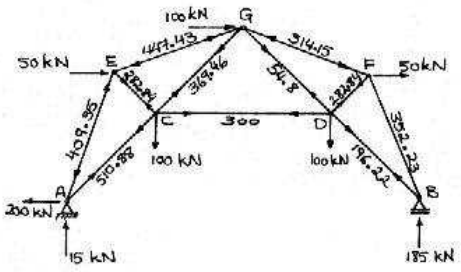
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$:

$B_y(30) - 100(7/5 + 22/5) - 2(50)(10/5) - 100(15) = 0$

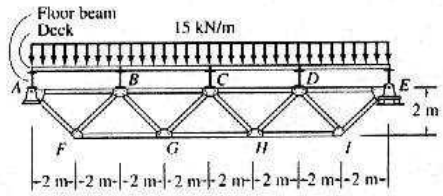
$\blacktriangleright \vec{B}_y = 185 \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0$: $185 + A_y - 2(100) = 0$ $\quad \blacktriangleright \vec{A}_y = 15 \quad kN \uparrow$

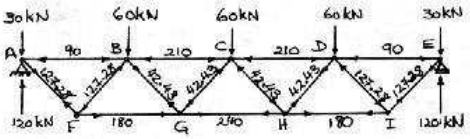
$\pm \sum F_x = 0$: $-A_x - 100 + 2(50) = 0$ $\quad \blacktriangleright \vec{A}_x = 200 \quad kN \leftarrow$



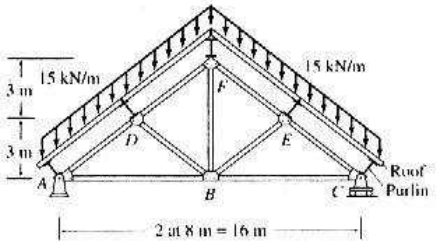
۲-۷۴



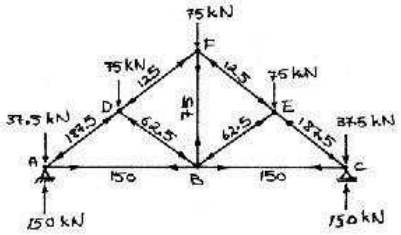
شکل ۲-۷۴



۲-۷۵

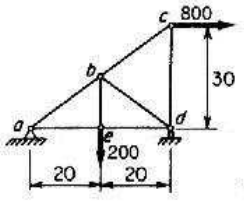


شکل ۲-۷۵

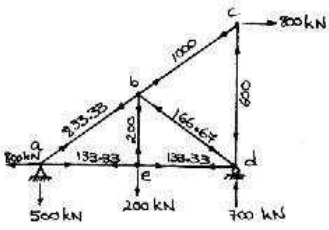


خرپاهای نشان داده شده در مسایل ۲-۷۶ تا ۲-۸۱ را تحلیل کرده و نیروهای داخلی کلیهٔ اعضا را به دست آورید.

۲-۷۶



شکل ۲-۷۶



$+\circlearrowleft \sum M_a = 0$:

$-800(30) - 200(20) + d_y(40) = 0$

$\blacktriangleright \vec{d}_y = 700 \quad kN \uparrow$

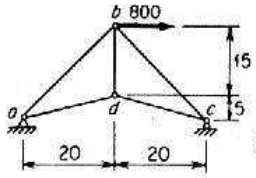
$+\uparrow \sum F_y = 0$: $700 + a_y - 200 = 0$

$\blacktriangleright \vec{a}_y = 500 \quad kN \downarrow$

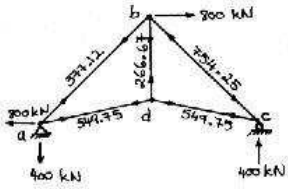
$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0$: $a_x + 800 = 0$

$\blacktriangleright \vec{a}_x = 800 \quad kN \leftarrow$

۲-۷۷



شکل ۲-۷۷



$+\circlearrowleft \sum M_a = 0$: $C_y(40) - 800(20) = 0$

$\blacktriangleright \vec{C}_y = 400 \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0$: $a_y + 400 = 0$ $\blacktriangleright \vec{a}_y = 400 \quad kN \downarrow$

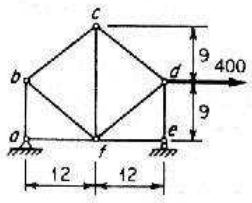
$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0$: $800 + a_x = 0$ $\blacktriangleright \vec{a}_x = 800 \quad kN \leftarrow$

برای حل این مسئله ابتدا مقطعی که اعضای bc و dc را قطع می‌کند در نظر گرفته و معادلهٔ تعادل $\sum M_d^{abd} = 0$ را می‌نویسیم.

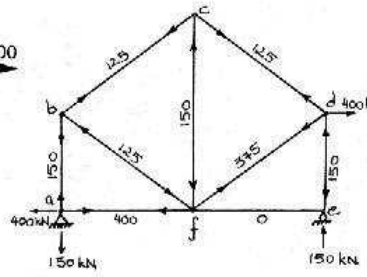
$+\circlearrowleft \sum M_d^{abd} = 0$: $F_{bc}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right](15) - 800(15) - 800(5) + 400(20) = 0 \Rightarrow F_{bc} = 754/25 \quad kN \quad (C)$

برای به دست آوردن نیروی داخلی در سایر اعضای خرپا از تعادل گره‌ها استفاده می‌کنیم.

۲-۷۸



شکل ۲-۷۸



$+\circlearrowleft \sum M_a = 0 \;:\; (-۴۰۰)(۹) + e_y\,(۲۴) = 0$

$\blacktriangleright \vec{e}_y = ۱۵۰ \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; a_y + ۱۵۰ = 0$

$\blacktriangleright \vec{a}_y = ۱۵۰ \;\; kN \downarrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; a_x + ۴۰۰ = 0$

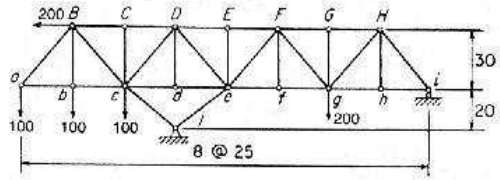
$\blacktriangleright \vec{a}_x = ۴۰۰ \;\; kN \leftarrow$

در ادامهٔ حل مسئله، با در نظر گرفتن مقطعی که اعضای bc، bf و af را قطع می‌کند، معادلهٔ تعادل $\sum M_f^{abf} = 0$ را می‌نویسیم

$$+\circlearrowleft \sum M_f^{abf} = 0 \;:\; -F_{bc}\left[\left[\frac{۴}{۵}\right](۹) + \left[\frac{۳}{۵}\right](۱۲)\right] + ۱۵۰\,(۱۲) = 0 \;\Rightarrow\; F_{bc} = ۱۲۵ \;\; kN \;\; (T)$$

برای به دست آوردن نیروی داخلی در سایر اعضای خربا از تعادل گره‌ها استفاده می‌کنیم.

۲-۷۹



شکل ۲-۷۹

$+\circlearrowleft \sum M_j = 0 \;:$

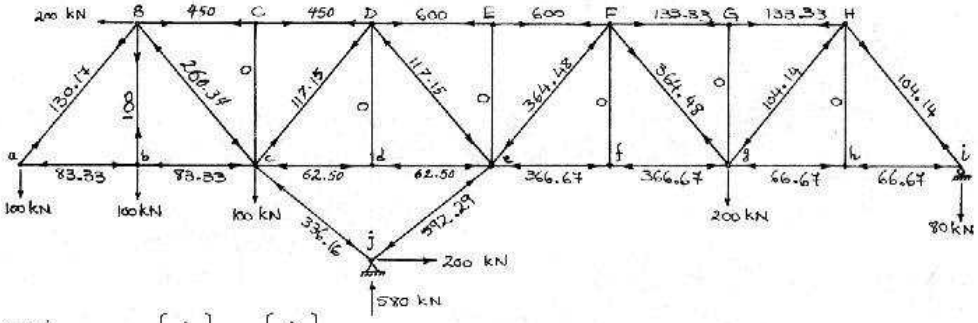
$۲۰۰(۵۰) + ۱۰۰(۲۵+۵۰+۷۵) - ۲۰۰(۷۵) + i_y\,(۱۲۵) = 0$

$\blacktriangleright \vec{i}_y = ۸۰ \;\; kN \downarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; j_y - ۸۰ - ۳(۱۰۰) - ۲۰۰ = 0$

$\blacktriangleright \vec{j}_y = ۵۸۰ \;\; kN \uparrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; -۲۰۰ + J_x = 0 \;\; \blacktriangleright \vec{J}_x = ۲۰۰ \;\; kN \rightarrow$

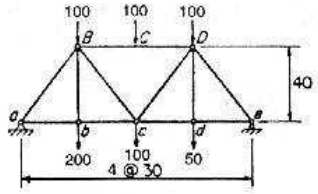


$$\sum F_x^j = 0 \;:\; F_{je}\left[\frac{۵}{\sqrt{۴۱}}\right] - F_{jc}\left[\frac{۵}{\sqrt{۴۱}}\right] = ۲۰۰$$

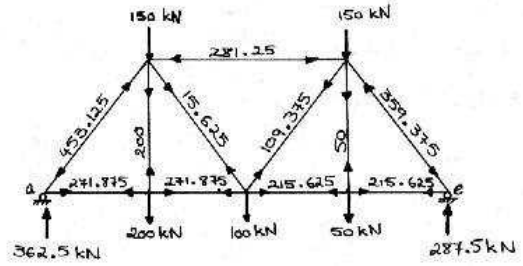
$$\sum F_y^j = 0 \;:\; F_{je}\left[\frac{۴}{\sqrt{۴۱}}\right] + F_{jc}\left[\frac{۴}{\sqrt{۴۱}}\right] = ۵۸۰$$

$$\Rightarrow \; F_{je} = ۵۹۲/۲۹ \;\; kN \;\; (C) \;\; , \;\; F_{jc} = ۳۳۶/۱۶ \;\; kN \;\; (C)$$

۸۰-۲



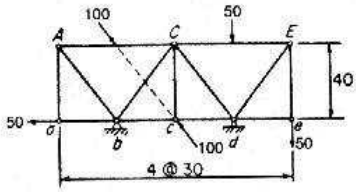
شکل ۲-۸۰



$+\circlearrowleft \sum M_a = 0 \;:\; e_y(۱۲۰) - ۱۰۰(۳۰+۶۰+۹۰) - ۲۰۰(۳۰) - ۱۰۰(۶۰) - ۵۰(۹۰) = 0 \quad \blacktriangleright \vec{e_y} = ۲۸۷/۵ \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۲۸۷/۵ + a_y - ۳(۱۰۰) - ۲۰۰ - ۱۰۰ - ۵۰ = 0 \quad \blacktriangleright \vec{a_y} = ۳۶۲/۵ \;\; kN \uparrow \;,\; \pm \sum F_x = 0 \;:\; \vec{a_x} = 0$

۸۱-۲



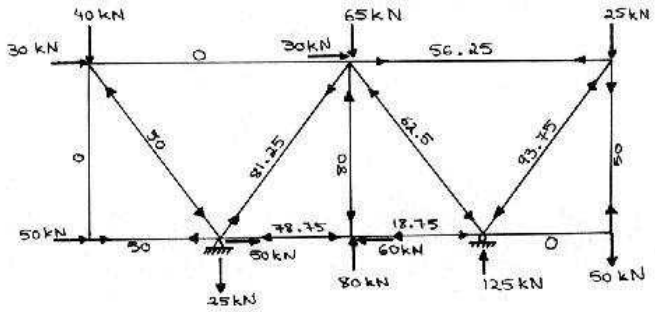
شکل ۲-۸۱

$+\circlearrowleft \sum M_b = 0 \;:\; (-۵۰)(۹۰) - (۵۰)(۶۰) + d_y(۶۰) = 0$

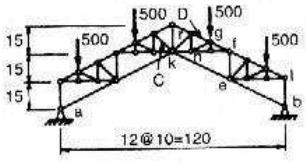
$\blacktriangleright \vec{d_y} = ۱۲۵ \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۱۲۵ + b_y - ۵۰ - ۵۰ = 0 \quad \blacktriangleright \vec{b_y} = ۲۵ \;\; kN \downarrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; b_x - ۵۰ = 0 \quad \blacktriangleright \vec{b_x} = ۵۰ \;\; kN \rightarrow$



۸۲-۲ خرپای زیر را تحلیل کرده و نیروهای داخلی اعضای نشان داده شده را به دست آورید.



شکل ۲-۸۲

$+\circlearrowleft \sum M_a = 0 \;:\; b_y(۱۲۰) - ۵۰۰(۱۰+۴۰+۸۰+۱۱۰) = 0$

$\blacktriangleright \vec{b_y} = ۱۰۰۰ \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۱۰۰۰ + a_y - ۴(۵۰۰) = 0 \quad \blacktriangleright \vec{a_y} = ۱۰۰۰ \;\; kN \uparrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; a_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_f^{left} = 0 \;:\; ۱۰۰۰(۳۰) - ۵۰۰(۲۰) - F_{ck}\left[\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right](۱۵) = 0$

$\blacktriangleright F_{ck} = ۱۴۹۰/۷۱ \;\; kN \;\; (T)$

$+\circlearrowleft \sum M_n^{gf\,lbe} = 0$:

$$۱۰۰۰(۵۰) - ۵۰۰(۴۰) - ۵۰۰(۱۰) + ۱۴۹۰/۷۱\left[\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)(۲۰) - \left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)(۱۵)\right] + F_D\left[\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)(۵) + \left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)(۱۰)\right] = 0$$

$F_D = -۲۰۴۹/۷۳ \;\; kN$ $\quad\blacktriangleright F_D = ۲۰۴۹/۷۳ \;\; kN \;\; (C)$

$+\uparrow \sum F_y^{gf\,lben} = 0$: $۱۴۹۰/۷۱\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right) - ۲۰۴۹/۷۳\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right) - ۲(۵۰۰) + ۱۰۰۰ + F_{rn} = 0 \;\Rightarrow\; F_{rn} = ۲۵۰ \;\; kN$

$\blacktriangleright F_{rn} = ۲۵۰ \;\; kN \;\; (T)$

$\sum F' = 0$: $۲۵۰\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right) + F_{rk}\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; F_{rk} = -۲۳۵/۷۰ \;\; kN$ $\quad\blacktriangleright F_{rk} = ۲۳۵/۷۰ \;\; kN \;\; (C)$

به دلیل تقارن نیروی داخلی F_{rk} با F_C برابر است، در نتیجه: $\blacktriangleright F_C = ۲۳۵/۷۰ \;\; kN \;\; (C)$

این صورت میزان برش از صفر به مقدار نیروی متمرکز (به طور ناگهانی) افزایش یا کاهش خواهد یافت. لازم به تذکر است که نیروی رو به پایین سبب جهش منفی و نیروی رو به بالا سبب جهش مثبت در نمودار برش خواهد شد.

۳- از نقطه‌ای که برش در آن مشخص شده است به سمت راست عضو حرکت می‌کنیم تا به نقطهٔ بعدی که محاسبهٔ برش در آن الزامی است، برسیم. (این نقاط محل اعمال بارهای متمرکز، شروع و خاتمهٔ بارهای گسترده و یا تکیه‌گاهها را شامل می‌شوند.)

۴- برای تعیین برش در سمت چپ نقطهٔ تعیین شده در مرحلهٔ ۳، سطح زیرمنحنی بار را با مقدار برش در نقطهٔ قبلی جمع می‌کنیم. به این نکته توجه داشته باشید که شیب نمودار برش در هر نقطه برابر است با شدت بار در نقطهٔ مورد نظر. برای تعیین برش در سمت راست نقطهٔ تعیین شده در مرحلهٔ ۳، بار متمرکز وارد شده در این نقطه را با مقدار برش در سمت چپ نقطهٔ مزبور جمع می‌کنیم.

۵- در صورتی که نقطهٔ جدید در انتهای تیر (عضو) واقع نشده باشد، مجدداً به مرحلهٔ ۳ بازگشته و روند محاسبات را تکرار می‌کنیم. در غیر این صورت در نهایت در سمت راست نقطهٔ مزبور نمودار برش به صفر خواهد رسید.

ترسیم نمودار لنگر خمشی در تیرها (قابها)

۱- واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه می‌کنیم.

۲- لنگر خمشی را در انتهای سمت چپ تیر تعیین می‌کنیم. اگر هیچ لنگر متمرکزی در این نقطه وارد نشود، لنگر خمشی برابر صفر خواهد بود. در غیر این صورت میزان لنگر خمشی از صفر به مقدار لنگر خمشی متمرکز (به طور ناگهانی) افزایش یا کاهش خواهد یافت. لازم به تذکر است که لنگر خمشی ساعتگرد سبب جهش مثبت و لنگر خمشی پادساعتگرد موجب جهش منفی در نمودار لنگر خمشی خواهد شد.

۳- از نقطه‌ای که لنگر خمشی تعیین شده است به سمت راست عضو حرکت می‌کنیم تا به نقطهٔ بعدی که محاسبهٔ لنگر خمشی در آن الزامی است، برسیم. (این نقاط محل اعمال بارهای متمرکز، شروع و خاتمهٔ بارهای گسترده و یا تکیه‌گاهها و محلهایی را شامل می‌شوند که برش در آن جا صفر است.)

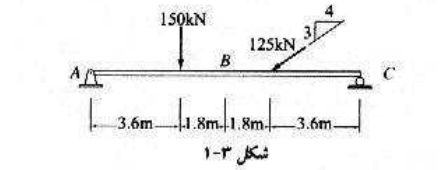
۴- در محلهایی که برش صفر است، لنگر خمشی به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد که لازم است در این نقاط نیز لنگر خمشی محاسبه شود.

۵- برای تعیین لنگر خمشی در سمت چپ نقطهٔ تعیین شده در مرحلهٔ ۳، سطح زیرمنحنی برش را با مقدار لنگر خمشی در نقطهٔ قبلی جمع می‌کنیم. به این نکته توجه داشته باشید که شیب نمودار لنگر خمشی در هر نقطه برابر است با مقدار برش در نقطهٔ مورد نظر. برای تعیین لنگر خمشی در سمت راست نقطهٔ تعیین شده در مرحلهٔ ۳، لنگر خمشی متمرکز وارد شده در این نقطه را با مقدار لنگر خمشی در سمت چپ نقطهٔ مزبور جمع می‌کنیم.

● برای محاسبهٔ سطح زیر نمودار پاره‌ای از منحنیها می‌توان از روابط ارائه شده در پیوست (الف) استفاده کرد.

۶- در صورتی که نقطهٔ جدید در انتهای تیر (عضو) واقع نشده باشد، مجدداً به مرحلهٔ ۳ بازگشته و روند محاسبات را تکرار می‌کنیم. در غیر این صورت در نهایت در سمت راست نقطهٔ مزبور نمودار لنگر خمشی به صفر خواهد رسید.

۳-۱ در نقطهٔ B از تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقادیر نیروی محوری، لنگر خمشی و نیروی برشی را تعیین کنید.



شکل ۳-۱

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x - 125\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 100 \;\; kN$$

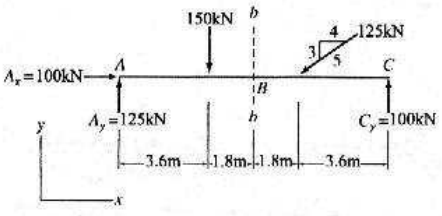
$$\blacktriangleright \vec{A}_x = 100 \;\; kN \rightarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \;:\; -A_y(10/8) + 150(7/2) + (125)\left(\frac{3}{5}\right)(3/6) = 0$$

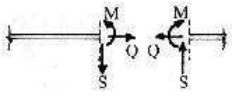
$$A_y = 125 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 125 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 125 - 150 - 125\left(\frac{3}{5}\right) + C_y = 0 \;\Rightarrow\; C_y = 100 \;\; kN$$

$$\vec{C}_y = 100 \;\; kN \uparrow$$



محاسبهٔ نیروهای برشی و محوری و لنگر خمشی در نقطهٔ B: برای این منظور مقطع bb از نقطهٔ B عبور داده می‌شود و تیر به دو بخش AB و BC تفسیم می‌گردد. از قسمت AB برای تعیین نیروهای داخلی استفاده می‌کنیم.



قرارداد علامت به کار رفته

$\pm\rightarrow \sum F_x^{AB} = 0 \;:\; Q + 100 = 0 \qquad \blacktriangleright Q = -100 \;\; kN$ (نیروی محوری)

● علامت منفی کمیتها نشان‌دهندهٔ آن است که جهت نیروهای داخلی برخلاف جهت قرارداد علامت نشان داده شده است.

$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \;:\; 125 - 150 - S = 0 \qquad \blacktriangleright S = -25 \;\; kN$ (نیروی برشی)

$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; M - 125(5/4) + 150(1/8) = 0 \qquad \blacktriangleright M = 405 \;\; kN.m$ (لنگر خمشی)

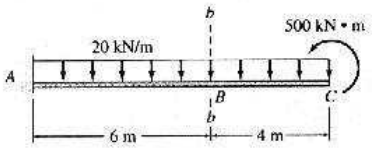
برای کنترل صحیح بودن محاسبات، یک بار هم نیروهای داخلی را با استفاده از قسمت BC تعیین می‌کنیم.

$\pm\rightarrow \sum F_x^{BC} = 0 \;:\; -Q - 125\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \qquad \blacktriangleright Q = -100 \;\; kN \qquad O.K.$

$+\uparrow \sum F_y^{BC} = 0 \;:\; S + 100 - 125\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \qquad \blacktriangleright S = -25 \;\; kN \qquad O.K.$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{BC} = 0 \;:\; -M + 100(5/4) - 125\left(\frac{3}{5}\right)(1/8) = 0 \qquad \blacktriangleright M = 405 \;\; kN.m \qquad O.K.$

۳-۲ در نقطهٔ B از تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را تعیین کنید.



شکل ۳-۲

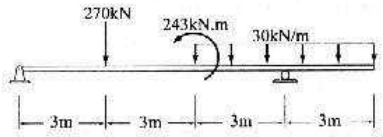
برای آن که نیازی به محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی نباشد، از قسمت BC برای تعیین نیروهای داخلی استفاده می‌کنیم

$+\uparrow \sum F_y^{BC} = 0 \;:\; S - 20(4) = 0 \qquad \blacktriangleright S = 80 \;\; kN$

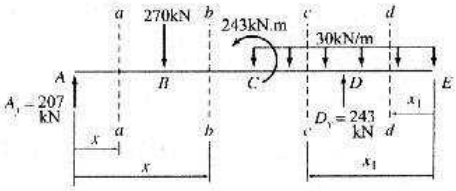
$+\circlearrowleft \sum M_B^{BC} = 0 \;:\; -M + 500 - 20\left(\frac{4^2}{2}\right) = 0 \qquad \blacktriangleright M = 340 \;\; kN.m$

برای کنترل محاسبات، ابتدا واکنشهای تکیه‌گاهی را تعیین می‌کنیم، سپس روابط تعادل را برای قسمت AB می‌نویسیم.

۳-۳ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی را ترسیم کنید.



شکل ۳-۳



محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \;:\; 270(6) + 243 + 30(6)(0) - A_y(9) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 207 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 207 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 207 - 30(6) - 270 + D_y = 0 \;\Rightarrow\; D_y = 243 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y = 243 \;\; kN \uparrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

برای تعیین معادلهٔ برش در طول AB از تیر، مقطع aa را در فاصلهٔ x از تکیه گاه A در نظر می‌گیریم. سپس با نوشتن معادلهٔ تعادل $\sum F_y^{A\,a-a} = 0$ برای قسمت سمت چپ مقطع مزبور، معادلهٔ نیروی برشی در طول فاصلهٔ AB به دست خواهد آمد.

در طول AB:

$+\uparrow \sum F_y^{A\,a-a} = 0 \;:\; -S + 207 = 0 \;\Rightarrow\; S = 207 \;\; kN \qquad 0 < x < 3\,m$

با استفاده از روش توضیح داده شده در بالا، با عبور مقاطعی چون bb ، cc و dd در طول قطعات مختلف تیر، معادلهٔ برش را به کمک روابط تعادل در طول قطعات

مزبور تعیین می‌کنیم.

در طول BC: $+\uparrow \sum F_y^{A\,b-b} = 0 \;:\; -S + 207 - 270 = 0 \;\Rightarrow\; S = -63 \;\; kN \qquad 3\,m < x < 6\,m$

برای تعیین معادلهٔ برش در طول تیمهٔ راست تیر، بهتر آن است که مبدأ مختصات را عوض کرده و آن را نقطهٔ E در نظر گرفت.

در طول ED: $+\uparrow \sum F_y^{E\,d-d} = 0 \;:\; S - 30(x_1) = 0 \;\Rightarrow\; S = 30x_1 \qquad 0 < x_1 < 3\,m$

در طول DC: $+\uparrow \sum F_y^{E\,c-c} = 0 \;:\; S - 30(x_1) + 243 = 0 \;\Rightarrow\; S = 30x_1 - 243 \qquad 3\,m < x_1 < 6\,m$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

با استفاده از همان مقاطع و مبدأ مختصاتهایی که در تعیین معادلهٔ برش در طول قسمتهای مختلف تیر مشخص شد، می‌توان معادلهٔ لنگر خمشی را در طول بخشهای مختلف تیر به دست آورد.

در طول AB: $+\circlearrowleft \sum M_{a-a}^{A\,a-a} = 0 \;:\; M - 207(x) = 0 \;\Rightarrow\; M = 207x \qquad 0 < x < 3\,m$

در طول BC: $+\circlearrowleft \sum M_{b-b}^{A\,b-b} = 0 \;:\; M - 207(x) + 270(x-3) = 0 \;\Rightarrow\; M = -63x + 810 \qquad 3\,m < x < 6\,m$

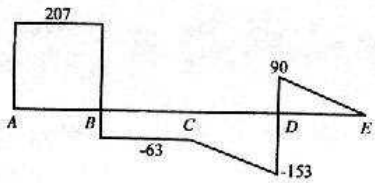
در طول ED: $+\circlearrowleft \sum M_{d-d}^{E\,d-d} = 0 \;:\; -M - 30\left[\frac{x_1^2}{2}\right] = 0 \;\Rightarrow\; M = -15x_1^2 \qquad 0 < x_1 < 3\,m$

در طول DC: $+\circlearrowleft \sum M_{c-c}^{E\,c-c} = 0 \;:\; -M - 30\left[\frac{x_1^2}{2}\right] + 243(x_1 - 3) = 0 \;\Rightarrow\; M = -15x_1^2 + 243x_1 - 729 \qquad 3\,m < x_1 < 6\,m$

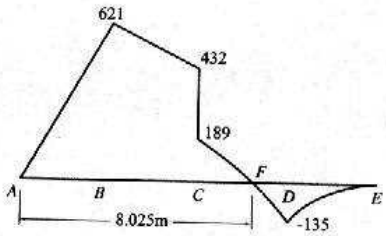
تعیین محل نقاط عطف: برای این منظور باید معادلهٔ $M = 0$ را در طول قسمتهای مختلف تیر حل کرد، تا محل نقاط عطف (نقاطی که در آنها لنگر خمشی صفر می‌شود) به دست آید.

در طول DC: $M = 0 \;\Rightarrow\; -15x_1^2 + 243x_1 - 729 = 0 \;,\; 3\,m < x_1 < 6\,m \;\Rightarrow\; x_1 = 3/975\,m$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ عطف F از تکیه‌گاه A برابر است با: $x = 12 - 3/975 = 8/025\,m$.

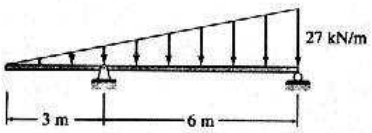


نمودار نیروی برشی S، kN

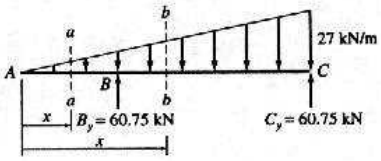


نمودار لنگر خمشی M، kN.m

۳-۴ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید.



شکل ۳-۴



محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; B_x = 0 \qquad \blacktriangleright B_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \;:\; \left[\frac{1}{2}\right](9)(27)\left[\frac{9}{3}\right] - B_y(6) = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 60/75 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B_y} = 60/75 \;\; kN\uparrow$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; -\left[\frac{1}{2}\right](9)(27) + 60/75 + C_y = 0 \;\Rightarrow\; C_y = 60/75 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_y} = 60/75 \;\; kN \uparrow$$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

در طول AB:
$$+\uparrow \sum F_y^{A\,a-a} = 0 \;:\; -S - \left[\frac{1}{2}\right](x)(3x) = 0 \;\Rightarrow\; S = -\frac{3}{2}x^2 \qquad 0 \le x < 3\,m$$

در طول BC:
$$+\uparrow \sum F_y^{A\,b-b} = 0 \;:\; -S - \left[\frac{1}{2}\right](x)(3x) + 60/75 = 0 \;\Rightarrow\; S = -\frac{3}{2}x^2 + 60/75 \qquad 3\,m < x < 9\,m$$

در طول BC مکان نقطهٔ D را که در آن برش $S = 0$ است، به دست می‌آوریم.
$$S = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{3}{2}x^2 + 60/75 = 0 \;\Rightarrow\; x = 6/36\,m$$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

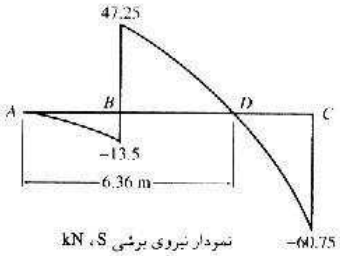
در طول AB:
$$+\circlearrowleft \sum M_{a-a}^{A\,a-a} = 0 \;:\; M - \left[\frac{1}{2}\right](x)(3x)\left[\frac{x}{3}\right] = 0 \;\Rightarrow\; M = -\frac{x^3}{2} \qquad 0 \le x < 3\,m$$

در طول BC:
$$+\circlearrowleft \sum M_{b-b}^{A\,b-b} = 0 \;:\; M - \left[\frac{1}{2}\right](x)(3x)\left[\frac{x}{3}\right] - 60/75(x-3) = 0 \;\Rightarrow\; M = -\frac{x^3}{2} + 60/75x - 182/25 \qquad 3\,m < x < 9\,m$$

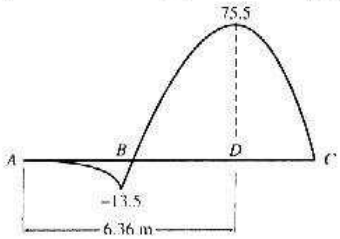
تعیین محل M_{max}: برای این منظور باید معادلهٔ $\frac{dM}{dx} = 0$ را در طول قسمتهای مختلف تیر حل کرد تا محل M_{max} مشخص گردد.

در طول BC:
$$\frac{dM}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{3}{2}x^2 + 60/75 = 0 \;,\; 3\,m < x < 9\,m \;\Rightarrow\; x = 6/36\,m$$

یعنی فاصلهٔ مقطعی که در آن M_{max} رخ می‌دهد، از تکیه‌گاه A برابر است با: $x = 6/36$ m. این موضوع تساوی شیب منحنی لنگر خمشی و نیروی برشی را در هر نقطه از طول تیر تأیید می‌کند.

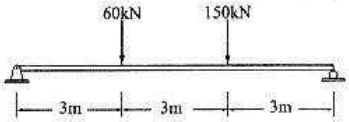


نمودار نیروی برشی S، kN



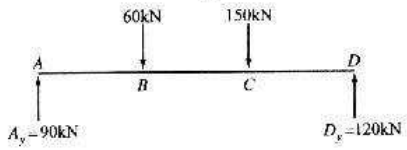
نمودار لنگر خمشی M، kN.m

۳-۵ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر نمودار نیروی برشی، لنگر خمشی و شکل کلی منحنی الاستیک را ترسیم کنید.



شکل ۳-۵

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A_x} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \;:\; 150(3) + 60(6) - A_y(9) = 0$$

$$A_y = 90 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A_y} = 90 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; D_y - 60 - 150 + 90 = 0 \;\Rightarrow\; D_y = 120 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{D_y} = 120 \;\; kN \uparrow$$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

● زیرنویسهای R و L که در ادامه خواهد آمد، به ترتیب نشانگر سمت راست و سمت چپ نقاط مورد نظر است.

در نقطهٔ A: یک نیروی متمرکز مثبت (رو به بالا) به بزرگی ۹۰ kN بر تیر اعمال می‌شود که این نیرو موجب می‌شود تا در نمودار برش یک جهش مثبت از صفر به مقدار ۹۰ kN رخ دهد. درست در سمت چپ B، مقدار برش $(S_{B,L})$ از رابطهٔ زیر به دست خواهد آمد.

در نقطهٔ B: $S_{B,L} = S_{A,R} + B$ ⇒ سطح زیرمنحنی بار در حد فاصل سمت راست نقطهٔ A و سمت چپ نقطهٔ B

$$S_{B,L} = 90 + 0 = 90 \;\; kN$$

چون در نقطهٔ B یک نیروی متمرکز منفی (رو به پایین) به بزرگی ۶۰ kN بر تیر اعمال می‌شود، این نیرو موجب جهش منفی از ۹۰ kN به ۹۰ - ۶۰ = ۳۰ kN در نمودار برش خواهد شد. پس برش در سمت راست نقطهٔ B برابر است با: $S_{B,R} = 90 - 60 = 30$ kN و به همین ترتیب برای نقاط C و D روابط و مطالب بیان شده در بالا قابل تعمیم است.

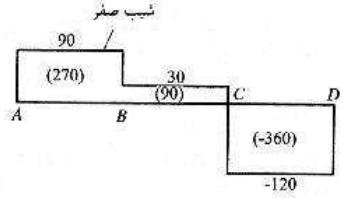
در نقطهٔ C: $S_{C,L} = S_{B,R} + C$ ⇒ سطح زیرمنحنی بار در حد فاصل سمت راست نقطهٔ B و سمت چپ نقطهٔ C

$$S_{C,L} = 30 + 0 = 30 \;\; kN$$

$S_{C,R} = ۳۰ - ۱۵۰ = -۱۲۰ \quad kN$

در نقطهٔ D:
$S_{D,L} = -۱۲۰ + ۰ = -۱۲۰ \quad kN \quad , \quad S_{D,R} = -۱۲۰ + ۱۲۰ = ۰$

با مشخص شدن مقادیر نیروی برشی در نقاط A، B، C و D، برای ترسیم نمودار نیروی برشی از این اصل که $\frac{dS}{dx} = w$ (شیب نمودار نیروی برشی در هر نقطه برابر است شدت بار وارده در نقطهٔ مزبور) استفاده می‌کنیم. با توجه به آن که هیچ بار گسترده‌ای در طول تیر اعمال نمی‌شود، شیب نمودار نیروی برشی در تمامی قسمتها برابر صفر خواهد بود.



نمودار نیروی برشی S : kN

برای سهولت در ترسیم نمودار لنگر خمشی، در طول قسمتهای مختلف تیر، سطح زیر نمودار نیروی برشی محاسبه شده و در داخل پرانتز روی نمودار نشان داده شده است.

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

در نقطهٔ A: هیچ لنگر خمشی (کوپل) متمرکزی بر تیر اعمال نشده است، بنابراین: $M_A = ۰$

در نقطهٔ B: سطح زیر نمودار نیروی برشی در حد فاصل نقاط A و B = $M_B = M_A +$

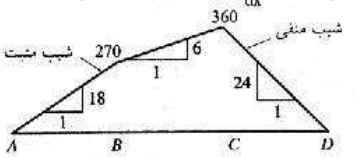
$M_B = ۰ + ۲۷۰ = ۲۷۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ C: سطح زیر نمودار نیروی برشی در حد فاصل نقاط B و C = $M_C = M_B +$

$M_C = ۲۷۰ + ۹۰ = ۳۶۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ D: سطح زیر نمودار نیروی برشی در حد فاصل نقاط C و D = $M_D = M_C +$ $\Rightarrow \quad M_D = ۳۶۰ - ۳۶۰ = ۰$

با معلوم شدن مقادیر لنگرهای خمشی در نقاط A، B، C و D برای ترسیم نمودار لنگر خمشی از این اصل که $\frac{dM}{dx} = S$ (شیب نمودار لنگر خمشی در هر نقطه برابر است با **نیروی برشی** در نقطهٔ مزبور) استفاده می‌کنیم. با توجه به «ثابت» بودن برش در طول کلیهٔ قسمتهای تیر، تغییرات لنگر خمشی در طول نواحی مختلف تیر به صورت «خطی» خواهد بود. منحنی الاستیک تقریبی تیر در شکل مقابل نشان داده شده است.

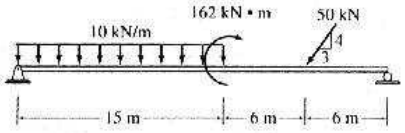


نمودار لنگر خمشی M : kN.m



منحنی الاستیک

۳-۶ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر نمودار نیروی برشی، لنگر خمشی و شکل کلی منحنی الاستیک را ترسیم کنید.



شکل ۳-۶

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x - ۳۰ = ۰ \quad \Rightarrow \quad A_x = ۳۰ \quad kN$

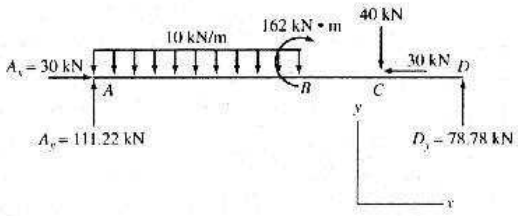
$\blacktriangleright \vec{A}_x = ۳۰ \quad kN \rightarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_D = ۰ \quad : \quad ۱۰(۱۵)(۱۹/۵) - ۱۶۲ + ۴۰(۶) - A_y(۲۷) = ۰$

$A_y = ۱۱۱/۲۲ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۱۱/۲۲ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad : \quad ۱۱۱/۲۲ - ۱۰(۱۵) - ۴۰ + D_y = ۰$

$D_y = ۷۸/۷۸ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y = ۷۸/۷۸ \quad kN \uparrow$



ترسیم نمودار نیروی برشی:

در نقطهٔ A: $S_{A,R} = ۱۱۱/۲۲ \quad kN$

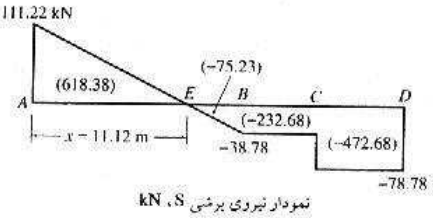
در نقطهٔ B: $S_B = ۱۱۱/۲۲ - ۱۰(۱۵) = -۳۸/۷۸ \quad kN$

در نقطهٔ C: $S_{C,L} = -۳۸/۷۸ + ۰ = -۳۸/۷۸ \quad kN$

$S_{C,R} = -۳۸/۷۸ - ۴۰ = -۷۸/۷۸ \quad kN$

در نقطهٔ D: $S_{D,L} = -۷۸/۷۸ + ۰ = -۷۸/۷۸ \quad kN$

نمودار نیروی برشی در شکل زیر نشان داده شده است. در قسمت AB، تیر تحت اثر یک بار گستردهٔ یکنواخت منفی (رو به پایین) به بزرگی ۱۰ kN/m قرار دارد. چون شدت بار ثابت و منفی است، پس نمودار نیروی برشی در طول ناحیهٔ AB به صورت یک خط راست با شیب منفی خواهد بود. از آن جا که در طول بخشهای BC و CD هیچ بار گسترده‌ای اعمال نمی‌شود، بنابراین نمودار نیروی برشی در این بخشها، از خطوطی افقی (با شیب صفر) تشکیل می‌شود. برای تعیین محل نقطهٔ E (که نیروی برشی صفر است)، از تشابه مثلثها استفاده می‌کنیم:



نمودار نیروی برشی S، kN

$$\frac{x}{۱۱۱/۲۲}=\frac{۱۵}{(۱۱۱/۲۲+۳۸/۷۸)} \Rightarrow x=۱۱/۱۲\,m$$

برای سهولت در ترسیم نمودار لنگر خمشی، در طول بخشهای مختلف تیر، سطح زیر نمودار نیروی برشی محاسبه شده و در داخل پرانتز روی نمودار نشان داده شده است.

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

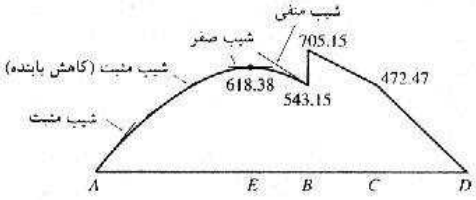
در نقطه A: $M_A=۰$ و در نقطه E: $M_E=۰+۶۱۸/۳۸=۶۱۸/۳۸\ \ kN.m$

در نقطهٔ B: $M_{B,L}=۶۱۸/۳۸-۷۵/۲۳=۵۴۳/۱۵\ \ kN.m$ ، $M_{B,R}=۵۴۳/۱۵+۱۶۲=۷۰۵/۱۵\ \ kN.m$

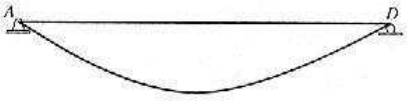
در نقطهٔ C: $M_C=۷۰۵/۱۵-۲۳۲/۶۸=۴۷۲/۴۷\ \ kN.m$ ؛ در نقطهٔ D: $M_D=۴۷۲/۴۷-۴۷۲/۶۸=-۰/۱۲\approx ۰$ O.K.

نمودار لنگر خمشی در شکل زیر نشان داده شده است. برای تعیین شکل نمودار در طول نواحی مختلف تیر باید به این اصل توجه داشت که شیب نمودار لنگر خمشی در هر نقطه برابر با نیروی برشی در نقطهٔ مربور است. درست در سمت راست نقطهٔ A، نیروی برشی مثبت است، پس به تبع آن شیب نمودار لنگر خمشی نیز مثبت خواهد بود. وقتی که از نقطهٔ A به سمت راست حرکت می‌کنیم، نیروی برشی به طور خطی تا مقدار S = ۰ در نقطهٔ E کم می‌شود، از این جهت شیب نمودار لنگر خمشی نیز به همین ترتیب کاهش می‌یابد تا این که در نقطهٔ E به صفر می‌رسد. باید توجه داشت که شکل نمودار نیروی برشی در طول قطعهٔ AE خطی است، در حالی که شکل نمودار لنگر خمشی در طول ناحیهٔ مزبور سهموی است.

همان طور که در شکل زیر نیز دیده می‌شود، نمودار لنگر خمشی در نقطهٔ B دارای یک ماکزیمم محلی است. وقتی که از نقطهٔ E به سمت راست حرکت می‌کنیم، نیروی برشی منفی شده و به طور خطی در حد فاصل E و B کاهش می‌یابد. پس شیب نمودار لنگر خمشی در سمت راست E منفی می‌شود و به طور پیوسته در فاصلهٔ بین نقطهٔ E و سمت چپ نقطهٔ B کاهش می‌یابد. در نقطهٔ B یک لنگر خمشی (کوپل) متمرکز ساعتگرد وارد می‌شود که این امر سبب می‌شود یک جهش مثبت در نمودار لنگر خمشی در نقطهٔ مزبور رخ دهد. (توجه شود که در نقطهٔ B هیچ جهشی در نمودار نیروی برشی رخ نمی‌دهد.)



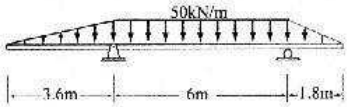
نمودار لنگر خمشی M، kN.m



منحنی الاستیک

۳-۷ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر نمودار نیروی برشی، لنگر خمشی و شکل تقریبی منحنی الاستیک را ترسیم کنید.

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



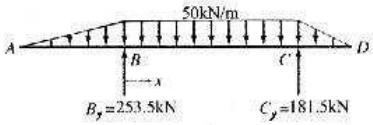
شکل ۳-۷

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x=۰ \ :\ B_x=۰ \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x=۰$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C=۰ \ :$$

$$\tfrac{۱}{۲}(۵۰)(۳/۶)(۷/۲)-B_y(۶)+۵۰(۶)(۳)-\tfrac{۱}{۲}(۵۰)(۱/۸)(۰/۶)=۰$$

$$B_y=۲۵۳/۵\ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y=۲۵۳/۵\ \ kN\uparrow$$



$$+\uparrow \sum F_y=۰ \ :\ -\tfrac{۱}{۲}(۵۰)(۳/۶)+۲۵۳/۵-۵۰(۶)-\tfrac{۱}{۲}(۵۰)(۱/۸)+C_y=۰$$

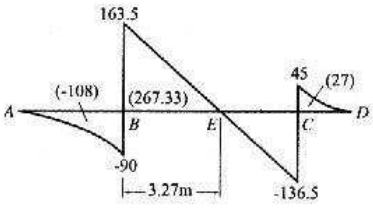
$C_y = ۱۸۱/۵ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_y} = ۱۸۱/۵ \quad kN \uparrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

در نقطهٔ A: $S_A = ۰$ ، در نقطهٔ B: $S_{B,L} = ۰ - \frac{۱}{۲}(۵۰)(۳/۶) = -۹۰ \quad kN$ ، $S_{B,R} = -۹۰ + ۲۵۳/۵ = ۱۶۳/۵ \quad kN$

در نقطهٔ C: $S_{C,L} = ۱۶۳/۵ - ۵۰(۶) = -۱۳۶/۵ \quad kN$ ، $S_{C,R} = -۱۳۶/۵ + ۱۸۱/۵ = ۴۵ \quad kN$

در نقطهٔ D: $S_D = ۴۵ - \frac{۱}{۲}(۵۰)(۱/۸) = ۰ \qquad O.K.$



نمودار نیروی برشی S، kN

برای تعیین محل نقطهٔ E (که برش در آن صفر است)، از تشابه مثلثها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x}{۱۶۳/۵} = \frac{۶}{۱۶۳/۵ + ۱۳۶/۵} \quad \Rightarrow \quad x = ۳/۲۷ \, m$$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

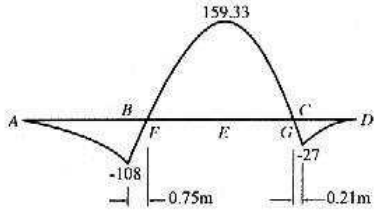
در نقطهٔ A: $M_A = ۰$

در نقطهٔ B: $M_B = ۰ - ۱۰۸ = -۱۰۸ \quad kN.m$

در نقطهٔ E: $M_E = -۱۰۸ + ۲۶۷/۳۳ = ۱۵۹/۳۳ \quad kN.m$

در نقطهٔ C: $M_C = ۱۵۹/۳۳ - ۱۸۶/۳۳ = -۲۷ \quad kN.m$

در نقطهٔ D: $S_D = -۲۷ + ۲۷ = ۰ \qquad O.K.$



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

برای تعیین محل نقاط عطف F و G باید معادلهٔ $M = ۰$ را در طول ناحیهٔ BC حل کنیم.

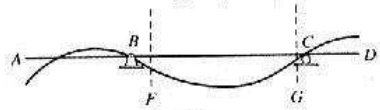
در طول BC:

$$M = ۰ \quad \Rightarrow \quad -\frac{۱}{۲}(۵۰)(۳/۶)(۱/۲ + x) + ۲۵۳/۵x - ۵۰(x)\left(\frac{x}{۲}\right) = ۰$$

فاصلهٔ نقاط عطف از نقطهٔ B: $x_F = ۰/۷۵ \, m$ ، $x_G = ۵/۷۹ \, m$

ترسیم منحنی الاستیک:

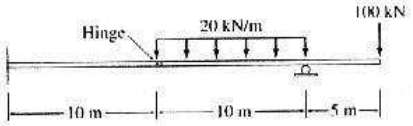
منحنی الاستیک تقریبی تیر در شکل مقابل نشان داده شده است. از آن جا که لنگر خمشی در طول قسمت FG مثبت است، بنابراین تقعر منحنی الاستیک در طول ناحیهٔ مزبور به سمت بالا است. برعکس، با توجه به منفی بودن لنگر خمشی در طول نواحی AF و GD، تقعر منحنی الاستیک در نواحی مزبور به سمت پایین است.



منحنی الاستیک

۸-۳ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، نمودار لنگر خمشی، نیروی برشی و منحنی الاستیک تقریبی را ترسیم کنید.

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۸

$+\circlearrowleft \sum M_B^{BD} = ۰ \; : \; C_y(۱۰) - ۲۰(۱۰)(۵) - ۱۰۰(۱۵) = ۰$

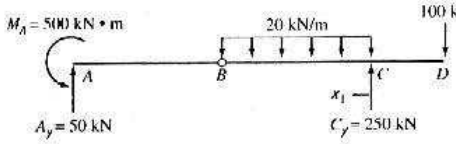
$C_y = ۲۵۰ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_y} = ۲۵۰ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \; : \; A_y - ۲۰(۱۰) + ۲۵۰ - ۱۰۰ = ۰$

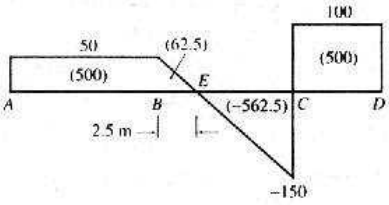
$A_y = ۵۰ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{A_y} = ۵۰ \quad kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \; : \; M_A - ۲۰(۱۰)(۱۵) + ۲۵۰(۲۰) - ۱۰۰(۲۵) = ۰$

$M_A = ۵۰۰ \quad kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M_A} = ۵۰۰ \quad kN.m \; \circlearrowleft$



ترسیم نمودار نیروی برشی:



نمودار نیروی برشی S، kN

در نقطهٔ A: $S_{A,R} = ۵۰ \quad kN$

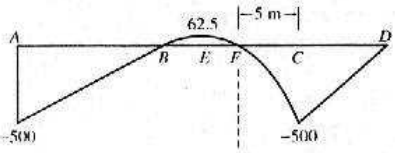
در نقطهٔ B: $S_B = ۵۰ + ۰ = ۵۰$

در نقطهٔ C: $S_{C,L} = ۵۰ - ۲۰(۱۰) = -۱۵۰ \quad kN$

$S_{C,R} = -۱۵۰ + ۲۵۰ = ۱۰۰ \quad kN$

در نقطهٔ D: $S_D = ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰ \qquad O.K.$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

در نقطهٔ A: $M_{A,R} = -۵۰۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ B: $M_B = -۵۰۰ + ۵۰۰ = ۰$

در نقطهٔ E: $M_E = ۰ + ۶۲/۵ = ۶۲/۵ \quad kN.m$

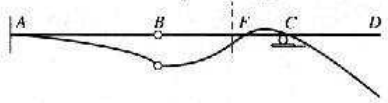
در نقطهٔ C: $M_C = ۶۲/۵ - ۵۶۲/۵ = -۵۰۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ D: $M_D = -۵۰۰ + ۵۰۰ = ۰ \qquad O.K.$

برای تعیین محل نقطهٔ عطف F که در نمودار لنگر خمشی شکل فوق نشان داده شده است، لازم است که در طول قطعهٔ BC، معادلهٔ $M = ۰$ برای متغیر $x_۱$ که نشانگر فاصلهٔ نقاط از تکیه‌گاه C است، حل شود.

$$M = -۱۰۰(۵ + x_۱) + ۲۵۰x_۱ - ۲۰(x_۱)\left(\frac{x_۱}{۲}\right)$$

فاصلهٔ نقاط عطف از تکیه‌گاه C:



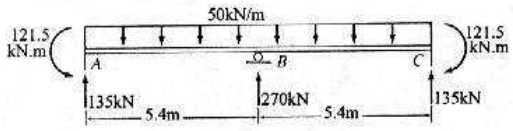
منحنی الاستیک

$$M = ۰ \Rightarrow -۱۰x_۱^۲ + ۱۵۰x_۱ - ۵۰۰ = ۰ \quad , \quad ۰ < x_۱ < ۱۰\,m \Rightarrow x_۱ = ۵\,m \quad , \quad x_۱ = ۱۰\,m$$

ترسیم منحنی الاستیک:

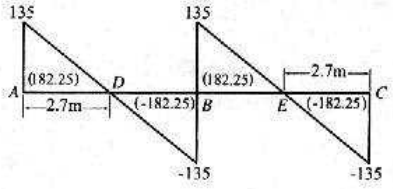
باید توجه داشت که در تکیه‌گاه گیردار A هم شیب و هم تغییر مکان منحنی الاستیک برابر صفر است، اما در تکیه‌گاه غلتکی C تنها تغییر مکان صفر بوده و شیب دیگر صفر نیست. در مفصل داخلی B نیز چون گیرداری دورانی وجود ندارد، شیب منحنی الاستیک در طرفین نقطهٔ B برابر نیست.

۳-۹ در شکل زیر یک تیر نامعین استاتیکی به همراه واکنشهای تکیه‌گاهی آن نشان داده شده است. نمودار نیروی برشی، لنگر خمشی و شکل تقریبی منحنی الاستیک تیر مزبور را ترسیم کنید.

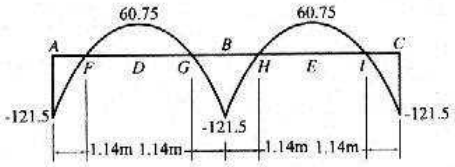


شکل ۳-۹

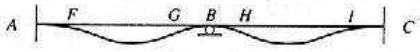
در صورتی که واکنشهای تکیه‌گاهی معلوم باشد، روش ترسیم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیرهای معین و نامعین استاتیکی فرقی نخواهد کرد.



نمودار نیروی برشی S، kN



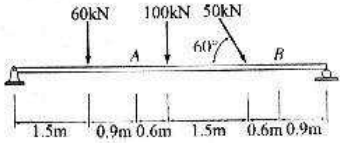
نمودار لنگر خمشی M، kN.m



منحنی الاستیک

برای سازه‌های نشان داده شده در مسایل زیر، مقادیر نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را در نقاط A و B محاسبه کنید.

۱۰-۳

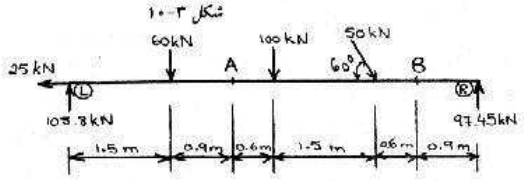


$\pm\sum F_x = 0 \;:\; L_x + 50\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; L_x = -25 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{L}_x = 25 \;\; kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_L = 0 \;:\; R_y(6) - 50(\sin 60^\circ)(4/5) - 100(3) - 60(1/5) = 0$

شکل ۳-۱۰



$R_y = 97/45 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{R}_y = 97/45 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; L_y + 97/5 - 60 - 100 - 50(\sin 60^\circ) = 0$

$L_y = 105/8 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{L}_y = 105/8 \;\; kN \uparrow$

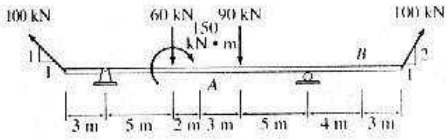
$\blacktriangleright Q_A = 25 \;\; kN \quad , \quad \blacktriangleright Q_B = 0$

$S_A = 105/8 - 60 = 45/8 \;\; kN \qquad \blacktriangleright S_A = 45/8 \;\; kN \quad , \quad \blacktriangleright S_B = -97/45 \;\; kN$

$M_A = 105/8(2/4) - 60(0/9) = 199/92 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright M_A = 199/92 \;\; kN.m$

$M_B = 97/45(0/9) = 87/71 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright M_B = 87/71 \;\; kN.m$

۱۱-۳



شکل ۳-۱۱

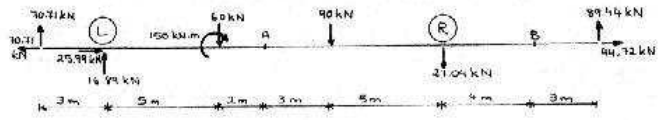
$\pm\sum F_x = 0 \;:\; L_x + 44/72 - 70/71 = 0 \;\Rightarrow\; L_x = 25/99 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{L}_x = 25/99 \;\; kN \rightarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_L = 0 \;:$

$R_y(15) - 90(10) - 60(5) - 70/71(3) + 89/44(22) - 150 = 0$

$R_y = -27/04 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{R}_y = 27/04 \;\; kN \downarrow$



$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:$

$L_y + 70/71 - 60 - 90 - 27/04 + 89/44 = 0$

$L_y = 16/89 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{L}_y = 16/89 \;\; kN \uparrow$

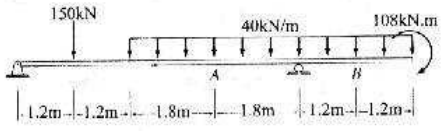
$Q_A = 70/71 - 25/99 = 44/72 \;\; kN \qquad \blacktriangleright Q_A = 44/72 \;\; kN \quad , \quad \blacktriangleright Q_B = 44/72 \;\; kN$

$S_A = 70/71 + 16/89 - 60 = 27/6 \;\; kN \qquad \blacktriangleright S_A = 27/6 \;\; kN \quad , \quad \blacktriangleright S_B = -89/44 \;\; kN$

$M_A = 70/71(10) + 16/89(7) + 150 - 60(2) = 855/3 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright M_A = 855/3 \;\; kN.m$

$M_B = 89/44(3) = 268/3 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright M_B = 268/3 \;\; kN.m$

۱۲-۳



شکل ۳-۱۲

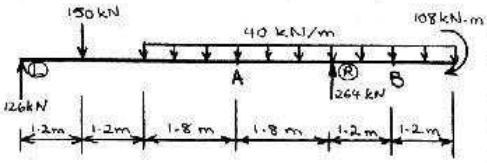
$\pm\sum F_x = 0 \;:\; L_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{L}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_L = 0 \;:\; R_y(6) - 40(6)(5/4) - 108 - 150(1/2) = 0$

$R_y = 264 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{R}_y = 264 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 264 + L_y - 40(6) - 150 = 0$

$L_y = 126 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{L}_y = 126 \;\; kN \uparrow$



$\blacktriangleright \vec{Q}_A = 0$, $\blacktriangleright \vec{Q}_B = 0$

$S_A = ۱۲۶ - ۱۵۰ - ۴۰(۱/۸) = -۹۶ \ kN \quad \blacktriangleright S_A = -۹۶ \ kN$

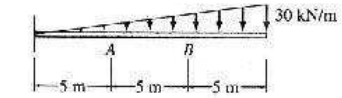
$S_B = ۴۰(۱/۲) = ۴۸ \ kN \quad \blacktriangleright S_B = ۴۸ \ kN$

$M_A = ۱۲۶(۴/۲) - (۱۵۰)(۳) - ۴۰(۱/۸)(۰/۹) = ۱۴/۴ \ kN.m$

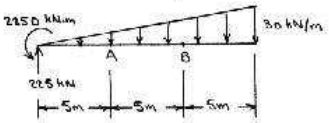
$\blacktriangleright M_A = ۱۴/۴ \ kN.m$

$M_B = -۱۰۸ - ۴۰(۱/۲)(۰/۶) = -۱۳۶/۸ \ kN.m \quad \blacktriangleright M_B = -۱۳۶/۸ \ kN.m$

۱۳-۳



شکل ۳-۱۳



$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \ : \ L_x = 0 \quad \blacktriangleright \vec{L}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_L = 0 \ : \ M_L - \frac{1}{2}(۳۰)(۱۵)(۱۰) = 0 \Rightarrow M_L = ۲۲۵۰ \ kN.m$

$\blacktriangleright \vec{M}_L = ۲۲۵۰ \ kN.m \ \circlearrowleft$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \ : \ L_y - \frac{1}{2}(۳۰)(۱۵) = 0 \Rightarrow L_y = ۲۲۵ \ kN$

$\blacktriangleright \vec{L}_y = ۲۲۵ \ kN \uparrow$

$\blacktriangleright \vec{Q}_A = 0$, $\blacktriangleright \vec{Q}_B = 0$

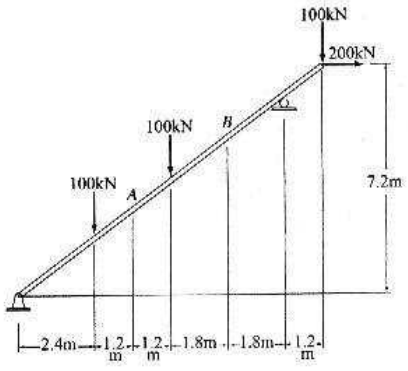
$S_A = \frac{(۳۰ + ۱۰)}{2}(۱۰) = ۲۰۰ \quad \blacktriangleright S_A = ۲۰۰ \ kN$

$S_B = \frac{(۳۰ + ۲۰)}{2}(۵) = ۱۲۵ \quad \blacktriangleright S_B = ۱۲۵ \ kN$

$M_A = -۱۰(۱۰)(۵) - \frac{1}{2}(۲۰)(۱۰)\left[\frac{۲۰}{۳}\right] = -۱۱۶۶/۶۷ \ kN.m \quad \blacktriangleright M_A = -۱۱۶۶/۶۷ \ kN.m$

$M_B = -۲۰(۵)(۲/۵) - \frac{1}{2}(۱۰)(۵)\left[\frac{۱۰}{۳}\right] = -۳۳۳/۳۳ \ kN.m \quad \blacktriangleright M_B = -۳۳۳/۳۳ \ kN.m$

۱۴-۳



شکل ۳-۱۴

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \ : \ L_x + ۲۰۰ = 0 \Rightarrow L_x = -۲۰۰ \ kN$

$\blacktriangleright \vec{L}_x = ۲۰۰ \ kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_L = 0 \ : \ R_y(۸/۴) - ۱۰۰(۲/۴ + ۴/۸ + ۹/۶) - ۲۰۰(۷/۲) = 0$

$R_y = ۳۷۱/۴۳ \ kN \quad \blacktriangleright \vec{R}_y = ۳۷۱/۴۳ \ kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \ : \ ۳۷۱/۴۳ - ۳(۱۰۰) + L_y = 0 \Rightarrow L_y = -۷۱/۴۳ \ kN$

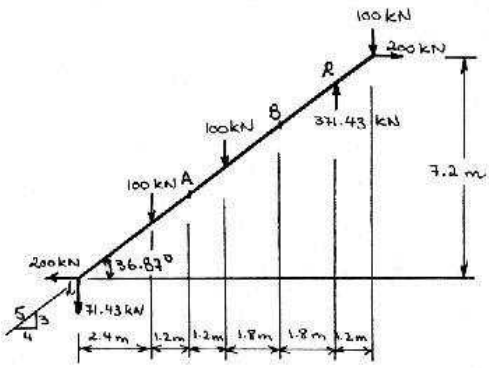
$\blacktriangleright \vec{L}_y = ۷۱/۴۳ \ kN \downarrow$

$Q_A = ۲۰۰\cos ۳۶/۸۷^\circ + ۷۱/۴۳\sin ۳۶/۸۷^\circ + ۱۰۰\sin ۳۶/۸۷^\circ$

$Q_A = ۲۶۲/۸۶ \ kN \quad \blacktriangleright Q_A = ۲۶۲/۸۶ \ kN$

$Q_B = ۲۰۰\cos ۳۶/۸۷^\circ - ۱۰۰\sin ۳۶/۸۷^\circ + ۳۷۱/۴۲\sin ۳۶/۸۷^\circ$

$Q_B = ۳۲۲/۸۵ \ kN \quad \blacktriangleright Q_B = ۳۲۲/۸۵ \ kN$



$S_A = ۲۰۰\sin ۳۶/۸۷^\circ - ۷۱/۴۳\cos ۳۶/۸۷^\circ - ۱۰۰\cos ۳۶/۸۷^\circ$

$S_A = -۱۷/۱۴ \quad kN \qquad \blacktriangleright S_A = -۱۷/۱۴ \quad kN$

$S_B = ۲۰۰\sin ۳۶/۸۷^\circ + ۱۰۰\cos ۳۶/۸۷^\circ - ۳۷۱/۴۲\cos ۳۶/۸۷^\circ$

$S_B = -۹۷/۱۴ \quad kN \qquad \blacktriangleright S_B = -۹۷/۱۴ \quad kN$

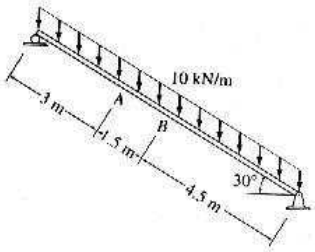
$M_A = ۲۰۰(۲/۷) - ۷۱/۴۳(۳/۶) - ۱۰۰(۱/۲) = ۱۶۲/۸۵ \quad kN.m$

$\blacktriangleright M_A = ۱۶۲/۸۵ \quad kN.m$

$M_B = ۲۰۰(۲/۲۵) - ۱۰۰(۳) + ۳۷۱/۴۲(۱/۸) = -۸۱/۴۴ \quad kN.m$

$\blacktriangleright M_B = -۸۱/۴۴ \quad kN.m$

۱۵-۳



شکل ۳-۱۵

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \;:\; R_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{R}_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_R = ۰ \;:\; -L_y(۹\cos ۳۰^\circ) + ۱۰(۹)\left[\frac{۹\cos ۳۰^\circ}{۲}\right] = ۰$

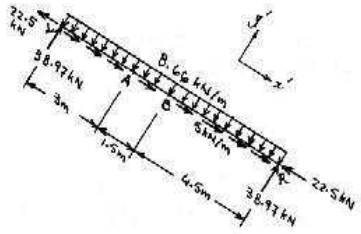
$L_y = ۴۵ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{L}_y = ۴۵ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \;:\; R_y + ۴۵ - ۱۰(۹) = ۰ \;\Rightarrow\; R_y = ۴۵ \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{R}_y = ۴۵ \quad kN \uparrow$

$R_{x'} = L_{x'} = -۴۵\sin ۳۰^\circ = -۲۲/۵ \quad kN$

$R_{y'} = L_{y'} = +۴۵\cos ۳۰^\circ = ۳۸/۹۷ \quad kN$



$Q_A = ۲۲/۵ - ۵(۳) = ۷/۵ \quad kN \qquad \blacktriangleright Q_A = ۷/۵ \quad kN$

$Q_B = ۲۲/۵ - ۵(۴/۵) = ۰ \qquad \blacktriangleright Q_B = ۰$

$S_A = ۳۸/۹۷ - ۸/۶۶(۳) = ۱۲/۹۹ \quad kN \qquad \blacktriangleright S_A = ۱۲/۹۹ \quad kN$

$S_B = ۳۸/۹۷ - ۸/۶۶(۴/۵) = ۰ \qquad \blacktriangleright S_B = ۰$

$M_A = ۳۸/۹۷(۳) - ۸/۶۶(۳)(۱/۵) = ۷۷/۹۴ \quad kN.m$

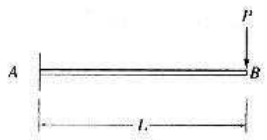
$\blacktriangleright M_A = ۷۷/۹۴ \quad kN.m$

$M_B = ۳۸/۹۷(۴/۵) - ۸/۶۶(۴/۵)(۲/۲۵) = ۸۷/۶۸ \quad kN.m$

$\blacktriangleright M_B = ۸۷/۶۸ \quad kN.m$

برای تیرهای نشان داده شده در مسایل زیر معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی را به دست آورده و با استفاده از این معادلات نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کنید.

۱۶-۳

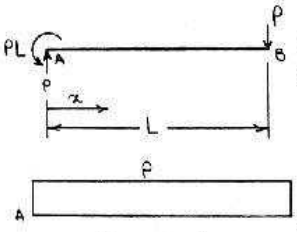


شکل ۳-۱۶

$+\uparrow \sum F_x = ۰ \;:\; A_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \;:\; A_y - P = ۰ \;\Rightarrow\; A_y = P \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = P \uparrow$

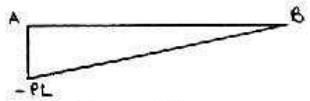
$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \;:\; M_A - PL = ۰ \;\Rightarrow\; M_A = PL \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = PL \circlearrowleft$



نمودار نیروی برشی S

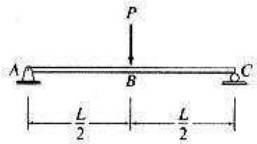
$\blacktriangleright S = P \qquad 0 < x < L$

$\blacktriangleright M = -PL + Px = P(x - L) \qquad 0 < x < L$



نمودار لنگر خمشی M

۳-۱۷

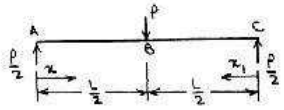


شکل ۳-۱۷

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

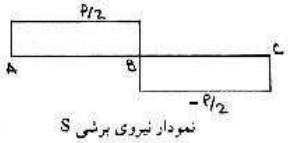
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; C_y(L) - P\left[\frac{L}{2}\right] = 0 \Rightarrow C_y = \frac{P}{2} \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = \frac{P}{2}\uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; \frac{P}{2} + A_y - P = 0 \Rightarrow A_y = \frac{P}{2} \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = \frac{P}{2}\uparrow$

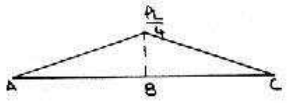


$\blacktriangleright S = \frac{P}{2} \qquad 0 < x < \frac{L}{2}$, $\blacktriangleright M = \frac{P}{2}x \qquad 0 < x < \frac{L}{2}$

$\blacktriangleright S = -\frac{P}{2} \qquad 0 < x_1 < \frac{L}{2}$, $\blacktriangleright M = \frac{P}{2}x_1 \qquad 0 < x_1 < \frac{L}{2}$

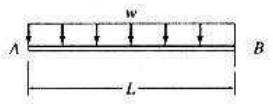


نمودار نیروی برشی S



نمودار لنگر خمشی M

۳-۱۸

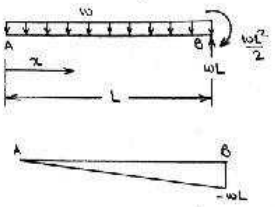


شکل ۳-۱۸

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; B_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; B_y - wL = 0 \Rightarrow B_y = wL \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = wL\uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; M_B + \frac{wL^2}{2} = 0 \Rightarrow M_B = -\frac{wL^2}{2} \qquad \blacktriangleright \vec{M}_B = \frac{wL^2}{2}\circlearrowleft$



نمودار نیروی برشی S

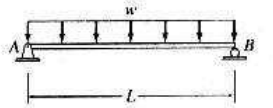
$\blacktriangleright S = -wx \qquad 0 \le x < L$

$\blacktriangleright M = -\frac{wx^2}{2} \qquad 0 \le x \le L$



نمودار لنگر خمشی M

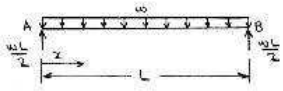
۳-۱۹



شکل ۳-۱۹

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

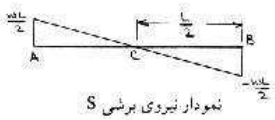
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; B_y(L) - w\left[\frac{L^2}{2}\right] = 0 \Rightarrow B_y = \frac{wL}{2} \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = \frac{wL}{2}\uparrow$



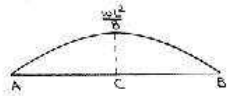
$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; \frac{wL}{2} + A_y - wL = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \frac{wL}{2} \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = \frac{wL}{2}\uparrow$

$\blacktriangleright S = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right) \qquad 0 < x < L$

$\blacktriangleright M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} = \frac{wx}{2}(L - x) \qquad 0 < x < L$

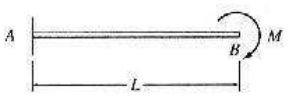


نمودار نیروی برشی S



نمودار لنگر خمشی M

۲۰-۳



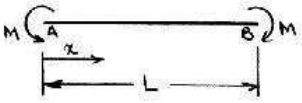
شکل ۳-۲۰

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

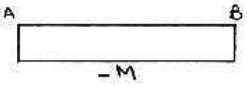
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - M = 0 \;\Rightarrow\; M_A = M \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = M \circlearrowleft$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 0$

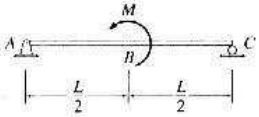
$\blacktriangleright S = 0 \qquad 0 < x < L \quad , \quad \blacktriangleright M = -M \qquad 0 < x < L$



نمودار لنگر خمشی M



۲۱-۳

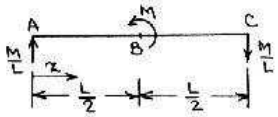


شکل ۳-۲۱

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

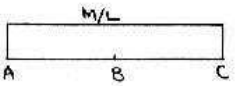
$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \;:\; M - A_y(L) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \frac{M}{L} \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = \frac{M}{L}\uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; \frac{M}{L} + C_y = 0 \;\Rightarrow\; C_y = -\frac{M}{L} \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = \frac{M}{L}\downarrow$

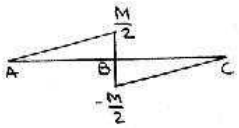


$\blacktriangleright S = \frac{M}{L} \qquad 0 < x < L$

$\blacktriangleright M_{(\text{لنگر خمشی})} = \frac{Mx}{L} \qquad 0 < x < \frac{L}{2} \quad , \quad \blacktriangleright M_{(\text{لنگر خمشی})} = \frac{Mx}{L} - M \qquad \frac{L}{2} < x < L$

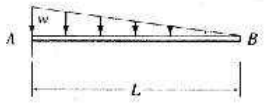


نمودار نیروی برشی S



نمودار لنگر خمشی M

۲۲-۳

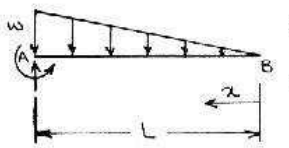


شکل ۳-۲۲

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

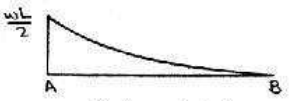
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - \left[\frac{wL}{2}\right]\left[\frac{L}{3}\right] = 0 \;\Rightarrow\; M_A = \frac{wL^2}{6} \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = \frac{wL^2}{6} \circlearrowleft$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - \frac{wL}{2} = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \frac{wL}{2} \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = \frac{wL}{2}\uparrow$

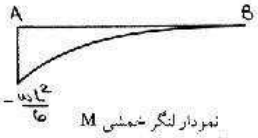


$$\blacktriangleright S=\frac{1}{2}\left[\frac{wx}{L}\right](x)=\frac{wx^2}{2L} \qquad 0\le x<L$$

$$\blacktriangleright M=-\frac{wx^2}{2L}\left(\frac{x}{3}\right)=-\frac{wx^3}{6L} \qquad 0\le x<L$$

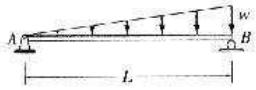


نمودار نیروی برشی S



نمودار لنگر خمشی M

۲۳-۳

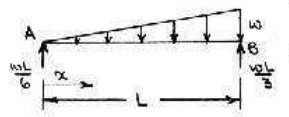


شکل ۳-۲۳

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \;:\; A_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=0$$

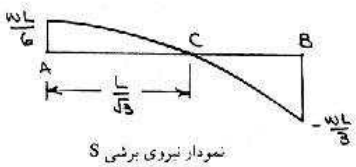
$$+\circlearrowleft \sum M_B=0 \;:\; \left[\frac{wL}{2}\right]\left[\frac{L}{3}\right]-A_y(L)=0 \;\Rightarrow\; A_y=\frac{wL}{6} \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=\frac{wL}{6}\uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \;:\; \frac{wL}{6}+B_y-\frac{wL}{2}=0 \;\Rightarrow\; B_y=\frac{wL}{3} \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y=\frac{wL}{3}\uparrow$$

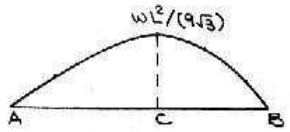


$$\blacktriangleright S=\frac{wL}{6}-\frac{1}{2}\left[\frac{wx}{L}\right]x=\frac{w}{6L}\left[L^2-3x^2\right] \qquad 0<x<L$$

$$\blacktriangleright M=\frac{wL}{6}x-\frac{wx^2}{2L}\left[\frac{x}{3}\right]=\frac{wx}{6L}\left[L^2-x^2\right] \qquad 0<x<L$$

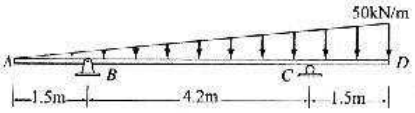


نمودار نیروی برشی S



نمودار لنگر خمشی M

۲۴-۳

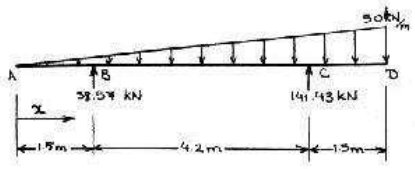


شکل ۳-۲۴

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \;:\; B_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x=0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B=0 \;:\; C_y(4/2)-\frac{1}{2}(50)(7/2)(3/3)=0$$

$$C_y=141/43 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y=141/43 \;\; kN\uparrow$$



$$+\uparrow\sum F_y=0 \;:\; 141/43+B_y-\frac{1}{2}(50)(7/2)=0$$

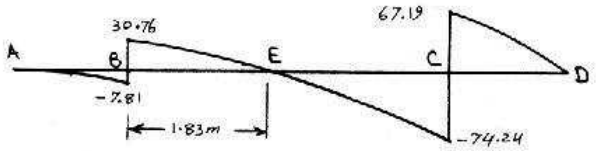
$$B_y=38/57 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y=38/57 \;\; kN\uparrow$$

$$\blacktriangleright S=-\frac{1}{2}\left[\frac{50x}{7/2}\right]x=-\frac{25x^2}{7/2} \qquad 0<x<1/5\,m$$

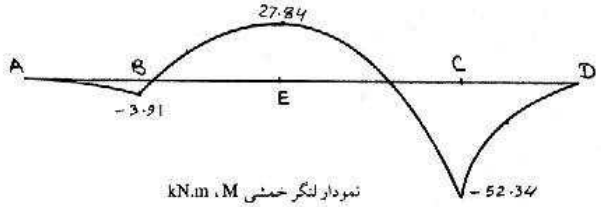
$$\blacktriangleright M=\frac{-25x^2}{7/2}\left[\frac{x}{3}\right]=-\frac{25x^3}{21/6} \qquad 0<x<1/5\,m$$

$$\blacktriangleright S=-\frac{25x^2}{7/2}+38/57 \qquad 1/5\,m<x<5/7\,m \;,\; \blacktriangleright M=-\frac{25x^3}{21/6}+38/57(x-1/5) \qquad 1/5\,m<x<5/7\,m$$

$$\blacktriangleright S=-\frac{25x^2}{7/2}+180 \qquad 5/7\,m<x<7/2\,m \;,\; \blacktriangleright M=-\frac{25x^3}{21/6}+180x-864/00 \qquad 5/7\,m<x<7/2\,m$$

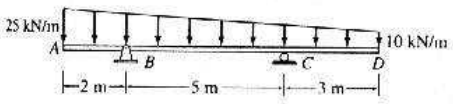


نمودار نیروی برشی S ، kN



نمودار لنگر خمشی M ، kN.m

۳-۲۵

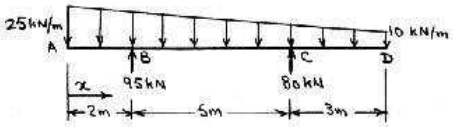


شکل ۳-۲۵

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; B_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \;:\; 10(10)(2) + \frac{1}{2}(15)(10)\left[\frac{11}{3}\right] - B_y(5) = 0$$

$$B_y = 95 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 95 \;\; kN \uparrow$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 95 + C_y - 10(10) - \frac{1}{2}(15)(10) = 0$$

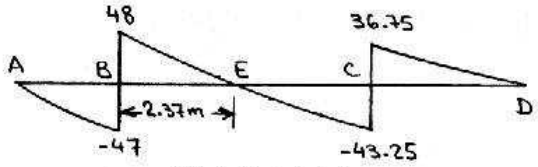
$$C_y = 80 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = 80 \;\; kN \uparrow$$

$$\blacktriangleright S = -25x + \frac{1}{2}(1/5x)(x) = -25x + 0/75x^2 \qquad 0 < x < 2\,m$$

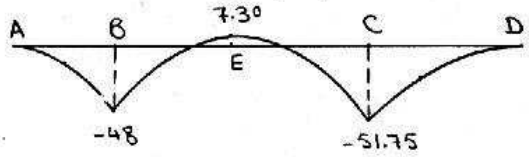
$$\blacktriangleright M = -25x\left[\frac{x}{2}\right] + \frac{1}{2}(1/5x)(x)\left[\frac{x}{3}\right] = -12/5x^2 + 0/25x^3 \qquad 0 < x < 2\,m$$

$$\blacktriangleright S = -25x + 0/75x^2 + 95 \qquad 2\,m < x < 7\,m \;,\; \blacktriangleright M = -12/5x^2 + 0/25x^3 + 95(x-2) \qquad 2\,m < x < 7\,m$$

$$\blacktriangleright S = -25x + 0/75x^2 + 175 \qquad 2\,m < x < 7\,m \;,\; \blacktriangleright M = -12/5x^2 + 0/25x^3 + 95(x-2) + 80(x-7) \qquad 2\,m < x < 7\,m$$

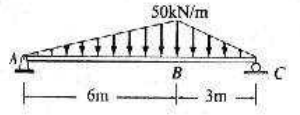


نمودار نیروی برشی S ، kN



نمودار لنگر خمشی M ، kN.m

۲۶-۳



شکل ۳-۲۶

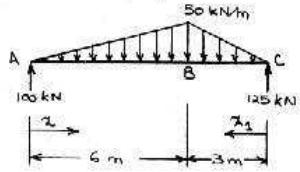
$\pm\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; C_y(9) - \frac{1}{2}(50)(6)(4) - \frac{1}{2}(50)(3)(7) = 0 \;\Rightarrow\; C_y = 125 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{C}_y = 125 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 125 - \frac{1}{2}(50)(9) + A_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 100 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 100 \;\; kN \uparrow$

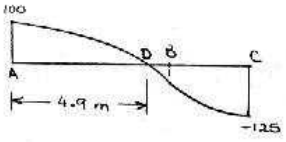


$\blacktriangleright S = 100 - \frac{1}{2}\left[\frac{25x}{3}\right]x = 100 - \frac{25}{6}x^2 \qquad 0 < x < 6\ m$

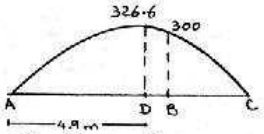
$\blacktriangleright M = 100x - \left[\frac{25x^2}{6}\right]\left[\frac{x}{3}\right] = 100x - \frac{25x^3}{18} \qquad 0 < x < 6\ m$

$\blacktriangleright S = -125 + \frac{1}{2}\left[\frac{50x_1}{3}\right]x_1 = -125 + \frac{25x_1^2}{3} \qquad 0 < x_1 < 3\ m$

$\blacktriangleright M = 125x_1 - \frac{25x_1^2}{3}\left[\frac{x_1}{3}\right] = 125x_1 - \frac{25x_1^3}{9} \qquad 0 < x_1 < 3\ m$

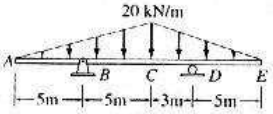


نمودار نیروی برشی S ؛ kN



نمودار لنگر خمشی M ؛ kN.m

۲۷-۳



شکل ۳-۲۷

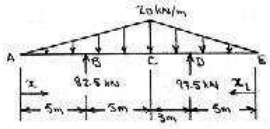
$\pm\sum F_x = 0 \;:\; B_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; D_y(8) - \frac{1}{2}(20)(10)\left[\frac{5}{3}\right] - \frac{1}{2}(20)(8)\left[\frac{23}{3}\right] = 0$

$D_y = 97/5 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y = 97/5 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 97/5 + B_y - \frac{1}{2}(20)(18) = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 82/5 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{B}_y = 82/5 \;\; kN \uparrow$



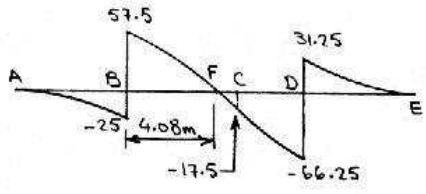
$\blacktriangleright S = -\frac{1}{2}(2x)x = -x^2 \qquad 0 < x < 5\ m$

$\blacktriangleright M = -x^2\left[\frac{x}{3}\right] = -\frac{x^3}{3} \qquad 0 < x < 5\ m$

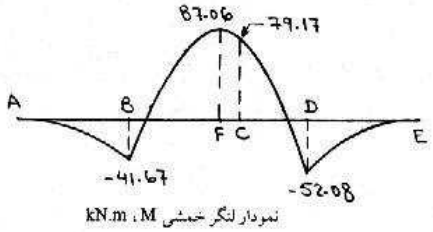
$\blacktriangleright S = -x^2 + 82/5 \qquad 5\ m < x < 10\ m \;,\; \blacktriangleright M = -\frac{x^3}{3} + 82/5(x-5) \qquad 5\ m < x < 10\ m$

$\blacktriangleright S = \frac{1}{2}(2/5x_1)x_1 = 1/25x_1^2 \qquad 0 < x_1 < 5\ m \;,\; \blacktriangleright M = -1/25x_1^2\left[\frac{x_1}{3}\right] = -\frac{1/25x_1^3}{3} \qquad 0 < x_1 < 5\ m$

$\blacktriangleright S = 1/25x_1^2 - 97/5 \qquad 5\ m < x < 8\ m \;,\; \blacktriangleright M = -\frac{1/25x_1^3}{3} + 97/5(x_1 - 5) \qquad 5\ m < x_1 < 8\ m$



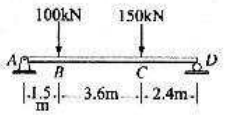
نمودار نیروی برشی S ؛ kN



نمودار لنگر خمشی M ؛ kN.m

برای تیرهای نشان داده شده در مسایل زیر، نمودار نیروی برشی، لنگر خمشی و شکل تقریبی منحنی الاستیک را ترسیم کنید.

۳-۲۸



شکل ۳-۲۸

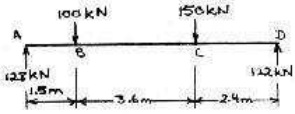
$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \;:\; A_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=0$

$+\circlearrowleft \sum M_A=0 \;:\; D_y(۷/۵)-۱۰۰(۱/۵)-۱۵۰(۵/۱)=0 \;\Rightarrow\; D_y=۱۲۲ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{D}_y=۱۲۲ \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y=0 \;:\; ۱۲۲+A_y-۱۰۰-۱۵۰=0 \;\Rightarrow\; A_y=۱۲۸ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=۱۲۸ \;\; kN \uparrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:



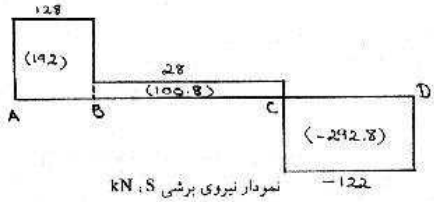
در نقطهٔ A: $S_{A,R}=۱۲۸ \;\; kN$

در نقطهٔ B: $S_{B,L}=۱۲۸+0=۱۲۸ \;\; kN \;,\; S_{B,R}=۱۲۸-۱۰۰=۲۸ \;\; kN$

در نقطهٔ C: $S_{C,L}=۲۸+0=۲۸ \;\; kN \;,\; S_{C,R}=۲۸-۱۵۰=-۱۲۲ \;\; kN$

در نقطهٔ D: $S_D=-۱۲۲+۱۲۲=0 \qquad O.K.$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:



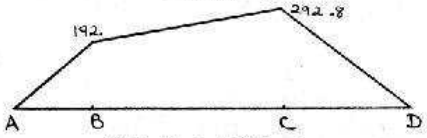
در نقطهٔ A: $M_A=0$

در نقطهٔ B: $M_B=0+۱۹۲=۱۹۲ \;\; kN.m$

در نقطهٔ C: $M_C=۱۹۲+۱۰۰/۸=۲۹۲/۸ \;\; kN.m$

در نقطهٔ D: $M_D=۲۹۲/۸-۲۹۲/۸=0 \qquad O.K.$

نمودار نیروی برشی S ، kN

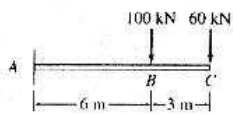


نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



منحنی الاستیک

۳-۲۹



شکل ۳-۲۹

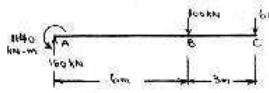
$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \;:\; A_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=0$

$+\circlearrowleft \sum M_A=0 \;:\; M_A-۱۰۰(۶)-۶۰(۹)=0 \;\Rightarrow\; M_A=۱۱۴۰ \;\; kN.m$

$\blacktriangleright \vec{M}_A=۱۱۴۰ \;\; kN.m \;\circlearrowleft$

$+\uparrow \sum F_y=0 \;:\; A_y-۱۰۰-۶۰=0 \;\Rightarrow\; A_y=۱۶۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=۱۶۰ \;\; kN \uparrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

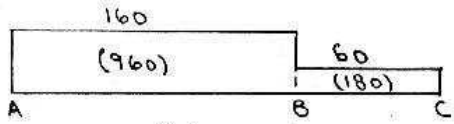


در نقطهٔ A: $S_{A,R}=۱۶۰ \;\; kN$

در نقطهٔ B: $S_{B,L}=۱۶۰+0=۱۶۰ \;\; kN \;,\; S_{B,R}=۱۶۰-۱۰۰=۶۰ \;\; kN$

در نقطهٔ C: $S_C=۶۰-۶۰=0 \qquad O.K.$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

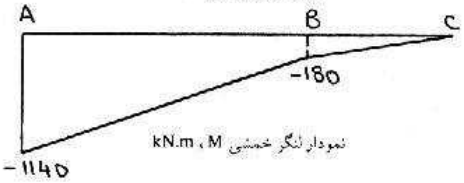


در نقطهٔ A: $M_{A,R} = -۱۱۴۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ B: $M_B = -۱۱۴۰ + ۹۶۰ = -۱۸۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ C: $M_C = -۱۸۰ + ۱۸۰ = ۰ \qquad O.K.$

نمودار نیروی برشی S، kN

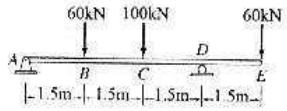


نمودار لنگر خمشی M، kN.m



منحنی الاستیک

۳-۳۰



شکل ۳-۳۰

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \;:\; A_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$

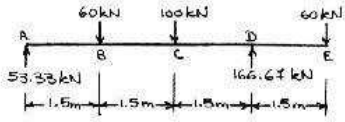
$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \;:\; D_y(۴/۵) - ۶۰(۱/۵+۶) - ۱۰۰(۳) = ۰$

$D_y = ۱۶۶/۶۷ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y = ۱۶۶/۶۷ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \;:\; ۱۶۶/۶۷ - ۲(۶۰) - ۱۰۰ + A_y = ۰ \;\Rightarrow\; A_y = ۵۳/۳۳ \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۵۳/۳۳ \quad kN \uparrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:



در نقطهٔ A: $S_{A,R} = ۵۳/۳۳ \quad kN$

در نقطهٔ B: $S_{B,L} = ۵۳/۳۳ + ۰ = ۵۳/۳۳ \quad kN \quad , \quad S_{B,R} = ۵۳/۳۳ - ۶۰ = -۶/۶۷ \quad kN$

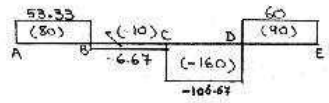
در نقطهٔ C: $S_{C,L} = -۶/۶۷ + ۰ = -۶/۶۷ \quad kN$

$S_{C,R} = -۶/۶۷ - ۱۰۰ = -۱۰۶/۶۷ \quad kN$

در نقطهٔ D: $S_{D,L} = -۱۰۶/۶۷ + ۰ = -۱۰۶/۶۷ \quad kN$

$S_{D,R} = -۱۰۶/۶۷ + ۱۶۶/۶۷ = ۶۰ \quad kN$

در نقطهٔ E: $S_E = ۶۰ - ۶۰ = ۰ \qquad O.K.$



نمودار نیروی برشی S، kN

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

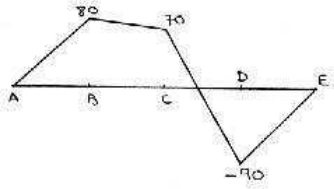
در نقطهٔ A: $M_A = ۰$

در نقطهٔ B: $M_B = ۰ + ۸۰ = ۸۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ C: $M_C = ۸۰ - ۱۰ = ۷۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ D: $M_D = ۷۰ - ۱۶۰ = -۹۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ E: $M_E = -۹۰ + ۹۰ = ۰ \qquad O.K.$

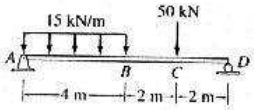


نمودار لنگر خمشی M، kN.m



منحنی الاستیک

۳-۳۱



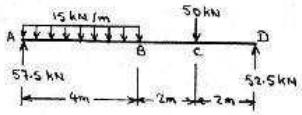
شکل ۳-۳۱

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; D_y(8) - 50(6) - 15(4)(2) = 0 \;\Rightarrow\; D_y = 52/5 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{D}_y = 52/5 \;\; kN \uparrow$$

ترسیم نمودار نیروی برشی:



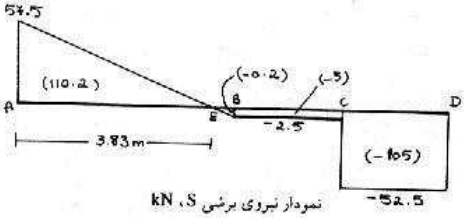
در نقطهٔ A: $S_{A,R} = 57/5 \;\; kN$

در نقطهٔ B: $S_B = 57/5 - 15(4) = -2/5 \;\; kN$

در نقطهٔ C: $S_{C,L} = -2/5 + 0 = -2/5 \;\; kN$

$S_{C,R} = -2/5 - 50 = -52/5 \;\; kN$

در نقطهٔ D: $S_D = -52/5 + 52/5 = 0 \qquad O.K.$



نمودار نیروی برشی S، kN

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

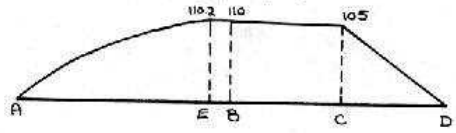
در نقطهٔ A: $M_A = 0$

در نقطهٔ E: $M_E = 0 + 110/2 = 110/2 \;\; kN.m$

در نقطهٔ B: $M_B = 110/2 - 0/2 = 110 \;\; kN.m$

در نقطهٔ C: $M_C = 110 - 5 = 105 \;\; kN.m$

در نقطهٔ D: $M_D = 105 - 105 = 0 \qquad O.K.$

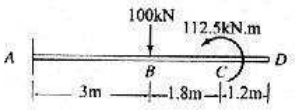


نمودار لنگر خمشی M، kN.m



منحنی الاستیک

۳-۳۲



شکل ۳-۳۲

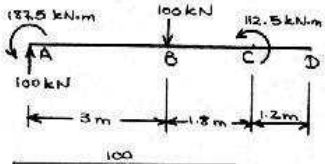
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - 100(3) + 112/5 = 0 \;\Rightarrow\; M_A = 187/5 \;\; kN.m$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A = 187/5 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - 100 = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 100 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 100 \;\; kN \uparrow$$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

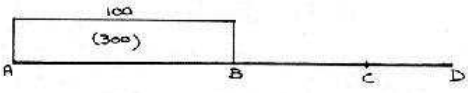


در نقطهٔ A: $S_{A,R} = 100 \;\; kN$

در نقطهٔ B: $S_{B,L} = 100 + 0 = 100 \;\; kN \;,\; S_{B,R} = 100 - 100 = 0$

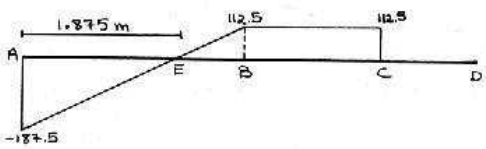
در نقطهٔ C: $S_C = 0 + 0 = 0$

در نقطهٔ D: $S_D = 0 + 0 = 0$



نمودار نیروی برشی S، kN

ترسیم نمودار لنگر خمشی:



در نقطهٔ A: $M_{A,R} = -۱۸۷/۵ \quad kN.m$

در نقطهٔ B: $M_B = -۱۸۷/۵ + ۳۰۰ = ۱۱۲/۵ \quad kN.m$

در نقطهٔ C: $M_{C,L} = ۱۱۲/۵ + ۰ = ۱۱۲/۵ \quad kN.m$

$M_{C,R} = ۱۱۲/۵ - ۱۱۲/۵ = ۰$

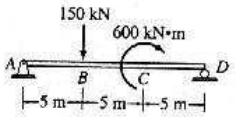
در نقطهٔ D: $M_D = ۰ + ۰ = ۰ \qquad O.K.$

نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



منحنی الاستیک

۳-۳۳



شکل ۳-۳۳

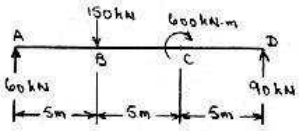
$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \;:\; A_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \;:\; D_y(۱۵) - ۱۵۰(۵) - ۶۰۰ = ۰ \Rightarrow D_y = ۹۰ \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{D}_y = ۹۰ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \;:\; ۹۰ - ۱۵۰ + A_y = ۰ \Rightarrow A_y = ۶۰ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۶۰ \quad kN \uparrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

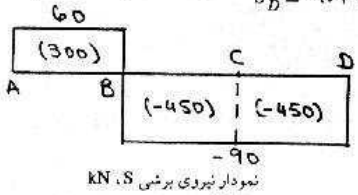


در نقطهٔ A: $S_{A,R} = ۶۰ \quad kN$

در نقطهٔ B: $S_{B,L} = ۶۰ + ۰ = ۶۰ \quad kN \;,\; S_{B,R} = ۶۰ - ۱۵۰ = -۹۰ \quad kN$

در نقطهٔ C: $S_C = -۹۰ + ۰ = -۹۰ \quad kN$

در نقطهٔ D: $S_D = -۹۰ + ۹۰ = ۰ \qquad O.K.$



نمودار نیروی برشی S ، kN

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

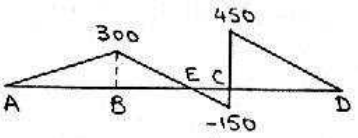
در نقطهٔ A: $M_A = ۰$

در نقطهٔ B: $M_B = ۰ + ۳۰۰ = ۳۰۰ \quad kN.m$

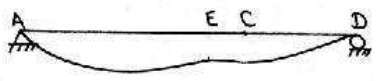
در نقطهٔ C: $M_{C,L} = ۳۰۰ - ۴۵۰ = -۱۵۰ \quad kN.m$

$M_{C,R} = -۱۵۰ + ۶۰۰ = ۴۵۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ D: $M_D = ۴۵۰ - ۴۵۰ = ۰ \qquad O.K.$

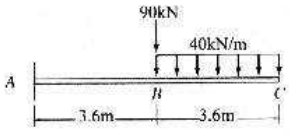


نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



منحنی الاستیک

۳۴-۳



شکل ۳-۳۴

$$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - 90(3/6) - 40(3/6)(5/4) = 0 \;\Rightarrow\; M_A = 1101/6 \;\; kN.m$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A = 1101/6 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - 90 - 40(3/6) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 234 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 234 \;\; kN \uparrow$$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

در نقطهٔ A:
$$S_{A,R} = 234 \;\; kN$$

در نقطهٔ B:
$$S_{B,L} = 234 + 0 = 234 \;\; kN \;,\; S_{B,R} = 234 - 90 = 144 \;\; kN$$

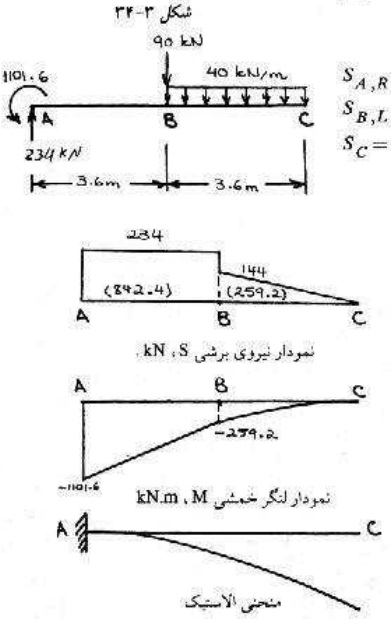
در نقطهٔ C:
$$S_C = 144 - 40(3/6) = 0 \qquad O.K.$$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

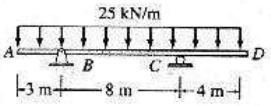
در نقطهٔ A:
$$M_A = -1101/6 \;\; kN.m$$

در نقطهٔ B:
$$M_B = -1101/6 + 842/4 = -259/2 \;\; kN.m$$

در نقطهٔ C:
$$M_C = -259/2 + 259/2 = 0 \qquad O.K.$$



۳۵-۳



شکل ۳-۳۵

$$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; B_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; C_y(8) - 25(15)(4/5) = 0 \;\Rightarrow\; C_y = 210/94 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{C}_y = 210/94 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; B_y + 210/94 - 25(15) = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 164/06 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{B}_y = 164/06 \;\; kN \uparrow$$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

در نقطهٔ A:
$$S_A = 0$$

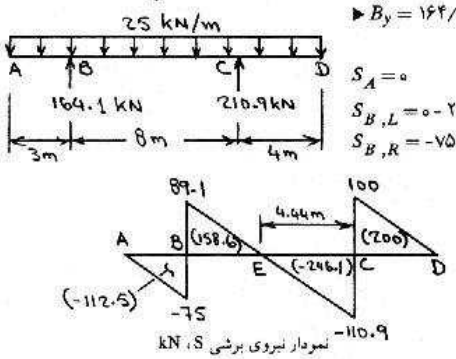
در نقطهٔ B:
$$S_{B,L} = 0 - 25(3) = -75 \;\; kN$$
$$S_{B,R} = -75 + 164/06 = 89/06 \;\; kN$$

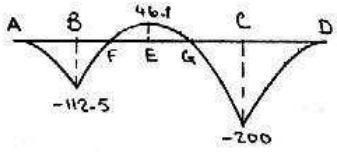
در نقطهٔ C:
$$S_{C,L} = 89/06 - 25(8) = -110/94 \;\; kN$$
$$S_{C,R} = -110/94 + 210/94 = 100 \;\; kN$$

در نقطهٔ D:
$$S_D = 100 - 25(4) = 0 \qquad O.K.$$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

در نقطهٔ A:
$$M_A = 0$$





نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



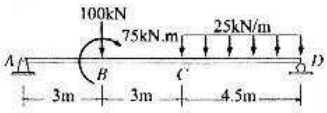
منحنی الاستیک

$M_B = ۰ - ۱۱۲/۵ = -۱۱۲/۵ \quad kN.m$: در نقطهٔ B

$M_C = -۱۱۲/۵ + ۱۵۸/۶۰ - ۲۴۶/۱۰ = -۲۰۰/۰$: در نقطهٔ C

$M_D = -۲۰۰/۰ + ۲۰۰/۰ = ۰ \qquad O.K.$: در نقطهٔ D

۳۶-۳



شکل ۳-۳۶

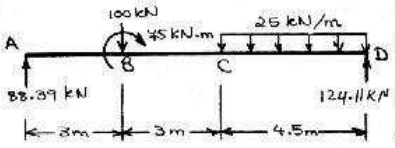
$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \;:\; A_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \;:\; D_y(۱۰/۵) - ۷۵ - ۱۰۰(۳) - ۲۵(۴/۵)(۸/۲۵) = ۰$

$D_y = ۱۲۴/۱۱ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y = ۱۲۴/۱۱ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \;:\; ۱۲۴/۱۱ + A_y - ۱۰۰ - ۲۵(۴/۵) = ۰$

$A_y = ۸۸/۳۹ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۸۸/۳۹ \quad kN \uparrow$



ترسیم نمودار نیروی برشی:

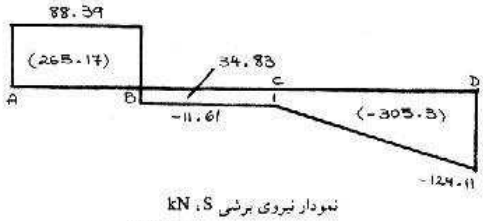
$S_{A,R} = ۸۸/۳۹ \quad kN$: در نقطهٔ A

$S_{B,L} = ۸۸/۳۹ + ۰ = ۸۸/۳۹ \quad kN$: در نقطهٔ B

$S_{B,R} = ۸۸/۳۹ - ۱۰۰ = -۱۱/۶۱ \quad kN$

$S_C = -۱۱/۶۱ + ۰ = -۱۱/۶۱ \quad kN$: در نقطهٔ C

$S_D = -۱۱/۶۱ - ۲۵(۴/۵) + ۱۲۴/۱۱ = ۰ \qquad O.K.$: در نقطهٔ D



نمودار نیروی برشی S ، kN

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

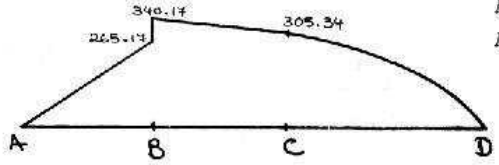
$M_A = ۰$: در نقطهٔ A

$M_{B,L} = ۲۶۵/۱۷ + ۰ = ۲۶۵/۱۷ \quad kN.m$: در نقطهٔ B

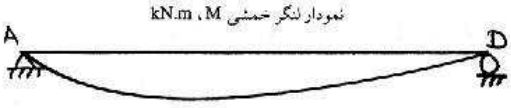
$M_{B,R} = ۲۶۵/۱۷ + ۷۵ = ۳۴۰/۱۷ \quad kN.m$

$M_C = ۳۴۰/۱۷ - ۳۴/۸۳ = ۳۰۵/۳۴ \quad kN.m$: در نقطهٔ C

$M_D = ۳۰۵/۳۴ - ۳۰۵/۳۷ = -۰/۰۳ \simeq ۰ \qquad O.K.$: در نقطهٔ D

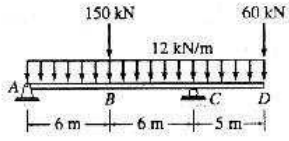


نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



منحنی الاستیک

۳۷-۳



شکل ۳-۳۷

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

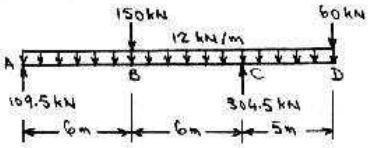
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; C_y(12) - 150(6) - 60(17) - 12(17)(8/5) = 0$

$C_y = 304/5 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = 304/5 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 304/5 - 12(17) - 150 - 60 + A_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 109/5 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 109/5 \;\; kN \uparrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:



در نقطهٔ A: $S_{A,R} = 109/5 \;\; kN$

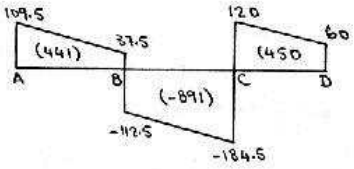
در نقطهٔ B: $S_{B,L} = 109/5 - 12(6) = 37/5 \;\; kN$

$S_{B,R} = 37/5 - 150 = -112/5 \;\; kN$

در نقطهٔ C: $S_{C,L} = -112/5 - 12(6) = -184/5 \;\; kN$

$S_{C,R} = -184/5 + 304/5 = 120 \;\; kN$

در نقطهٔ D: $S_D = 120 - 120 = 0 \qquad O.K.$



نمودار نیروی برشی S، kN

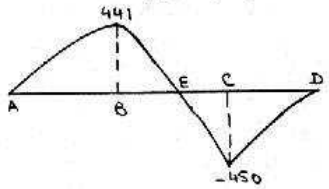
ترسیم نمودار لنگر خمشی:

در نقطهٔ A: $M_A = 0$

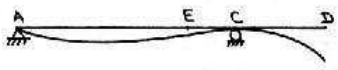
در نقطهٔ B: $M_B = 0 + 441 = 441 \;\; kN.m$

در نقطهٔ C: $M_C = 441 - 891 = -450 \;\; kN.m$

در نقطهٔ D: $M_D = -450 + 450 = 0 \qquad O.K.$

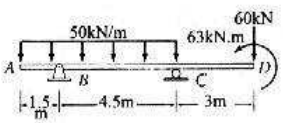


نمودار لنگر خمشی M، kN.m



منحنی الاستیک

۳۸-۳



شکل ۳-۳۸

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; B_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 0$

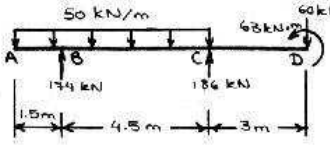
$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; C_y(4/5) + 63 - 60(7/5) - 50(6)(1/5) = 0 \;\Rightarrow\; C_y = 186 \;\; kN$

$\blacktriangleright C_y = 186 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; B_y + 186 - 50(6) - 60 = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 174 \;\; kN$

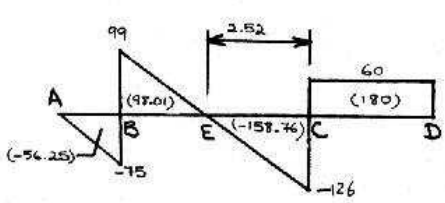
$\blacktriangleright \vec{B}_y = 174 \;\; kN \uparrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

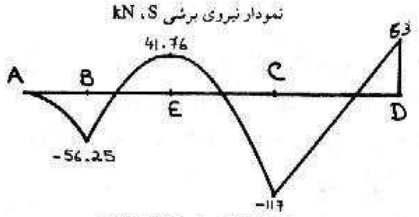


در نقطهٔ A: $S_A = 0$

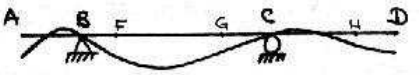
در نقطهٔ B: $S_{B,L} = 0 - 50(1/5) = -75 \;\; kN$



نمودار نیروی برشی S ، kN



نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



منحنی الاستیک

$S_{B,R} = -۷۵ + ۱۷۴ = ۹۹ \quad kN$

در نقطهٔ C:
$S_{C,L} = ۹۹ - ۵۰(۴/۵) = -۱۲۶ \quad kN$
$S_{C,R} = -۱۲۶ + ۱۸۶ = ۶۰ \quad kN$

در نقطهٔ D: $S_D = ۶۰ - ۶۰ = ۰ \qquad O.K.$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

در نقطهٔ A: $M_A = ۰$

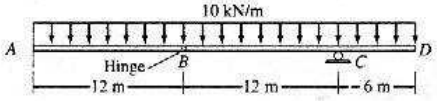
در نقطهٔ B: $M_B = ۰ - ۵۶/۲۵ = -۵۶/۲۵ \quad kN.m$

در نقطهٔ E: $M_E = -۵۶/۲۵ + ۹۸/۰۱ = ۴۱/۷۶ \quad kN.m$

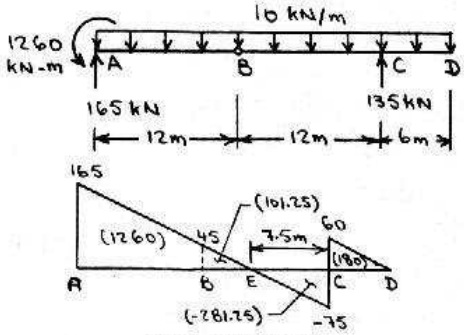
در نقطهٔ C: $M_C = ۴۱/۷۶ - ۱۵۸/۷۶ = -۱۱۷ \quad kN.m$

در نقطهٔ D: $M_D = -۱۱۷ + ۱۸۰ = ۶۳ \quad kN.m \qquad O.K.$

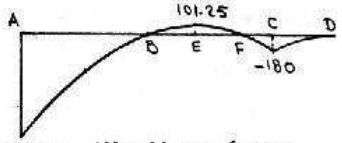
۳۹-۳



شکل ۳-۳۹



نمودار نیروی برشی S ، kN



نمودار لنگر خمشی M ، kN.m

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \;:\; A_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{BD} = ۰ \;:\; C_y(۱۲) - ۱۰(۱۸)(۹) = ۰$

$C_y = ۱۳۵ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = ۱۳۵ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \;:\; A_y + ۱۳۵ - ۱۰(۳۰) = ۰ \;\Rightarrow\; A_y = ۱۶۵ \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۶۵ \quad kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \;:\; ۱۳۵(۲۴) + M_A - ۱۰(۳۰)(۱۵) = ۰$

$M_A = ۱۲۶۰ \quad kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = ۱۲۶۰ \quad kN.m \;\circlearrowleft$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

در نقطهٔ A: $S_{A,R} = ۱۶۵ \quad kN$

در نقطهٔ B: $S_B = ۱۶۵ - ۱۰(۱۲) = ۴۵ \quad kN.m$

در نقطهٔ C: $S_{C,L} = ۴۵ - ۱۰(۱۲) = -۷۵ \quad kN$
$S_{B,R} = -۷۵ + ۱۳۵ = ۶۰ \quad kN$

در نقطهٔ D: $S_D = ۶۰ - ۱۰(۶) = ۰ \qquad O.K.$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

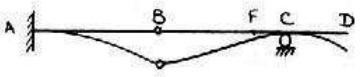
در نقطهٔ A: $M_A = -۱۲۶۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ B: $M_B = -۱۲۶۰ + ۱۲۶۰ = ۰ \qquad O.K.$

در نقطهٔ E: $M_E = ۰ + ۱۰۱/۲۵ = ۱۰۱/۲۵ \quad kN.m$

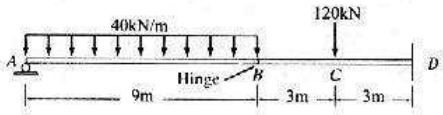
در نقطهٔ C: $M_C = ۱۰۱/۲۵ - ۲۸۱/۲۵ = -۱۸۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ D: $M_D = -۱۸۰ + ۱۸۰ = ۰ \qquad O.K.$



منحنی الاستیک

۳-۴۰



شکل ۳-۴۰

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; D_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{D}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; 40(9)(4/5) - A_y(9) = 0$

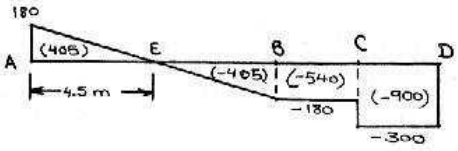
$A_y = 180 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 180 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; D_y + 180 - 120 - 40(9) = 0 \;\Rightarrow\; D_y = 300 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{D}_y = 300 \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \;:\; 40(9)(10/5) + 120(3) + M_D - 180(15) = 0$

$M_D = -1440 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_D = 1440 \;\; kN.m \;)$



نمودار نیروی برشی S ، kN

ترسیم نمودار نیروی برشی:

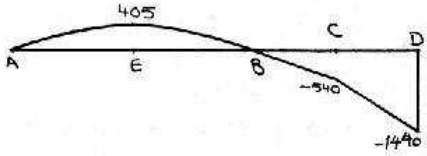
در نقطهٔ A: $S_{A,R} = 180 \;\; kN$

در نقطهٔ B: $S_B = 180 - 40(9) = -180 \;\; kN$

در نقطهٔ C: $S_{C,L} = -180 + 0 = -180 \;\; kN$

$S_{C,R} = -180 - 120 = -300 \;\; kN$

در نقطهٔ D: $S_D = -300 + 300 = 0 \qquad O.K.$



نمودار لنگر خمشی M ، kN.m

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

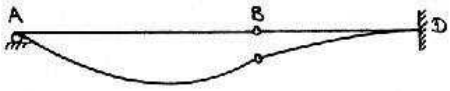
در نقطهٔ A: $M_A = 0$

در نقطهٔ E: $M_E = 0 + 405 = 405 \;\; kN.m$

در نقطهٔ B: $M_B = 405 - 405 = 0 \qquad O.K.$

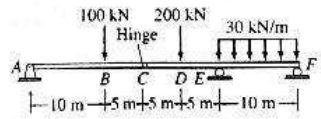
در نقطهٔ C: $M_C = 0 - 540 = -540 \;\; kN.m$

در نقطهٔ D: $M_D = -540 - 900 = -1440 \;\; kN.m \qquad O.K.$



منحنی الاستیک

۳-۴۱



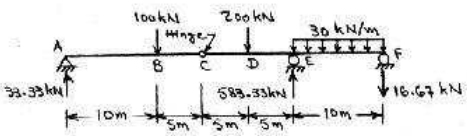
شکل ۳-۴۱

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \;:\; 100(5) - A_y(15) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 33/33 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 33/33 \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_F = 0 \;:\; 100(25) + 200(15) + 30(10)(5) - E_y(10) - 33/33(35) = 0$



$E_y = ۵۸۳/۳۳ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{E_y} = ۵۸۳/۳۳ \ kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ ۳۳/۳۳ + ۵۸۳/۳۳ - ۱۰۰ - ۲۰۰ - ۳۰(۱۰) + F_y = ۰$

$F_y = -۱۶/۶۶ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{F_y} = ۱۶/۶۷ \ kN \downarrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

در نقطهٔ A: $S_{A,R} = ۳۳/۳۳ \ kN$

در نقطهٔ B: $S_{B,L} = ۳۳/۳۳ + ۰ = ۳۳/۳۳ \ kN$

$S_{B,R} = ۳۳/۳۳ - ۱۰۰ = -۶۶/۶۷ \ kN$

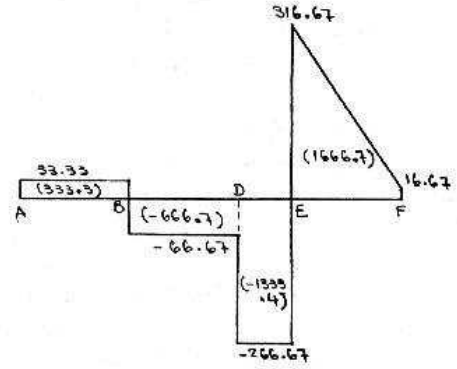
در نقطهٔ D: $S_{D,L} = -۶۶/۶۷ + ۰ = -۶۶/۶۷ \ kN$

$S_{D,R} = -۶۶/۶۷ - ۲۰۰ = -۲۶۶/۶۷ \ kN$

در نقطهٔ E: $S_{E,L} = -۲۶۶/۶۷ + ۰ = -۲۶۶/۶۷ \ kN$

$S_{E,R} = -۲۶۶/۶۷ + ۵۸۳/۳۳ = ۳۱۶/۶۶ \ kN$

در نقطهٔ F: $S_F = ۳۱۶/۶۷ - ۳۰(۱۰) = ۱۶/۶۷ \ kN \qquad O.K.$



نمودار نیروی برشی S ، kN

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

در نقطهٔ A: $M_A = ۰$

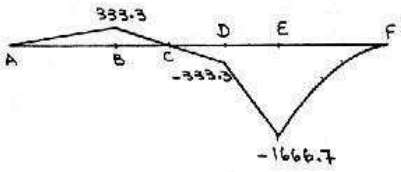
در نقطهٔ B: $M_B = ۰ + ۳۳۳/۳۳ = ۳۳۳/۳۳ \ kN.m$

در نقطهٔ C: $M_C = ۳۳۳/۳۳ - ۳۳۳/۳۳ = ۰ \qquad O.K.$

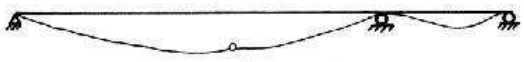
در نقطهٔ D: $M_D = ۰ - ۳۳۳/۳۳ = -۳۳۳/۳۳ \ kN.m$

در نقطهٔ E: $M_E = -۳۳۳/۳۳ - ۱۳۳۳/۳۳ = -۱۶۶۶/۶۶ \ kN.m$

در نقطهٔ F: $M_F = -۱۶۶۶/۶۶ + ۱۶۶۶/۶۶ = ۰ \qquad O.K.$

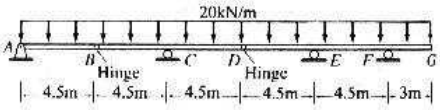


نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



منحنی الاستیک

۴۲-۳



شکل ۴۲-۳

$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = ۰ \ : \ ۲۰(۴/۵)(۲/۲۵) - A_y(۴/۵) = ۰$

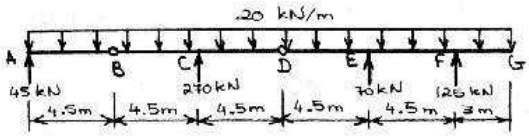
$A_y = ۴۵ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A_y} = ۴۵ \ kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_D^{AD} = ۰ \ : \ ۲۰(۱۳/۵)(۶/۷۵) - ۴۵(۱۳/۵) - C_y(۴/۵) = ۰$

$C_y = ۲۷۰ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_y} = ۲۷۰ \ kN \uparrow$

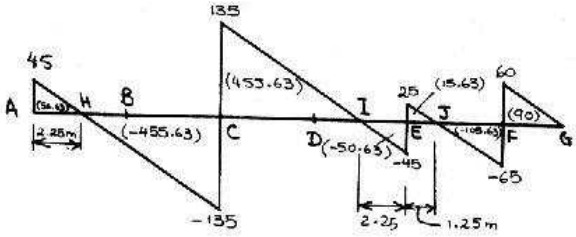
$+\circlearrowleft \sum M_F = ۰ \ :$

$۲۰(۲۵/۵)(۹/۷۵) - ۴۵(۲۲/۵) - ۲۷۰(۱۳/۵) - E_y(۴/۵) = ۰$

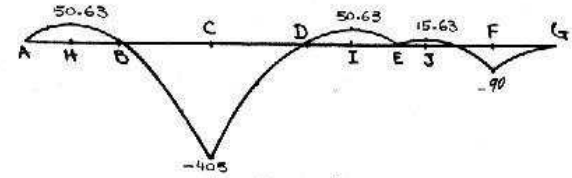


$E_y = ۷۰ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{E_y} = ۷۰ \ kN \uparrow$

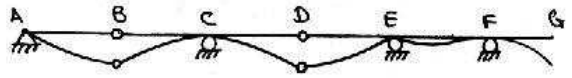
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ ۴۵ + ۲۷۰ + ۷۰ - ۲۰(۲۵/۵) + F_y = ۰$



نمودار نیروی برشی S، kN



نمودار لنگر خمشی M، kN.m



منحنی الاستیک

$F_y = ۱۲۵ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{F}_y = ۱۲۵ \quad kN \uparrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:

در نقطهٔ A: $S_{A,R} = ۴۵ \quad kN$

در نقطهٔ B: $S_B = ۴۵ - ۲۰(۴/۵) = -۴۵ \quad kN$

در نقطهٔ C: $S_{C,L} = -۴۵ - ۲۰(۴/۵) = -۱۳۵ \quad kN$

$S_{C,R} = -۱۳۵ + ۲۷۰ = ۱۳۵ \quad kN$

در نقطهٔ D: $S_D = ۱۳۵ - ۲۰(۴/۵) = ۴۵ \quad kN$

در نقطهٔ E: $S_{E,L} = ۴۵ - ۲۰(۴/۵) = -۴۵ \quad kN$

$S_{E,R} = -۴۵ + ۷۰ = ۲۵ \quad kN$

در نقطهٔ F: $S_{F,L} = ۲۵ - ۲۰(۴/۵) = -۶۵ \quad kN$

$S_{F,R} = -۶۵ + ۱۲۵ = ۶۰ \quad kN$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

در نقطهٔ A: $M_A = ۰$

در نقطهٔ H: $M_H = ۰ + ۵۰/۶۳ = ۵۰/۶۳ \quad kN.m$

در نقطهٔ C:

$M_C = ۵۰/۶۳ - ۴۵۵/۶۳ = -۴۰۵ \quad kN.m$

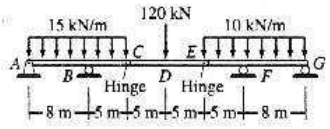
در نقطهٔ E: $M_E = -۴۰۵ + ۴۵۵/۶۳ - ۵۰/۶۳ = ۰$

در نقطهٔ J: $M_J = ۰ + ۱۵/۶۳ = ۱۵/۶۳ \quad kN.m$

در نقطهٔ F: $M_F = ۱۵/۶۳ - ۱۰۵/۶۳ = -۹۰ \quad kN.m$

در نقطهٔ G: $M_G = -۹۰ + ۹۰ = ۰ \quad O.K.$

۳-۴۳



شکل ۳-۴۳

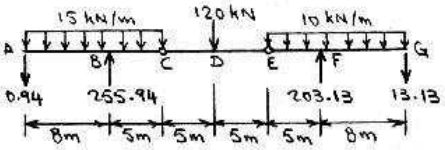
$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \; : \; A_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_A^{BC} = ۰ \; : \; B_y(۸) - ۱۵(۱۳)(۶/۵) - ۶۰(۱۳) = ۰$

$B_y = ۲۵۵/۹۴ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۲۵۵/۹۴ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y^{AC} = ۰ \; : \; ۲۵۵/۹۴ - ۱۵(۱۳) - ۶۰ + A_y = ۰ \Rightarrow A_y = -۰/۹۴ \quad kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۰/۹۴ \quad kN \downarrow$



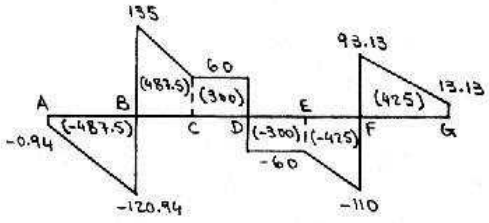
$+\circlearrowleft \sum M_G^{EG} = ۰ \; : \; ۱۰(۱۳)(۶/۵) + ۶۰(۱۳) - F_y(۸) = ۰$

$F_y = ۲۰۳/۱۳ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{F}_y = ۲۰۳/۱۳ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y^{EG} = ۰ \; : \; ۲۰۳/۱۳ + G_y - ۶۰ - ۱۰(۱۳) = ۰$

$G_y = -۱۳/۱۳ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{G}_y = ۱۳/۱۳ \quad kN \downarrow$

ترسیم نمودار نیروی برشی:



نمودار نیروی برشی S، kN

در نقطهٔ A: $S_{A,R} = -۰/۹۴ \quad kN$

در نقطهٔ B: $S_{B,L} = -۰/۹۴ - ۱۵(۸) = -۱۲۰/۹۴ \quad kN$

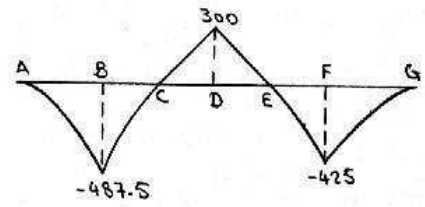
$S_{B,R} = -۱۲۰/۹۴ + ۲۵۵/۹۴ = ۱۳۵ \quad kN$

در نقطهٔ C: $S_C = ۱۳۵ - ۱۵(۵) = ۶۰ \quad kN$

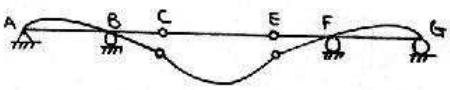
در نقطهٔ D: $S_{D,L} = ۶۰ + ۰ = ۶۰ \quad kN$

$S_{D,R} = ۶۰ - ۱۲۰ = -۶۰ \quad kN$

در نقطهٔ E: $S_E = -۶۰ + ۰ = -۶۰ \quad kN$



نمودار لنگر خمشی M، kN.m



منحنی الاستیک

در نقطهٔ F: $S_{F,L} = -۶۰ - ۱۰(۵) = -۱۱۰ \quad kN$

$S_{F,R} = -۱۱۰ + ۲۰۳/۱۳ = ۹۰/۱۳ \quad kN$

در نقطهٔ G: $S_G = ۹۰/۱۳ - ۱۰(۸) - ۱۳/۱۳ = ۰ \quad O.K.$

ترسیم نمودار لنگر خمشی:

در نقطهٔ A: $M_A = ۰$

در نقطهٔ B: $M_B = ۰ - ۴۸۷/۵ = -۴۸۷/۵ \quad kN.m$

در نقطهٔ C: $M_C = -۴۸۷/۵ + ۴۸۷/۵ = ۰ \quad O.K.$

در نقطهٔ D: $M_D = ۰ + ۳۰۰ = ۳۰۰ \quad kN.m \quad O.K.$

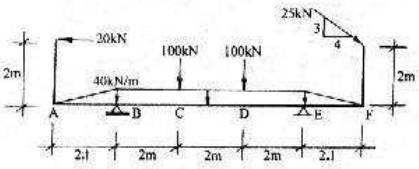
در نقطهٔ E: $M_E = ۳۰۰ - ۳۰۰ = ۰ \quad O.K.$

در نقطهٔ F: $M_F = ۰ - ۴۲۵ = -۴۲۵ \quad kN.m$

در نقطهٔ G: $M_G = -۴۲۵ + ۴۲۵ = ۰ \quad O.K.$

در تیرهای نشان داده شده در مسایل زیر، نمودار نیروی برشی، لنگر خمشی و شکل تقریبی منحنی الاستیک را ترسیم کنید.

۴۴-۳



شکل ۳-۴۴

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \quad : \quad E_x + ۲۵\left[\frac{۴}{۵}\right] - ۲۰ = ۰ \quad \Rightarrow \quad E_x = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{E}_x = ۰$

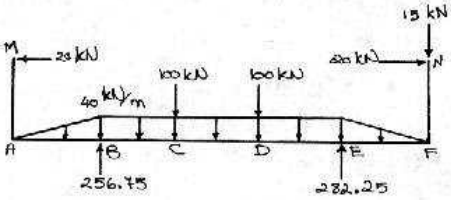
$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \quad : \quad -۱۵(۸/۱) + \frac{۱}{۲}(۴۰)(۲/۱)(۰/۷) - \frac{۱}{۲}(۴۰)(۲/۱)(۶/۷) - ۴۰(۶)(۳) - ۱۰۰(۲+۴) + E_y(۶) = ۰$

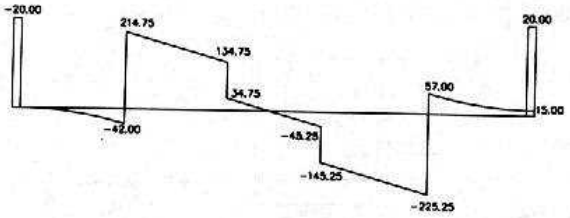
$E_y = ۲۸۲/۲۵ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y = ۲۸۲/۲۵ \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad :$

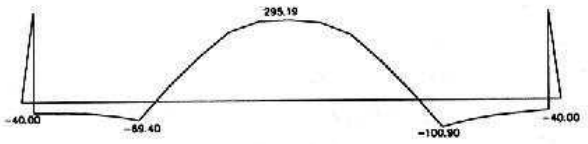
$۲۸۲/۲۵ + B_y - ۴۰(۶) - ۲\left[\frac{۱}{۲}(۴۰)(۲/۱)\right] - ۱۵ - ۲(۱۰۰) = ۰$

$B_y = ۲۵۶/۷۵ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۲۵۶/۷۵ \quad kN \uparrow$





نمودار نیروی برشی S، kN

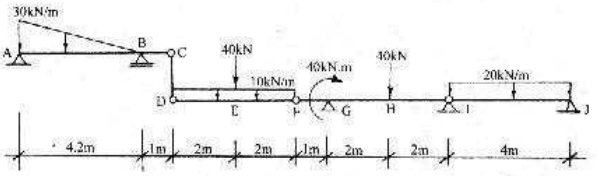


نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



منحنی الاستیک

۳-۴۵



شکل ۳-۴۵

$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0$: $\quad \blacktriangleright \vec{A}_x = \vec{G}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_F^{DF} = 0$:

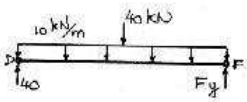
$۴۰(۲) + ۱۰(۴)(۲) - F_{DC}(۴) = 0$

$F_{DC} = ۴۰ \ kN \quad \blacktriangleright F_{DC} = ۴۰ \ kN \ (T)$

$+\circlearrowleft \sum M_A^{AC} = 0 : \ B_y(۴/۲) - ۴۰(۵/۲) - \frac{۱}{۲}(۳۰)(۴/۲)\left[\frac{۴/۲}{۳}\right] = 0 \Rightarrow B_y = ۷۰/۵۲ \ kN \quad \blacktriangleright \vec{B}_y = ۷۰/۵۲ \ kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y^{AC} = 0 : \ ۷۰/۵۲ + A_y - \frac{۱}{۲}(۳۰)(۴/۲) - ۴۰ = 0 \Rightarrow A_y = ۳۲/۴۸ \ kN \quad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۳۲/۴۸ \ kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_I^{IJ} = 0 : \ J_y(۴) - ۲۰(۹)(۲) = 0 \Rightarrow J_y = ۴۰ \ kN \quad \blacktriangleright \vec{J}_y = ۴۰ \ kN \uparrow$

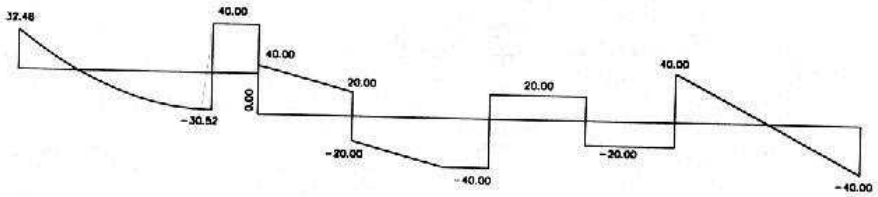


$+\uparrow \sum F_y^{DF} = 0 : \ ۴۰ - ۴۰ - ۱۰(۴) + F_y = 0 \Rightarrow F_y = ۴۰ \ kN$

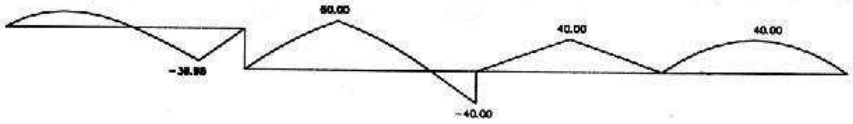
$+\circlearrowleft \sum M_I^{FI} = 0 : \ ۴۰(۵) - ۴۰ + ۴۰(۲) - G_y(۴) = 0 \Rightarrow G_y = ۶۰ \ kN$

$\blacktriangleright \vec{G}_y = ۶۰ \ kN \uparrow$

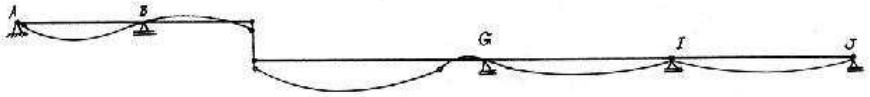
$+\circlearrowleft \sum M_J^{FJ} = 0 : \ ۴۰(۹) - ۴۰ + ۴۰(۶) + ۲۰(۴)(۲) - ۶۰(۸) - I_y(۴) = 0 \Rightarrow I_y = ۶۰ \ kN \quad \blacktriangleright \vec{I}_y = ۶۰ \ kN \uparrow$



نمودار نیروی برشی S ، kN

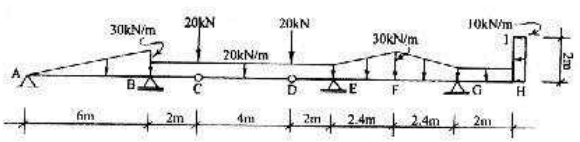


نمودار لنگر خمشی M، kN.m



منحنی الاستیک

۴۶-۳



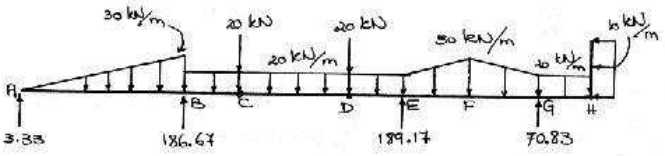
$$\pm\sum F_x = 0 \quad : \quad A_x - 2(10) = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_x = 20 \quad kN \rightarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \quad :$$

$$\frac{1}{2}30(6)(4) + 20(2)(1) - A_y(8) - B_y(2) = 0$$

$$4A_y + B_y = 200 \qquad (I)$$



$$+\circlearrowleft \sum M_D^{AD} = 0 \quad :$$

$$\frac{1}{2}(30)(6)(8) + 20(6)(3) + 20(4) - 12A_y - 6B_y = 0$$

$$6A_y + 3B_y = 580 \quad kN \qquad (II)$$

از حل همزمان معادلات (I) و (II) واکنشهای تکیه‌گاهی A_y و B_y به دست می‌آید:

$$\blacktriangleright \vec{B}_y = 186/67 \quad kN \uparrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{A}_y = 3/33 \quad kN \uparrow$$

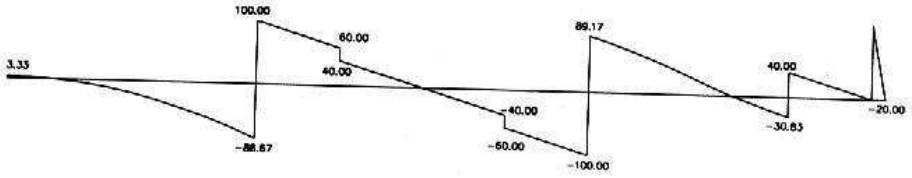
$$+\circlearrowleft \sum M_G = 0 \quad :$$

$$\frac{1}{2}(30)(6)(14/8) + 20(6/8 + 10/8) + 20(14/8)(5/4) + \frac{1}{2}(10)(4/8)(2/4) + 10(2)(1) - 3/33(18/8) - 186/67(12/8) - E_y(4/8) = 0$$

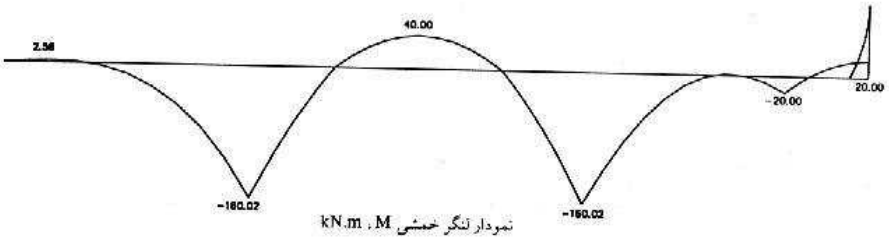
$$E_y = 189/17 \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y = 189/17 \quad kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad 3/33 + 186/67 + 189/17 + G_y - \frac{1}{2}(30)(6) - 2(20) - 20(14/8) - \frac{1}{2}(10)(4/8) = 0$$

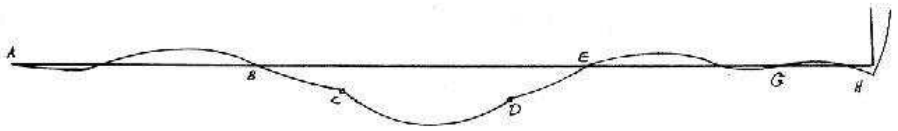
$$G_y = 70/83 \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{G}_y = 70/83 \quad kN \uparrow$$



نمودار نیروی برشی S ، kN

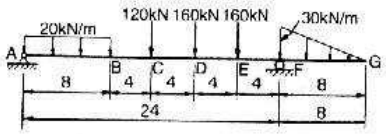


نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



منحنی الاستیک

۴۷-۳



شکل ۴۷-۳

$$\overrightarrow{+}\sum F_x = 0 \quad : \quad A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

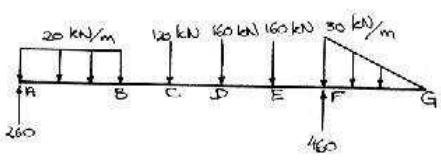
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad :$$

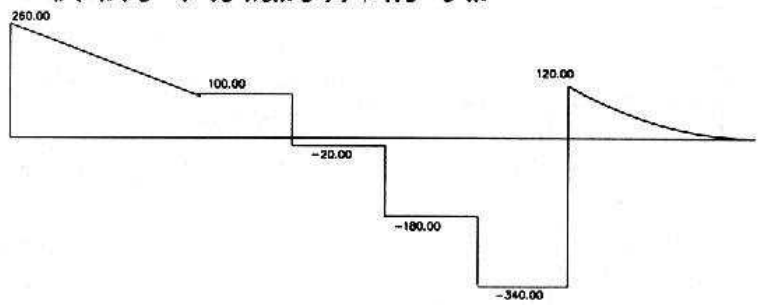
$$F_y(۲۴) - ۲۰(۸)(۴) - ۱۲۰(۱۲) - ۱۶۰(۱۶) - ۱۶۰(۲۰) - \frac{۱}{۲}(۳۰)(۸)\left[\frac{۸}{۳}\right] = 0$$

$$F_y = ۴۶۰ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{F}_y = ۴۶۰ \ kN \uparrow$$

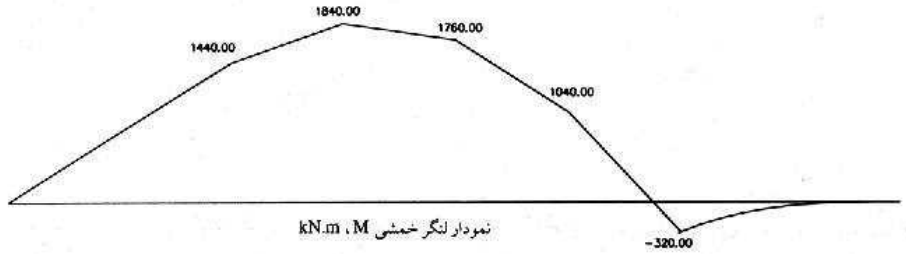
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad ۴۶۰ + A_y - ۱۲۰ - ۲(۱۶۰) - ۲۰(۸) - \frac{۱}{۲}(۳۰)(۸) = 0$$

$$A_y = ۲۶۰ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۲۶۰ \ kN \uparrow$$





نمودار نیروی برشی S، kN

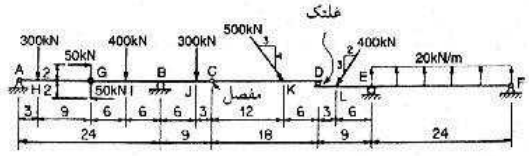


نمودار لنگر خمشی M، kN.m



منحنی الاستیک

۳-۴۸



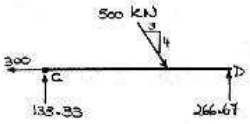
شکل ۳-۴۸

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^{AD}=0 \;:\; A_x+500\left[\frac{3}{5}\right]=0$$

$$A_x=-300 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=300 \;\; kN \leftarrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^{DF}=0 \;:\; F_x-400\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right]=0$$

$$F_x=-221/88 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{F}_x=221/88 \;\; kN \rightarrow$$



$$+)\sum M_C^{CD}=0 \;:\; D_y(18)-500\left[\frac{4}{5}\right](12)=0 \;\Rightarrow\; D_y=266/67 \;\; kN$$

$$+\uparrow\sum F_y^{CD}=0 \;:\; 266/67+C_y-500\left[\frac{4}{5}\right]=0 \;\Rightarrow\; C_y=133/33 \;\; kN$$

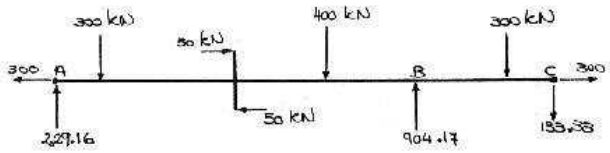
$$+)\sum M_F^{DF}=0 \;:\; 400\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right](30)-20(24)(12)+266/67(33)-E_y(24)=0$$

$$E_y=542/69 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y=542/69 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_y^{DF}=0 \;:\; 542/69-400\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\right]+20(24)+F_y-266/67=0 \;\Rightarrow\; F_y=-423/2 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{F}_y=423/2 \;\; kN \downarrow$$

$$+)\sum M_A^{AC}=0 \;:\; B_y(24)-300(3+30)-400(18)-133/33(33)-50(4)=0 \;\Rightarrow\; B_y=904/17 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{B}_y=904/17 \;\; kN \uparrow$$

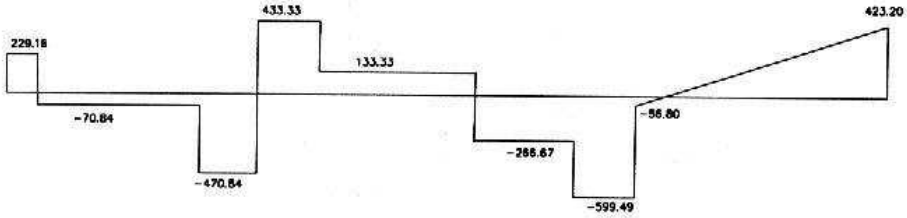


$+\uparrow \sum F_y^{AC} = 0$:

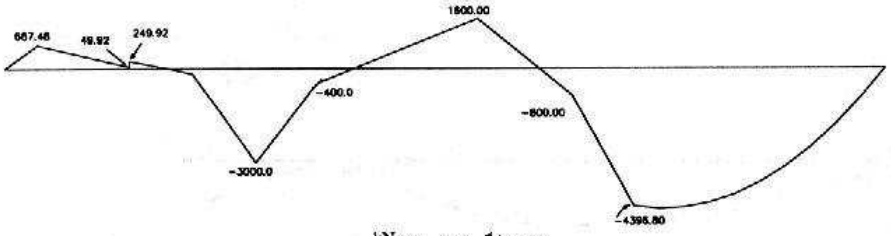
$A_y + 904/17 - 2(300) - 400 - 133/33 = 0$

$A_y = 229/16 \quad kN$

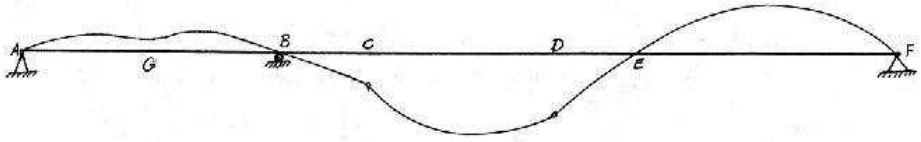
$\blacktriangleright \vec{A}_y = 229/16 \quad kN \uparrow$



نمودار نیروی برشی S ، kN

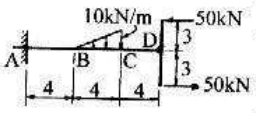


نمودار لنگر خمشی ، kN.m



منحنی الاستیک

۳-۴۹



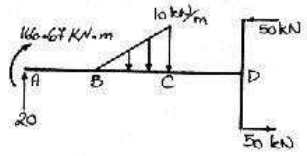
شکل ۳-۴۹

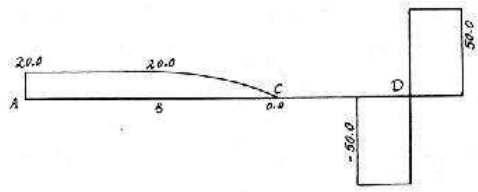
$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$

$+) \sum M_A = 0 \quad : \quad 50(6) - \frac{1}{2}(10)(4)\left[\frac{20}{3}\right] + M_A = 0 \Rightarrow M_A = -166/67 \quad kN.m$

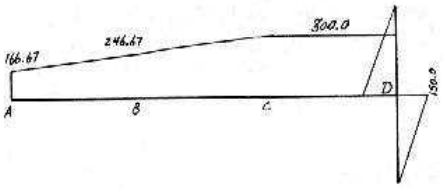
$\blacktriangleright \vec{M}_A = 166/67 \quad kN.m \circlearrowleft$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad A_y - \frac{1}{2}(10)(4) = 0 \Rightarrow A_y = 20 \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 20 \quad kN \uparrow$

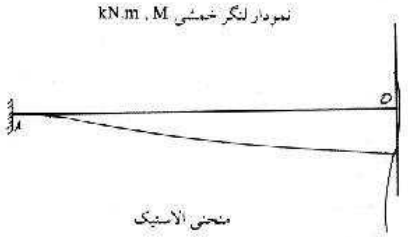




نمودار نیروی برشی S ، kN

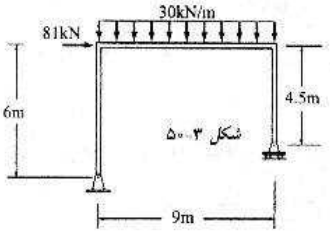


نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



منحنی الاستیک

۳-۵۰ برای قاب نشان داده شده در شکل زیر، نمودار نیروی برشی، لنگر خمشی، نیروی محوری و شکل تقریبی قاب تغییر شکل یافته را ترسیم کنید.



شکل ۵۰-۳

با استفاده از مطالب فصل اول مشخص می‌شود که سازه پایدار و معین استاتیکی است.

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

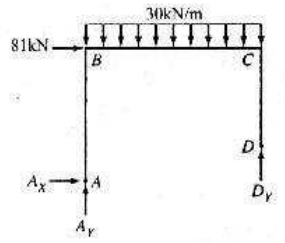
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x + 81 = 0 \;\Rightarrow\; A_x = -81 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 81 \;\; kN \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; D_y(9) - 30(9)(4/5) - 81(6) = 0 \;\Rightarrow\; D_y = 189 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{D}_y = 189 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 189 + A_y - 30(9) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 81 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 81 \;\; kN \uparrow$$



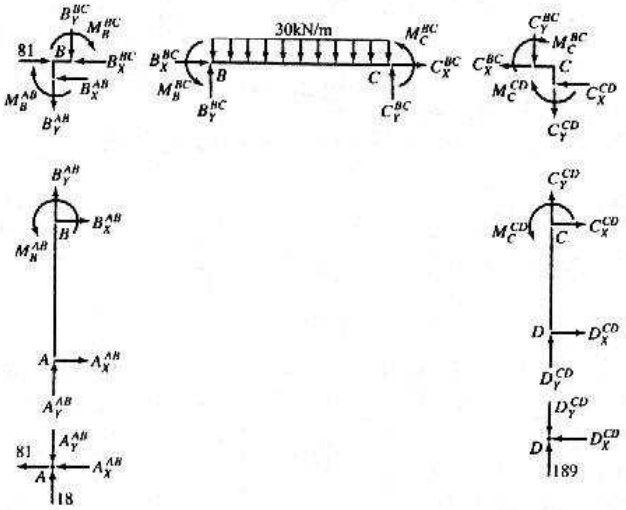
تعیین نیروهای انتهایی اعضای قاب:

● علامت منفی در محاسبات زیر نشان دهندهٔ این است که جهت بردار فرض شده در خلاف جهت واقعی بردار مزبور است.

در گره A :

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^A = 0 \;\Rightarrow\; A_x^{AB} = -81 \;\; kN$$

$$+\uparrow \sum F_y^A = 0 \;\Rightarrow\; A_y^{AB} = 81 \;\; kN$$



در انتهای A از عضو AB نیروهای داخلی تعیین شده‌اند و برای محاسبهٔ نیروهای داخلی در انتهای B از عضو مزبور از روابط تعادل استفاده می‌کنیم:

$$\pm\rightarrow \sum F_x^{AB} = 0 \Rightarrow B_x^{AB} = 81 \quad kN$$

$$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \Rightarrow B_y^{AB} = -81 \quad kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \Rightarrow M_B^{AB} = 486 \quad kN.m$$

در گره B:

$$\pm\rightarrow \sum F_x^{B} = 0 \Rightarrow B_x^{BC} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y^{B} = 0 \Rightarrow B_y^{BC} = 81 \quad kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M^{B} = 0 \Rightarrow M_B^{BC} + 81(6) = 0$$

$$M_B^{BC} = -486 \quad kN.m$$

با استفاده از روابط تعادل، نیروهای داخلی انتهای C از عضو BC را محاسبه می‌کنیم:

$$\pm\rightarrow \sum F_x^{BC} = 0 \Rightarrow C_x^{BC} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y^{BC} = 0 \;:\; 81 - 30(9) + C_y^{BC} = 0$$

$$C_y^{BC} = 189 \quad kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{BC} = 0 \;:\; -486 - 30(9)(4/5) + 189(9) + M_C^{BC} = 0 \Rightarrow M_C^{BC} = 0$$

در گره C:

$$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow C_x^{CD} = 0 \;,\; +\uparrow \sum F_y^{C} = 0 \Rightarrow C_y^{CD} = -189 \quad kN \;,\; +\circlearrowleft \sum M^{C} = 0 \Rightarrow M_C^{CD} = 0$$

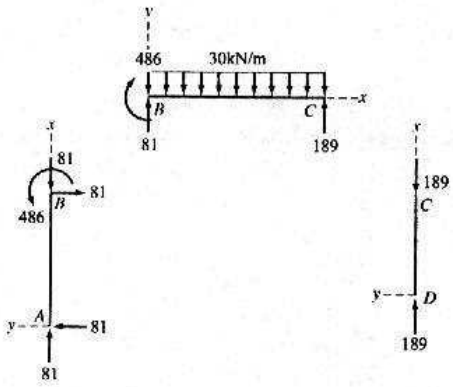
با استفاده از روابط تعادل برای عضو CD، نیروهای داخلی انتهای D از عضو مزبور را محاسبه می‌کنیم:

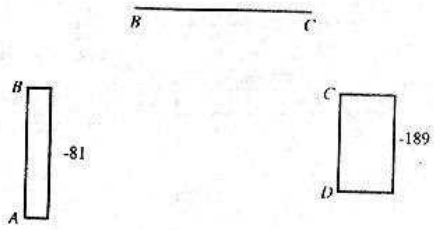
$$\pm\rightarrow \sum F_x^{CD} = 0 \Rightarrow D_x^{CD} = 0 \;,\; +\uparrow \sum F_y^{CD} = 0 \Rightarrow D_y^{CD} = 189 \quad kN$$

در گره D (کنترل محاسبات):

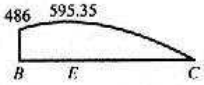
$$\pm\rightarrow \sum F_x^{D} = 0 \quad O.K. \;,\; +\uparrow \sum F_y = 189 - 189 = 0 \quad O.K.$$

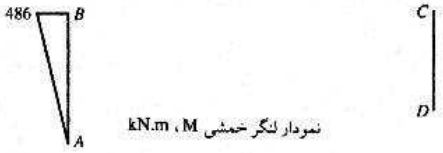
در شکلهایی که در ادامه می‌آیند، نمودار نیروهای برشی و محوری و نمودار لنگر خمشی و قاب تغییر شکل یافته نشان داده شده‌اند.



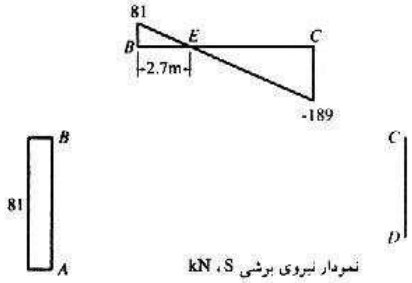


نمودار نیروی محوری Q، kN

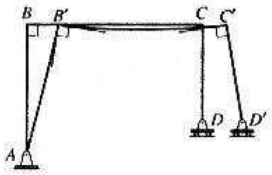




نمودار لنگر خمشی M، kN.m



نمودار نیروی برشی S، kN



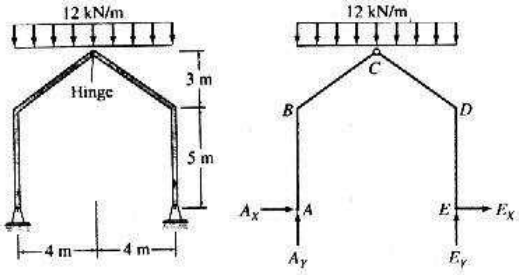
قاب تغییر شکل یافته

در زمان ترسیم قاب تغییر شکل یافته باید به چند نکته توجه نمود. همان‌طور که از نمودار لنگر خمشی قاب مشخص می‌شود، تقعر عضو AB به سمت چپ و تقعر عضو BC به سمت بالا است و با توجه به این که هیچ‌گونه لنگر خمشی در طول عضو CD اثر نمی‌کند، پس عضو مزبور به صورت مستقیم باقی خواهد ماند. قاب تغییر شکل یافته با اتصال سه عضو تغییر شکل یافتهٔ AB، BC و CD قابل ترسیم است. همچنین از آن جا که از اثر تغییر شکل محوری اعضا صرف‌نظر شده است، جا به جایی افقی گره B با جا به جایی افقی گره C برابر خواهد بود ($BB' = CC'$).

۵۱-۳

با استفاده از مطالب فصل اول، سازه پایدار و معین استاتیکی است.

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۵۱

$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \;:\; -A_y(8) + 12(8)(4) = 0$

$A_y = 48 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 48 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 48 - 12(8) + E_y = 0$

$E_y = 48 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y = 48 \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \;:\; A_x(8) - 48(4) + 12(4)(2) = 0$

$A_x = 12 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 12 \;\; kN \rightarrow$

$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; 12 + E_x = 0 \Rightarrow E_x = -12 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{E}_x = 12 \;\; kN \leftarrow$

تعیین نیروهای انتهایی اعضای قاب:

در گره A:

$\pm\rightarrow \sum F_x^A = 0 \Rightarrow A_x^{AB} = 12 \;\; kN \;,\; +\uparrow \sum F_y^A = 0 \Rightarrow A_y^{AB} = 48 \;\; kN$

در عضو AB:

$\pm\rightarrow \sum F_x^{AB} = 0 \Rightarrow B_x^{AB} = -12 \;\; kN \;,\; +\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \Rightarrow B_y^{AB} = -48 \;\; kN$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; M_B^{AB} + 12(5) = 0 \Rightarrow M_B^{AB} = -60 \;\; kN.m$

در گره B:

$\pm\rightarrow \sum F_x^B = 0 \Rightarrow B_x^{BC} = 12 \;\; kN \;,\; +\uparrow \sum F_y^B = 0 \Rightarrow B_y^{BC} = 48 \;\; kN$

$+\circlearrowleft \sum M^B = 0 \Rightarrow M_B^{BC} = 60 \;\; kN.m$

در عضو BC:

$\pm\rightarrow \sum F_x^{BC} = 0 \Rightarrow C_x^{BC} = -12 \;\; kN \;,\; +\uparrow \sum F_y^{BC} = 0 \;:\; 48 - 12(4) + C_y^{BC} = 0 \Rightarrow C_y^{BC} = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{BC} = 60 - 12(4)(2) + 12(3) = 0 \qquad O.K.$

در گره C:

$\pm\rightarrow \sum F_x^C = 0 \Rightarrow C_x^{CD} = 0 \;,\; +\uparrow \sum F_y^C = 0 \Rightarrow C_y^{CD} = 0$

در عضو CD:

$\pm\rightarrow \sum F_x^{CD} = 0 \Rightarrow D_x^{CD} = -12 \;\; kN \;,\; +\uparrow \sum F_y^{CD} = 0 \;:\; D_y^{CD} - 12(4) = 0 \Rightarrow D_y^{CD} = 48 \;\; kN$

$+\circlearrowleft \sum M_D^{CD} = 0 \;:\; M_D^{CD} - 12(3) + 12(4)(2) = 0 \Rightarrow M_C^{CD} = -60 \;\; kN.m$

در گره D:

$\pm\rightarrow \sum F_x^D = 0 \Rightarrow D_x^{DE} = 12 \;\; kN \;,\; +\uparrow \sum F_y^D = 0 \Rightarrow D_y^{DE} = -48 \;\; kN$

$+\circlearrowleft \sum M^D = 0 \Rightarrow M_D^{DE} = 60 \;\; kN.m$

در عضو DE:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x^{DE}=0 \Rightarrow E_x^{DE}=-12\ kN$$

$$+\uparrow\sum F_y^{DE}=0 \Rightarrow E_y^{DE}=48\ kN$$

$$+\circlearrowleft\sum M_E^{DE}=60-12(5)=0 \quad O.K.$$

در گره E (کنترل محاسبات):

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x^{E}=-12+12=0 \quad O.K.$$

$$+\uparrow\sum F_y^{E}=48-48=0 \quad O.K.$$

● باید توجه داشت که وقتی تیروهای قائم بر اعضای مایل وارد می‌شوند، لازم است که این تیروها را به دو مؤلفهٔ عمود بر عضو و در امتداد عضو تبدیل کرد.

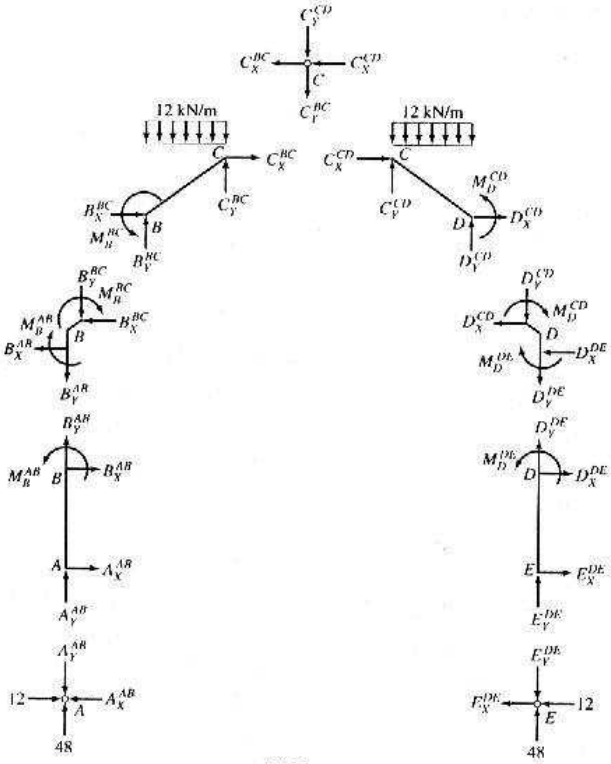
در ترسیم نمودار تیری محوری قاب از معادلات زیر استفاده می‌کنیم.

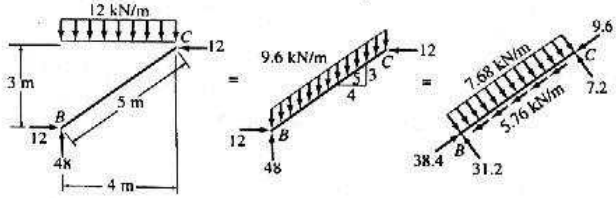
در عضو AB: $Q=-48\ kN$

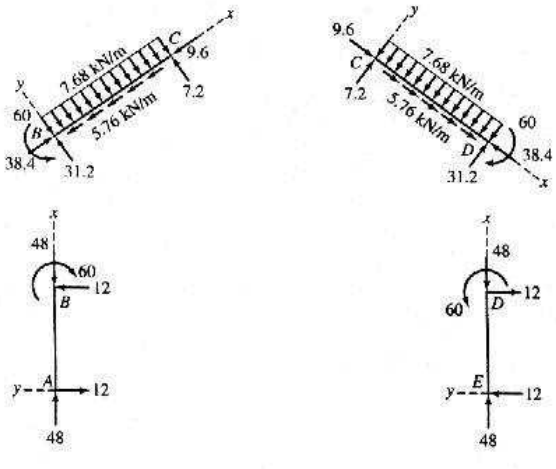
در عضو BC: $Q=-38/4+5/76x$

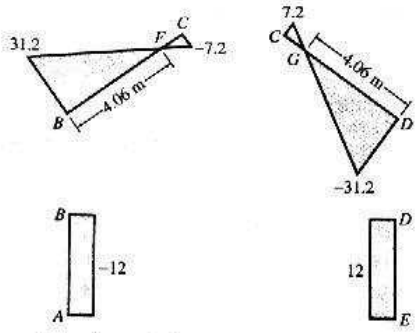
در عضو CD: $Q=-9/6-5/76x$

در عضو DE: $Q=-48\ kN$

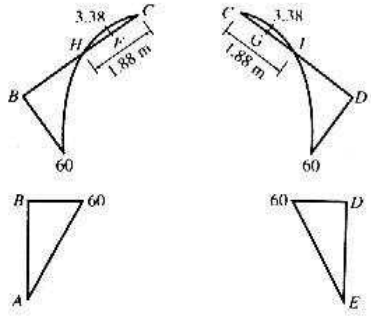




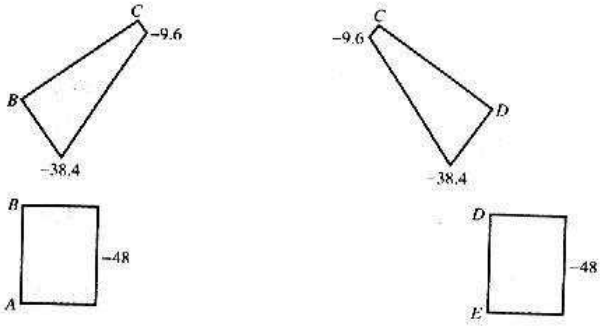




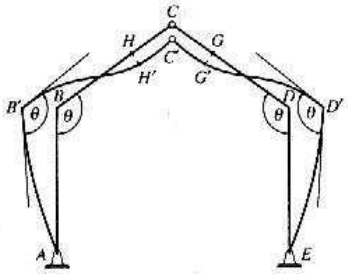
نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m



نمودار نیروی محوری

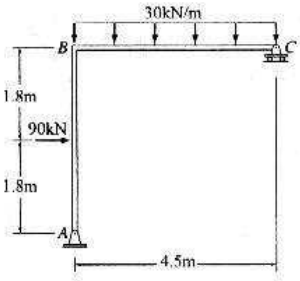


قاب تغییر شکل یافته

برای قابهای نشان داده شده در مسایل زیر، نمودار نیروی برشی، لنگر خمشی، نیروی محوری و قاب تغییر شکل یافته را ترسیم کنید.

۵۲-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۵۲

$\pm\sum F_x = 0 \;:\; A_x + 90 = 0 \Rightarrow A_x = -90 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 90 \;\; kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; C_y(4/5) - 30(4/5)(2/25) - 90(1/8) = 0$

$C_y = 103/5 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = 103/5 \;\; kN \uparrow$

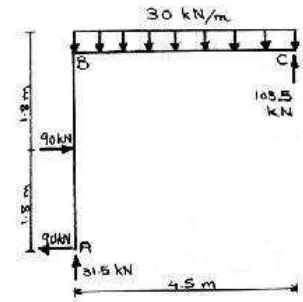
$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 103/5 + A_y - 30(4/5) = 0 \Rightarrow A_y = 31/5 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = 31/5 \;\; kN \uparrow$

در عضو AB:

$\pm\sum F_x^{AB} = 0 \;:\; B_x^{AB} + 90 - 90 = 0 \Rightarrow B_x^{AB} = 0$

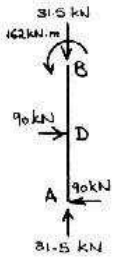
$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \Rightarrow \vec{B}_y^{AB} = 31/5 \;\; kN \downarrow$

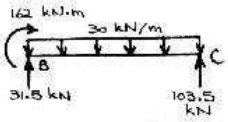


$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; M_B^{BC} - 90(3/6) + 90(1/8) = 0 \Rightarrow \vec{M}_B^{BC} = 162 \;\; kN.m \circlearrowleft$

در عضو BC: $+\circlearrowleft \sum M_B^{BC} = 103/5(4/5) - 30(4/5)(2/25) - 162 = 0 \qquad O.K.$

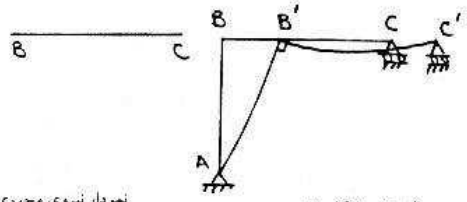
$+\uparrow \sum F_y^{BC} = 103/5 + 31/5 - 30(4/5) = 0 \qquad O.K.$



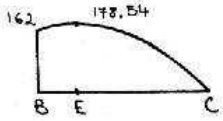


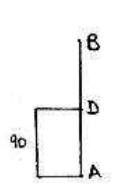


نمودار نیروی محوری N ، kN

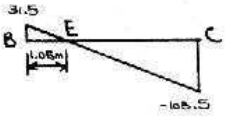


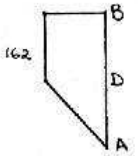
قاب تغییر شکل یافته





نمودار نیروی برشی S ، kN

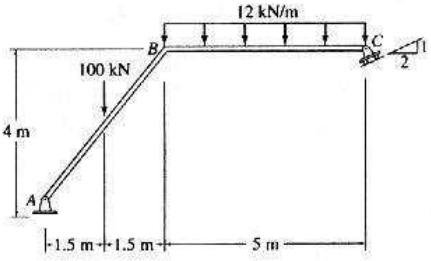




نمودار لنگر خمشی M ، kN.m

۵۳-۳

محاسبه واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۵۳

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad :$$

$$C\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right](8) + C\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right](4) - 12(5)(5/5) - 100(1/5) = 0$$

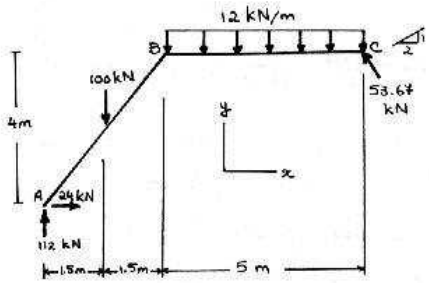
$$C = 53/67 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C} = 53/67 \ kN \nwarrow$$

$$\pm \sum F_x = 0 \ : \ A_x - 53/67\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right] = 0 \ \Rightarrow \ A_x = 24 \ kN$$

$$\vec{A}_x = 24 \ kN \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \ : \ 53/67\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right] + A_y - 100 - 12(5) = 0$$

$$A_y = 112 \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 112 \ kN \uparrow$$



در عضو AB :

$$\pm \sum F_x^{AB} = 0 \ : \ 24 + B_x^{AB} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{B}_x^{AB} = 24 \ kN \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \ : \ 112 - 100 + B_y^{AB} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{B}_y^{AB} = 12 \ kN \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \ : \ M_B^{AB} + 100(1/5) + 24(4) - 112(3) = 0$$

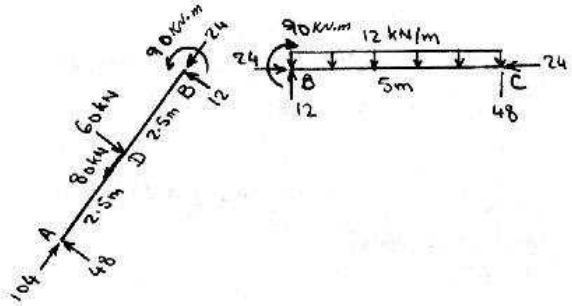
$$\vec{M}_B^{AB} = 90 \ kN.m \circlearrowright$$

در عضو BC :

$$\pm \sum F_x^{BC} = 24 - 53/67\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right] = 0 \qquad O.K.$$

$$+\uparrow \sum F_y^{BC} = 12 - 12(5) + 53/67\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right] = 0 \qquad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} = -12(5) + 12(5)(2/5) - 90 = 0 \qquad O.K.$$



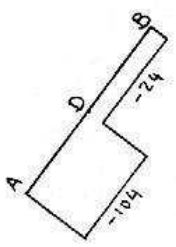
نیروهای خارجی و داخلی مؤثر بر عضو AB را از دستگاه مختصات کلی X-Y به دستگاه مختصات محلی x-y تبدیل می‌کنیم.

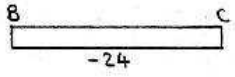
$$A_x^{AB} = 112\left[\frac{4}{5}\right] + 24\left[\frac{3}{5}\right] = 104 \ kN$$

$$A_y^{AB} = 112\left[\frac{3}{5}\right] - 24\left[\frac{4}{5}\right] = 48 \ kN$$

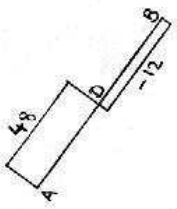
$$B_x^{AB} = -12\left[\frac{4}{5}\right] - 24\left[\frac{3}{5}\right] = -24 \ kN$$

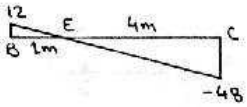
$$B_y^{AB} = 24\left[\frac{4}{5}\right] - 12\left[\frac{3}{5}\right] = 12 \ kN$$



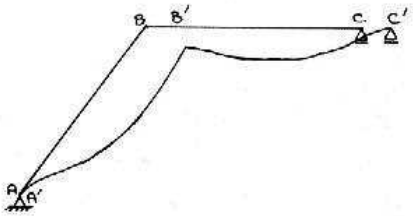


نمودار نیروی محوری N، kN

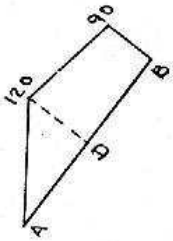


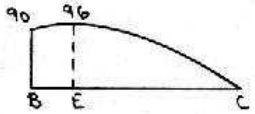


نمودار نیروی برشی S، kN



قاب تغییر شکل یافته

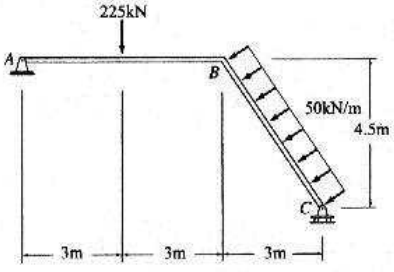




نمودار لنگر خمشی M ، kN.m

۵۴-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۵۴

$$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x - 50(5/408)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 225 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_x = 225 \;\; kN \rightarrow$$

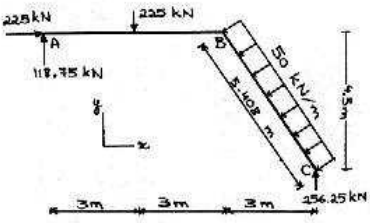
$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \;:\; 50(5/408)(2/704) + 225(6) - 225(4/5) - A_y(9) = 0$$

$$A_y = 118/75 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 118/75 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 118/75 + C_y - 225 - 50(5/408)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 0$$

$$C_y = 256/25 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = 256/25 \;\; kN \uparrow$$

در عضو AB :



$$\pm\rightarrow \sum F_x^{AB} = 0 \;:\; B_x^{AB} + 225 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{B}_x^{AB} = 225 \;\; kN \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \;:\; 118/75 + B_y^{AB} - 225 = 0$$

$$\vec{B}_y^{AB} = 106/25 \;\; kN \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; 225(3) - 118/75(6) + M_B^{AB} = 0$$

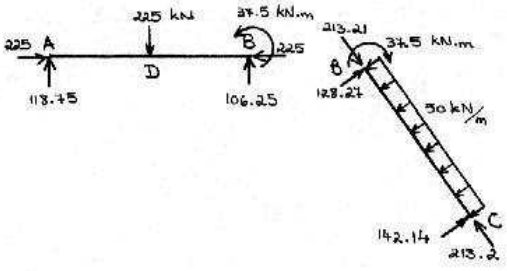
$$\vec{M}_B^{AB} = 37/5 \;\; kNm \circlearrowleft$$

در عضو BC :

$$\pm\rightarrow \sum F_x^{BC} = 225 - 50(5/408)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = 0 \qquad O.K.$$

$$+\uparrow \sum F_y^{BC} = -106/25 - 50(5/408)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + 256/25 = 0 \qquad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{BC} = 256/25(3) - 50(5/408)(2/704) - 37/5 = 0$$



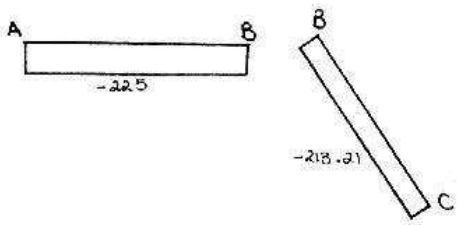
نیروهای خارجی و داخلی مؤثر بر عضو BC را از دستگاه مختصات کلی X-Y به دستگاه مختصات محلی x-y تبدیل می‌کنیم.

$$B_x^{BC} = 106/25\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 225\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 213/21 \;\; kN$$

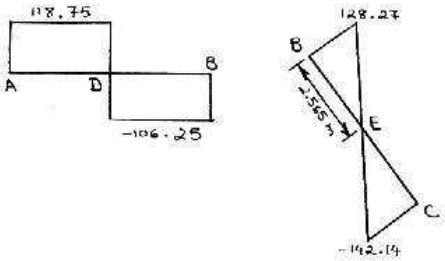
$$B_y^{BC} = 225\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - 106/25\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 128/27 \;\; kN$$

$$C_x^{BC} = -256/25\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = -213/21 \;\; kN$$

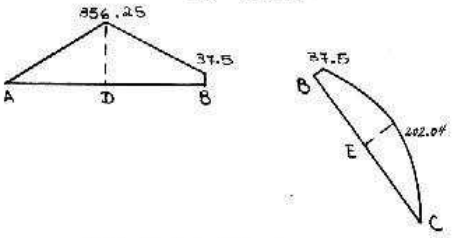
$$C_y^{BC} = ۲۵۶/۲۵\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\right) = ۱۴۲/۱۴ \quad kN$$



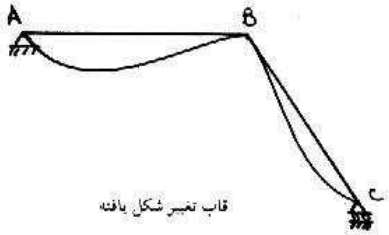
نمودار نیروی محوری Q ، kN



نمودار نیروی برشی S ، kN



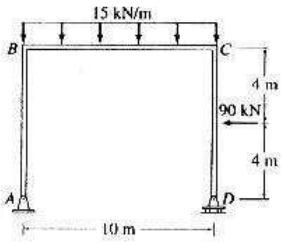
نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



قاب تغییر شکل یافته

۵۵-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۵۵-۳

$$\pm\rightarrow \sum F_x = ۰ \;:\; A_x - ۹۰ = ۰ \;\Rightarrow\; A_x = ۹۰ \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۹۰ \quad kN \rightarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \;:\; D_y(۱۰) + ۹۰(۴) - ۱۵(۱۰)(۵) = ۰ \;\Rightarrow\; D_y = ۳۹ \quad kN$$

$$\blacktriangleright \vec{D}_y = ۳۹ \quad kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \;:\; ۳۹ + A_y - ۱۵(۱۰) = ۰ \;\Rightarrow\; A_y = ۱۱۱ \quad kN$$

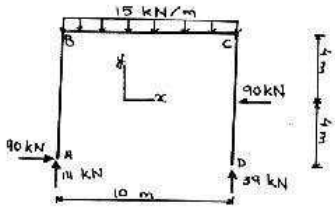
$$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۱۱ \quad kN \uparrow$$

در عضو AB:

$$\pm\rightarrow \sum F_x^{AB} = ۰ \;:\; B_x^{AB} + ۹۰ = ۰ \;\Rightarrow\; \vec{B}_x^{AB} = ۹۰ \quad kN \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y^{AB} = ۰ \;:\; B_y^{AB} + ۱۱۱ = ۰ \;\Rightarrow\; \vec{B}_y^{AB} = ۱۱۱ \quad kN \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = ۰ \;:\; M_B^{AB} + ۹۰(۸) = ۰ \;\Rightarrow\; \vec{M}_B^{AB} = ۷۲۰ \quad kN.m \;)$$



در عضو BC:

$$\pm\rightarrow \sum F_X^{BC} = ۰ \;:\; C_x^{BC} + ۹۰ = ۰ \;\Rightarrow\; \vec{C}_X^{BC} = ۹۰ \quad kN \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y^{BC} = ۰ \;:\; ۱۱۱ + C_y^{BC} - ۱۵(۱۰) = ۰ \;\Rightarrow\; \vec{C}_y^{BC} = ۳۹ \quad kN \uparrow$$

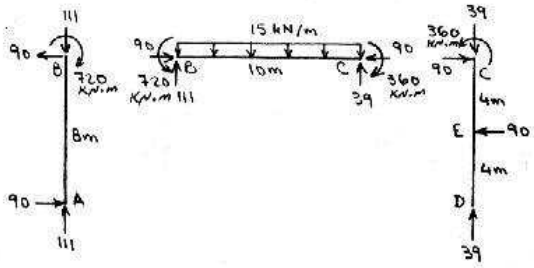
$$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} = ۰ \;:\; ۱۵(۱۰)(۵) - ۱۱۱(۱۰) + ۷۲۰ + M_C^{BC} = ۰$$

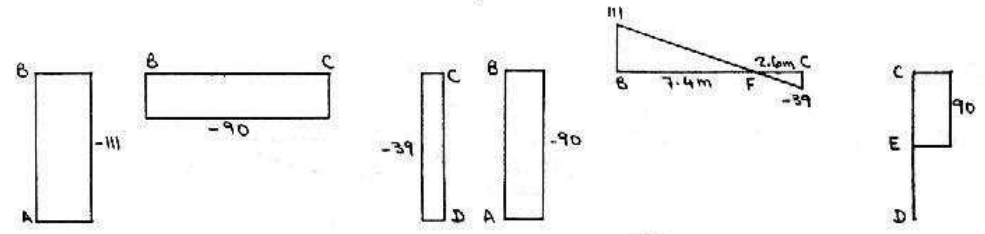
$$\vec{M}_C^{BC} = ۳۶۰ \quad kN.m \;)$$

در عضو CD:

$$\pm\rightarrow \sum F_x^{CD} = ۹۰ - ۹۰ = ۰ \qquad O.K.$$

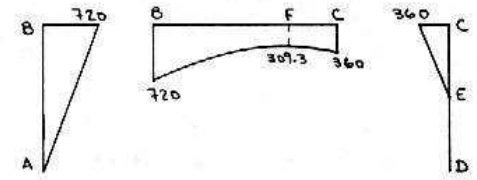
$$+\uparrow \sum F_y^{CD} = ۳۹ - ۳۹ = ۰ \qquad O.K. \quad , \quad +\circlearrowleft \sum M_C^{CD} = ۳۶۰ - ۹۰(۴) = ۰ \qquad O.K.$$

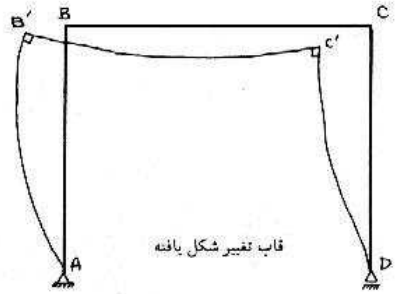




نمودار نیروی برشی S، kN

نمودار نیروی محوری Q، kN



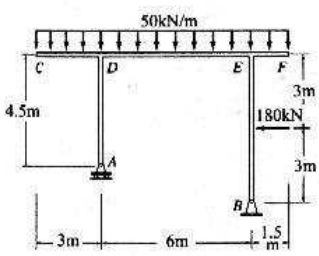


نمودار لنگر خمشی M، kN.m

قاب تغییر شکل یافته

۵۶-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۵۶

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; B_x - 180 = 0 \;\Rightarrow\; B_x = 180 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{B}_x = 180 \;\; kN \rightarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; 50(10/5)(3/75) + 180(3) - A_y(6) = 0$$

$$A_y = 418/13 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 418/13 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 418/13 + B_y - 50(10/5) = 0$$

$$B_y = 106/87 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 106/87 \;\; kN \uparrow$$

در عضو AD:

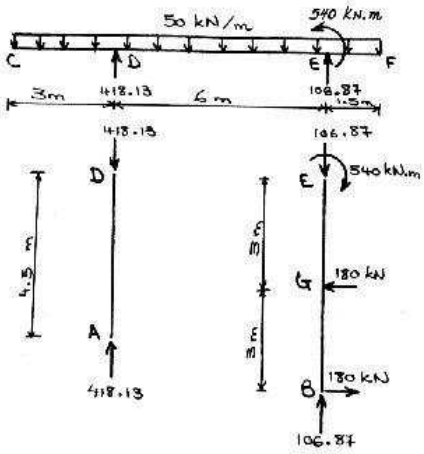
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x^{AD} = 0 \;\Rightarrow\; D_x^{AB} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y^{AD} = 0 \;:\; D_y^{AB} + 418/13 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{D}_y^{AB} = 418/13 \;\; kN \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{AD} = 0 \;\Rightarrow\; M_D^{AD} = 0$$

در عضو CF:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x^{CF} = 0 \;\Rightarrow\; E_x^{CF} = 0$$



$$+\uparrow \sum F_y^{CF} = 0 \quad : \quad ۴۱۸/۱۳ - ۵۰(۱۰/۵) + E_y^{CF} = 0$$

$$\vec{E}_y^{CF} = ۱۰۶/۸۷ \quad kN \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{CF} = 0 \quad : \quad ۵۰(۱۰/۵)(۳/۷۵) - ۴۱۸/۱۳(۶) + M_E^{CF} = 0$$

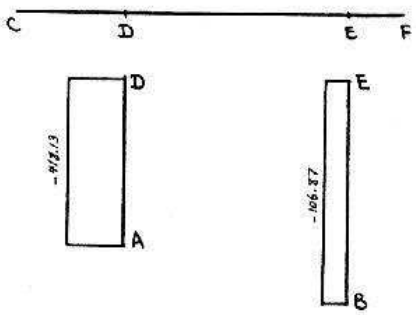
$$\vec{M}_E^{CF} = ۵۴۰ \quad kN.m \circlearrowleft$$

در عضو EB:

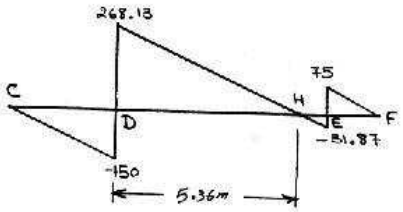
$$+\rightarrow \sum F_X^{EB} = ۱۸۰ - ۱۸۰ = 0 \qquad O.K.$$

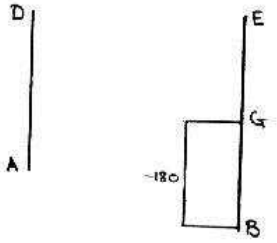
$$+\uparrow \sum F_y^{EB} = ۱۰۶/۸۷ - ۱۰۶/۸۷ = 0 \qquad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{EB} = ۱۸۰(۶) - ۱۸۰(۳) - ۵۴۰ = 0 \qquad O.K.$$

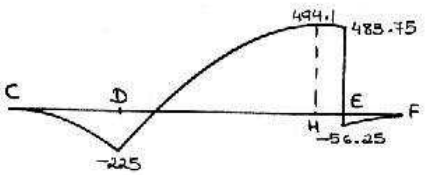


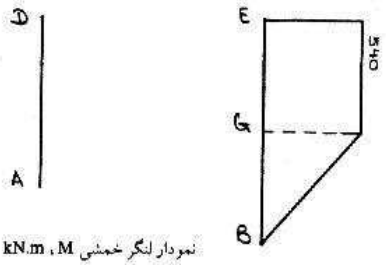
نمودار نیروی محوری Q، kN



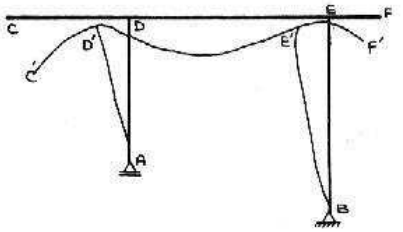


نمودار نیروی برشی S، kN





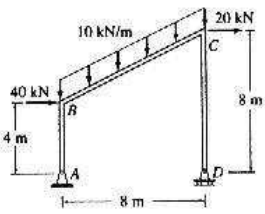
نمودار لنگر خمشی M، kN.m



قاب تغییر شکل یافته

۵۷-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۵۷-۳

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x + 40 + 20 = 0 \Rightarrow A_x = -60 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 60 \;\; kN \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; D_y(8) - 40(4) - 20(8) - 10\left[(8)\left[\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\right](4) = 0$$

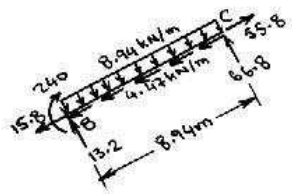
$$D_y = 84/72 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y = 84/72 \;\; kN \uparrow$$

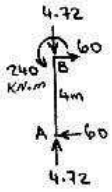
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 84/72 + A_y - 10\left[(8)\left[\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\right] = 0 \Rightarrow A_y = 4/72 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 4/72 \;\; kN \uparrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x^{AB} = 0 \;:\; B_x^{AB} - 60 = 0 \Rightarrow \vec{B}_x^{AB} = 60 \;\; kN \rightarrow$$

در عضو AB:







$$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \;:\; B_y^{AB} + 4/72 = 0 \Rightarrow \vec{B}_y^{AB} = 4/72 \;\; kN \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; M_B^{AB} - 60(4) = 0$$

$$\vec{M}_B^{AB} = 240 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$$

در عضو BC:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x^{BC} = 0 \;:\; C_x^{BC} + 20 - 20 = 0 \Rightarrow C_x^{BC} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y^{BC} = 0 \;:\; 4/72 + C_y^{BC} - 10(8)\left[\frac{\sqrt{5}}{2}\right] = 0$$

$$\vec{C}_y^{BC} = 84/72 \;\; kN \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} = 0 \;:$$

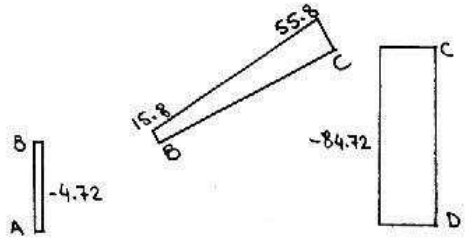
$$-20(4) - 4/72(8) - 240 + M_C^{BC} + 10(8)\left[\frac{\sqrt{5}}{2}\right](4) = 0$$

$$M_C^{BC} = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{M}_C^{BC} = 0$$

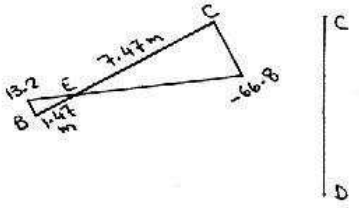
در عضو CD:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x^{CD} = 0 \quad O.K. \;,\; +\uparrow \sum F_y^{CD} = 84/72 - 84/72 = 0 \quad O.K. \;,\; +\circlearrowleft \sum M_D^{CD} = 0 \quad O.K.$$

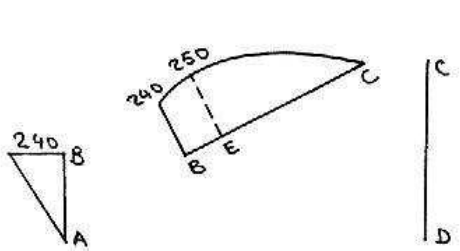
نیروهای مؤثر بر عضو BC را از دستگاه مختصات کلی X-Y به دستگاه مختصات x-y تبدیل می‌کنیم.



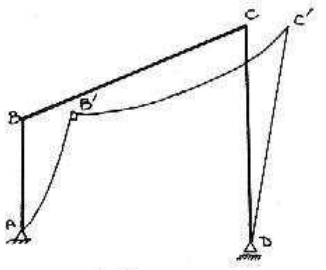
نمودار نیروی محوری N، kN



نمودار نیروی برشی S، kN



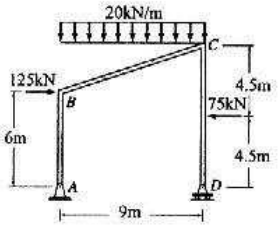
نمودار لنگر خمشی M ، kN.m



قاب تغییر شکل یافته

۵۸-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۵۸-۳

$$\pm\sum F_x = 0 \;:\; 125 + A_x - 75 = 0 \;\Rightarrow\; A_x = -50 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 50 \;\; kN \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; D_y(9) + 75(4/5) - 125(6) - 20(9)(4/5) = 0$$

$$D_y = 135/83 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y = 135/83 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 135/85 + A_y - 20(9) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 44/17 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 44/17 \;\; kN \uparrow$$

در عضو AB:

$$\pm\sum F_x^{AB} = 0 \;:\; B_x^{AB} - 50 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{B}_x^{AB} = 50 \;\; kN \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \;:\; B_y^{AB} + 44/17 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{B}_y^{AB} = 44/17 \;\; kN \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; M_B^{AB} - 50(6) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{M}_B^{AB} = 300 \;\; kN.m \circlearrowleft$$

در عضو BC:

$$\pm\sum F_x^{BC} = 0 \;:\; C_x^{BC} + 125 - 50 = 0$$

$$\vec{C}_x^{BC} = 75 \;\; kN \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y^{BC} = 0 \;:\; C_y^{BC} - 20(9) + 44/17 = 0$$

$$\vec{C}_y^{BC} = 135/83 \;\; kN \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} = 0 \;:$$

$$75(3) - 44/17(9) - 300 + 20(9)(4/5) + M_C^{BC} = 0$$

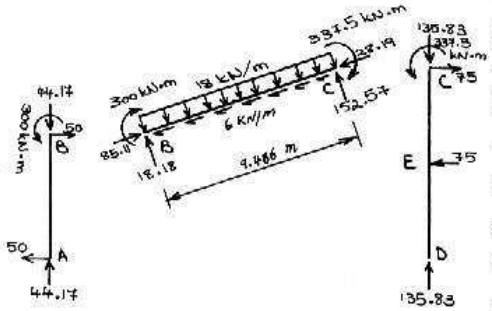
$$M_C^{BC} = -337/5 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_C^{BC} = 337/5 \;\; kN.m \circlearrowright$$

در عضو CD:

$$\pm\sum F_x^{CD} = 75 - 75 = 0 \qquad O.K.$$

$$+\uparrow \sum F_y^{CD} = 135/83 - 135/83 = 0 \qquad O.K.$$

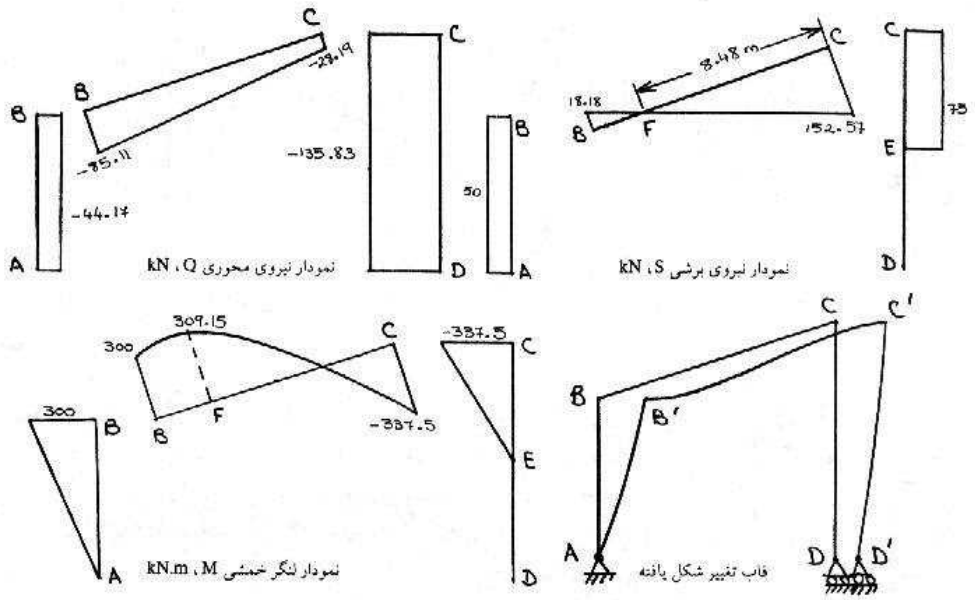
$$+\circlearrowleft \sum M_D^{CD} = 337/5 + 75(4/5) - 75(9) = 0 \qquad O.K.$$



نیروهای خارجی و داخلی مؤثر بر عضو BC را از دستگاه مختصات کلی X-Y به دستگاه مختصات x-y تبدیل می‌کنیم.

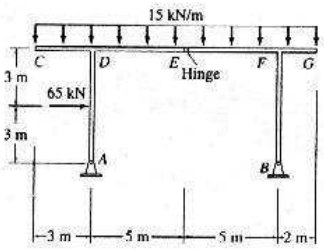
$$B_x^{BC} = 75\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + 44/17\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 85/11 \;\; kN \quad , \quad B_y^{BC} = -75\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + 44/17\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 18/18 \;\; kN$$

$$C_x^{BC} = 135/83\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - 75\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -28/19 \;\; kN \quad , \quad C_y^{BC} = 75\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + 135/83\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 152/57 \;\; kN$$



۳-۵۹

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۵۹

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; -15(15)(4/5) - 65(3) + B_y(10) = 0$$

$$B_y = 120/75 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 120/75 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 120/75 + A_y - 15(15) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 104/25 \;\; kN$$

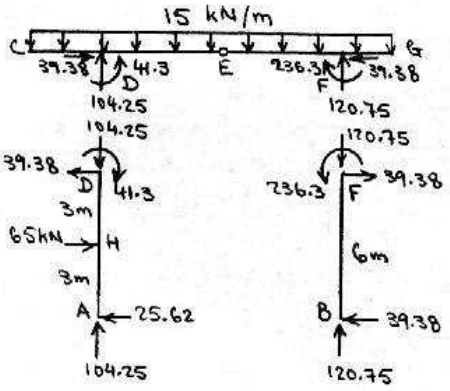
$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 104/25 \;\; kN \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{ACE} = 0 \;:\; 65(3) - 104/25(5) + 15(8)(4) - A_x(6) = 0$$

$$A_x = 25/62 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 25/62 \;\; kN \leftarrow$$

$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; 65 + B_x - 25/62 = 0 \;\Rightarrow\; B_x = -39/38 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{B}_x = 39/38 \;\; kN \leftarrow$$



در عضو AD:

$$\pm \rightarrow \sum F_x^{AD} = 0 \;:\; D_x^{AD} - 25/6 + 65 = 0$$

$$\vec{D}_x^{AD} = 39/38 \;\; kN \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y^{AD} = 0 \;:\; D_y^{AD} + 104/25 = 0$$

$$\vec{D}_y^{AD} = 104/25 \;\; kN \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{AD} = 0 \;:\; M_D^{AD} + 65(3) - 25/62(6) = 0$$

$$\vec{M}_D^{AD} = 41/3 \;\; kN.m \;)$$

در عضو CG:

$$\pm \rightarrow \sum F_x^{CG} = 0 \;:\; F_x^{CG} + 39/38 = 0$$

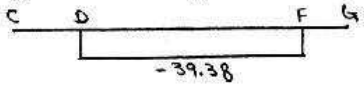
$$\vec{F}_x^{CG} = 39/38 \;\; kN \leftarrow$$

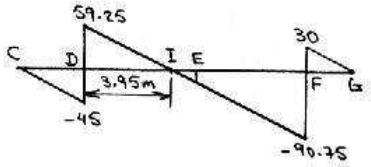
$+\uparrow \sum F_y^{CG} = 0 \;:\; F_y^{CG} - 15(15) + 104/25 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}_y^{CG} = 120/75 \;\; kN \uparrow$

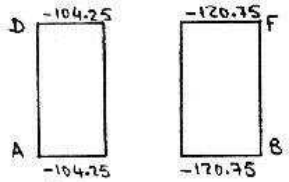
$+\circlearrowleft \sum M_F^{CG} = 0 \;:\; 15(15)(5/5) + 41/3 - 104/25(10) + M_F^{CG} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{M}_F^{CG} = 236/3 \;\; kN.m \;)$

$\pm\rightarrow \sum F_x^{FB} = 39/38 - 39/38 = 0 \quad O.K. \quad , \quad +\uparrow \sum F_y^{FB} = 120/75 - 120/75 = 0 \quad O.K.$ در عضو FB:

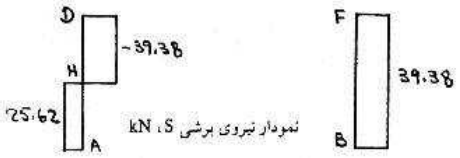
$+\circlearrowleft \sum M_B^{FB} = 236/3 - 39/38(6) = 0 \quad O.K.$



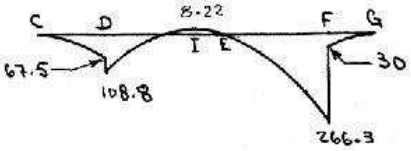


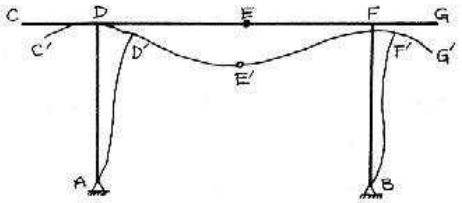


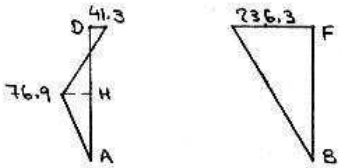
نمودار نیروی محوری Q، kN



نمودار نیروی برشی S، kN





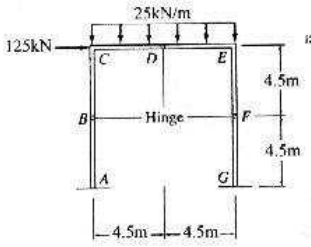


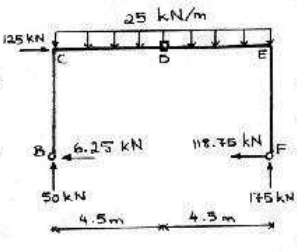
نمودار لنگر خمشی M، kN.m

قاب تغییر شکل یافته

۶۰-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:





شکل ۶۰-۳

$+\circlearrowleft \sum M_F^{BDF} = 0 \;:$

$25(9)(4/5) - 125(4/5) - B_y(9) = 0$

$B_y = 50 \;\; kN$

$+\circlearrowleft \sum M_D^{BCD} = 0 \;:$

$25(4/5)(2/25) - 50(4/5) - B_x(4/5) = 0$

$B_x = 6/25 \;\; kN$

$\pm\rightarrow \sum F_x^{BDF} = 0 \;:\; 125 - F_x - 6/25 = 0$

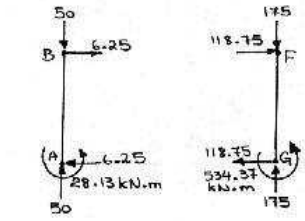
$F_x = 118/75 \;\; kN$

$+\uparrow \sum F_y^{BDF} = 0 \;:\; 50 + F_y - 25(9) = 0 \;\Rightarrow\; F_y = 175 \;\; kN$

$\pm\rightarrow \sum F_x^{AB} = 0 \;:\; A_x + 6/25 = 0 \;\Rightarrow\; A_x = -6/25 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{A}_x = 6/25 \;\; kN \leftarrow$

$\pm\rightarrow \sum F_x^{GF} = 0 \;:\; F_x + 118/75 = 0 \;\Rightarrow\; F_x = -118/75 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{F}_x = 118/75 \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow\sum F_y^{AB}=0 \;:\; A_y-50=0 \quad \blacktriangleright A_y=50 \;\; kN\uparrow$, $+\uparrow\sum F_y^{GF}=0 \;:\; F_y-175=0 \quad \blacktriangleright \vec{F}_y=175 \;\; kN\uparrow$



$+\circlearrowleft\sum M_A^{AB}=0 \;:\; M_A-6/25(4/5)=0 \;\Rightarrow\; M_A=28/13 \;\; kN.m$

$\blacktriangleright \vec{M}_A=28/13 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$

$+\circlearrowleft\sum M_G^{GF}=0 \;:\; M_G-118/75(4/5)=0 \;\Rightarrow\; M_G=534/37 \;\; kN.m$

$\blacktriangleright \vec{M}_G=534/37 \;\; kN.m \;\circlearrowright$

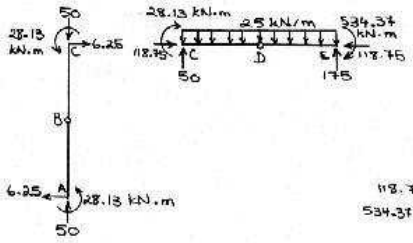
در عضو AC:

$\pm\rightarrow\sum F_x^{AC}=0 \;:\; C_x^{AC}-6/25=0 \;\Rightarrow\; \vec{C}_x^{AC}=6/25 \;\; kN\rightarrow$

$+\uparrow\sum F_y^{AC}=0 \;:\; C_y^{AC}+50=0 \;\Rightarrow\; \vec{C}_y^{AC}=50 \;\; kN\downarrow$

$+\circlearrowleft\sum M_C^{AC}=0 \;:\; 28/13-6/25(9)+M_C^{AC}=0$

$\vec{M}_C^{AC}=28/13 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$



در عضو CE:

$\pm\rightarrow\sum F_X^{CE}=0 \;:\; 175-6/25+E_x^{CE}=0$

$\vec{E}_x^{CE}=118/75 \;\; kN\leftarrow$

$+\uparrow\sum F_y^{CE}=0 \;:\; 50-25(9)+E_y^{CE}=0$

$\vec{E}_y^{CE}=175 \;\; kN\uparrow$

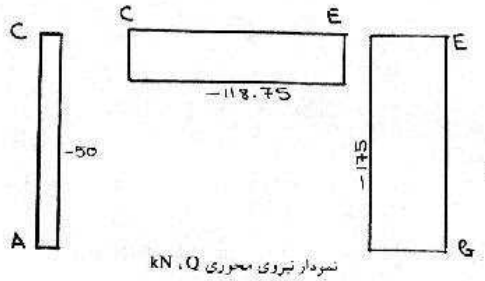
$+\circlearrowleft\sum M_E^{CE}=0 \;:\; 25(9)(4/5)-50(9)-28/13-M_E^{CE}=0$

$\vec{M}_E^{CE}=534/37 \;\; kN.m \;\circlearrowright$

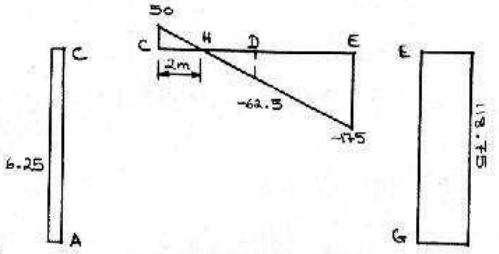
در عضو EG:

$\pm\rightarrow\sum F_X^{EG}=118/75-118/75=0 \quad O.K.$

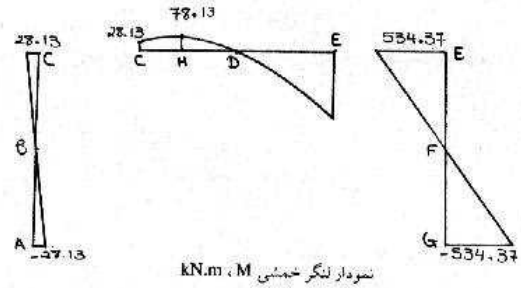
$+\uparrow\sum F_y^{EG}=175-175=0 \quad O.K. \quad , \quad +\circlearrowleft\sum M_G^{EG}=534/37+534/37-118/75(9)=0 \quad O.K.$



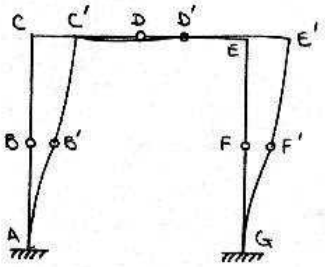
نمودار نیروی محوری Q، kN



نمودار نیروی برشی S، kN



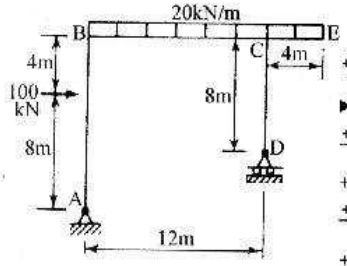
نمودار لنگر خمشی M، kN.m



قاب تغییر شکل یافته

در قابهای نشان داده شده در مسایل زیر، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید.

۶۱-۳



شکل ۳-۶۱

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; D_y(12) - 20(16)(8) - 100(8) = 0 \Rightarrow D_y = 280 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{D}_y = 280 \;\; kN \uparrow$

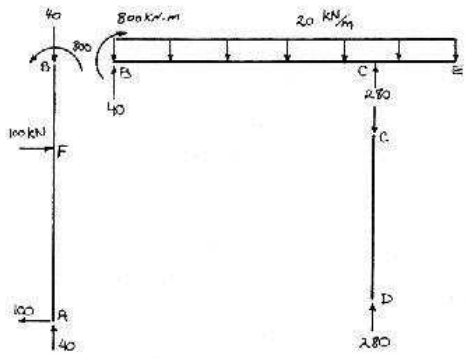
$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; A_x + 100 = 0 \Rightarrow A_x = -100 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{A}_x = 100 \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + 280 - 20(16) = 0 \Rightarrow A_y = 40 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{A}_y = 40 \;\; kN \uparrow$

در عضو AB:

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x^{AB} = 0 \;:\; B_x^{AB} - 100 + 100 = 0 \Rightarrow B_x^{AB} = 0$

$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \;:\; B_y^{AB} + 40 = 0 \Rightarrow \vec{B}_y^{AB} = 40 \;\; kN \downarrow$



$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; M_B^{AB} + 100(4) - 100(12) = 0$

$\vec{M}_B^{AB} = 800 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$

در عضو BC:

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x^{BC} = 0 \Rightarrow C_x^{BC} = 0$

$+\uparrow \sum F_y^{BC} = 0 \;:\; 40 + C_y^{BC} - 20(16) = 0$

$\vec{C}_y^{BC} = 280 \;\; kN \uparrow$

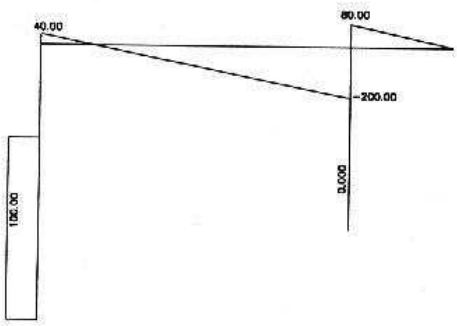
$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} = 0 \;:\; 20(16)(4) - 800 - 40(12) + M_C^{BC} = 0$

$M_C^{BC} = 0$

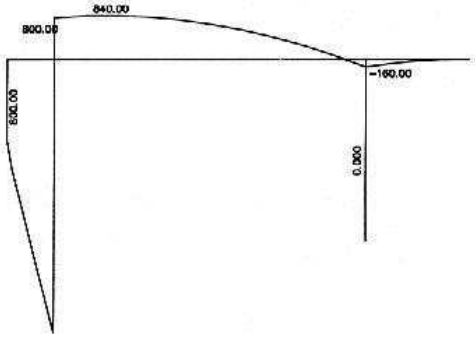
در عضو CD:

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_y^{CD} = 280 - 280 = 0 \qquad O.K.$

$+\circlearrowleft \sum M_D^{CD} = 0 \qquad O.K. \;,\; \overset{+}{\rightarrow} \sum F_x^{CD} = 0 \qquad O.K.$



نمودار نیروی برشی S، kN



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

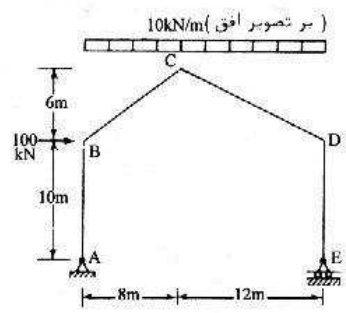
۶۲-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; A_x + 100 = 0 \Rightarrow A_x = -100 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{A}_x = 100 \;\; kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; E_y(20) - 10(20)(10) - 100(10) = 0 \Rightarrow E_y = 150 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{E}_y = 150 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 150 + A_y - 10(20) = 0 \Rightarrow A_y = 50 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{A}_y = 50 \;\; kN \uparrow$



شکل ۳-۶۲

در عضو AB:

$$\pm\rightarrow\sum F_x^{AB}=0 \;:\; B_x^{AB}-100=0 \Rightarrow \vec{B}_x^{AB}=100\ kN\rightarrow$$

$$+\uparrow\sum F_y^{AB}=0 \;:\; B_y^{AB}+50=0 \Rightarrow \vec{B}_y^{AB}=50\ kN\downarrow$$

$$+\circlearrowleft\sum M_B^{AB}=0 \;:\; M_B^{AB}-100(10)=0 \Rightarrow \vec{M}_B^{AB}=1000\ kN.m\circlearrowleft$$

در عضو BC:

$$\pm\rightarrow\sum F_x^{BC}=0 \Rightarrow C_x^{BC}=0$$

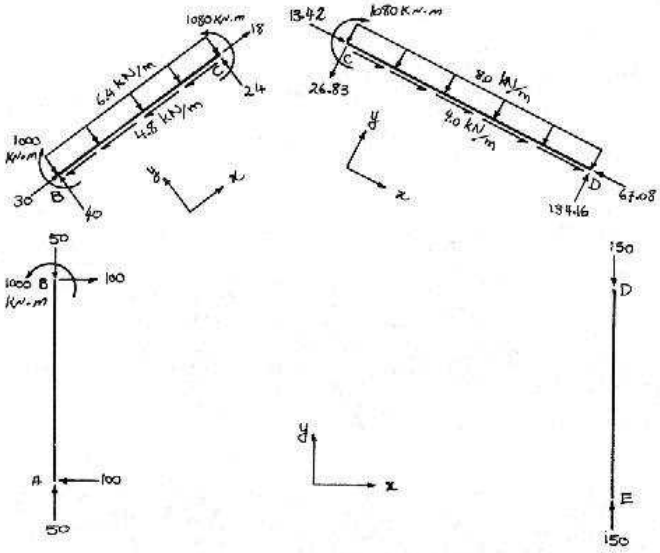
$$+\uparrow\sum F_y^{BC}=0 \;:\; C_y^{BC}+50-10(8)=0 \Rightarrow \vec{C}_y^{BC}=30\ kN\uparrow$$

$$+\circlearrowleft\sum M_C^{BC}=0 \;:\; M_C^{BC}-1000-50(8)+10(8)(4)=0$$

$$\vec{M}_C^{BC}=1080\ kN.m\circlearrowleft$$

در عضو CD:

$$\pm\rightarrow\sum F_x^{CD}=0 \;:\; D_x^{CD}=0$$



$$+\uparrow\sum F_y^{CD}=0 \;:$$

$$D_y^{CD}-30-10(12)=0$$

$$\vec{D}_y^{CD}=150\ kN\uparrow$$

$$+\circlearrowleft\sum M_D^{CD}=0 \;:$$

$$M_D^{CD}+10(12)(6)-1080+30(12)=0$$

$$M_D^{CD}=0$$

در عضو DE: $\pm\rightarrow\sum F_x^{DE}=0$ O.K.

$+\uparrow\sum F_y^{CD}=150-150=0$ O.K.

$+\circlearrowleft\sum M_D^{CD}=0$ O.K.

نیروهای خارجی و داخلی مؤثر بر اعضای BC و CD را از دستگاه مختصات کلی X-Y به دستگاه مختصات x-y هر عضو تبدیل می‌کنیم.

عضو BC:

$$B_x^{BC}=50\left[\frac{3}{5}\right]=30\ kN$$

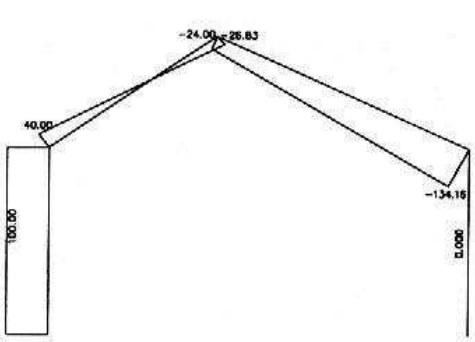
$$B_y^{BC}=50\left[\frac{4}{5}\right]=40\ kN$$

$$C_x^{BC}=30\left[\frac{3}{5}\right]=18\ kN \quad , \quad C_y^{BC}=30\left[\frac{4}{5}\right]=24\ kN$$

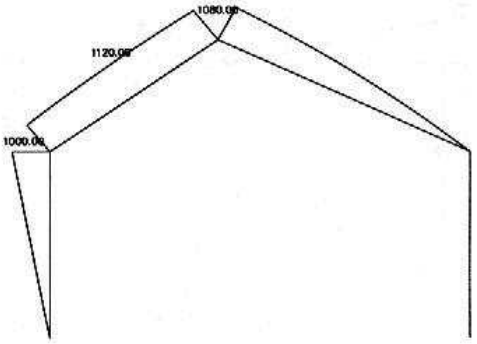
عضو CD:

$$C_x^{CD}=30\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right]=13/42\ kN \quad , \quad C_y^{CD}=-30\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right]=-26/83\ kN$$

$$D_x^{CD}=-150\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right]=-67/08\ kN \quad , \quad D_y^{CD}=150\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right]=134/16\ kN$$



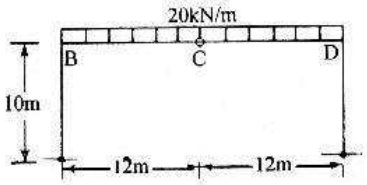
نمودار نیروی برشی S ، kN



نمودار لنگر خمشی M ، kN.m

۶۳-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۶۳

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; E_y(۲۴) - ۲۰(۲۴)(۱۲) = 0 \;\Rightarrow\; E_y = ۲۴۰ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{E}_y = ۲۴۰ \;\; kN \uparrow$

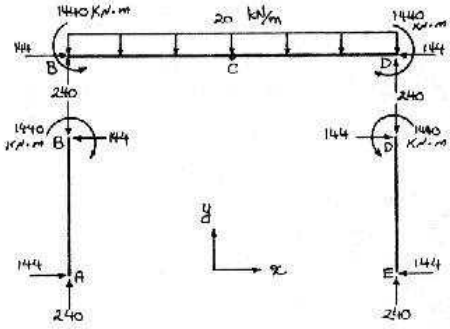
$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; ۲۴۰ + A_y - ۲۰(۲۴) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = ۲۴۰ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۲۴۰ \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{ABC} = 0 \;:\; ۲۰(۱۲)(۶) - ۲۴۰(۱۲) + A_x(۱۰) = 0 \;\Rightarrow\; A_x = ۱۴۴ \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_x = ۱۴۴ \;\; kN \rightarrow$

$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; ۱۴۴ + E_x = 0 \;\Rightarrow\; E_x = -۱۴۴ \;\; kN$ $\qquad \blacktriangleright \vec{E}_x = ۱۴۴ \;\; kN \leftarrow$



در عضو AB:

$\pm\rightarrow \sum F_x^{AB} = 0 \;:\; B_x^{AB} + ۱۴۴ = 0$

$\vec{B}_x^{AB} = ۱۴۴ \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \;:\; B_y^{AB} + ۲۴۰ = 0 \;\Rightarrow\; \vec{B}_y^{AB} = ۲۴۰ \;\; kN \downarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; ۱۴۴(۱۰) + M_B^{AB} = 0$

$\vec{M}_B^{AB} = ۱۴۴۰ \;\; kN.m \;\circlearrowright$

در عضو BC:

$\pm\rightarrow \sum F_x^{BC} = 0 \;:\; C_x^{BC} + ۱۴۴ = 0$

$\vec{C}_x^{BC} = ۱۴۴ \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y^{BD} = 0 \;:\; D_y^{BD} - ۲۰(۲۴) + ۲۴۰ = 0$

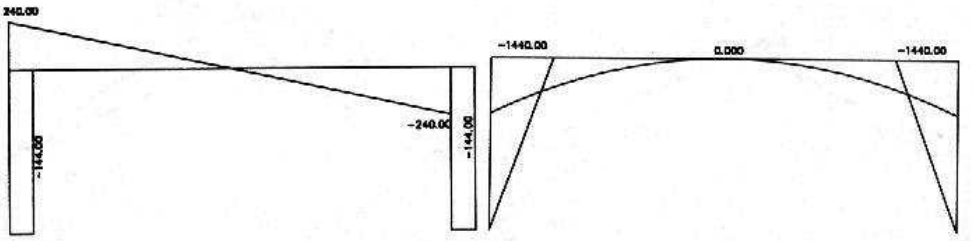
$\vec{D}_y^{BD} = ۲۴۰ \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_D^{BD} = 0 \;:\; ۲۰(۲۴)(۱۲) - ۲۴۰(۲۴) + ۱۴۴۰ + M_D^{BD} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{M}_D^{BD} = ۱۴۴۰ \;\; kN.m \;\circlearrowright$

در عضو ED:

$\pm\rightarrow \sum F_x^{ED} = ۱۴۴ - ۱۴۴ = 0 \qquad O.K. \qquad , \qquad +\uparrow \sum F_y^{ED} = ۲۴۰ - ۲۴۰ = 0 \qquad O.K.$

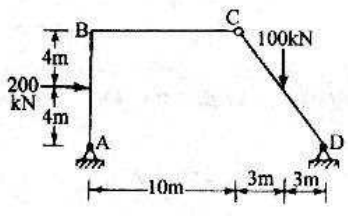
$+\circlearrowleft \sum M_E^{ED} = ۱۴۴۰ - ۱۴۴(۱۰) = 0 \qquad O.K.$



نمودار نیروی برشی S، kN

نمودار لنگر خمشی M، kN.m

۳-۶۴



شکل ۳-۶۴

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; D_y(16) - 100(13) - 200(4) = 0 \;\Rightarrow\; D_y = 131/25 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{D}_y = 131/25 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + 131/25 - 100 = 0 \;\Rightarrow\; A_y = -31/25 \;\; kN$

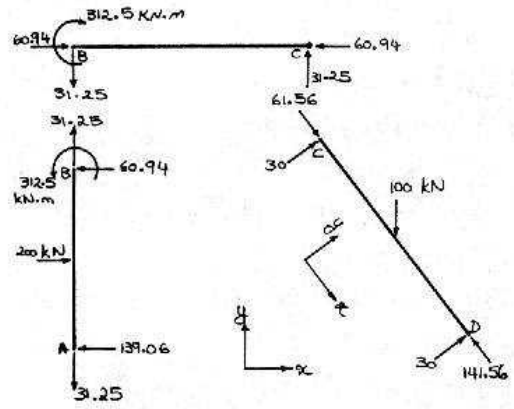
$\blacktriangleright \vec{A}_y = 31/25 \;\; kN \downarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{CD} = 0 \;:\; 131/25(6) - 100(3) + D_x(8) = 0 \;\Rightarrow\; D_x = -60/94 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{D}_x = 60/94 \;\; kN \leftarrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; 200 + A_x - 60/94 = 0 \;\Rightarrow\; A_x = -139/06 \;\; kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_x = 139/06 \;\; kN \leftarrow$



در عضو AB:

$\pm \sum F_x^{AB} = 0 \;:\; B_x^{AB} - 139/06 + 200 = 0$

$\vec{B}_x^{AB} = 69/04 \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \;:\; B_y^{AB} - 31/25 = 0$

$\vec{B}_y^{AB} = 31/25 \;\; kN.m \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; 200(4) - 139/06(8) + M_B^{AB} = 0$

$\vec{M}_B^{AB} = 312/5 \;\; kN.m \circlearrowleft$

در عضو BC:

$\pm \sum F_x^{BC} = 0 \;:\; 60/94 + C_x^{BC} = 0$

$\vec{C}_x^{BC} = 60/94 \;\; kN \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y^{BC} = 0 \;:\; C_y^{BC} - 31/25 = 0$

$\vec{C}_y^{BC} = 31/25 \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C = -312/5 + 31/25(10) = 0 \qquad O.K.$

$\pm \sum F_x^{CD} = 60/94 - 60/94 = 0$

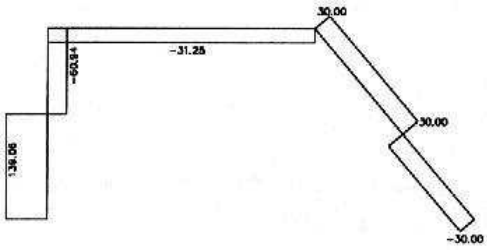
در عضو CD:

$+\circlearrowleft \sum M_D^{CD} = 100(3) - 60/94(8) + 31/25(6) = 0 \qquad O.K. \;,\; +\uparrow \sum F_y^{CD} = 131/25 - 31/25 - 100 = 0 \qquad O.K.$

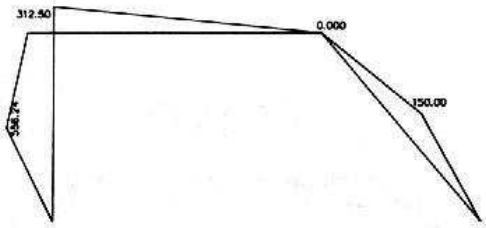
نیروهای خارجی و داخلی مؤثر بر عضو CD را از دستگاه مختصات کلی X-Y به دستگاه مختصات x-y هر عضو تبدیل می‌کنیم.

$$C_x^{CD} = ۳۱/۲۵\left[\frac{۴}{۵}\right] + ۶۰/۹۴\left[\frac{۳}{۵}\right] = ۶۱/۵۶ \quad , \quad C_y^{CD} = -۳۱/۲۵\left[\frac{۳}{۵}\right] + ۶۰/۹۴\left[\frac{۴}{۵}\right] = ۳۰$$

$$D_x^{CD} = -۱۳۱/۲۵\left[\frac{۴}{۵}\right] - ۶۰/۹۴\left[\frac{۳}{۵}\right] = -۱۴۱/۵۶ \quad , \quad D_y^{CD} = ۱۳۱/۲۵\left[\frac{۳}{۵}\right] - ۶۰/۹۴\left[\frac{۴}{۵}\right] = ۳۰$$

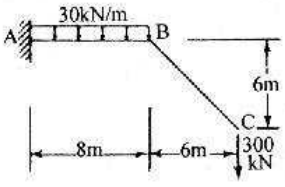


نمودار نیروی برشی S، kN



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

۶۵-۳



شکل ۳-۶۵

$$\pm\rightarrow \sum F_x = ۰ \;:\; A_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \;:\; A_y - ۳۰۰ - ۳۰(۸) = ۰ \;\Rightarrow\; A_y = ۵۴۰ \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۵۴۰ \;\; kN \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \;:\; M_A - ۳۰۰(۱۴) - ۳۰(۸)(۴) = ۰ \;\Rightarrow\; M_A = ۵۱۶۰ \;\; kN.m$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A = ۵۱۶۰ \;\; kN.m \circlearrowleft$$

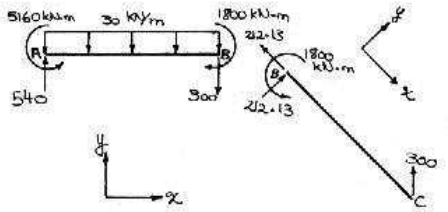
در عضو AB:

$$\pm\rightarrow \sum F_x^{AB} = ۰ \;:\; B_x^{AB} = ۰$$

$$+\uparrow \sum F_y^{AB} = ۰ \;:\; ۵۴۰ + B_y^{AB} - ۳۰(۸) = ۰ \;\Rightarrow\; \vec{B}_y^{AB} = ۳۰۰ \;\; kN \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = ۰ \;:\; M_B^{AB} + ۳۰(۸)(۴) + ۵۱۶۰ - ۵۴۰(۸) = ۰$$

$$\vec{M}_B^{AB} = ۱۸۰۰ \;\; kN.m \circlearrowleft$$



در عضو BC:

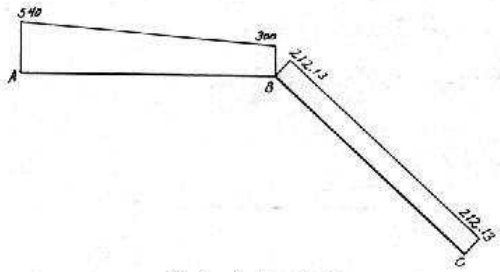
$$\pm\rightarrow \sum F_X^{BC} = ۰ \qquad O.K.$$

$$+\uparrow \sum F_y^{BC} = -۳۰۰ + ۳۰۰ = ۰ \qquad O.K.$$

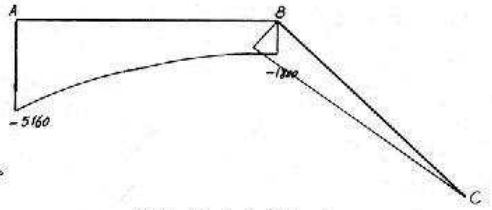
$$+\circlearrowleft \sum M_B^{BC} = -۳۰۰(۶) + ۱۸۰۰ = ۰ \qquad O.K.$$

نیروهای خارجی و داخلی مؤثر بر عضو BC را از دستگاه مختصات کلی X-Y به دستگاه مختصات x-y تبدیل می‌کنیم.

$$B_x^{BC} = -۳۰۰\left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right] = -۲۱۲/۱۳ \;\; kN \quad , \quad B_y^{BC} = ۳۰۰\left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right] = ۲۱۲/۱۳ \;\; kN$$

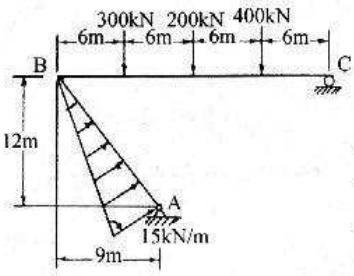


نمودار نیروی برشی S، kN



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

۶۶-۳



شکل ۳-۶۶

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; C_y(15) - 400(9) - 200(3) + 300(3) - \frac{1}{2}(15)(15)(5) = 0$

$C_y = 257/5 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = 257/5 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 257/5 + A_y - 300 - 200 - 400 + \frac{1}{2}(15)(15)\left[\frac{3}{5}\right] = 0$

$A_y = 575 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 575 \;\; kN \uparrow$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x + \frac{1}{2}(15)(15)\left[\frac{4}{5}\right] = 0$

$A_x = -90 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 90 \;\; kN \leftarrow$

در عضو AB:

$\pm \sum F_x^{AB} = 0 \;:\; -90 + B_x^{BC} + \frac{1}{2}(15)(15)(0/4) = 0$

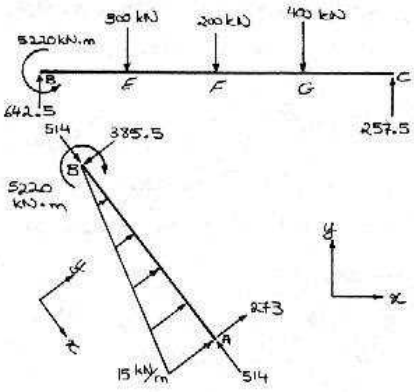
$B_x^{BC} = 0$

$+\uparrow \sum F_y^{AB} = 0 \;:\; 575 + \frac{1}{2}(15)(15)(0/6) + B_y^{BC} = 0$

$\vec{B}_y^{BC} = 642/5 \;\; kN \downarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; M_B^{AB} + \frac{1}{2}(15)(15)(10) + 575(9) - 90(12) = 0$

$\vec{M}_B^{AB} = 5220 \;\; kN.m \;)$



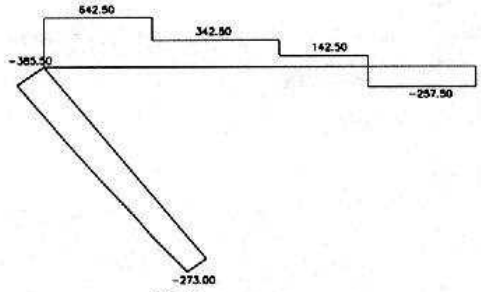
در عضو BC:

$+\uparrow \sum F_y^{BC} = 642/5 - 300 - 200 - 400 + 257/5 = 0 \qquad O.K.$

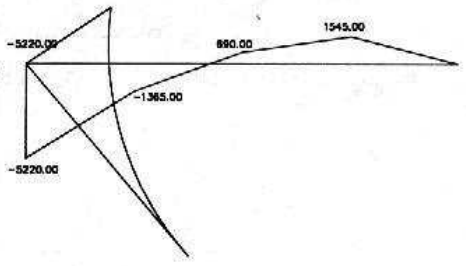
$\pm \sum F_X^{BC} = 0 \qquad O.K.$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} =$

$400(6) + 200(12) + 300(18) + 5220 - 642/5(24) = 0 \qquad O.K.$



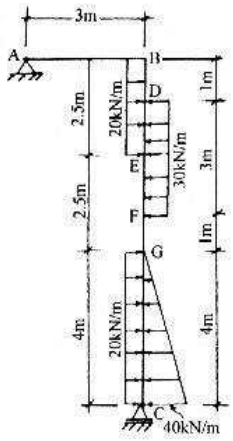
نمودار نیروی برشی S، kN



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

۶۷-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۶۷

$$\pm\sum F_X = 0 \;:\; A_x + 20(2/5) - 30(3) + 20(4) - \frac{1}{2}(40)(4) = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 40 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_x = 40 \;\; kN \rightarrow$$

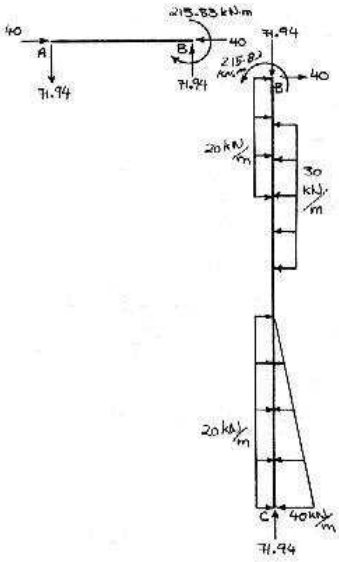
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:$$

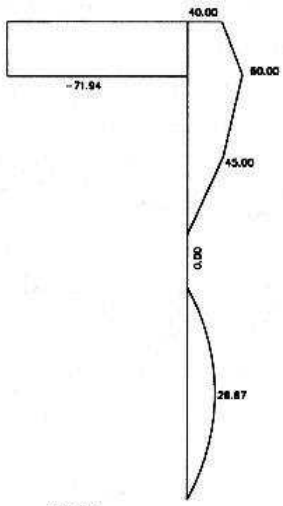
$$20(2/5)(1/25) - 30(3)(2/5) + 20(4)(7) - \frac{1}{2}(40)(4)\left[\frac{23}{3}\right] + C_y(3) = 0$$

$$C_y = 71/94 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = 71/94 \;\; kN \uparrow$$

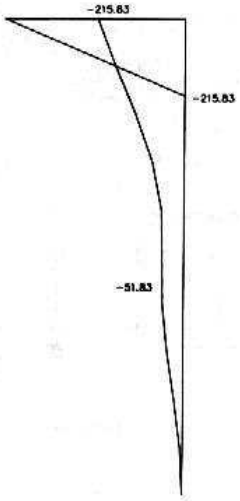
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + 71/94 = 0 \;\Rightarrow\; A_y = -71/94 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 71/94 \;\; kN \downarrow$$





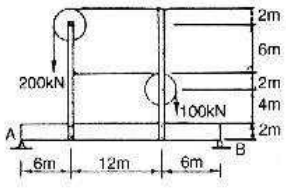
نمودار نیروی برشی S، kN



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

۶۸-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



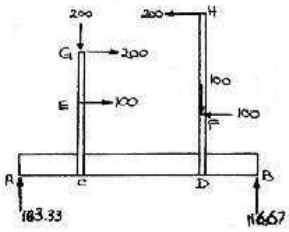
شکل ۳-۶۸

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:$$

$$B_y(24) + 200(16) + 100(6) - 100(18) - 200(14) - 200(6) - 100(8) = 0$$

$$B_y = 116/67 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 116/67 \;\; kN \uparrow$$

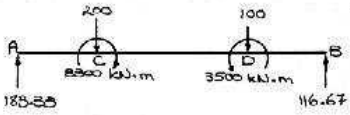
$$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; 100 + 200 - 200 - 100 + A_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

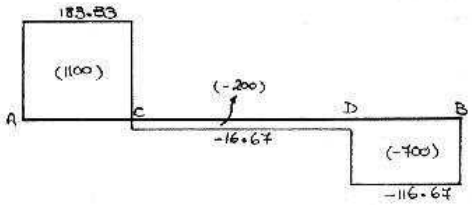


$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 116/67 + A_y - 200 - 100 = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 183/33 \;\; kN$$

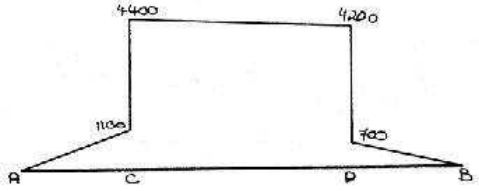
$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 183/33 \;\; kN \uparrow$$

کلیهٔ نیروهای وارد بر تیر را به میان تار منتقل می‌کنیم.



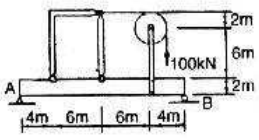


نمودار نیروی برشی S، kN



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

۳-۶۹



شکل ۳-۶۹

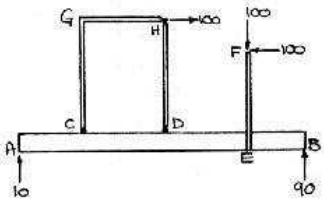
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; 100(8) - 100(10) - 100(16) + B_y(20) = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 90 \;\; kN$$

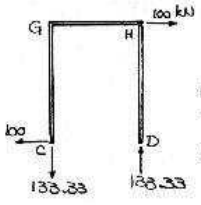
$$\blacktriangleright \vec{B}_y = 90 \;\; kN \uparrow$$

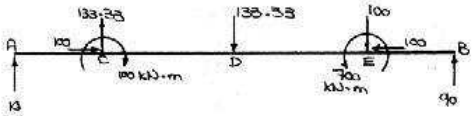
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 90 - 100 + A_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 10 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 10 \;\; kN \uparrow$$

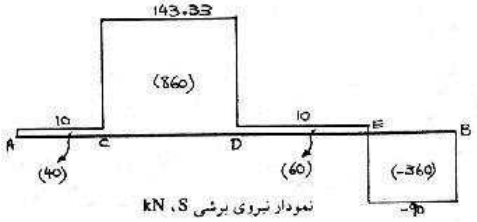
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; 100 - 100 + A_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

کلیهٔ نیروهای مؤثر بر سازه را به میان تار تیر AB منتقل می‌کنیم.

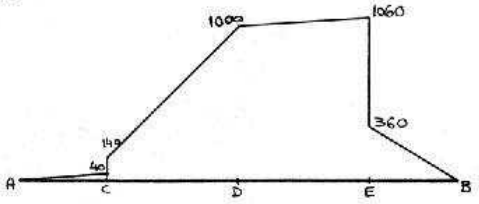








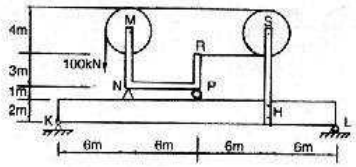
نمودار نیروی برشی S، kN



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

۳-۷۰

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۷۰

$$+\circlearrowleft \sum M_K = 0 \;:\; L_y(24) + 200(8) - 100(6) - 100(8) - 100(6) = 0$$

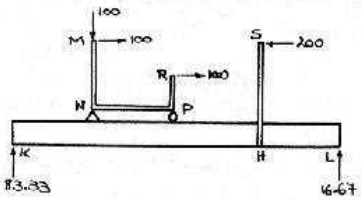
$$L_y = 16/67 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{L}_y = 16/67 \;\; kN \uparrow$$

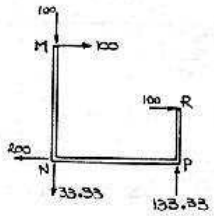
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 16/67 - 100 + K_y = 0 \;\Rightarrow\; K_y = 83/33 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{K}_y = 83/33 \;\; kN \uparrow$$

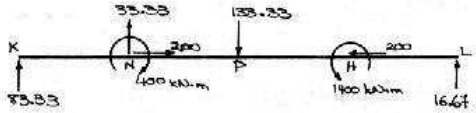
$$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; K_x + 100 + 100 - 200 = 0 \;\Rightarrow\; K_x = 0$$

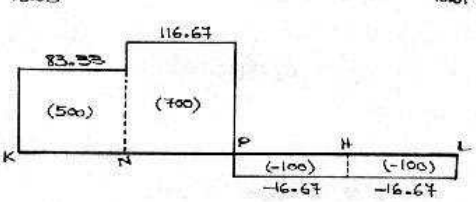
$$\blacktriangleright \vec{K}_x = 0$$



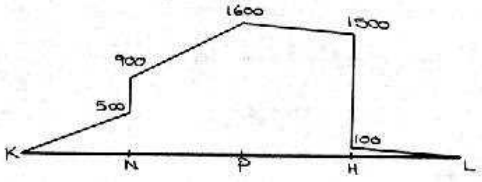


کلیهٔ نیروهای مؤثر بر سازه را به میان تار تیر KL منتقل می‌کنیم.





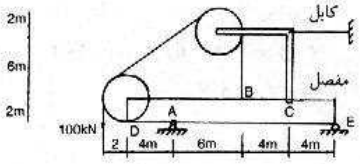
نمودار نیروی برشی S ، kN



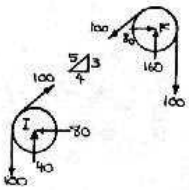
نمودار لنگر خمشی M ، kN.m

۳-۷۱

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۳-۷۱



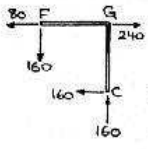
$$+\circlearrowleft \sum M_C^{FGC} = 0 \;:$$

$$80(6) + 160(6) - F_{GH}(6) = 0$$

$$F_{GH} = 240 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{GH} = 240 \;\; kN \;\; (T)$$

$$\pm\rightarrow \sum F_x^{FGC} = 0 \;:\; 240 - 80 + C_x = 0$$

$$C_x = -160 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{C}_x = 160 \;\; kN \leftarrow$$



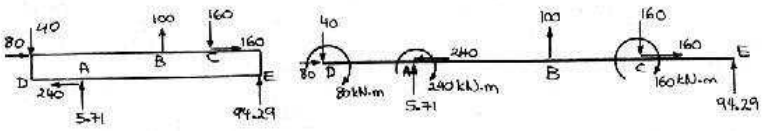
$$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x + 160 + 80 = 0 \;\Rightarrow\; A_x = -240 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 240 \;\; kN \leftarrow$$

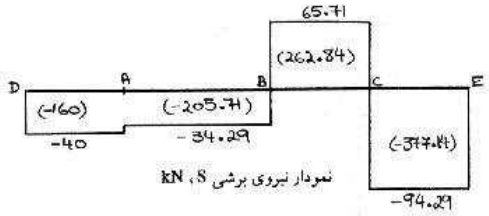
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; 100(6) + E_y(14) + 40(4) - (80 + 160)(2) - 160(10) = 0 \;\Rightarrow\; E_y = 94/29 \;\; kN$$

$$\blacktriangleright \vec{E}_y = 94/29 \;\; kN \uparrow$$

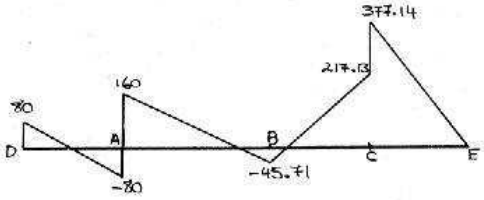
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 94/29 - 160 + 100 - 40 + A_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 5/71 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 5/71 \;\; kN \uparrow$$

نیروهای مؤثر بر سازه را به میان تار تیر DE منتقل می‌کنیم.





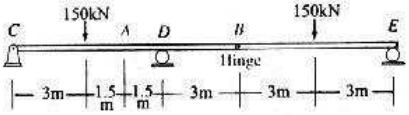
نمودار نیروی برشی S، kN



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

در مسایل ۳-۷۲ و ۳-۷۳ مقادیر نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را در نقاط A و B به دست آورید.

۳-۷۲



شکل ۳-۷۲

$+\circlearrowleft \sum M_B^{BE} = 0 \;:\; E_y(6) - 150(3) = 0 \Rightarrow \vec{E_y} = 75 \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \;:\; 75(15) + D_y(6) - 150(3+12) = 0$

$\vec{D_y} = 187.5 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 187.5 + 75 + C_y - 2(150) = 0$

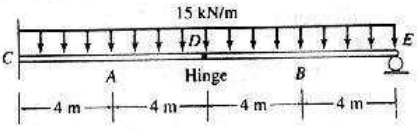
$\vec{C_y} = 37.5 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y^{AC} = 0 \;:\; S_A + 150 - 37.5 = 0 \quad \blacktriangleright S_A = -112.5 \;\; kN \;,\; \pm \sum F_x^{AC} = 0 \;:\; Q_A = 0 \quad \blacktriangleright Q_A = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_A^{AC} = 0 \;:\; M_A + 150(1.5) - 37.5(2.5) = 0 \quad \blacktriangleright M_A = -56.25 \;\; kN.m$

$+\uparrow \sum F_y^{BE} = 0 \;:\; S_B + 75 - 150 = 0 \quad \blacktriangleright S_B = 75 \;\; kN \;,\; \pm \sum F_x^{BE} = 0 \;:\; Q_B = 0 \quad \blacktriangleright Q_B = 0$

۳-۷۳



شکل ۳-۷۳

$+\circlearrowleft \sum M_D^{DE} = 0 \;:\; E_y(8) - 15(8)(4) = 0 \Rightarrow \vec{E_y} = 60 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 60 + C_y - 15(16) = 0 \Rightarrow \vec{C_y} = 180 \;\; kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; 60(16) - 15(16)(8) + M_A = 0$

$\vec{M_A} = 960 \;\; kN.m \circlearrowleft$

$\pm \sum F_x = 0 \;:\; C_x = 0$

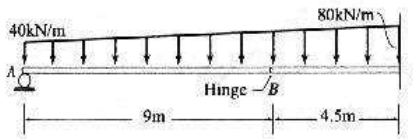
$+\uparrow \sum F_y^{BE} = 0 \;:\; S_B + 60 - 15(4) = 0 \quad \blacktriangleright S_B = 0 \quad , \quad \pm \sum F_x^{BE} = 0 \;:\; Q_B = 0 \quad \blacktriangleright Q_B = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{BE} = 0 \;:\; -M_B + 60(4) - 15(4)(2) = 0 \quad \blacktriangleright M_B = 120 \;\; kN.m$

$+\uparrow \sum F_y^{AC} = 0 \;:\; S_A + 15(4) - 180 = 0 \quad \blacktriangleright S_A = 120 \;\; kN \quad , \quad \pm \sum F_x^{AC} = 0 \;:\; Q_A = 0 \quad \blacktriangleright Q_A = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_A^{AC} = 0 \;:\; M_A + 960 - 180(4) + 15(4)(2) = 0 \quad \blacktriangleright M_A = -360 \;\; kN.m$

۳-۷۴ در تیر نشان داده شده در شکل زیر معادلهٔ نیروی برشی و لنگر خمشی را در طول نواحی مختلف تیر به دست آورید.



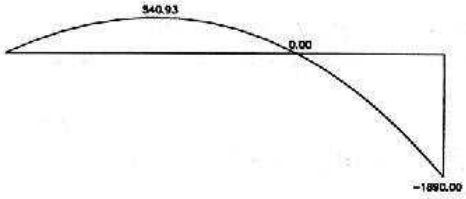
شکل ۳-۷۴

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad \frac{40(9)^2}{2} + \frac{26/667(9)}{(2)}(3) - A_y(9) = 0$$

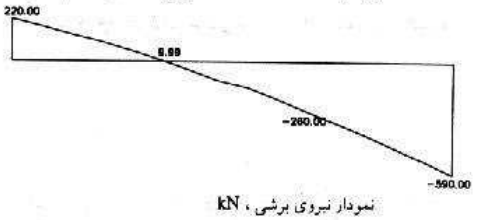
$$\overrightarrow{A_y} = 220 \ kN \uparrow$$

$$S = 220 - \frac{40 + 40\left[1 + \frac{x}{13/5}\right]}{2}(x) = 220 - 40x - \frac{20x^2}{13/5}$$

$$M = 220x - \frac{40(x)^2}{2} - \frac{\left[\frac{40x}{13/5}\right](x)}{2}\left(\frac{x}{3}\right) = 220x - 20x^2 - \frac{20x^3}{40/5}$$

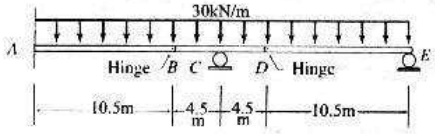


نمودار لنگر خمشی ، kN.m

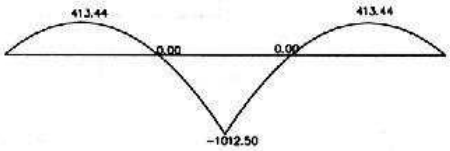


نمودار نیروی برشی ، kN

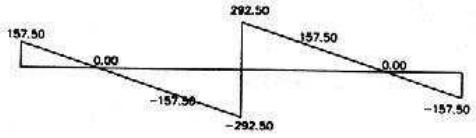
۳-۷۵ برای تیر نشان داده شده در شکل، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید.



شکل ۳-۷۵

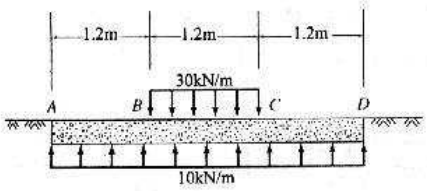


نمودار لنگر خمشی ، kN.m

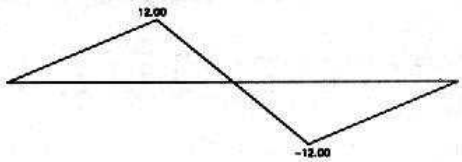


نمودار نیروی برشی ، kN

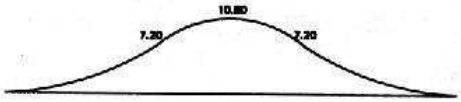
۳-۷۶ برای پی نشان داده شده در شکل، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید.



شکل ۳-۷۶



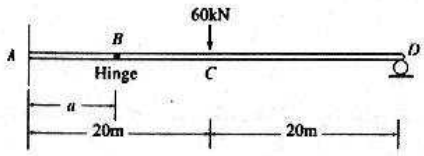
نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

برای تیرهای نشان داده شده در مسایل ۳-۷۷ و ۳-۷۸ ، فاصلهٔ a را چنان به دست آورید که حداکثر لنگر خمشی مثبت و منفی با هم برابر شوند، سپس نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را در این حالت ترسیم کنید.

۳-۷۷



شکل ۳-۷۷

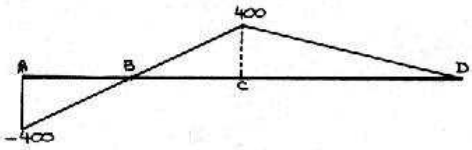
$$+\circlearrowleft \sum M_B^{BD} = 0 \;:\; -D_y(40-a)+60(20-a)=0$$

$$\vec{D}_y = \frac{60(20-a)}{(40-a)} \uparrow$$

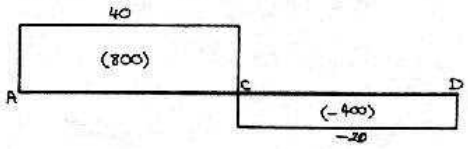
$$+\uparrow \sum F_y^{BD} = 0 \;:\; B_{y,r} = 60 - \frac{60(20-a)}{(40-a)} = \frac{1200}{(40-a)}$$

$$M_{max}^{+} = M^C = \frac{60(20-a)}{(40-a)}(20) \quad , \quad M_{max}^{-} = M^A = \frac{1200a}{(40-a)}$$

$$M_{max}^{+} = M_{max}^{-} \;\Rightarrow\; \frac{60(20-a)}{(40-a)}(20) = \frac{1200a}{(40-a)} \;\Rightarrow\; 60(20-a) = 60a \;\Rightarrow\; a = 10\,m$$

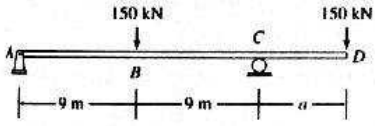


نمودار لنگر خمشی ، kN.m



نمودار نیروی برشی ، kN

۳-۷۸



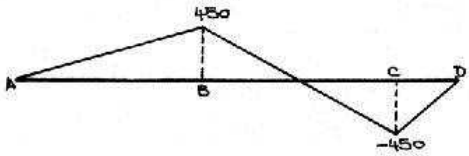
شکل ۳-۷۸

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \;:\; 150(9) - A_y(18) - 150(a) = 0$$

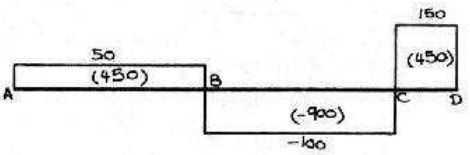
$$\vec{A}_y = \frac{150(9-a)}{18} \uparrow$$

$$M_{max}^{+} = M^B = A_y(9) = 75(9-a) \quad , \quad M_{max}^{-} = M^C = 150a$$

$$M_{max}^{-} = M_{max}^{+} \;\Rightarrow\; 75(9-a) = 150a \;\Rightarrow\; a = 3\,m$$



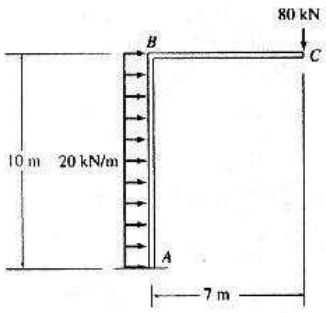
نمودار لنگر خمشی ، kN.m



نمودار نیروی برشی ، kN

برای قابهای نشان داده شده در مسایل ۳-۷۹ تا ۳-۸۲ نمودار نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری را ترسیم کنید.

۳-۷۹

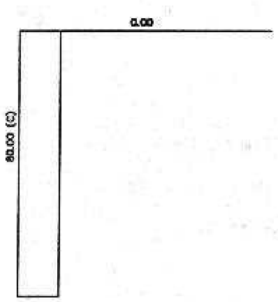


شکل ۳-۷۹

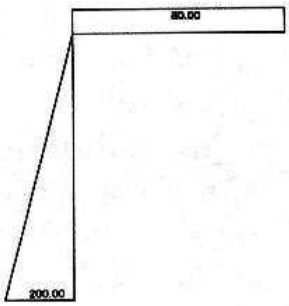
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad M_A - ۲۰(۱۰)(۵) - ۸۰(۷) = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = ۱۵۶۰ \ kN.m \circlearrowleft$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad -A_x + ۲۰(۱۰) = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۲۰۰ \ kN \leftarrow$

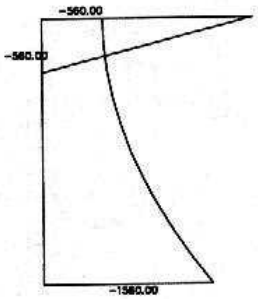
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad A_y - ۸۰ = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۸۰ \ kN \uparrow$



نمودار نیروی محوری ، kN

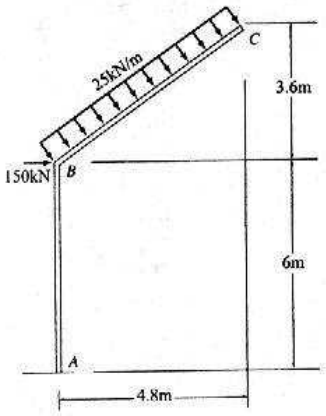


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۳-۸۰



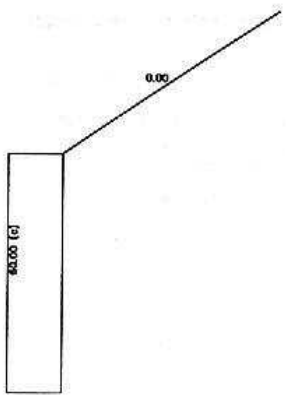
شکل ۳-۸۰

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad -A_x + ۱۵۰ + (۲۵)(۶)(۰/۶) = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۲۴۰ \ kN \leftarrow$

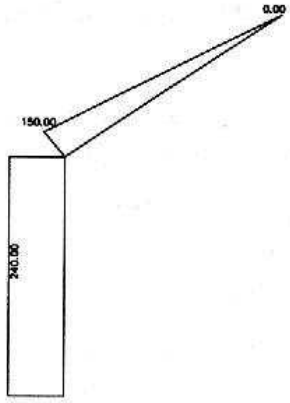
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad A_y - (۲۵)(۶)(۰/۸) = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۲۰ \ kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad M_A - ۱۵۰(۶) - (۲۵)(۶)\left[۰/۶\,(۷/۸) + (۰/۸)(۲/۴)\right] = 0$

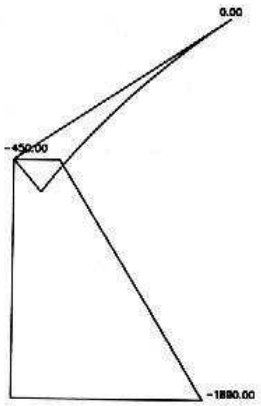
$\blacktriangleright \vec{M}_A = ۱۸۹۰ \ kN.m \circlearrowleft$



نمودار نیروی محوری ، kN

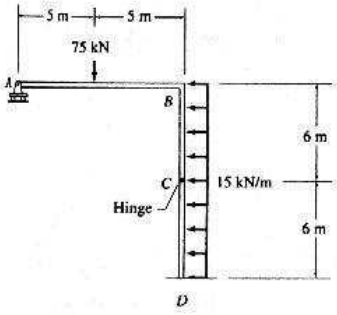


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۸۱-۳



$+\circlearrowleft \sum M_C^{A\,B\,C} = 0 \quad : \quad ۷۵(۵) + ۱۵(۶)(۳) - A_y(۱۰) = 0$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۶۴/۵ \quad kN \uparrow$

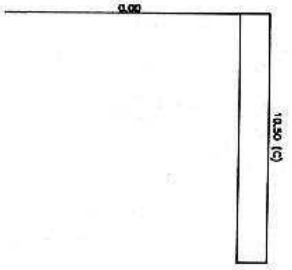
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad D_y + ۶۴/۵ - ۷۵ = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y = ۱۰/۵ \quad kN \uparrow$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad : \quad D_x - ۱۵(۱۲) = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{D}_x = ۱۸۰ \quad kN \rightarrow$

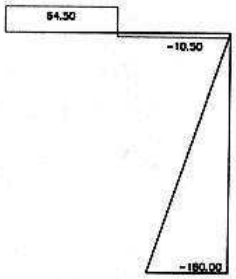
$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \quad : \quad M_D + ۱۵(۱۲)(۶) + ۷۵(۵) - ۶۴/۵(۱۰) = 0$

$\blacktriangleright \vec{M}_D = ۸۱۰ \quad kN.m \;)$

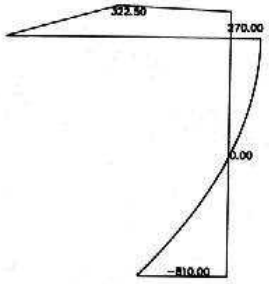
شکل ۳-۸۱



نمودار نیروی محوری ، kN

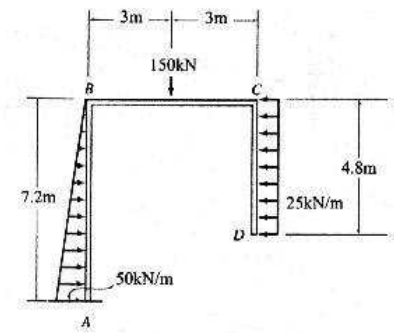


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۸۲-۳



شکل ۳-۸۲

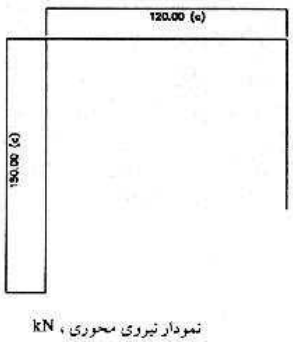
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad : \quad A_x + \frac{50(7/2)}{2} - 25(4/8) = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_x = 60 \quad kN \leftarrow$$

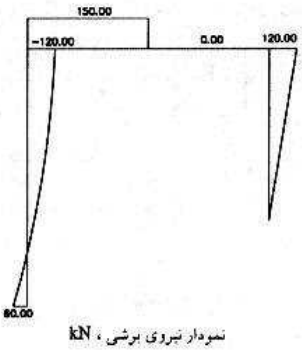
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad A_y - 150 = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 150 \quad kN \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad M_A - 150(3) - \frac{50(7/2)}{2}\left[\frac{7/2}{3}\right] + 25(4/8)(4/8) = 0$$

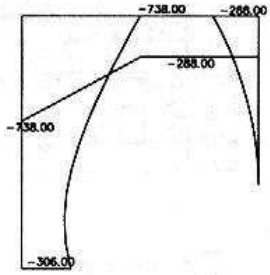
$$\blacktriangleright \vec{M}_A = 306 \quad kN.m \circlearrowleft$$



نمودار نیروی محوری ، kN

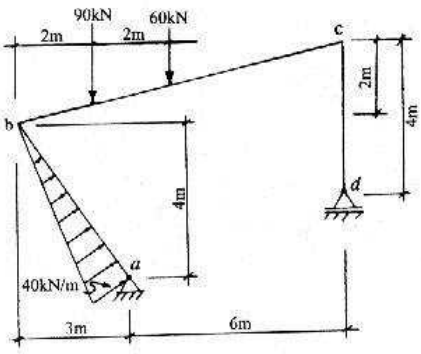


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۸۳-۳ در سازهٔ نشان داده شده پس از به دست آوردن واکنشهای تکیه‌گاهی، نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی سازه را ترسیم کنید.



شکل ۳-۸۳

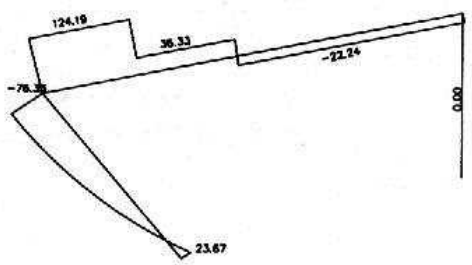
$$+\circlearrowleft \sum M_a = 0 \quad : \quad d_y(6) + 90(1) - 60(1) - \frac{(40)(5)}{2}\left[\frac{5}{3}\right] = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{d}_y = 22/78 \quad kN \uparrow$$

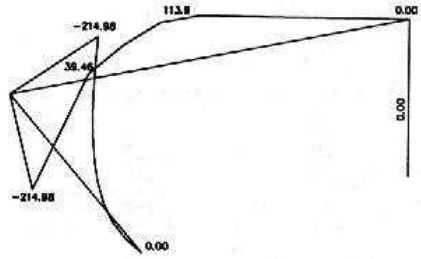
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad : \quad \frac{(40)(5)}{2}\left[\frac{4}{5}\right] - a_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{a}_x = 80 \quad kN \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad \frac{(40)(5)}{2}\left[\frac{3}{5}\right] - 90 - 60 + a_y + 22/78 = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{a}_y = 67/22 \quad kN \uparrow$$

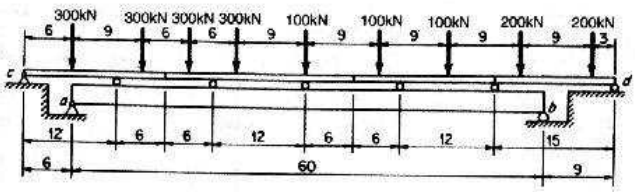


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۳-۸۴ در تیر نشان داده شده در شکل زیر، واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کنید.



شکل ۳-۸۴

$+\circlearrowleft \sum M_C^{ce} = 0$:

$e_y(12) - 300(6) - 300(15) = 0$

$\vec{e}_y = 525 \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y^{ce} = 0$:

$525 - 300 - 300 + C_y = 0$

$\blacktriangleright \vec{C}_y = 75 \quad kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_f^{fg} = 0$: $300(3) - 300(3) - 100(12) + g_y(12) = 0 \Rightarrow \vec{g}_y = 100 \quad kN \uparrow$

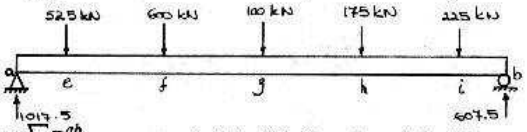
$+\uparrow \sum F_y^{fg} = 0$: $f_y + 100 - 2(300) - 100 = 0 \Rightarrow \vec{f}_y = 600 \quad kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_h^{hi} = 0$: $100(3) - 100(6) + i_{1y}(12) = 0 \Rightarrow \vec{i}_{1y} = 25 \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y^{hi} = 0$: $25 - 2(100) + h_y = 0 \Rightarrow \vec{h}_y = 175 \quad kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_d^{di} = 0$: $200(3) + 200(12) - i_{2y}(15) = 0 \Rightarrow \vec{i}_{2y} = 200 \quad kN \uparrow$, $\vec{i}_y = \vec{i}_{1y} + \vec{i}_{2y} = 225 \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y^{di} = 0$: $200 - 200 - 200 + d_y = 0 \quad \blacktriangleright \vec{d}_y = 200 \quad kN \uparrow$

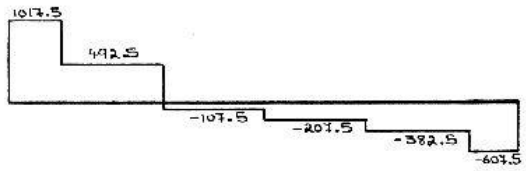


$+\circlearrowleft \sum M_a^{ab} = 0$: $b_y(60) - 525(6) - 600(18) - 100(30) - 175(42) - 225(54) = 0$

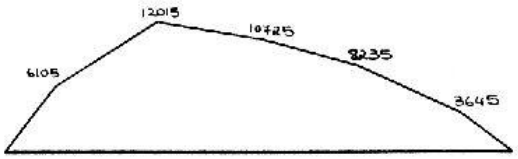
$\blacktriangleright \vec{b}_y = 607.5 \quad kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y^{ab} = 0$: $a_y + 607.5 - 525 - 600 - 100 - 175 - 225 = 0$

$\blacktriangleright \vec{a}_y = 1017.5 \quad kN \uparrow$



نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۴- نمودار $\frac{M}{EI}$ تعیین شده در مرحلهٔ ۲ را به صورت بارگسترده بر تیر فرضی اعمال می‌کنیم. (مقادیر مثبت $\frac{M}{EI}$ به صورت بارهایی به سمت بالا و مقادیر منفی $\frac{M}{EI}$ به صورت بارهایی به سمت پایین بر تیر فرضی اعمال می‌شوند.)

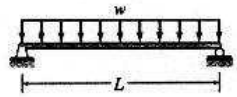
۵- با توجه به بارگذاری و وضعیت تیر فرضی، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی را به کمک معادلات تعادل به دست می‌آوریم.

۶- در نقاطی که تغییر مکان تیر حقیقی خواسته شده است، لنگر خمشی را در تیر فرضی محاسبه می‌کنیم و در نقاطی که شیب تیر حقیقی خواسته شده است، نیروی برشی را در تیر فرضی محاسبه می‌کنیم. (در تعیین علامت لنگر خمشی و نیروی برشی از قراردادهای فصل قبل استفاده می‌کنیم.)

● نیروی برشی موجود در هر نقطه از تیر فرضی نشانگر شیب تیر حقیقی در نقطهٔ مزبور است. نیروی برشی مثبت در تیر فرضی نشانگر شیب مثبت (پاد ساعتگرد) منحنی الاستیک تیر حقیقی است و برعکس. لنگر خمشی موجود در هر نقطه از تیر فرضی نشانگر تغییر مکان تیر حقیقی در نقطهٔ مزبور است. لنگر خمشی مثبت در تیر فرضی نشانگر تغییر مکان مثبت (رو به بالای) منحنی الاستیک تیر حقیقی است و برعکس.

۴-۱ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم معادلهٔ منحنی الاستیک را به دست آورید. مقدار شیب را در دو انتهای دهانه و تغییر مکان را در وسط دهانه محاسبه کنید. EI در طول تیر ثابت است.

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



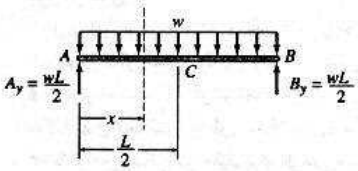
شکل ۴-۱

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright A_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; -A_y(L) + w(L)\left[\frac{L}{2}\right] = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \frac{wL}{2} \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = \frac{wL}{2}\uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; \left[\frac{wL}{2}\right] + B_y - (wL) = 0 \;\Rightarrow\; B_y = \frac{wL}{2} \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = \frac{wL}{2}\uparrow$$

معادلهٔ لنگر خمشی (M):



برای تعیین معادلهٔ لنگر خمشی (M)، در نقطه‌ای به فاصلهٔ x از تکیه‌گاه A مقطعی در نظر گرفته و نمودار جسم آزاد قسمت سمت چپ مقطع را در نظر گرفته و معادلهٔ تعادل لنگر را برای آن می‌نویسیم.

$$M = \frac{wL}{2}(x) - (wx)\left[\frac{x}{2}\right] = \frac{w}{2}\left[Lx - x^2\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \;\Rightarrow\; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2EI}\left[Lx - x^2\right] \qquad (I)$$

از معادلهٔ (I) انتگرال گرفته و معادلهٔ شیب (θ) را به دست می‌آوریم.

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{2EI}\left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] + C_1 \qquad (II)$$

با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (II) رابطهٔ تغییر مکان (y) به دست خواهد آمد.

$$y = \frac{w}{2EI}\left[\frac{Lx^2}{6} - \frac{x^4}{12}\right] + C_1 x + C_2 \qquad (III)$$

برای محاسبهٔ ثابتهای انتگرال‌گیری C_1 و C_2 از شرایط مرزی زیر استفاده می‌کنیم.

در نقطهٔ A:

$$x = 0 \;,\; y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$$

در نقطهٔ B:

$$x = L \;,\; y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \frac{w}{2EI}\left[\frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12}\right] + C_1 L \;\Rightarrow\; C_1 = -\frac{wL^3}{24EI}$$

معادلهٔ شیب: (۱) $\theta = \frac{w}{2EI}\left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{L^3}{12}\right]$ و معادلهٔ تغییر مکان: $y = \frac{wx}{12EI}\left[Lx^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{L^3}{2}\right]$ (۲)

برای محاسبهٔ شیب در نقاط انتهایی دهانه (A و B)، در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم: x = ۰ و x = L.

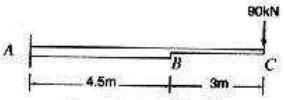
$$x = 0 \xrightarrow{\text{از رابطهٔ (۱)}} \theta_A = -\frac{wL^3}{24EI} \qquad \blacktriangleright \theta_A = \frac{wL^3}{24EI} \curvearrowleft$$

$$x = L \xrightarrow{\text{از رابطهٔ (۱)}} \theta_B = \frac{wL^3}{24EI} \qquad \blacktriangleright \theta_B = \frac{wL^3}{24EI} \curvearrowright$$

برای محاسبهٔ تغییر مکان قائم در وسط دهانه (C)، در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم: $x = \frac{L}{2}$

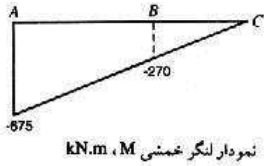
$$x = \frac{L}{2} \xrightarrow{\text{از رابطهٔ (۲)}} y_C = -\frac{5wL^4}{384EI} \qquad \blacktriangleright y_C = \frac{5wL^4}{384EI}\downarrow$$

۴-۲ برای تیر طره‌ای نشان داده شده در شکل زیر مقادیر شیب و تغییر مکان را در نقاط B و C با استفاده از روش لنگر سطح محاسبه کنید.



$I_{BC}=۱/۱۷۲\times۱۰^{۹}\,mm^{۴}$
$I_{AB}=۲/۳۴۴\times۱۰^{۹}\,mm^{۴}$
$E=۲\times۱۰^{۵}\,MPa$

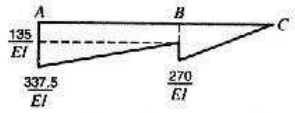
شکل ۲-۲



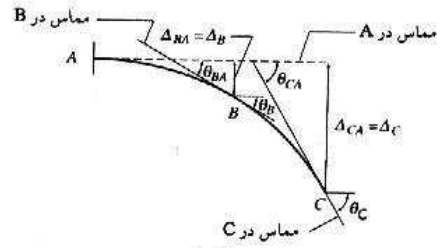
نمودار لنگر خمشی M، kN.m

$$\left.\begin{aligned} I_{BC}=I=۱/۱۷۲\times۱۰^{۹}\,mm^{۴}\\ I_{AB}=۲/۳۴۴\times۱۰^{۹}\,mm^{۴}\end{aligned}\right\}\Rightarrow I_{AB}=۲I$$

پس برای به دست آوردن نمودار $\frac{M}{EI}$ در طول قسمت AB لازم است که نمودار لنگر خمشی (M) را بر 2EI تقسیم کرد.



نمودار $\frac{M}{EI}$، $\frac{kN.m}{EI}$ و $I=۱/۱۷۲\times۱۰^{۹}\ mm^{۴}$



منحنی الاستیک

منحنی الاستیک تیر در شکل فوق نشان داده شده است. با توجه به منفی بودن نمودار $\frac{M}{EI}$ نتیجه می‌گیریم که تقعر تیر به سمت پایین است. با توجه به گیردار بودن تکیه‌گاه A، در نقطهٔ مزبور شیب برابر صفر است، ($\theta_A=۰$). یعنی همان‌طور که در شکل فوق نشان داده شده است، مماس بر منحنی الاستیک تیر در نقطهٔ A افقی است.

با توجه به معلوم بودن شیب نقطهٔ A، برای محاسبهٔ شیب در نقطهٔ B از رابطهٔ $\theta_{BA}=\theta_B$ استفاده می‌کنیم.

سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در حد فاصل نقاط A و B = θ_{BA}:

$$\theta_{BA}=\frac{۱}{EI}\left[(۱۳۵)(۴/۵)+\frac{۱}{۲}(۲۰۲/۵)(۴/۵)\right]=\frac{۱۰۶۳/۱۲۵\,kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_{BA}=\theta_B-\theta_A\ ,\ \theta_A=۰\ \Rightarrow\ \theta_B=\theta_{BA}=\frac{۱۰۶۳/۱۲۵\,kN.m^{۲}}{EI}=\frac{۱۰۶۳/۱۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}\,N.mm^{۲}}{EI}$$

$$E=۲\times۱۰^{۵}\ MPa\ ,\ I=۱/۱۷۲\times۱۰^{۹}mm^{۴}\ \Rightarrow\ \theta_B=\frac{۱۰۶۳/۱۲۵\times۱۰^{۹}}{EI}=\frac{۱۰۶۳/۱۲۵\times۱۰^{۹}}{(۲\times۱۰^{۵})(۱/۱۷۲\times۱۰^{۹})}=۰/۰۰۴۵\ rad$$

$\blacktriangleright\ \theta_B=۰/۰۰۴۵\ rad\ \curvearrowleft$

لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در حد فاصل دو نقطهٔ A و B، حول نقطهٔ B = Δ_{BA}:

$$\Delta_{BA}=\frac{۱}{EI}\left[(۱۳۵)(۴/۵)(۲/۲۵)+\frac{۱}{۲}(۲۰۲/۵)(۴/۵)(۳)\right]=\frac{۲۷۳۳/۷۵\,kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_{BA}=\Delta_B\ \Rightarrow\ \Delta_B=\frac{۲۷۳۳/۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}\,N.mm^{۳}}{EI}\ \Rightarrow\ \Delta_B=\frac{۲۷۳۳/۷۵\times۱۰^{۱۲}}{EI}=\frac{۲۷۳۳/۷۵\times۱۰^{۱۲}}{(۲\times۱۰^{۵})(۱/۱۷۲\times۱۰^{۹})}=۱۱/۶۷\,mm$$

$\blacktriangleright\ \Delta_B=۱۱/۶۷\,mm\downarrow$

سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در حد فاصل نقاط A و C = θ_{CA}:

$$\theta_{CA}=\frac{۱}{EI}\left[(۱۳۵)(۴/۵)+\frac{۱}{۲}(۲۰۲/۵)(۴/۵)+\frac{۱}{۲}(۲۷۰)(۳)\right]=\frac{۱۴۶۸/۱۲۵\,kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_{CA}=\theta_C-\theta_A\ ,\ \theta_A=۰\ \Rightarrow\ \theta_C=\theta_{CA}=\frac{۱۴۶۸/۱۲۵\,kN.m^{۲}}{EI}=\frac{۱۴۶۸/۱۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}\,N.mm^{۲}}{EI}$$

$$\theta_C=\frac{۱۴۶۸/۱۲۵\times۱۰^{۹}}{EI}=\frac{۱۴۶۸/۱۲۵\times۱۰^{۹}}{(۲\times۱۰^{۵})(۱/۱۷۲\times۱۰^{۹})}=۰/۰۰۶۳\ rad\qquad\blacktriangleright\ \theta_C=۰/۰۰۶۳\ rad\ \curvearrowright$$

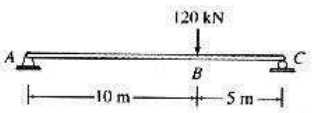
لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در حد فاصل دو نقطهٔ A و C، حول نقطهٔ C = Δ_{CA}:

$$\Delta_{CA}=\frac{۱}{EI}\left[(۱۳۵)(۴/۵)(۲/۲۵+۳)+\frac{۱}{۲}(۲۰۲/۵)(۴/۵)(۳+۳)+\frac{۱}{۲}(۲۷۰)(۳)(۲)\right]=\frac{۶۷۳۳/۱۲۵\,kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_{CA}=\Delta_C\ \Rightarrow\ \Delta_C=\frac{۶۷۳۳/۱۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}\,N.mm^{۳}}{EI}\ \Rightarrow\ \Delta_C=\frac{۶۷۳۳/۱۲۵\times۱۰^{۱۲}}{EI}=\frac{۶۷۳۳/۱۲۵\times۱۰^{۱۲}}{(۲\times۱۰^{۵})(۱/۱۷۲\times۱۰^{۹})}=۲۸/۷۲\,mm$$

$\blacktriangleright \Delta_C = ۲۸/۷۲\ mm \downarrow$

۴-۳ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر با استفاده از روش لنگر سطح، بیشترین مقدار تغییر مکان قائم را محاسبه کنید.



EI = ثابت، E = ۲۰۰ GPa
$I = ۷۰۰ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

شکل ۴-۳

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \ : \ A_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \ : \ C_y(۱۵) - ۱۲۰(۱۰) = ۰ \ \Rightarrow \ C_y = ۸۰ \ kN$

$\blacktriangleright \vec{C}_y = ۸۰ \ kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ ۸۰ + A_y - ۱۲۰ = ۰ \ \Rightarrow \ A_y = ۴۰ \ kN \quad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۴۰ \ kN \uparrow$

ابتدا شیب منحنی الاستیک تیر را در نقطهٔ A محاسبه می‌کنیم، تا از آن به عنوان مرجع محاسبهٔ شیب در سایر نقاط تیر استفاده شود. برای محاسبهٔ شیب در نقطهٔ A از این اصل که تغییر مکان در نقاط A و C صفر است، استفاده می‌کنیم.

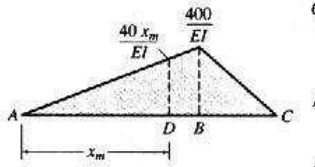
با توجه به کوچک بودن زاویه‌ها، $\tan\theta_A \approx \theta_A$، بنابراین:

$$\theta_A = \frac{\Delta_{CA}}{L}$$

لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در حد فاصل دو نقطهٔ A و C، حول نقطهٔ C = Δ_{CA}:

$$\Delta_{CA} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۴۰۰)(۱۰)\left[\frac{۱۰}{۳}+۵\right] + \frac{۱}{۲}(۴۰۰)(۵)\left[\frac{۱۰}{۳}\right]\right] = \frac{۲۰۰۰۰\ kN.m^{۳}}{EI}$$

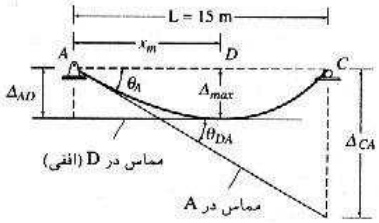
$$\theta_A = \frac{\Delta_{CA}}{L} = \frac{\frac{۲۰۰۰}{EI}}{۱۵} = \frac{۱۳۳۳/۳۳\ kN.m^{۲}}{EI}$$



نمودار $\frac{M}{EI}$، $\frac{kN.m}{EI}$

برای تعیین محل نقطهٔ (D) که بیشترین میزان تغییر مکان قائم (y_{max}) را دارد، از رابطهٔ: $\theta_{DA} = \theta_A$ استفاده می‌کنیم. این رابطه نشان می‌دهد برای این که شیب در نقطهٔ D صفر باشد (نقطهٔ D بیشترین تغییر مکان قائم را داشته باشد)، سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در حد فاصل دو نقطهٔ A و D باید برابر $\frac{۱۳۳۳/۳۳}{EI}$ باشد.

$$\theta_{DA} = \theta_A = \frac{۱۳۳۳/۳۳}{EI} \ \Rightarrow \ \frac{۱}{۲}\left[\frac{۴۰x_m}{EI}\right]x_m = \frac{۱۳۳۳/۳۳}{EI} \ \Rightarrow \ x_m = ۸/۱۶\ m$$



بیشترین میزان تغییر مکان:

لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در حد فاصل دو نقطهٔ A و D، حول نقطهٔ A = $\Delta_{max} = \Delta_{AD}$:

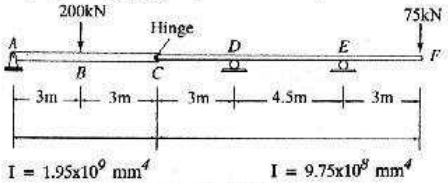
$$\Delta_{max} = \frac{۱}{۲}\frac{(۴)(۸/۱۶)}{EI}(۸/۱۶)\left[\frac{۲}{۳}\right](۸/۱۶) = \frac{۷۲۴۴/۵۱\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_{max} = \frac{۷۲۴۴/۵۱(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}\ N.mm^{۲}}{EI}$$

$$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۳}\ MPa \ , \ I = ۷۰۰ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴} \ \Rightarrow \ \Delta_{max} = \frac{۷۲۴۴/۵۱ \times ۱۰^{۱۲}}{(۲۰۰ \times ۱۰^{۳})(۷۰۰ \times ۱۰^{۶})} = ۵۱/۷\ mm$$

$\blacktriangleright \Delta_{max} = ۵۱/۷\ mm \downarrow$

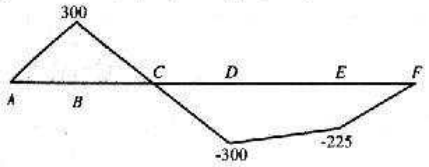
۴-۴ با استفاده از روش لنگر سطح مقادیر شیب در نقطهٔ A و تغییر مکان در نقطهٔ C از تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



$I = 1.95 \times 10^{9}\ mm^{4}$ $\qquad$ $I = 9.75 \times 10^{8}\ mm^{4}$

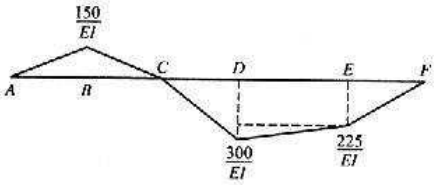
E = ۲۰۰ GPa

شکل ۴-۴



نمودار لنگر خمشی M، kN.m

چون در نقطهٔ C یک مفصل داخلی وجود دارد، پس در این نقطه منحنی الاستیک نیز دارای ناپیوستگی بوده و از این جهت باید قضایای لنگر سطح را به طور مجزا برای قطعات AC و CF در هر طرف مفصل C مورد استفاده قرار داد.



$I = ۹/۷۵\times۱۰^{۸}\ mm^{۴}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$ ، $\frac{M}{EI}$ نمودار

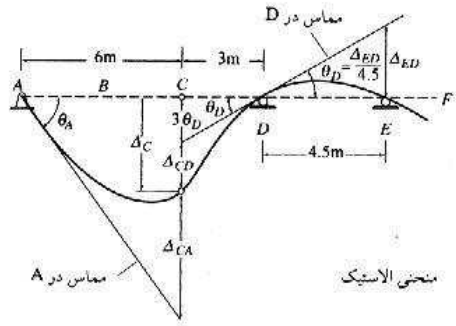
مقدار شیب در نقطهٔ D را محاسبه کرده آن را به عنوان مرجع برای محاسبهٔ شیب سایر نقاط در نظر می‌گیریم:

$$\theta_D = \frac{\Delta_{ED}}{۴/۵}$$

$$\Delta_{ED} = \frac{۱}{EI}\left[۲۲۵(۴/۵)(۲/۲۵) + \frac{۱}{۲}(۷۵)(۴/۵)(۳)\right]$$

$$\Delta_{ED} = \frac{۲۷۸۴/۳۷۵\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\theta_D = \frac{\Delta_{ED}}{۴/۵} = \frac{۲۷۸۴/۳۷۵}{۴/۵(EI)} = \frac{۶۱۸/۷۵\ kN.m^{۲}}{EI}$$



با توجه به شکل مقابل داریم:

$$\Delta_C = ۳\theta_D + \Delta_{CD} \qquad (I)$$

$$\Delta_{CD} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۳۰۰}{EI}\right](۳/۰)\left[\frac{۶/۰}{۳}\right] = \frac{۹۰۰\ kN.m^{۳}}{EI}$$

از رابطهٔ (I):

$$\Delta_C = ۳\left[\frac{۶۱۸/۷۵}{EI}\right] + \frac{۹۰۰}{EI} = \frac{۲۷۵۶/۲۵\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_C = \frac{۲۷۵۶/۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{EI} = \frac{۲۷۵۶/۲۵\times۱۰^{۱۲}}{(۲\times۱۰^{۵})(۹/۷۵\times۱۰^{۸})}$$

$$\Delta_C = ۱۴/۱۳\ mm \qquad \blacktriangleright\ \Delta_C = ۱۴/۱۳\ mm\ \downarrow$$

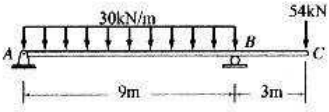
برای محاسبهٔ شیب در نقطهٔ A، با توجه به منحنی الاستیک تیر در قسمت AC داریم:

$$\theta_A = \frac{\Delta_C + \Delta_{CA}}{۶}$$

$$\Delta_{CA} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱۵۰}{EI}\right](۶)(۳) = \frac{۱۳۵۰\ kN.m^{۳}}{EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{۱}{۶}\left[\frac{۲۷۵۶/۲۵}{EI} + \frac{۱۳۵۰}{EI}\right] = \frac{۶۸۴/۳۷۵\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{۶۸۴/۳۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}\ N.mm^{۳}}{EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{۶۸۴/۳۷۵\times۱۰^{۹}}{(۲\times۱۰^{۵})(۹/۷۵\times۱۰^{۸})} = ۰/۰۰۳۵\ rad \qquad \blacktriangleright\ \theta_A = ۰/۰۰۳۵\ rad$$

۴-۵ با استفاده از روش لنگر سطح، تغییر مکان قائم نقطهٔ C از تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



$EI =$ ثابت ، $E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۷/۸۱۵\times۱۰^{۸}\ mm^{۴}$

شکل ۴-۵

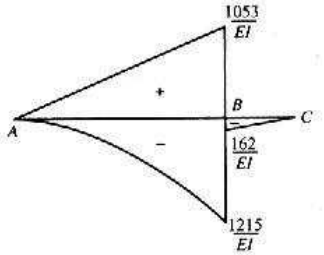
با توجه به بارهای مختلفی که بر تیر وارد می‌شود، نمودار لنگر خمشی بارگسترده و بار متمرکز را به طور جداگانه رسم کرده، در نهایت از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم.

شیب منحنی الاستیک تیر در نقطهٔ B را محاسبه کرده، آن را مبنای محاسبات بعدی قرار می‌دهیم.

$$\theta_B = \frac{\Delta_{AB}}{۹}$$

$$\Delta_{AB} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۱۰۵۳)(۹)(۶) - \frac{۱}{۳}(۱۲۱۵)(۹)\left[\frac{۳}{۴}\right](۹)\right] = \frac{۳۸۲۷/۲۵\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{\Delta_{AB}}{۹} = \frac{۳۸۲۷/۲۵}{۹(EI)} = \frac{۴۲۵/۲۵\ kN.m^{۲}}{EI}$$



$\frac{kN.m}{EI}$ ، $\frac{M}{EI}$ نمودار

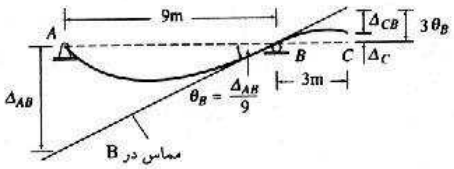
با توجه به شکل منحنی الاستیک داریم: $\Delta_C = ۳\theta_B - \Delta_{CB}$

$$\Delta_{CB} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱۶۲}{EI}\right](۳)\left[\frac{۶}{۳}\right] = \frac{۴۸۶\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_C = ۳\left[\frac{۴۲۵/۲۵}{EI}\right] - \frac{۴۸۶}{EI} = \frac{۷۸۹/۷۵\ kN.m^{۳}}{EI}$$

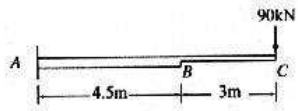
$$\Delta_C = \frac{۷۸۹/۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}\ N.mm^{۳}}{EI} \Rightarrow \Delta_C = \frac{۷۸۹/۷۵\times۱۰^{۱۲}}{(۲\times۱۰^{۵})(۷/۸۱۵\times۱۰^{۸})}$$

$$\Delta_C = ۵/۰۵\ mm \qquad \blacktriangleright\ \Delta_C = ۵/۰۵\ mm\ \uparrow$$

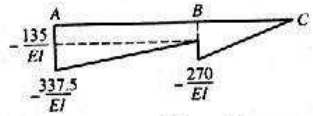


منحنی الاستیک

۴-۶ برای نقاط B و C از تیر نشان داده شده در شکل زیر مقادیر شیب و تغییر مکان را با استفاده از روش تیر فرضی محاسبه کنید.

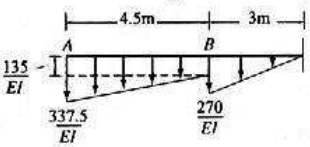


$E = ۲\times۱۰^{۵}$ MPa



نمودار $\frac{M}{EI}$، $\frac{kN.m}{EI}$ ، $I = ۱/۱۷۲\times۱۰^{۹}\ mm^{۴}$

شکل ۴-۶



نیر فرضی $I = ۱/۱۷۲\times۱۰^{۹}\ mm^{۴}$

$$\left.\begin{array}{l} I_{BC} = I = ۱/۱۷۲\times۱۰^{۹} mm^{۴} \\ I_{AB} = ۲/۳۴۴\times۱۰^{۹} mm^{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow I_{AB} = ۲I_{BC}$$

تیر فرضی در شکل مقابل نشان داده شده است. با توجه به این که نقطهٔ A در تیر حقیقی گیردار است، این نقطه در تیر فرضی آزاد خواهد بود و همچنین چون نقطهٔ C در تیر حقیقی آزاد است، پس نقطهٔ مزبور در تیر فرضی گیردار خواهد شد. با توجه به این که نمودار $\frac{M}{EI}$ منفی است، جهت بار وارد بر تیر فرضی رو به پایین خواهد بود.

در تیر فرضی: $+\uparrow S_B = \frac{۱}{EI}\left[(-۱۳۵)(۴/۵) - \frac{۱}{۲}(۲۰۲/۵)(۴/۵)\right] = -\frac{۱۰۶۳/۱۲۵\ kN.m^{۲}}{EI}$ ، برش در تیر فرضی = شیب تیر حقیقی

$$\theta_B = -\frac{۱۰۶۳/۱۲۵\ kN.m^{۲}}{EI} = -\frac{۱۰۶۳/۱۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲\times۱۰^{۵})(۱/۱۷۲\times۱۰^{۹})} = -۰/۰۰۴۵\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_B = ۰/۰۰۴۵\ rad \curvearrowleft$$

در تیر فرضی: $+)\ M_B = \frac{۱}{EI}\left[-۱۳۵(۴/۵)(۲/۲۵) - \frac{۱}{۲}(۲۰۲/۵)(۴/۵)(۳)\right] = -\frac{۲۷۳۳/۷۵\ kN.m^{۳}}{EI}$ ، لنگر خمشی در تیر فرضی = تغییر مکان تیر حقیقی

$$\Delta_B = -\frac{۲۷۳۳/۷۵\ kN.m^{۳}}{EI} = -\frac{۲۷۳۳/۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲\times۱۰^{۵})(۱/۱۷۲\times۱۰^{۹})} = -۱۱/۶۶\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_B = ۱۱/۶۶\ mm \downarrow$$

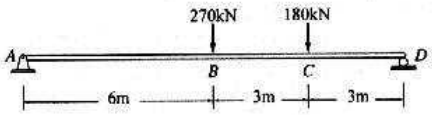
در تیر فرضی: $+\uparrow S_C = \frac{۱}{EI}\left[-۱۳۵(۴/۵) - \frac{۱}{۲}(۲۰۲/۵)(۴/۵) - \frac{۱}{۲}(۲۷۰)(۳)\right] = -\frac{۱۴۶۸/۱۲۵\ kN.m^{۲}}{EI}$

$$\theta_C = -\frac{۱۴۶۸/۱۲۵\ kN.m^{۲}}{EI} = -\frac{۱۴۶۸/۱۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲\times۱۰^{۵})(۱/۱۷۲\times۱۰^{۹})} = -۰/۰۰۶۳\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_C = ۰/۰۰۶۳\ rad \curvearrowleft$$

در تیر فرضی: $+)\ M_C = \frac{۱}{EI}\left[-۱۳۵(۴/۵)(۵/۲۵) - \frac{۱}{۲}(۲۰۲/۵)(۴/۵)(۶) - \frac{۱}{۲}(۲۷۰)(۳)(۲)\right] = -\frac{۶۷۳۳/۱۲۵\ kN.m^{۳}}{EI}$

$$\Delta_C = -\frac{۶۷۳۳/۱۲۵\ kN.m^{۳}}{EI} = -\frac{۶۷۳۳/۱۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲\times۱۰^{۵})(۱/۱۷۲\times۱۰^{۹})} = -۲۸/۷۲\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = ۲۸/۷۲\ mm \downarrow$$

۴-۷ با استفاده از روش تیر فرضی، شیب نقاط A و D و تغییر مکان نقاط B و C از تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



$E = ۱۲۵۰۰$ MPa ، $I = ۱/۸\times۱۰^{۱۰}\ mm^{۴}$ ، EI = ثابت

تیر فرضی همانند تیر حقیقی خواهد بود. با توجه به مثبت بودن نمودار $\frac{M}{EI}$، جهت بار وارد بر تیر فرضی به سمت بالا خواهد بود.

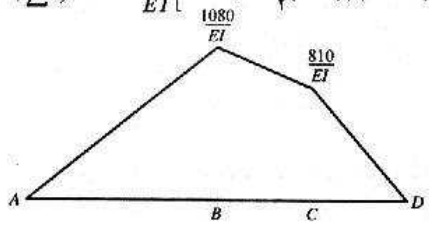
محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی در تیر فرضی:

$$+\circlearrowleft \sum M_D = ۰ \ : \ A_y(۱۲) - \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۱۰۸۰)(۶)\left[\frac{۶}{۳}+۶\right] + \right.$$

شکل ۴-۷

$$810(3)(4/5)+\frac{1}{2}(2700)(3)\left[\frac{6}{3}+3\right]+\frac{1}{2}(810)(3)\left[\frac{6}{3}\right]=0 \quad \Rightarrow \quad A_y=\frac{3442/5\ kN.m^2}{EI}$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \ : \ \frac{1}{EI}\left[-3442/5+\frac{1}{2}(1080)(6)+810(3)+\frac{1}{2}(2700)(3)+\frac{1}{2}(810)(3)\right]-D_y=0 \quad \Rightarrow \quad D_y=\frac{3847/5\ kN.m^2}{EI}$$



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

برش موجود در تیر فرضی در سمت راست نقطهٔ A = شیب در نقطهٔ A از تیر حقیقی

در تیر فرضی:

$$+\uparrow S_{A,R}=-A_y=-\frac{3442/5\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_A=-\frac{3442/5\ kN.m^2}{EI}=-\frac{3442/5(1000)(1000)^2}{(12500)(1/8\times10^{10})}=-0/015\ rad$$

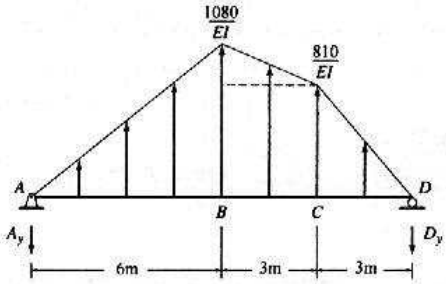
$$\blacktriangleright \theta_A=0/015\ \ rad \ \curvearrowleft$$

در تیر فرضی: برش موجود در سمت چپ نقطهٔ D = شیب در نقطهٔ D از تیر حقیقی

$$+\downarrow S_{D,L}=D_y=\frac{3847/5\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_D=\frac{3847/5\ kN.m^2}{EI}=\frac{3847/5(1000)(1000)^2}{(12500)(1/8\times10^{10})}=0/017\ rad$$

$$\blacktriangleright \theta_D=0/017\ \ rad \ \curvearrowright$$



در تیر فرضی:

$$+\circlearrowleft\sum M_B=\frac{1}{EI}\left[-3442/5(6)+\frac{1}{2}(1080)(6)\left[\frac{6}{3}\right]\right]=-\frac{14175\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_B=-\frac{14175\ kN.m^3}{EI}=-\frac{14175(1000)(1000)^3}{(12500)(1/8\times10^{10})}=-63\ mm$$

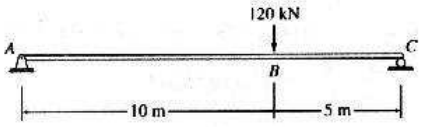
$$\blacktriangleright \Delta_B=63\ mm\downarrow$$

در تیر فرضی:

$$+\circlearrowleft\sum M_C=\frac{1}{EI}\left[-3847/5(3)+\frac{1}{2}(810)(3)\left[\frac{3}{3}\right]\right]=-\frac{10327/5\ kN.m^3}{EI}$$

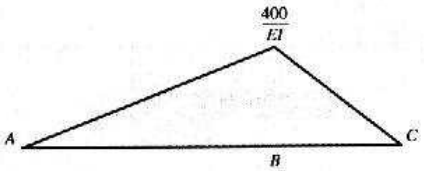
$$\Delta_C=-\frac{10327/5\ kN.m^3}{EI}=-\frac{10327/5(1000)(1000)^3}{(12500)(1/8\times10^{10})}=-45/9\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C=45/9\ mm\downarrow$$

۸-۴ حداکثر تغییر مکان قائم را در تیر نشان داده شده در شکل زیر، با استفاده از روش تیر فرضی محاسبه کنید.

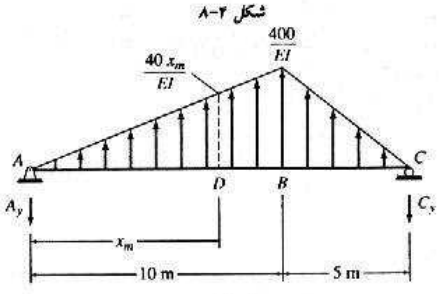


EI = ثابت ، $E = 200\ GPa$ ، $I = 700\times10^6\ mm^4$

شکل ۸-۴



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$



تیر فرضی

تیر فرضی همانند تیر حقیقی خواهد بود. با توجه به مثبت بودن نمودار $\frac{M}{EI}$، جهت بار وارد بر تیر فرضی به سمت بالا خواهد بود.

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی در تیر فرضی:

$$+\circlearrowleft\sum M_C=0 \ :$$

$$A_y(15)-\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(400)(10)\left[\frac{10}{3}+5\right]+\frac{1}{2}(400)(5)\left[\frac{10}{3}\right]\right]=0$$

$$A_y=\frac{1333/33\ kN.m^2}{EI}$$

اگر بیشترین لنگر خمشی در تیر فرضی (بیشترین تغییر مکان در تیر حقیقی)، در نقطهٔ

D که به فاصلهٔ x_m از تکیه‌گاه A قرار دارد، پدید آید، در این صورت در نقطهٔ D از تیر فرضی برش برابر صفر خواهد بود.

در تیر فرضی:

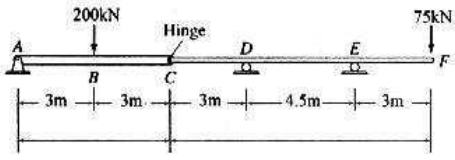
$$+\uparrow S_D = \frac{1}{EI}\left[-۱۳۳۳/۳۳ + \frac{1}{2}(۴۰x_m)(x_m)\right] = ۰ \quad \Rightarrow \quad x_m = ۸/۱۶\ m$$

برای محاسبهٔ بیشترین تغییر مکان لازم است که با توجه به نمودار جسم آزاد تیر فرضی، لنگر خمشی در نقطهٔ D از تیر فرضی محاسبه شود.

$$)+\ M_{max} = M_D = \frac{1}{EI} = \left[-۱۳۳۳/۳۳(۸/۱۶) + \frac{1}{2}(۴۰)(۸/۱۶)^2\left[\frac{۸/۱۶}{3}\right]\right] = -\frac{۷۲۴۴/۵۱\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_{max} = -\frac{۷۲۴۴/۵۱\ kN.m^3}{EI} = -\frac{۷۲۴۴/۵۱(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^3}{(۲۰۰\times۱۰^3)(۷۰۰\times۱۰^6)} = -۵۱/۷۴\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_{max} = ۵۱/۷۴\ mm\downarrow$$

۹-۴ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر مقادیر شیب در نقطهٔ A و تغییر مکان در نقطهٔ C را با استفاده از روش تیر فرضی محاسبه کنید.



E = ۲۰۰ GPa

شکل ۹-۴

با توجه به این که در نقاط E و D از تیر حقیقی تکیه‌گاههای داخلی وجود دارد، این نقاط در تیر فرضی به مفصل داخلی تبدیل خواهند شد. در نقطهٔ F تیر حقیقی آزاد است، پس تیر مجازی در این نقطه گیردار می‌شود.

در آن نواحی که نمودار $\frac{M}{EI}$ مثبت است، بار وارد بر تیر فرضی به سمت بالا و در آن نواحی که نمودار $\frac{M}{EI}$ منفی است، بار وارد بر تیر فرضی به سمت پایین است.

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی در تیر فرضی:

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{AD} = ۰ \ :$$

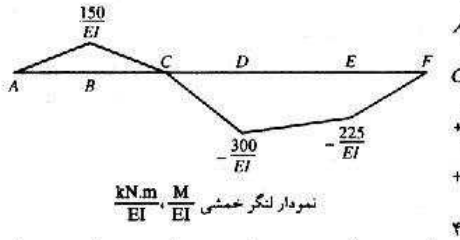
$$A_y(۹) - \frac{1}{2}\left[\frac{۱۵۰}{EI}\right](۶)(۶) + C_y(۳) + \frac{1}{2}\left[\frac{۳۰۰}{EI}\right](۳)\left[\frac{۳}{۳}\right] = ۰$$

$$C_y + ۳A_y = \frac{۷۵۰}{EI} \qquad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{AE} = ۰ \ : \ A_y(۱۳/۵) - \frac{1}{2}\left[\frac{۱۵۰}{EI}\right](۶)(۱۰/۵) + C_y(۷/۵)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{۳۰۰}{EI}\right](۳)\left[\frac{۳}{۳}+۴/۵\right] + \frac{۲۲۵}{EI}(۴/۵)(۲/۲۵) + \frac{1}{2}\left[\frac{۷۵}{EI}\right](۴/۵)(۳) = ۰$$

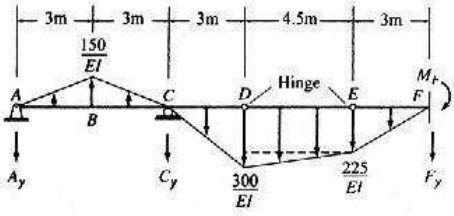
$$۴/۵A_y + ۲/۵C_y = -\frac{۵۹۳/۷۵}{EI} \qquad (II)$$



نمودار لنگر خمشی $\frac{kN.m}{EI}$، $\frac{M}{EI}$

از حل همزمان معادلات (I) و (II) مقادیر A_y و C_y محاسبه می‌شوند.

$$A_y = \frac{۶۸۴/۳۷۵\ kN.m^2}{EI} \quad , \quad C_y = -\frac{۱۳۰۳/۱۲۵\ kN.m^2}{EI}$$



تیر فرضی

شیب نقطهٔ A در تیر حقیقی برابر است با برش موجود در این نقطه در تیر فرضی.

$$S_{A/R} = \theta_A$$

$$+\uparrow S_{A/R} = -A_y = -\frac{۶۸۴/۳۷۵\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_A = -\frac{۶۸۴/۳۷۵}{EI} = -\frac{۶۸۴/۳۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^2}{(۲۰۰\times۱۰^3)(۹/۷۵\times۱۰^8)} = -۰/۰۰۳۵\ rad$$

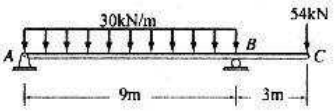
$$\blacktriangleright \theta_A = ۰/۰۰۳۵\ rad \circlearrowleft$$

تغییر مکان قائم نقطهٔ C در تیر حقیقی برابر است با لنگر خمشی موجود در این نقطه در تیر فرضی: $M_C = \Delta_C$.

$$)+\ \sum M_C = \frac{1}{EI}\left[-۶۸۴/۳۷۵(۶) + \frac{1}{2}(۱۵۰)(۶)(۳)\right] = -\frac{۲۷۵۶/۲۵\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_C = -\frac{۲۷۵۶/۲۵}{EI} = -\frac{۲۷۵۶/۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^3}{(۲۰۰\times۱۰^3)(۹/۷۵\times۱۰^8)} = -۱۴/۱۳\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = ۱۴/۱۳\ mm\downarrow$$

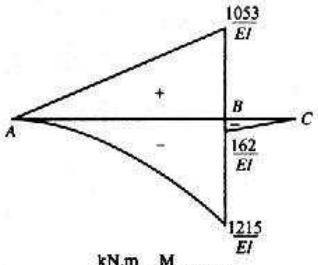
۴-۱۰ با استفاده از روش تیر فرضی، تغییر مکان قائم نقطهٔ C از تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



EI = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa
I = ۷/۸۱۵×۱۰^۸ mm^۴

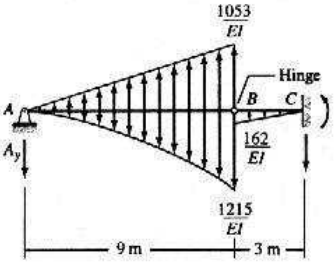
شکل ۴-۱۰

با توجه به بارهای مختلفی که بر تیر وارد می‌شود، نمودار لنگر خمشی بارگسترده و بار متمرکز را به طور جداگانه رسم کرده، در نهایت از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم.



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی در تیر فرضی:



$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; A_y(9) + \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(1215)(9)\left[\frac{9}{4}\right] - \frac{1}{2}(1053)(9)\left[\frac{9}{3}\right]\right] = 0$$

$$A_y = \frac{668/25\ kN.m^2}{EI}$$

تغییر مکان قائم نقطهٔ C در تیر حقیقی برابر لنگر خمشی این نقطه در تیر فرضی است: $M_C = \Delta_C$

$$+\circlearrowright \sum M_C =$$

$$\frac{1}{EI}\left[-668/25(12) - \frac{1}{3}(1215)(9)\left[\frac{9}{4}+3\right] + \frac{1}{2}(1053)(9)(6) - \frac{1}{2}(162)(3)\left[\frac{6}{3}\right]\right]$$

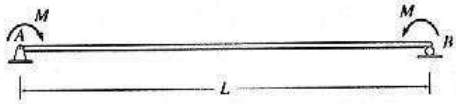
$$= \frac{789/75\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_C = \frac{789/75}{EI} = \frac{789/75(1000)(1000)^3}{(2\times10^5)(7/815\times10^8)} = 5/05\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = 5/05\ mm \uparrow$$

برای تیرهای نشان داده شده در مسایل زیر معادلهٔ منحنی الاستیک را با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم تعیین کنید.

۴-۱۱

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



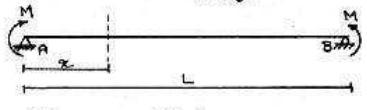
شکل ۴-۱۱

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; B_y(L) + M - M = 0 \;\Rightarrow\; B_y = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{B}_y = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 0 + A_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 0 \qquad \blacktriangleright A_y = 0$$



معادلهٔ لنگر خمشی M:

$$M_x = M$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI}dx = \frac{Mx}{EI} + C_1 \qquad (I)$$

$$y = \int \frac{Mx}{EI} + C_1 dx = \frac{Mx^2}{2EI} + C_1 x + C_2 \qquad (II)$$

برای محاسبهٔ ثابتهای انتگرال‌گیری C_1 و C_2 از شرایط مرزی زیر استفاده می‌کنیم.

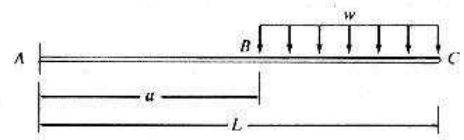
در نقطهٔ B: $x = L \;,\; y = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = -\frac{ML}{2EI}$ و در نقطهٔ A: $x = 0 \;,\; y = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$

معادلهٔ شیب: $\theta = \frac{M}{EI}\left[x - \frac{L}{2}\right]$ و معادلهٔ تغییر مکان: $y = \frac{Mx}{2EI}(x - L)$

۴-۱۲

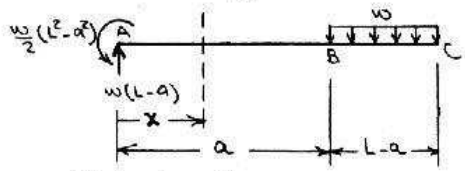
محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright A_x = 0$$



شکل ۴-۱۲

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; -w(L-a)\frac{(L+a)}{2} + M_A = 0$$
$$M_A = \frac{w}{2}\left[L^2 - a^2\right] \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = \frac{w}{2}\left[L^2 - a^2\right] \circlearrowleft$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - w(L-a) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = w(L-a)$$
$$\blacktriangleright \vec{A}_y = w(L-a) \uparrow$$



در قسمت AB $(0 \le x \le a)$:

$$M = -\frac{w}{2}\left[L^2 - a^2\right] + w(L-a)x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \;\Rightarrow\; EI\theta = EI\frac{dy}{dx} = \int -\frac{w}{2}\left[L^2 - a^2\right] + w(L-a)x\,dx$$
$$= -\frac{w}{2}\left[L^2 - a^2\right]x + \frac{w}{2}(L-a)x^2 + C_1$$
$$EIy = \int -\frac{w}{2}\left[L^2 - a^2\right]x + \frac{w}{2}(L-a)x^2 + C_1\,dx$$
$$EIy = -\frac{w}{4}\left[L^2 - a^2\right]x^2 + \frac{w}{6}(L-a)x^3 + C_1x + C_2$$

برای محاسبهٔ ثابتهای انتگرال‌گیری C_1 و C_2 از شرایط مرزی زیر استفاده می‌کنیم.

در نقطهٔ A: $x = 0 \;,\; \theta = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$ ، $x = 0 \;,\; y = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$

معادلهٔ شیب: $\theta = \frac{wx}{2EI}\left[a^2 - L^2 + (L-a)x\right]$

و معادلهٔ تغییر مکان: $y = \frac{wx^2}{2EI}\left[\frac{a^2 - L^2}{2} + \frac{(L-a)x}{3}\right]$

در قسمت BC $(a \le x \le L)$:

$$M = -\frac{w}{2}\left[L^2 - a^2\right] + w(L-a)x - \frac{w}{2}(x-a)^2$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \;\Rightarrow\; EI\theta = EI\frac{dy}{dx} = \int -\frac{w}{2}\left[L^2 - a^2\right] + w(L-a)x - \frac{w}{2}(x-a)^2\,dx = -\frac{w}{2}\left[L^2 - a^2\right]x + \frac{w}{2}(L-a)x^2 - \frac{w}{6}(x-a)^3 + C_3$$
$$EIy = \int -\frac{w}{2}\left[L^2 - a^2\right]x + \frac{w}{2}(L-a)x^2 - \frac{w}{6}(x-a)^3 + C_3\,dx = -\frac{w}{4}\left[L^2 - a^2\right]x^2 + \frac{w}{6}(L-a)x^3 - \frac{w}{24}(x-a)^4 + C_3x + C_4$$

برای محاسبهٔ ثابتهای انتگرال‌گیری C_3 و C_4 از شرایط مرزی زیر استفاده می‌کنیم.

در نقطهٔ B که در قسمت AB و BC به هم رسیده‌اند، باید شرایط سازگاری شیب $(\theta_{B,L} = \theta_{B,R})$ و تغییر مکان $(y_{B,L} = y_{B,R})$ تأمین شود.

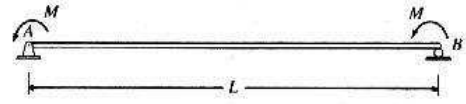
$$\theta_{B,L} = \theta_{B,R} \;\Rightarrow\; \frac{wa}{2EI}\left[a^2 - L^2 + (L-a)a\right] = \frac{w}{2EI}\left[-\left[L^2 - a^2\right]a + (L-a)a^2 - 0 + \frac{2C_3}{w}\right] \;\Rightarrow\; C_3 = 0$$

$$y_{B,L} = y_{B,R} \;\Rightarrow\; \frac{wa^2}{2EI}\left[\frac{a^2 - L^2}{2} + \frac{(L-a)a}{3}\right] = \frac{w}{2EI}\left[-\frac{\left[L^2 - a^2\right]a^2}{2} + \frac{(L-a)a^3}{3} - 0 + \frac{2C_4}{w}\right] \;\Rightarrow\; C_4 = 0$$

معادلهٔ شیب: $\theta = \frac{w}{2EI}\left[-\left[L^2 - a^2\right]x + (L-a)x^2 - \frac{(x-a)^3}{3}\right]$ و معادلهٔ تغییر مکان: $y = \frac{w}{2EI}\left[-\frac{\left[L^2 - a^2\right]x^2}{2} + \frac{(L-a)x^3}{3} - \frac{(x-a)^4}{12}\right]$

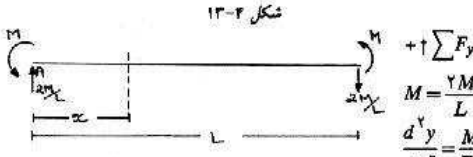
۱۳-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



$$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M + M + A_y(L) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = -\frac{2M}{L}$$
$$\blacktriangleright \vec{A}_y = \frac{2M}{L} \uparrow$$

شکل ۴-۱۳



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; B_y - \frac{2M}{L} = 0 \;\Rightarrow\; B_y = \frac{2M}{L} \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = \frac{2M}{L} \downarrow$$

معادلهٔ لنگر خمشی M:

$$M = \frac{2M}{L}x - M$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \;\Rightarrow\; EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2M}{L}x - M$$
$$EI\theta = EI\frac{dy}{dx} = \int \frac{2M}{L}x - M\,dx = \frac{M}{L}x^2 - Mx + C_1$$

$$EIy=\int\left(\frac{M}{L}x^{۲}-Mx+C_{۱}\right)dx=\frac{M}{۳L}x^{۳}-\frac{M}{۲}x^{۲}+C_{۱}x+C_{۲}$$

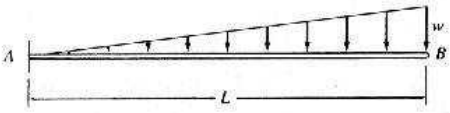
برای محاسبهٔ ثابتهای انتگرالگیری $C_{۱}$ و $C_{۲}$ از شرایط مرزی زیر استفاده می‌کنیم.

در نقطهٔ A: $x=۰\ ,\ y=۰\ \Rightarrow\ C_{۲}=۰$ در نقطهٔ B: $x=L\ ,\ y=۰\ \Rightarrow\ C_{۱}=\frac{ML}{۶EI}$

معادلهٔ شیب: $\theta=\frac{M}{۶EIL}\left(۶x^{۲}-۶Lx+L^{۲}\right)$ معادلهٔ تغییر مکان: $y=\frac{Mx}{۶EIL}\left(۲x^{۲}-۳Lx+L^{۲}\right)$

۱۴-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



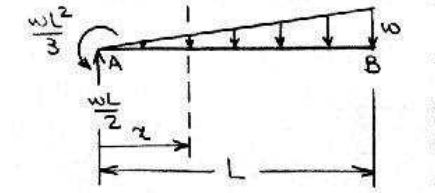
شکل ۲-۱۴

$$\pm\sum F_{x}=۰\ :\ A_{x}=۰\qquad \blacktriangleright\vec{A}_{x}=۰$$

$$+)\sum M_{A}=۰\ :\ M_{A}-\left[\frac{wL}{۲}\right]\left[\frac{۲}{۳}L\right]=۰\ \Rightarrow\ M_{A}=\frac{wL^{۲}}{۳}$$

$$\blacktriangleright\vec{M}_{A}=\frac{wL^{۲}}{۳}\ )$$

$$+\uparrow\sum F_{y}=۰\ :\ A_{y}-\frac{wL}{۲}=۰\ \Rightarrow\ A_{y}=\frac{wL}{۲}\qquad \blacktriangleright A_{y}=\frac{wL}{۲}\uparrow$$



معادلهٔ لنگر خمشی: $M=-\frac{wL^{۲}}{۳}+\frac{wL}{۲}x-\left[\frac{wx}{L}\right]\left[\frac{x}{۲}\right]\left[\frac{x}{۳}\right]$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{M}{EI}\ \Rightarrow\ EI\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=-\frac{wL^{۲}}{۳}+\frac{wL}{۲}x-\frac{wx^{۳}}{۶L}$$

$$EI\theta=EI\frac{dy}{dx}=\int\left(-\frac{wL^{۲}}{۳}+\frac{wL}{۲}x-\frac{wx^{۳}}{۶L}\right)dx=-\frac{wL^{۲}}{۳}x+\frac{wL}{۴}x^{۲}-\frac{wx^{۴}}{۲۴L}+C_{۱}$$

$$EIy=\int\left(-\frac{wL^{۲}}{۳}x+\frac{wL}{۴}x^{۲}-\frac{wx^{۴}}{۲۴L}+C_{۱}\right)dx=-\frac{wL^{۲}}{۶}x^{۲}+\frac{wL}{۱۲}x^{۳}-\frac{wx^{۵}}{۱۲۰L}+C_{۱}x+C_{۲}$$

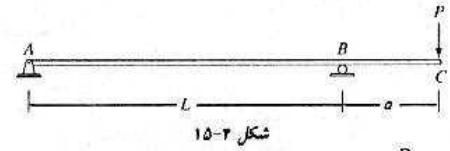
برای محاسبهٔ ثابتهای انتگرالگیری $C_{۱}$ و $C_{۲}$ از شرایط مرزی زیر استفاده می‌کنیم.

در نقطهٔ A: $x=۰\ ,\ y=۰\ \Rightarrow\ C_{۲}=۰$ ، $x=۰\ ,\ \theta=۰\ \Rightarrow\ C_{۱}=۰$

معادلهٔ شیب: $\theta=\frac{wx}{۲۴EIL}\left(-۸L^{۳}+۶L^{۲}x-x^{۳}\right)$ ، معادلهٔ تغییر مکان: $y=\frac{wx^{۲}}{۱۲۰EIL}\left(-۲۰L^{۳}+۱۰L^{۲}x-x^{۳}\right)$

۱۵-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:



شکل ۲-۱۵

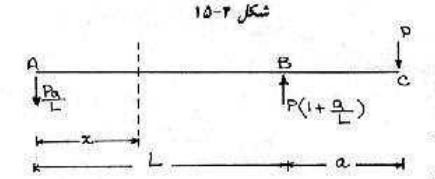
$$\pm\sum F_{x}=۰\ :\ A_{x}=۰\qquad \blacktriangleright\vec{A}_{x}=۰$$

$$+)\sum M_{A}=۰\ :\ B_{y}(L)-P(L+a)=۰\ \Rightarrow\ B_{y}=P\left(۱+\frac{a}{L}\right)$$

$$\blacktriangleright\vec{B}_{y}=P\left(۱+\frac{a}{L}\right)\uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_{y}=۰\ :\ P\left(۱+\frac{a}{L}\right)+A_{y}-P=۰\ \Rightarrow\ A_{y}=-\frac{Pa}{L}$$

$$\blacktriangleright\vec{A}_{y}=\frac{Pa}{L}\downarrow$$



در قسمت AB $(۰\le x\le L)$: $M=-\frac{Pa}{L}x$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{M}{EI}\ \Rightarrow\ EI\theta=EI\frac{dy}{dx}=\int-\frac{Pa}{L}x\,dx=-\frac{Pa}{۲L}x^{۲}+C_{۱}$$

$$EIy=\int\left(-\frac{Pa}{۲L}x^{۲}+C_{۱}\right)dx=-\frac{Pa}{۶L}x^{۳}+C_{۱}x+C_{۲}$$

برای محاسبهٔ ثابتهای انتگرالگیری $C_{۱}$ و $C_{۲}$، از شرایط مرزی زیر استفاده می‌کنیم.

در نقطهٔ A: $x=۰\ ,\ y=۰\ \Rightarrow\ C_{۲}=۰$ ،

معادلهٔ شیب: $\theta=\frac{PaL}{۶EI}\left(۱-۳\frac{x^{۲}}{L^{۲}}\right)$ ، معادلهٔ تغییر مکان:

در نقطهٔ B: $x=L\ ,\ y=۰\ \Rightarrow\ C_{۱}=\frac{PaL}{۶EI}$

$$y=\frac{PaLx}{۶EI}\left(۱-\frac{x^{۲}}{L^{۲}}\right)$$

در قسمت BC $(L\le x\le L+a)$:

$$M=-P(L+a-x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI} \Rightarrow EI\theta=EI\frac{dy}{dx}=\int -P(L+a-x)dx=-P\left[Lx+ax-\frac{x^2}{2}\right]+C_3$$

$$EIy=\int -P\left[Lx+ax-\frac{x^2}{2}\right]+C_3dx=-P\left[\frac{Lx^2}{2}+\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]+C_3x+C_4$$

برای محاسبهٔ ثابتهای انتگرالگیری C_3 و C_4 از شرایط مرزی زیر استفاده می‌کنیم.

در نقطهٔ B که دو قسمت AB و BC به هم رسیده‌اند، باید شرایط سازگاری شیب ($\theta_{B,L}=\theta_{B,R}$) و صفر بودن تغییر مکان ($y_B=0$) تأمین شود.

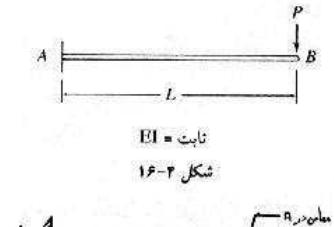
$$\theta_{B,L}=\theta_{B,R} \Rightarrow \frac{PaL}{6EI}\left[1-3\frac{L^2}{L^2}\right]=\frac{1}{EI}\left[-P\left[L^2+aL-\frac{L^2}{2}\right]+C_3\right] \Rightarrow C_3=PL\left[\frac{L}{2}+\frac{2}{3}a\right]$$

$$x=L\ ,\ y=0 \Rightarrow -P\left[\frac{L^3}{2}+\frac{aL^2}{2}-\frac{L^3}{6}\right]+PL^2\left[\frac{L}{2}+\frac{2}{3}a\right]+C_4=0 \Rightarrow C_4=-\frac{PL^2}{6}(L+a)$$

معادلهٔ شیب: $\theta=\frac{PL}{EI}\left[\frac{x^2}{2L}-x\left[1+\frac{a}{L}\right]+\frac{L}{2}+\frac{2}{3}a\right]$ و معادلهٔ تغییر مکان: $y=\frac{PL}{EI}\left[\frac{x^3}{6L}-\frac{x^2}{2}\left[1+\frac{a}{L}\right]+x\left[\frac{L}{2}+\frac{2}{3}a\right]-\frac{L}{6}(L+a)\right]$

در مسایل ۴-۱۶ و ۴-۱۷ مقدار شیب و تغییر مکان در نقطهٔ B را با استفاده از روش لنگر سطح محاسبه کنید.

۴-۱۶



شکل ۴-۱۶

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

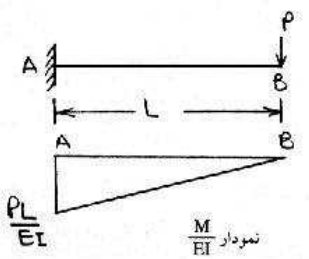
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 : A_x=0 \quad \blacktriangleright \vec{A}_x=0$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 : A_y-P=0$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y=P\uparrow$$

$$+\circlearrowleft\sum M_A=0 : M_A-PL=0$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A=PL\circlearrowleft$$



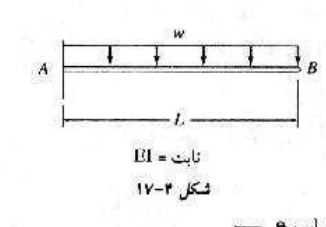
نمودار $\frac{M}{EI}$



$$\theta_{BA}=\theta_B-\theta_A\ ,\ \theta_A=0 \Rightarrow \theta_B=\theta_{BA}=\frac{1}{2}(L)\left[\frac{PL}{EI}\right]=\frac{PL^2}{2EI} \quad \blacktriangleright \theta_B=\frac{PL^2}{2EI}\curvearrowright$$

$$\Delta_B=\Delta_{BA}=\frac{PL^2}{2EI}\left[\frac{2L}{3}\right]=\frac{PL^3}{3EI} \quad \blacktriangleright \Delta_B=\frac{PL^3}{3EI}\downarrow$$

۴-۱۷



شکل ۴-۱۷

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

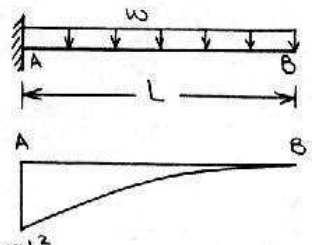
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 : A_x=0 \quad \blacktriangleright \vec{A}_x=0$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 : A_y-w(L)=0$$

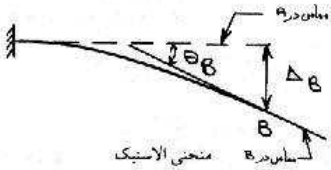
$$\blacktriangleright \vec{A}_y=wL\uparrow$$

$$+\circlearrowleft\sum M_A=0 : M_A-(wL)\left[\frac{L}{2}\right]=0$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A=\frac{wL^2}{2}\circlearrowleft$$



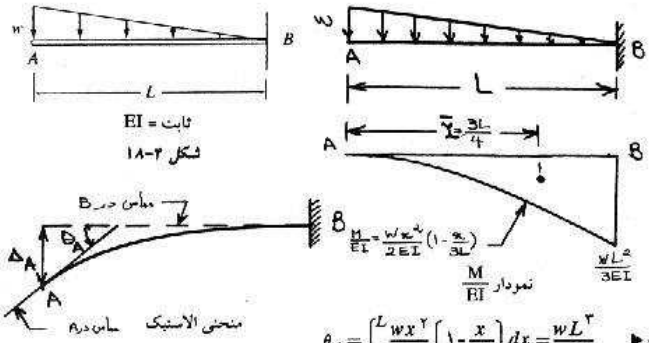
نمودار $\frac{M}{EI}$



$$\theta_{BA}=\theta_B-\theta_A\ ,\ \theta_A=0 \Rightarrow \theta_B=\theta_{BA}=\frac{1}{3}(L)\left[\frac{wL^2}{2EI}\right]=\frac{wL^3}{6EI} \quad \blacktriangleright \theta_B=\frac{wL^3}{6EI}\curvearrowright$$

$$\Delta_B=\Delta_{BA}=\frac{wL^3}{6EI}\left[\frac{3}{4}L\right]=\frac{wL^4}{8EI} \quad \blacktriangleright \Delta_B=\frac{wL^4}{8EI}\downarrow$$

۴-۱۸ مقادیر شیب و تغییر مکان نقطهٔ A را در تیر نشان داده شده با استفاده از روش لنگر سطح محاسبه کنید.



محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \quad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; B_y - w\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{B}_y = \frac{wL}{2}\uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; M_B + \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{2}{3}L\right) = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_B = \frac{wL^2}{3} \circlearrowright$$

$$\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B \;,\; \theta_B = 0 \;:$$

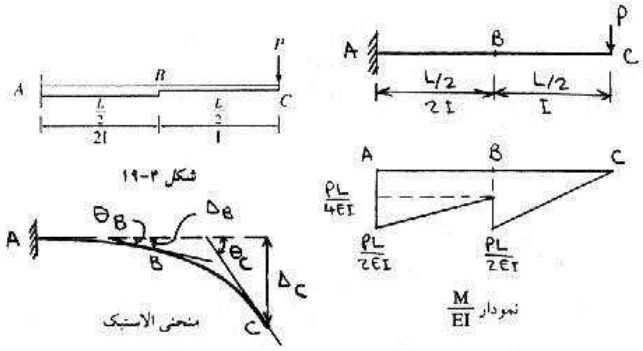
$$\theta_A = \theta_{AB} = \int_0^L \frac{M}{EI}dx$$

$$\theta_A = \int_0^L \frac{wx^2}{2EI}\left(1 - \frac{x}{3L}\right)dx = \frac{wL^3}{8EI} \quad \blacktriangleright \theta_A = \frac{wL^3}{8EI} \measuredangle$$

$$\Delta_A = \Delta_{AB} = \int_0^L \frac{M}{EI}(x)dx = \int_0^L \frac{wx^2}{2EI}\left(1 - \frac{x}{3L}\right)x\,dx = \frac{11}{120}\frac{wL^4}{EI} \quad \blacktriangleright \Delta_A = \frac{11}{120}\frac{wL^4}{EI}\downarrow$$

در مسایل زیر با استفاده از روش لنگر سطح مقادیر شیب و تغییر مکان نقاط B و C را به دست آورید.

۱۹-۴



محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \quad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - P = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = P\uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - P(L) = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A = PL \circlearrowleft$$

$$\theta_{BA} = \theta_B - \theta_A \;,\; \theta_A = 0 \;\Rightarrow\; \theta_{BA} = \theta_B$$

$$\theta_B = \theta_{BA} = \frac{L}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{PL}{4EI}\right)$$

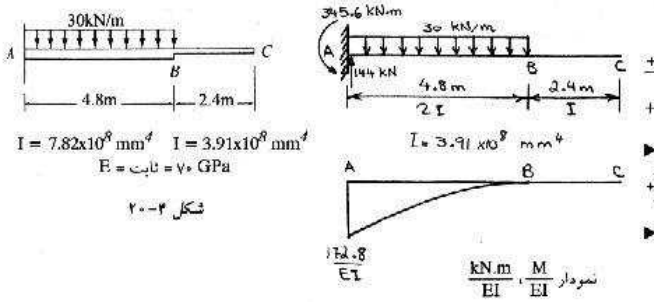
$$\theta_B = \frac{3PL^2}{16EI} \quad \blacktriangleright \theta_B = \frac{3PL^2}{16EI} \measuredangle$$

$$\Delta_B = \Delta_{BA} = \frac{PL^2}{8EI}\left(\frac{L}{4}\right) + \frac{PL^2}{16EI}\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{5PL^3}{96EI} \quad \blacktriangleright \Delta_B = \frac{5PL^3}{96EI}\downarrow$$

$$\theta_{CA} = \theta_C - \theta_A \;,\; \theta_A = 0 \;\Rightarrow\; \theta_C = \theta_{CA} = \frac{3PL^2}{16EI} + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{PL}{2EI}\right) = \frac{5PL^2}{16EI} \quad \blacktriangleright \theta_C = \frac{5PL^2}{16EI} \measuredangle$$

$$\Delta_C = \Delta_{CA} = \frac{PL^2}{8EI}\left(\frac{3L}{4}\right) + \frac{PL^2}{16EI}\left(\frac{5L}{6}\right) + \frac{PL^2}{8EI}\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{3PL^3}{16EI} \quad \blacktriangleright \Delta_C = \frac{3PL^3}{16EI}\downarrow$$

۲۰-۴



محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

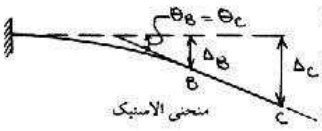
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \quad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - 30(4/8) = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{A}_y = 144 \;\; kN\uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - 30(4/8)(2/4) = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A = 345/6 \;\; kN.m \circlearrowleft$$



$$\theta_{BA}=\theta_B-\theta_A \quad , \quad \theta_A=0 \Rightarrow \theta_B=\theta_C=\theta_{BA}$$

$$\Delta_C \quad \theta_B=\theta_{BA}=\frac{1}{2}(4/8)\left[\frac{1172/8}{EI}\right]=\frac{2764/48\ kN.m^2}{EI}$$

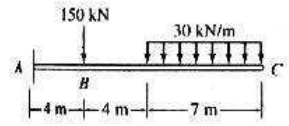
$$\theta_B=\frac{2764/48(1000)(1000)^2}{(200\times10^3)(3/91\times10^8)}=0/0101\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_B=0/0101\ rad \curvearrowright$$

$$\Delta_B=\frac{2764/48}{EI}\left[\frac{3}{4}\right](4/8)=\frac{9945/33\ kN.m^3}{EI} \Rightarrow \Delta_B=\frac{9945/33(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(3/91\times10^8)}=36/36\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_B=36/36\ mm\downarrow$$

$$\Delta_C=\frac{2764/48}{EI}\left[\left[\frac{3}{4}\right](4/8)+2/4\right]=\frac{1658/88\ kN.m^3}{EI} \Rightarrow \Delta_C=\frac{1658/88(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(3/91\times10^8)}=60/61\ mm$$

$$\blacktriangleright \Delta_C=60/61\ mm\downarrow$$

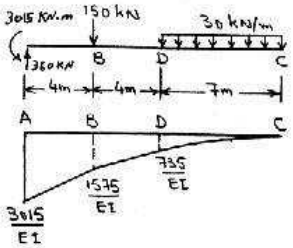
۴-۲۱



EI = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa

$I=500\times10^6\ mm^4$

شکل ۲-۲۱



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \ : \ A_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=0$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \ : \ A_y-150-30(7)=0$$

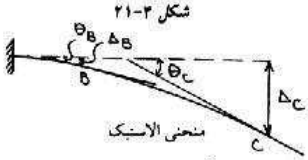
$$\blacktriangleright \vec{A}_y=360\ \ kN\uparrow$$

$$+\circlearrowleft\sum M_A=0 \ :$$

$$M_A-150(4)-30(7)(11/5)=0$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A=3015\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$

$$\theta_B=\theta_{BA}=\frac{1}{EI}\left[\left[\frac{3015+1575}{2}\right](4)\right]$$



$$\theta_B=\frac{9180\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_B=\frac{9180(1000)(1000)^2}{(200\times10^3)(500\times10^6)}=0/0918\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_B=0/0918\ rad \curvearrowright$$

$$\Delta_B=\Delta_{BA}=\frac{1}{EI}\left[(1575)(4)(2)+\frac{1}{2}(1440)(4)\left[\frac{4}{3}\right]\right]=\frac{20280\ kN.m^3}{EI} \Rightarrow \Delta_B=\frac{20280(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(500\times10^6)}=202/8\ mm$$

$$\blacktriangleright \Delta_B=202/8\ mm\downarrow$$

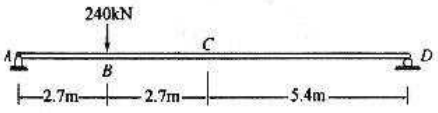
$$\theta_C=\theta_{CA}=\frac{1}{EI}\left[9180+\left[\frac{1575+735}{2}\right](4)+\frac{1}{2}(735)(7)\right]=\frac{15515\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_C=\frac{15515(1000)(1000)^2}{(200\times10^3)(500\times10^6)}=0/1552\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_C=0/1552\ rad \curvearrowright$$

$$\Delta_C=\Delta_{CA}=\frac{1}{EI}\left[1575(4)(13)+\frac{1}{2}(1440)(4)\left[\frac{4}{3}+11\right]+735(4)(9)+\frac{1}{2}(840)(4)\left[\frac{4}{3}+7\right]+\frac{1}{3}(735)(7)\left[\frac{21}{4}\right]\right]$$

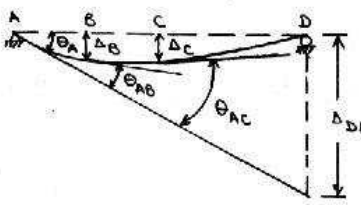
$$\Delta_C=\frac{1729637/5\ kN.m^3}{EI} \Rightarrow \Delta_C=\frac{1729637/5(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(500\times10^6)}=1729/6\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C=1729/6\ mm\downarrow$$

۲۲-۴

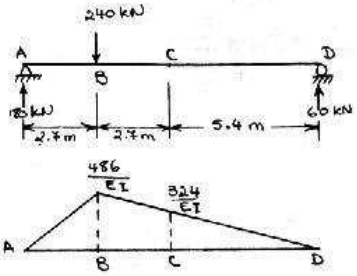


$EI =$ ثابت ، $E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۱/۵۶۳\times۱۰^{۹}\ mm^{۴}$

شکل ۲۲-۴



منحنی الاستیک



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$$\pm\rightarrow\sum F_x=۰ \;:\; A_x=۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=۰$$

$$+\circlearrowleft\sum M_A=۰ \;:\; D_y(۱۰/۸)-۲۴۰(۲/۷)=۰$$

$$\blacktriangleright \vec{D}_y=۶۰\ kN\uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_y=۰ \;:\; ۶۰-۲۴۰+A_y=۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=۱۸۰\ kN\uparrow$$

$$\Delta_{DA}=\frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۴۸۶)(۲/۷)(۹)+\frac{۱}{۲}(۴۸۶)(۸/۱)(۵/۴)\right]=\frac{۱۶۵۳۳/۷۲\ kN.m^{۲}}{EI} \Rightarrow \theta_A=\frac{\Delta_{DA}}{۱۰/۸}=\frac{۱۶۵۳۳/۷۲}{(۱۰/۸)EI}=\frac{۱۵۳۰/۹\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_B=\theta_A-\theta_{AB}=\frac{۱}{EI}\left[۱۵۳۰/۹-\frac{۱}{۲}(۴۸۶)(۲/۷)\right]=\frac{۸۷۴/۸\ kN.m^{۲}}{EI} \Rightarrow \theta_B=\frac{۸۷۴/۸(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۱/۵۶۳\times۱۰^{۹})}=۰/۰۰۲۸\ rad$$

$$\blacktriangleright \theta_B=۰/۰۰۲۸\ rad \curvearrowright$$

$$\Delta_B=۲/۷\theta_A-\Delta_{BA}=\frac{۱}{EI}\left[(۲/۷)(۱۵۳۰/۹)-\frac{۱}{۲}(۴۸۶)(۲/۷)(۰/۹)\right]=\frac{۳۵۴۲/۹۴\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_B=\frac{۳۵۴۲/۹۴(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۱/۵۶۳\times۱۰^{۹})}=۱۱/۳۳\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_B=۱۱/۳۳\ mm\downarrow$$

$$\theta_C=\theta_{AC}-\theta_A=\frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۴۸۶)(۲/۷)+(۳۲۴)(۲/۷)+\frac{۱}{۲}(۱۶۲)(۲/۷)-۱۵۳۰/۹\right]=\frac{۲۱۸/۷\ kN.m^{۲}}{EI}$$

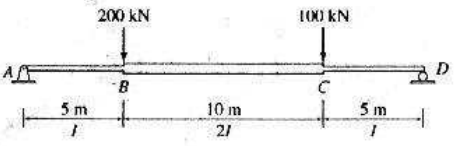
$$\theta_C=\frac{۲۱۸/۷(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۱/۵۶۳\times۱۰^{۹})}=۰/۰۰۰۷\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_C=۰/۰۰۰۷\ rad \curvearrowright$$

$$\Delta_C=۵/۴\theta_A-\Delta_{CA}=\frac{۱}{EI}\left[(۵/۴)(۱۵۳۰/۹)-\frac{۱}{۲}(۴۸۶)(۲/۷)(۳/۶)-(۳۲۴)(۲/۷)(۱/۳۵)-\frac{۱}{۲}(۱۶۲)(۲/۷)(۱/۸)\right]=\frac{۴۳۳۰/۲۶\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_C=\frac{۴۳۳۰/۲۶(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۱/۵۶۳\times۱۰^{۹})}=۱۳/۸۵\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C=۱۳/۸۵\ mm\downarrow$$

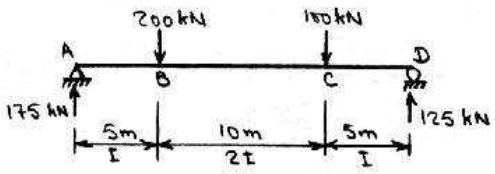
برای تیرهای نشان داده شده در مسایل زیر حداکثر تغییر مکان قائم را با استفاده از روش لنگر سطح محاسبه کنید.

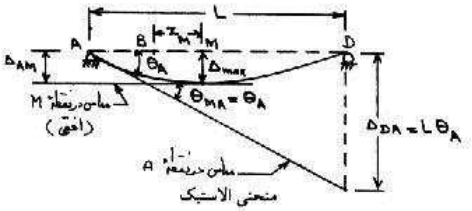
۲۳-۴

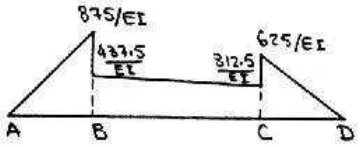


$E =$ ثابت $= ۲۵۰\ GPa$ ، $I = ۶۰۰\times۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

شکل ۲-۲۳







نمودار $\frac{M}{EI}$، $\frac{kN.m}{EI}$

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \;:\; A_x=0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=0$

$+\circlearrowleft \sum M_A=0 \;:\; D_y(20)-100(15)-200(5)=0 \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y=125\ kN\uparrow$

$+\uparrow\sum F_y=0 \;:\; 125-200-100+A_y=0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=175\ kN\uparrow$

$$\Delta_{DA}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(875)(5)\left[\frac{5}{3}+15\right]+(312/5)(10)(10)+\frac{1}{2}(125)(10)\left[\frac{20}{3}+5\right]+\frac{1}{2}(625)(5)\left[\frac{10}{3}\right]\right]=\frac{8020/833\ kN.m^3}{EI}$$

$$\theta_A=\frac{8020/833}{(20)EI}=\frac{4010/42\ kN.m^2}{EI}$$

اگر بیشترین تغییر مکان در نقطهٔ M پدید آید:

$$\theta_{MA}=\theta_A \Rightarrow \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(875)(5)+\frac{1}{2}(875-12/5x_M)x_M\right]=\frac{4010/42}{EI}$$

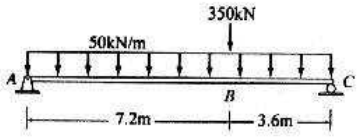
$$6/25x_M^2-437/5x_M+1822/92=0 \Rightarrow x_M=4/45\,m$$

$$\Delta_{max}=\Delta_{AM}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(875)(5)\left[\frac{10}{3}\right]+(381/875)(4/45)\left[\frac{4/45}{2}+5\right]+\frac{1}{2}(55/625)(4/45)\left[\frac{4/45}{3}+5\right]\right]$$

$$\Delta_{max}=\frac{20371/84\ kN.m^3}{EI} \Rightarrow \Delta_{max}=\frac{20371/84(1000)(1000)^3}{(250\times10^3)(600\times10^6)}=135/8\,mm \qquad \blacktriangleright \Delta_{max}=135/8\,mm\downarrow$$

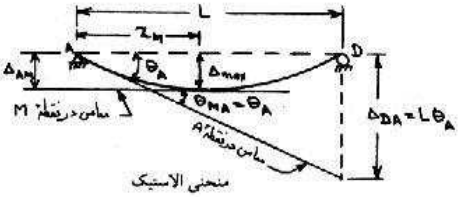
۴-۲۴

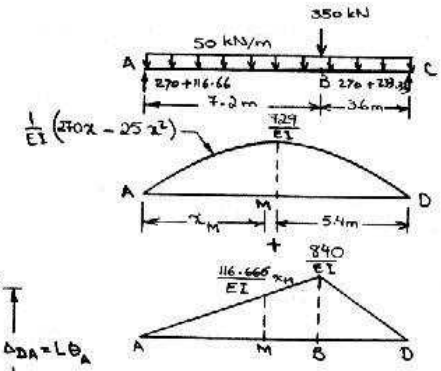
نمودار لنگر خمشی بار گسترده و متمرکز را به طور جداگانه ترسیم می‌کنیم.



EI = ثابت، E = ۲۰۰ GPa، I = ۱/۹۵×۱۰$^{-4}$ mm^4

شکل ۴-۲۴





نمودار $\frac{M}{EI}$، $\frac{kN.m}{EI}$

$$\Delta_{CA}=\frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}(729)(10/8)(5/4)+\frac{1}{2}(840)(7/2)(6)+\frac{1}{2}(840)(3/6)(2/4)\right]=\frac{5011/632\ kN.m^3}{EI}$$

$$\theta_A=\frac{5011/632}{(10/8)EI}=\frac{4644/4\ kN.m^2}{EI}$$

اگر بیشترین تغییر مکان در نقطهٔ M پدید آید:

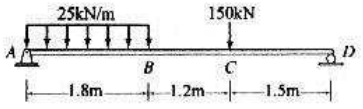
$$\theta_{MA}=\theta_A \Rightarrow \frac{1}{EI}\left[\int_0^{x_M}(270x-25x^2)dx+\frac{1}{2}(116/666x_M)x_M dx\right]=\frac{4644/4}{EI}$$

$$-۸/۳۳۳x_M^۲ + ۱۹۳/۳۳۳x_M^۲ - ۴۶۴۰/۴ = ۰ \Rightarrow x_M = ۵/۶۳\,m$$

$$\Delta_{max} = \Delta_{MA} = \frac{۱}{EI}\left[\int_۰^{۵/۶۳}(۲۷۰x - ۲۵x^۲)x\,dx + \frac{۱}{۲}(۱۱۶/۶۶۶)(۵/۶۳)(۵/۶۳)\left[\frac{۲}{۳}\right]۵/۶۳dx\right] = \frac{۱۶۷۲۱/۳۳\,kN.m^۳}{EI}$$

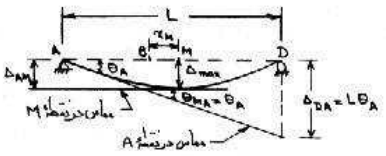
$$\Delta_{max} = \frac{۱۶۷۲۱/۳۳(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۲۰۰\times۱۰^۳)(۱/۹۵\times۱۰^۹)} = ۴۲/۸۷\,mm \qquad \blacktriangleright \Delta_{max} = ۴۲/۸۷\,mm\downarrow$$

۲۵-۴

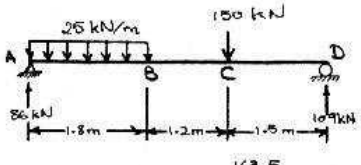


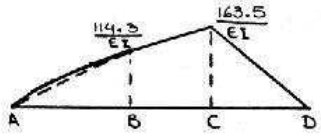
EI = ثابت، $E = ۱۰۵۰۰$ GPa، $I = ۷/۸۱\times۱۰^{-۴}\,mm^۴$

شکل ۴-۲۵



منحنی الاستیک





نمودار $\frac{M}{EI}$، $\frac{kN.m}{EI}$

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ : \quad A_x = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : \quad D_y(۴/۵) - ۱۵۰(۳) - ۲۵\left[\frac{۱/۸}{۲}\right]^۲ = ۰$$

$$\blacktriangleright \vec{D}_y = ۱۰۹\ \ kN\uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_y = ۰$$

$$۱۰۹ + A_y - ۱۵۰ - ۲۵(۱/۸) = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = ۸۶\ \ kN\uparrow$$

$$\Delta_{DA} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۱۱۴/۳)(۱/۸)(۳/۳) + \left[\frac{۲}{۳}\right]\frac{(۲۵)(۱/۸)^۲}{۸}(۱/۸)(۳/۶) + (۱۱۴/۳)(۱/۲)(۲/۱) + \frac{۱}{۲}(۴۹/۲)(۱/۲)(۰/۴ + ۱/۵) + \frac{۱}{۲}(۱۶۳/۵)(۱/۵)(۱)\right]$$

$$\Delta_{DA} = \frac{۸۴۹/۹۶\,kN.m^۳}{EI} \qquad , \qquad \theta_A = \frac{۸۴۹/۹۶}{(۴/۵)EI} = \frac{۱۸۸/۸۸\,kN.m^۲}{EI}$$

اگر بیشترین تغییر مکان در نقطهٔ M پدید آید:

$$\theta_{MA} = \theta_A \Rightarrow \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۱۱۴/۳)(۱/۸) + \frac{۲}{۳}\frac{(۲۵)(۱/۸)^۲}{۸}(۱/۸) + \frac{۱}{۲}(۲۲۸/۶ + ۴۱x_M)x_M\right] = \frac{۱۸۸/۸۸}{EI}$$

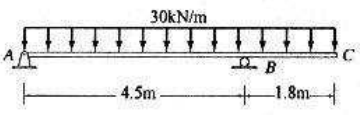
$$۲۰/۵x_M^۲ + ۱۱۴/۳x_M - ۷۳/۸۶ = ۰ \Rightarrow x_M = ۰/۵۸۵\,m$$

$$\Delta_{max} = \Delta_M = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۱۱۴/۳)(۱/۸)(۱/۲) + \frac{۲}{۳}\frac{(۲۵)(۱/۸)^۳}{۸}(۰/۹) + (۱۱۴/۳)(۰/۵۸۵)\left[\frac{۰/۵۸۵}{۲} + ۱/۸\right] + \frac{۱}{۲}(۲۳/۹۹)(۰/۵۸۵)(۰/۳۹ + ۱/۸)\right]$$

$$\Delta_{max} = \frac{۲۸۹/۶۶\,kN.m^۳}{EI} \Rightarrow \Delta_{max} = \frac{۲۸۹/۶۶(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۱۰۵۰۰)(۷/۸۱\times۱۰^۹)} = ۳/۵۳\,mm \qquad \blacktriangleright \Delta_{max} = ۳/۵۳\,mm\downarrow$$

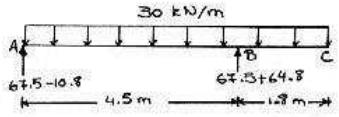
۲۶-۴

نمودار لنگر خمشی مربوط به بارهای وارد بر قطعات AB و BC را به طور مجزا ترسیم کرده، سپس از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم.



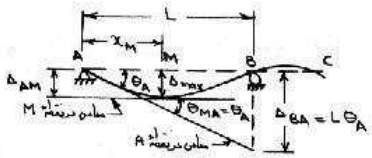
EI = ثابت، $E = ۲۰۰$ GPa، $I = ۱/۳۷\times۱۰^{-۴}\,mm^۴$

شکل ۴-۲۶

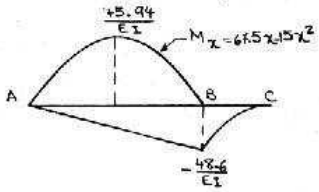


$$\Delta_{BA} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۲}{۳}(۷۵/۹۴)(۴/۵)(۲/۲۵) - \frac{۱}{۲}(۴۸/۶)(۴/۵)(۱/۵)\right]$$

$$\Delta_{BA} = \frac{۳۴۸/۵۵\,kN.m^۳}{EI}$$



منحنی الاستیک



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

$$\theta_A=\frac{۳۴۸/۵۵}{(۴/۵)EI}=\frac{۷۷/۴۵\ kN.m^۲}{EI}$$

اگر بیشترین تغییر مکان در نقطهٔ M پدید آید:

$$\theta_{MA}=\theta_A \Rightarrow \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۶۷/۵x_M-۱۵x_M^۲)x_M+\frac{۲}{۳}\left[\frac{۳۰x_M^۲}{۸}\right]x_M-\frac{۱}{۲}(۱۰/۸x_M)x_M\right]=\frac{۷۷/۴۵}{EI}$$

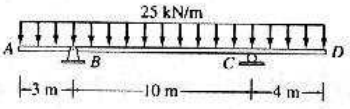
$$-۵x_m^۳+۲۸/۳۵x_M^۲-۷۷/۴۵=۰ \Rightarrow x_M=۲/۰۷۶\ m$$

$$\Delta_{max}=\Delta_M=\frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۷۵/۴۸)(۲/۰۷۶)(۱/۳۸۳)+\frac{۲}{۳}(۱۶/۱۶)\frac{(۲/۰۷۶)^۲}{۲}-\frac{۱}{۲}(۲۲/۴۲)(۲/۰۷۶)\left[\frac{۲}{۳}\right](۲/۰۷۶)\right]$$

$$\Delta_{max}=\frac{۹۹/۳۶\ kN.m^۳}{EI} \Rightarrow \Delta_{max}=\frac{۹۹/۳۶(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۲۰۰\times۱۰^۳)(۱/۳۷\times۱۰^۹)}=۰/۳۶۳\ m \qquad \blacktriangleright \Delta_{max}=۰/۳۶۳\ mm\downarrow$$

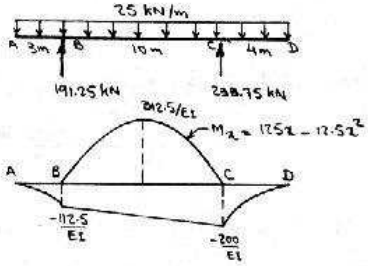
۴-۲۷

نمودار لنگر خمشی مربوط به بارهای وارد بر قطعهٔ BC و دو قطعهٔ AB و CD را به طور جداگانه ترسیم کرده، سپس از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم.

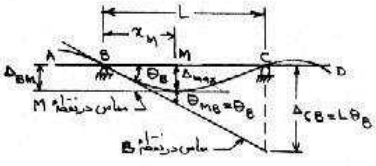


EI = ثابت ، $E=۲۰۰\ GPa$ ، $I=۵۰۰\times۱۰^۶\ mm^۴$

شکل ۴-۲۷



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$



منحنی الاستیک

$$\Delta_{CB}=\frac{۱}{EI}\left[\frac{۲}{۳}(۳۱۲/۵)(۱۰)(۵)-(۱۱۲/۵)(۱۰)(۵)-\frac{۱}{۲}(۸۷/۵)(۱۰)\left[\frac{۱۰}{۳}\right]\right]$$

$$\Delta_{CB}=\frac{۳۳۳۳/۳۳\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\theta_B=\frac{۳۳۳۳/۳۳}{(۱۰)EI}=\frac{۳۳۳/۳۳\ kN.m^۲}{EI}$$

اگر بیشترین تغییر مکان در نقطهٔ M پدید آید:

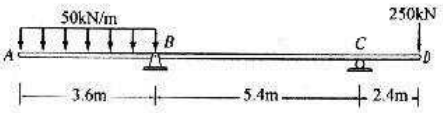
$$\theta_{MB}=\theta_B \Rightarrow \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۱۲۵x_M-۱۲/۵x_M^۲)x_M+\frac{۲}{۳}\left[\frac{۲۵x_M^۲}{۸}\right]x_M-۱۱۲/۵x_M-\frac{۱}{۲}(۸/۷۵x_M)x_M\right]=\frac{۳۳۳/۳۳}{EI}$$

$$-۴/۱۶۷x_M^۳+۵۸/۱۲۵x_M^۲-۱۱۲/۵x_M-۳۳۳/۳۳=۰ \Rightarrow x_M=۴/۷۷\ m$$

$$\Delta_{max}=\Delta_{BM}=\frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۳۱۱/۸۴)(۴/۷۷)(۳/۱۸)+\frac{۲}{۳}(۷۱/۱)\frac{(۴/۷۷)^۲}{۲}-(۱۱۲/۵)\frac{(۴/۷۷)^۲}{۲}-\frac{۱}{۲}(۴۱/۷۴)(۴/۷۷)(۳/۱۸)\right]$$

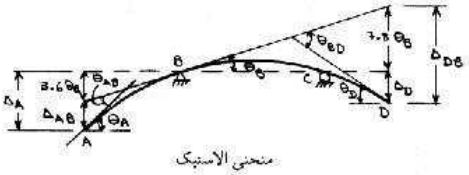
$$\Delta_{max}=\frac{۱۳۰۷/۹۱\ kN.m^۳}{EI} \Rightarrow \Delta_{max}=\frac{۱۳۰۷/۹۱(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۲۰۰\times۱۰^۳)(۵۰۰\times۱۰^۶)}=۱۳/۰۸\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_{max}=۱۳/۰۸\ mm\downarrow$$

۲۸-۴ با استفاده از روش لنگر سطح مقادیر شیب و تغییر مکان را در نقاط A و D از تیر نشان داده شده در شکل زیر محاسبه کنید.

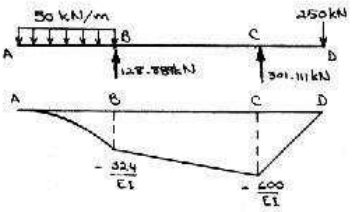


EI = ثابت ، E = ۱۴۰۰۰ GPa ، I = ۹/۷۶×۱۰^{۶} mm^{۴}

شکل ۲۸-۴



منحنی الاستیک



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; B_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; C_y(5/4) + 50(3/6)(1/8) - 250(7/8) = 0$

$\blacktriangleright \vec{C}_y = 301/111 \;\; kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 301/11 - 50(3/6) - 250 + B_y = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = 128/889 \;\; kN \uparrow$

$$\Delta_{CB} = \frac{1}{EI}\left[(324)(5/4)(2/7) + \frac{1}{2}(276)(5/4)(1/8)\right] = \frac{6065/28\; kN.m^3}{EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{\Delta_{CB}}{5/4} = \frac{6065/28}{(5/4)EI} = \frac{1123/2\; kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_{AB} = \frac{1}{3}\left[\frac{324}{EI}\right](3/6) = \frac{388/8\; kN.m^2}{EI} \;,\; \Delta_{AB} = \left[\frac{388/8}{EI}\right]\left[\frac{3}{4}\right](3/6) = \frac{1049/76\; kN.m^3}{EI}$$

$$\theta_A = \theta_B + \theta_{AB} = \frac{1}{EI}(1123/2 + 388/8) = \frac{1512\; kN.m^2}{EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{1512(1000)(1000)^2}{(14000)(9/76\times 10^9)} = 0/0110\; rad$$

$\blacktriangleright \theta_A = 0/0110 \;\; rad \;\measuredangle$

$$\Delta_A = 3/6\theta_B + \Delta_{AB} = \frac{1}{EI}\left[3/6(1123/2) + 1049/76\right] = \frac{5093/28\; kN.m^3}{EI} \Rightarrow \Delta_A = \frac{5093/28(1000)(1000)^3}{(14000)(9/76\times 10^9)} = 37/28\; mm$$

$\blacktriangleright \Delta_A = 37/28\; mm \downarrow$

$$\theta_{BD} = \frac{1}{EI}\left[324(5/4) + \frac{1}{2}(276)(5/4) + \frac{1}{2}(600)(2/4)\right] = \frac{3214/8\; kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_D = \theta_{BD} - \theta_B = \frac{1}{EI}[3214/8 - 1123/2] = \frac{2091/6\; kN.m^2}{EI} \Rightarrow \theta_D = \frac{2091/6(1000)(1000)^2}{(14000)(9/76\times 10^9)} = 0/0153\; rad$$

$\blacktriangleright \theta_D = 0/0153 \;\; rad \;\measuredangle$

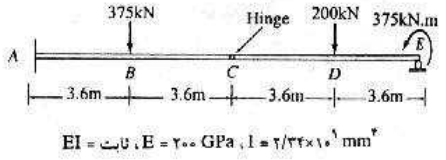
$$\Delta_{DB} = \frac{1}{EI}\left[(324)(5/4)(5/1) + \frac{1}{2}(276)(5/4)(4/2) + \frac{1}{2}(600)(2/4)\left[\frac{2}{3}\right](2/4)\right] = \frac{13204/8\; kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_D = \Delta_{DB} - 7/8\theta_B = \frac{1}{EI}\left[13204/8 - 7/8(1123/2)\right] = \frac{4443/84\; kN.m^3}{EI} \Rightarrow \Delta_D = \frac{4443/84(1000)(1000)^3}{(14000)(9/76\times 10^9)} = 32/52\; mm$$

$\blacktriangleright \Delta_D = 32/52\; mm \downarrow$

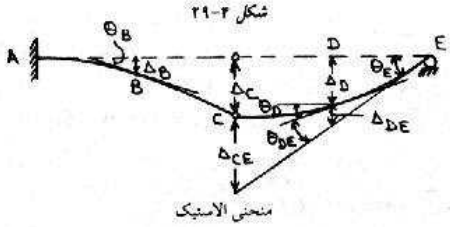
در مسایل ۴-۲۹ و ۴-۳۰ مقادیر شیب و تغییر مکان نقاط B و D را با استفاده از روش لنگر سطح محاسبه کنید.

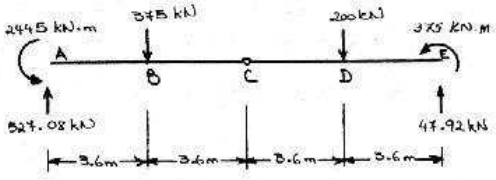
۴-۲۹

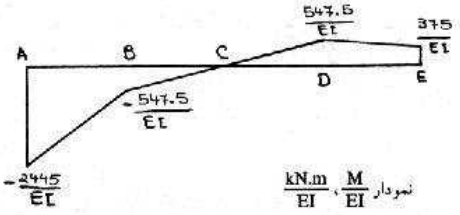


EI = ثابت ، $E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۲/۳۴ \times ۱۰^{۹}\ mm^{۴}$

شکل ۴-۲۹







محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$+\circlearrowleft \sum M_C^{CE} = ۰ \ : \ ۳۷۵ + E_y(۷/۲) - ۲۰۰(۳/۶) = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{E_y} = ۴۷/۹۲ \ \ kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \ : \ ۴۷/۹۲(۱۴/۴) - ۲۰۰(۱۰/۸) - ۳۷۵(۳/۶) + ۳۷۵ + M_A = ۰ \quad \blacktriangleright M_A = ۲۴۴۵ \ \ kN.m$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ A_y + ۴۷/۹۲ - ۲۰۰ - ۳۷۵ = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{A_y} = ۵۲۷/۰۸ \ \ kN \uparrow \ , \ \stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \ : \ A_x = ۰ \quad \blacktriangleright \vec{A_x} = ۰$

$$\theta_B = \theta_{BA} = \frac{۱}{EI}\left[\left[\frac{۲۴۴۵ + ۵۴۷/۵}{۲}\right](۳/۶)\right] = \frac{۵۳۸۶/۵\ kN.m^{۲}}{EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{۵۳۸۶/۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۰۰\times ۱۰^{۳})(۲/۳۴\times ۱۰^{۹})} = ۰/۰۱۱۵\ rad$$

$\blacktriangleright \theta_B = ۰/۰۱۱۵ \ \ rad$ ↻

$$\Delta_B = \Delta_{BA} = \frac{۱}{EI}\left[(۵۴۷/۵)(۳/۶)(۱/۸) + \frac{۱}{۲}(۱۸۹۷/۵)(۳/۶)(۲/۴)\right] = \frac{۱۱۷۴۵\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{۱۱۷۴۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times ۱۰^{۳})(۲/۳۴\times ۱۰^{۹})} = ۲۵/۱\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_B = ۲۵/۱\ mm \downarrow$$

$$\Delta_C = \Delta_{CA} = \frac{۱}{EI}\left[۵۴۷/۵(۳/۶)(۵/۴) + \frac{۱}{۲}(۱۸۹۷/۵)(۳/۶)(۶) + \frac{۱}{۲}(۵۴۷/۵)(۳/۶)(۲/۴)\right] = \frac{۳۳۵۰۱/۶\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_{CE} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۵۴۷/۵)(۳/۶)(۲/۴) + (۳۷۵)(۳/۶)(۵/۴) + \frac{۱}{۲}(۱۷۲/۵)(۳/۶)(۲/۴)\right] = \frac{۱۱۱۴۵/۶\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\theta_E = \frac{\Delta_C + \Delta_{CE}}{۷/۲} = \frac{۳۳۵۰۱/۶ + ۱۱۱۴۵/۶}{(۷/۲)EI} = \frac{۶۲۰۱\ kN.m^{۲}}{EI} \ , \ \theta_{DE} = \frac{۱}{EI}\left[\left[\frac{۵۴۷/۵ + ۳۷۵}{۲}\right](۳/۶)\right] = \frac{۱۶۶۰/۵\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_D = \theta_E - \theta_{DE} = \frac{۶۲۰۱ - ۱۶۶۰/۵}{EI} = \frac{۴۵۴۰/۵\ kN.m^{۲}}{EI} \Rightarrow \theta_D = \frac{۴۵۴۰/۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۰۰\times ۱۰^{۳})(۲/۳۴\times ۱۰^{۹})} = ۰/۰۰۹۷\ rad$$

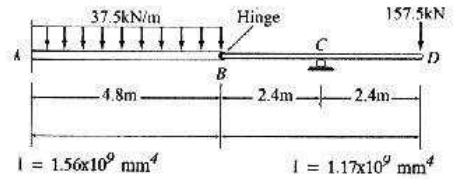
$\blacktriangleright \theta_D = ۰/۰۰۹۷ \ \ rad$ ↺

$$\Delta_{DE} = \frac{۱}{EI}\left[(۳۷۵)(۳/۶)(۱/۸) + \frac{۱}{۲}(۱۷۲/۵)(۳/۶)(۱/۲)\right] = \frac{۲۸۰۲/۶\ kN.m^{۳}}{EI}$$

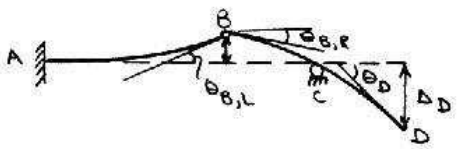
$$\Delta_D = ۳/۶\theta_E - \Delta_{DE} = \frac{۱}{EI}\left[(۳/۶)(۶۲۰۱) - ۲۸۰۲/۶\right] = \frac{۱۹۵۲۱\ kN.m^{۳}}{EI} \Rightarrow \Delta_D = \frac{۱۹۵۲۱(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times ۱۰^{۳})(۲/۳۴\times ۱۰^{۹})} = ۴۱/۷۱\ mm$$

$\blacktriangleright \Delta_D = ۴۱/۷۱\ mm \downarrow$

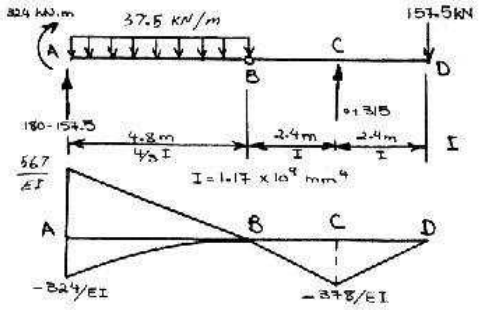
۳۰-۴



شکل ۳۰-۴



منحنی الاستیک



نمودار $\frac{kN.m}{EI}$ ، $\frac{M}{EI}$

نمودار لنگر خمشی بار متمرکز و بار گسترده را به طور جداگانه ترسیم کرده، از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم.

$$\theta_{B,L}=\theta_{AB}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(567)(4/8)-\frac{1}{3}(324)(4/8)\right]=\frac{842/4\ kN.m^2}{EI}\ \Rightarrow\ \theta_{B,L}=\frac{842/4(1000)(1000)^3}{(210\times10^3)(1/17\times10^9)}=0/0034\ rad$$

$$\blacktriangleright\ \theta_{B,L}=0/0034\ rad\ \curvearrowleft$$

$$\Delta_B=\Delta_{BA}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(567)(4/8)(3/2)-\frac{1}{3}(324)(4/8)(3/6)\right]=\frac{2488/32\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_B=\frac{2488/32(1000)(1000)^3}{(210\times10^3)(1/17\times10^9)}=10/13\ mm\qquad\blacktriangleright\ \Delta_B=10/13\ mm\downarrow$$

$$\Delta_{BC}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(378)(2/4)\left[\frac{4/8}{3}\right]\right]=\frac{725/76\ kN.m^3}{EI}\ ,\ \theta_C=\frac{\Delta_{BC}+\Delta_B}{2/4}=\frac{(725/76+2488/32)}{(2/4)EI}=\frac{1339/2\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_{BC}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(378)(2/4)\right]=\frac{453/6\ kN.m^2}{EI}\ ,\ \theta_{CD}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(378)(2/4)\right]=\frac{453/6\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_{B,R}=\theta_C-\theta_{BC}=\frac{1}{EI}(1339/2-453/6)=\frac{885/6\ kN.m^2}{EI}\ \Rightarrow\ \theta_{B,R}=\frac{885/6(1000)(1000)^2}{(210\times10^3)(1/17\times10^9)}=0/0036\ rad$$

$$\blacktriangleright\ \theta_{B,R}=0/0036\ rad\ \curvearrowright$$

$$\theta_D=\theta_C+\theta_{CD}=\frac{1}{EI}(1339/2+453/6)=\frac{1792/8\ kN.m^2}{EI}\ \Rightarrow\ \theta_D=\frac{1792/8(1000)(1000)^2}{(210\times10^3)(1/17\times10^9)}=0/0073\ rad$$

$$\blacktriangleright\ \theta_D=0/0073\ rad\ \curvearrowright$$

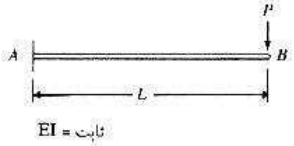
$$\Delta_{DC}=\frac{1}{EI}\left[(453/6)\left[\frac{4/8}{3}\right]\right]=\frac{725/76\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_D=2/4\theta_C+\Delta_{DC}=\frac{1}{EI}\left[2/4(1339/2)+725/76\right]=\frac{3939/84\ kN.m^3}{EI}\ \Rightarrow\ \Delta_D=\frac{3939/84(1000)(1000)^3}{(210\times10^3)(1/17\times10^9)}=16/04\ mm$$

$$\blacktriangleright\ \Delta_D=16/04\ mm\downarrow$$

با استفاده از روش تیر فرضی، مقادیر شیب و تغییر مکان نقطهٔ B را در مسایل زیر به دست آورید.

۳۱-۴



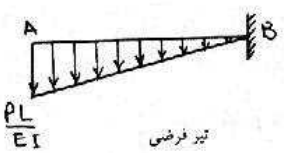
شکل ۳۱-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر حقیقی:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0\ :\ A_x=0\qquad\blacktriangleright\ \vec{A}_x=0$$

$$+\circlearrowleft\sum M_A=0\ :\ M_A-PL=0\qquad\blacktriangleright\ \vec{M}_A=PL\ \circlearrowright$$

$$+\uparrow\sum F_y=0\ :\ A_y-P=0\qquad\blacktriangleright\ \vec{A}_y=P\uparrow$$



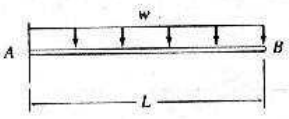
تیر فرضی

$$\theta_B = -\frac{1}{2}(L)\left[\frac{PL}{EI}\right] = -\frac{PL^2}{2EI} \qquad \blacktriangleright \theta_B = \frac{PL^2}{2EI} \curvearrowleft$$

$$\Delta_B = -\frac{PL^2}{2EI}\left[\frac{2L}{3}\right] = -\frac{PL^3}{3EI} \qquad \blacktriangleright \Delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \downarrow$$

۴-۳۲

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر حقیقی:



EI = ثابت

شکل ۴-۳۲

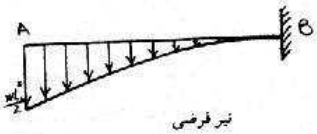
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - wL\left[\frac{L}{2}\right] = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = \frac{wL^2}{2} \circlearrowright$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - w(L) = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = wL \uparrow$$

$$\theta_B = -\frac{1}{3}(L)\left[\frac{wL^2}{2EI}\right] = -\frac{wL^3}{6EI} \qquad \blacktriangleright \theta_B = \frac{wL^3}{6EI} \curvearrowleft$$

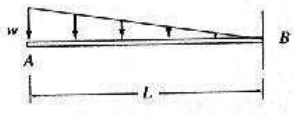
$$\Delta_B = -\frac{wL^3}{6EI}\left[\frac{3L}{4}\right] = -\frac{wL^4}{8EI} \qquad \blacktriangleright \Delta_B = \frac{wL^4}{8EI} \downarrow$$



تیر فرضی

۴-۳۳ با استفاده از روش تیر فرضی مقادیر شیب و تغییر مکان نقطهٔ A را در تیر نشان داده شده به دست آورید.

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر حقیقی:



EI = ثابت

شکل ۴-۳۳

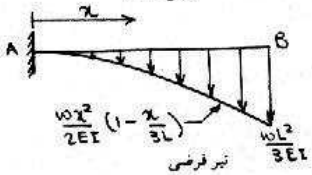
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; B_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; M_B + \left[\frac{wL}{2}\right]\left[\frac{2L}{3}\right] = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{M}_B = \frac{wL^2}{3} \circlearrowright$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; B_y - \left[\frac{wL}{2}\right] = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = \frac{wL}{2} \uparrow$$

$$\theta_A = \int_0^L \frac{wx^2}{2EI}\left[1 - \frac{x}{3L}\right] dx = \frac{wL^3}{8EI} \qquad \blacktriangleright \theta_A = \frac{wL^3}{8EI} \curvearrowleft$$

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{wx^2}{2EI}\left[1 - \frac{x}{4L}\right](-x)\, dx = -\frac{11}{120}\frac{wL^4}{EI} \qquad \blacktriangleright \Delta_A = \frac{11}{120}\frac{wL^4}{EI} \downarrow$$

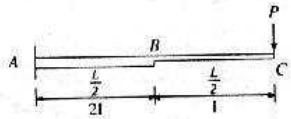


تیر فرضی

با استفاده از روش تیر فرضی مقادیر شیب و تغییر مکان نقاط B و C را در مسایل زیر محاسبه کنید.

۴-۳۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر حقیقی:



E = ثابت

شکل ۴-۳۴

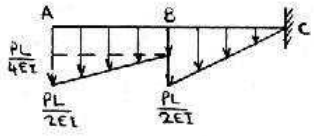
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - PL = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = PL \circlearrowright$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - P = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = P \uparrow$$

$$\theta_B = -\frac{L}{2}\left[\frac{PL}{4EI}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2}\right]\left[\frac{PL}{2EI}\right] = -\frac{3PL^2}{16EI} \qquad \blacktriangleright \theta_B = \frac{3PL^2}{16EI} \curvearrowleft$$

$$\Delta_B = -\frac{PL^2}{8EI}\left[\frac{L}{4}\right] - \frac{PL^2}{16EI}\left[\frac{L}{3}\right] = -\frac{5PL^3}{96EI} \qquad \blacktriangleright \Delta_B = \frac{5PL^3}{96EI} \downarrow$$



تیر فرضی

$$\theta_C = -\frac{3PL^2}{16EI} - \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2}\right]\left[\frac{PL}{2EI}\right] = -\frac{5PL^2}{16EI} \qquad \blacktriangleright \theta_C = \frac{5PL^2}{16EI} \measuredangle$$

$$\Delta_C = -\frac{PL^2}{8EI}\left[\frac{3L}{4}\right] - \frac{PL^2}{16EI}\left[\frac{5L}{6}\right] - \frac{PL^2}{8EI}\left[\frac{L}{3}\right] = -\frac{3PL^3}{16EI} \qquad \blacktriangleright \Delta_C = \frac{3PL^3}{16EI} \downarrow$$

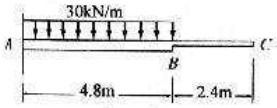
۳۵-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر حقیقی:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - 30(4/8) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 144 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 144 \;\; kN \uparrow$$

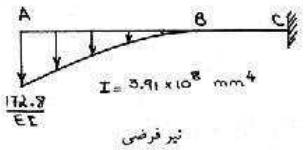
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - 30(4/8)(2/4) = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = 345/6 \;\; kN.m \circlearrowleft$$



$I = 7.82\times10^8\ mm^4$ $I = 3.91\times10^8\ mm^4$

E = ثابت = ۷۰ GPa

شکل ۳۵-۴



تیر فرضی

$$\theta_B = \theta_C = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{172/8}{EI}\right](4/8)\right] = -\frac{276/48\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_B = \theta_C = -\frac{276/48(1000)(1000)^2}{(70\times10^3)(3/91\times10^8)} = -0/0101\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_B = \theta_C = 0/0101\ rad \measuredangle$$

$$\Delta_B = \left[-\frac{276/48}{EI}\right]\left[\frac{3}{4}\right](4/8) = -\frac{995/33\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_B = -\frac{995/33(1000)(1000)^3}{(70\times10^3)(3/91\times10^8)} = -36/36\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_B = 36/36\ mm \downarrow$$

$$\Delta_C = \left[-\frac{276/48}{EI}\right]\left[\left[\frac{3}{4}\right](4/8) + 2/4\right] = -\frac{1658/88\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_C = -\frac{1658/88(1000)(1000)^3}{(70\times10^3)(3/91\times10^8)} = -60/61\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = 60/61\ mm \downarrow$$

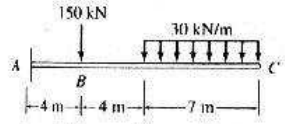
۳۶-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر حقیقی:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - 150 - 30(7) = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 360 \;\; kN \uparrow$$

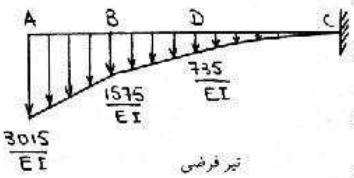
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - 150(4) - 30(7)(11/5) = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = 3015 \;\; kN.m \circlearrowleft$$



EI = ثابت ؛ E = ۲۰۰ GPa

$I = 500\times10^6\ mm^4$

شکل ۳۶-۴



تیر فرضی

$$\theta_B = -\frac{1}{EI}\left[\frac{1575+735}{2}\right](4) = -\frac{9180\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_B = -\frac{9180(1000)(1000)^2}{(200\times10^3)(500\times10^6)} = -0/0918\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_B = 0/0918\ rad \measuredangle$$

$$\Delta_B = -\frac{1}{EI}\left[1575(4)(2) + \frac{1}{2}(1440)(4)\left[\frac{4}{3}\right]\right] = -\frac{20280\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_B = -\frac{20280(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(500\times10^6)} = -202/8\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_B = 202/8\ mm \downarrow$$

$$\theta_C = -\frac{1}{EI}\left[9180 - \left[\frac{1575+735}{2}\right](4) + \frac{1}{3}(735)(7)\right] = \frac{15515\ kN.m^2}{EI}$$

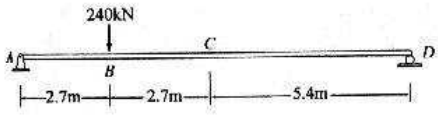
$$\theta_C = -\frac{15515(1000)(1000)^2}{(200\times10^3)(500\times10^6)} = -0/1552\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_C = 0/1552\ rad \measuredangle$$

$$\Delta_C = -\frac{1}{EI}\left[1575(4)(13) + \frac{1}{2}(1440)(4)\left[\frac{4}{3}+11\right] + 735(4)(9) + \frac{1}{2}(840)(4)\left[\frac{4}{3}+7\right] + \frac{1}{3}(735)(7)\left[\frac{21}{4}\right]\right] = -\frac{172963/75\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_C = -\frac{172963/75(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(500\times10^6)} = -1729/6\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = 1729/6\ mm \downarrow$$

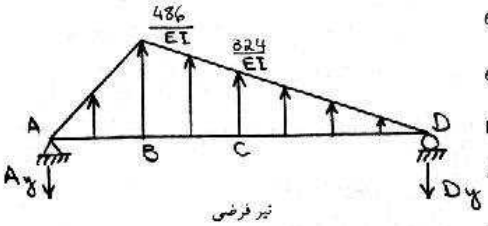
۳۷-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی در تیر فرضی:



EI = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa ، I = ۱/۵۶۳×۱۰^{۹} mm^{۴}

شکل ۴-۳۷



تیر فرضی

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \quad :$$

$$A_y(۱۰/۸) - \frac{۱}{۲}\left[\frac{۴۸۶}{EI}\right](۲/۷)(۹) - \frac{۱}{۲}\left[\frac{۴۸۶}{EI}\right](۸/۱)(۵/۴) = 0$$

$$A_y = \frac{۱۵۳۰/۹\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad D_y + \frac{۱۵۳۰/۹}{EI} - \frac{۱}{۲}\left[\frac{۴۸۶}{EI}\right](۱۰/۸) = 0$$

$$D_y = \frac{۱۰۹۳/۵\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{۱}{EI}\left[-۱۵۳۰/۹ + \frac{۱}{۲}(۴۸۶)(۲/۷)\right] = -\frac{۸۷۴/۸\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_B = -\frac{۸۷۴/۸(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۰۰\times ۱۰^{۳})(۱/۵۶۳\times ۱۰^{۹})} = -۰/۰۰۲۸\ rad$$

$$\blacktriangleright \theta_B = ۰/۰۰۲۸\ rad \ \curvearrowleft$$

$$\Delta_B = \frac{۱}{EI}\left[(-۱۵۳۰/۹)(۲/۷) + \frac{۱}{۲}(۴۸۶)(۲/۷)(۰/۹)\right]$$

$$\Delta_B = -\frac{۳۵۴۲/۹۴\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_B = -\frac{۳۵۴۲/۹۴(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times ۱۰^{۳})(۱/۵۶۳\times ۱۰^{۹})} = -۱۱/۳۳\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_B = ۱۱/۳۳\ mm \downarrow$$

$$\theta_C = \frac{۱}{EI}\left[۱۰۹۳/۵ - \frac{۱}{۲}(۳۲۴)(۵/۴)\right] = \frac{۲۱۸/۷\ kN.m^{۲}}{EI} \Rightarrow \theta_C = \frac{۲۱۸/۷(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۰۰\times ۱۰^{۳})(۱/۵۶۳\times ۱۰^{۹})} = ۰/۰۰۰۷\ rad$$

$$\blacktriangleright \theta_C = ۰/۰۰۰۷\ rad \ \curvearrowleft$$

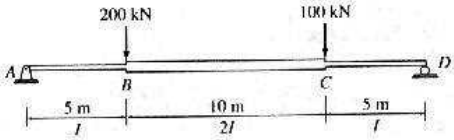
$$\Delta_C = \frac{۱}{EI}\left[-۱۰۹۳/۵(۵/۴) + \frac{۱}{۲}(۳۲۴)(۵/۴)(۱/۸)\right] = -\frac{۴۳۳۰/۲۶\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_C = -\frac{۴۳۳۰/۲۶(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times ۱۰^{۳})(۱/۵۶۳\times ۱۰^{۹})} = -۱۳/۸۵\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = ۱۳/۸۵\ mm \downarrow$$

در مسایل زیر با استفاده از روش تیر فرضی حداکثر تغییر مکان قائم تیر را محاسبه کنید.

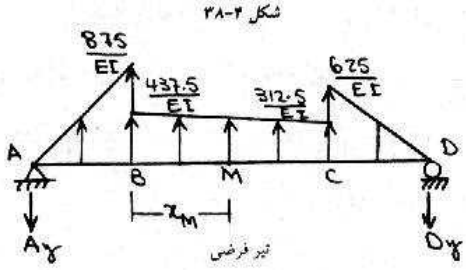
۳۸-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی در تیر فرضی:



E = ثابت = ۲۵۰ GPa ، I = ۶۰۰×۱۰^{۶} mm^{۴}

شکل ۴-۳۸



تیر فرضی

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \quad : \quad A_y(۲۰) - \frac{۱}{۲}\left[\frac{۸۷۵}{EI}\right](۵)\left[\frac{۵}{۳}+۱۵\right] -$$

$$\frac{۳۱۲/۵}{EI}(۱۰)(۱۰) - \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱۲۵}{EI}\right](۱۰)\left[\frac{۲۰}{۳}+۵\right] - \frac{۱}{۲}\left[\frac{۶۲۵}{EI}\right](۵)\left[\frac{۱۰}{۳}\right] = 0$$

$$A_y = \frac{۴۰۱۰/۴۲\ kN.m^{۲}}{EI}$$

با فرض این که حداکثر لنگر خمشی تیر فرضی در نقطهٔ M به فاصلهٔ x_M از نقطهٔ B وجود دارد، برش تیر فرضی در نقطهٔ M صفر خواهد بود ($S_M = 0$).

$$S_M = \frac{۱}{EI}\left[-۴۰۱۰/۴۲ + \frac{۱}{۲}(۸۷۵)(۵) + \frac{۱}{۲}(۸۷۵ - ۱۲/۵x_M)x_M\right]$$

$$S_M = 0 \Rightarrow ۶/۲۵x_M^{۲} - ۴۳۷/۵x_M + ۱۸۲۲/۹۲ = 0$$

$$x_M = ۴/۴۵\ m$$

$$\Delta_{max} = \Delta_m = \frac{۱}{EI}[-۴۰۱۰/۴۲(۹/۴۵) + \frac{۱}{۲}(۸۷۵)(۵)(۶/۱۱۷) +$$

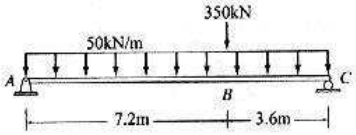
$$۳۸۱/۸۷۵\frac{(۴/۴۵)^{۲}}{۲} + \frac{۱}{۲}(۵۵/۶۲۵)\left[\frac{۲}{۳}\right](۴/۴۵)^{۲}]$$

$$\Delta_{max} = -\frac{۲۰۳۶۹/۳۲\ kN.m^۳}{EI} \Rightarrow \Delta_{max} = -\frac{۲۰۳۶۹/۳۲(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۲۵۰\times۱۰^۳)(۶۰۰\times۱۰^۶)} = -۱۳۵/۸\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_{max} = ۱۳۵/۸\ mm \downarrow$$

۳۹-۴

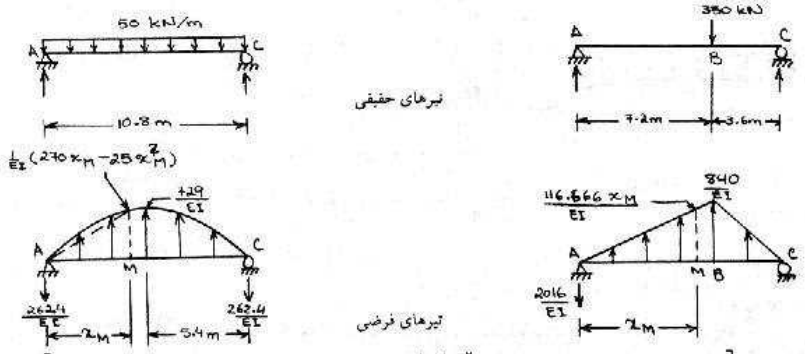
برای بارهای متمرکز و گسترده نمودار لنگر خمشی را به طور جداگانه ترسیم کرده و از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم.

با فرض این که حداکثر لنگر خمشی تیر فرضی در نقطهٔ M وجود دارد، برش تیر فرضی در نقطهٔ M برابر صفر خواهد بود ($S_M = ۰$).



EI = ثابت ؛ E = ۲۰۰ GPa ؛ I = ۱/۹۵×۱۰^۹ mm^۴

شکل ۴-۳۹



$$S_M = \frac{۱}{EI}\left[(-۲۶۲۴/۵) + \frac{۱}{۲}(۲۷۰x_M - ۲۵x_M^۲)x_M + \frac{۲}{۳}(x_M)\frac{(۵۰)x_M^۲}{۸} - ۲۰۱۶ + \frac{۱}{۲}(۱۱۶/۶۶۶x_M)(x_M)\right]$$

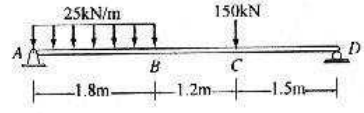
$$S_M = ۰ \Rightarrow -۸/۳۳۳x_M^۳ + ۱۹۳/۳۳۳x_M^۲ - ۴۶۴۰/۴ = ۰ \Rightarrow x_M = ۵/۶۳\ m$$

$$\Delta_{max} = \Delta_M = \frac{۱}{EI}\left[(-۲۶۲۴/۴)(۵/۶۳) + \frac{۱}{۲}(۷۲۷/۶۷)\frac{(۵/۶۳)^۲}{۳} + \left[\frac{۲}{۳}\right](۵/۶۳)\frac{(۵۰)(۵/۶۳)^۲}{۸}\left[\frac{۵/۶۳}{۲}\right] - (۲۰۱۶)(۵/۶۳) + \frac{۱}{۲}(۶۵۶/۸۳)\frac{(۵/۶۳)^۲}{۳}\right] = -\frac{۱۶۷۱۸/۳\ kN.m^۳}{EI} \Rightarrow \Delta_{max} = -\frac{۱۶۷۱۸/۳(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۲۰۰\times۱۰^۳)(۱۰۵۰۰)} = -۴۲/۸۷\ mm$$

$$\blacktriangleright \Delta_{max} = ۴۲/۸۷\ mm \downarrow$$

۴۰-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی:



EI = ثابت ؛ E = ۱۰۵۰۰ MPa ؛ I = ۷/۸۱×۱۰^۹ mm^۴

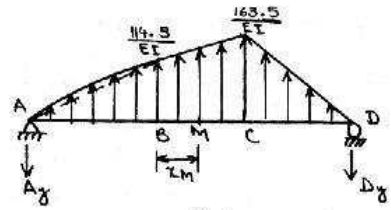
شکل ۴-۴۰

$$+\circlearrowleft \sum M_D = ۰ :$$

$$A_y(۴/۵) - \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۱۱۴/۳)(۱/۸)(۳/۳) + \frac{۲}{۳}\frac{(۲۵)(۱/۸)^۲}{۸}(۱/۸)(۳/۶) + (۱۱۴/۳)(۱/۲)(۲/۱) + \frac{۱}{۲}(۴۹/۲)(۱/۲)\left[\frac{۱/۲}{۳} + ۱/۵\right] + \frac{۱}{۲}(۱۶۳/۵)(۱/۵)\left[\frac{۳}{۵}\right]\right] = ۰$$

$$A_y = \frac{۱۸۸/۸۸\ kN.m^۳}{EI}$$

با فرض این که حداکثر لنگر خمشی تیر فرضی در نقطهٔ M وجود دارد، برش تیر فرضی در نقطهٔ M برابر صفر خواهد بود ($S_M = ۰$).



تیر فرضی

$$S_M = \frac{1}{EI}\left[-۱۸۸/۸۸ + \frac{1}{۲}(۱۱۴/۳)(۱/۸) + \frac{۲}{۳}\frac{(۲۵)(۱/۸)^۲}{۸}(۱/۸) + ۱۱۴/۳x_M + \frac{1}{۲}(۴۱x_M)x_M\right] \quad , \quad S_M = ۰ \Rightarrow \quad ۲۰/۵x_M^۲ + ۱۱۴/۳x_M - ۷۳/۸۶ = ۰$$

$$x_M = ۰/۵۸۵\,m$$

$$\Delta_{max} = \Delta_M = \frac{1}{EI}\left[(-۱۸۸/۸۸)(۲/۳۸۵) + \frac{1}{۲}(۱۱۴/۳)(۱/۸)(۱/۱۸۵) + \frac{۲}{۳}\frac{(۲۵)(۱/۸)^۲}{۸}(۱/۸)(۱/۴۸۵) + (۱۱۴/۳)\frac{(۰/۵۸۵)^۲}{۲} + \frac{1}{۲}(۲۳/۹۹)(۰/۵۸۵)\left[\frac{۰/۵۸۵}{۳}\right]\right] = -\frac{۲۸۹/۶۰\,kN.m^۳}{EI}$$

$$\Delta_{max} = -\frac{۲۸۹/۶۰(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۱۰۵۰۰)(۷/۸۱\times ۱۰^۹)} = -۳/۵۳\,mm \qquad \blacktriangleright \Delta_{max} = ۳/۵۳\,mm \downarrow$$

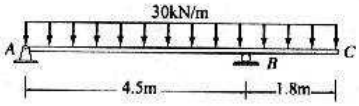
۴۱-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی:

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = ۰ \quad :$$

$$A_y(۴/۵) - \frac{1}{EI}\left[\frac{۲}{۳}(۷۵/۹۴)(۴/۵)(۲/۲۵) - \frac{1}{۲}(۴۸/۶)(۴/۵)(۱/۵)\right] = ۰$$

$$A_y = \frac{۷۷/۴۵\,kN.m^۲}{EI}$$



EI = ثابت ، $E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۱/۳۷\times ۱۰^۹\ mm^۴$

شکل ۴-۴۱

در نقطهٔ M که بیشترین لنگر خمشی در تیر فرضی وجود دارد، برش برابر صفر است.

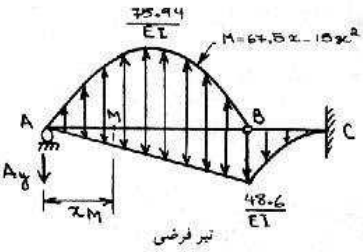
$$S_M = \frac{1}{EI}\left[-۷۷/۴۵ + \frac{1}{۲}(۶۷/۵x_M - ۱۵x_M^۲)x_M + \frac{۲}{۳}\left[\frac{۳۰x_M^۲}{۸}\right]x_M - \frac{1}{۲}(۱۰/۸x_M)x_M\right] \quad , \quad S_M = ۰ \Rightarrow \quad -۵x_M^۳ + ۲۸/۳۵x_M^۲ - ۷۷/۴۵ = ۰$$

$$x_M = ۲/۰۷۶\,m$$

$$\Delta_{max} = \Delta_M = \frac{1}{EI}\left[-۷۷/۴۵(۲/۰۷۶) + \frac{1}{۲}(۷۵/۴۸)\frac{(۲/۰۷۶)^۲}{۳} + \frac{۲}{۳}(۱۶/۱۶)\frac{(۲/۰۷۶)^۲}{۲} - \frac{1}{۲}(۲۲/۴۲)(۲/۰۷۶)\left[\frac{۲/۰۷۶}{۳}\right]\right]$$

$$\Delta_{max} = -\frac{۹۹/۴۵\,kN.m^۳}{EI}$$

$$\Delta_{max} = -\frac{۹۹/۴۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۲۰۰\times ۱۰^۲)(۱/۳۷\times ۱۰^۹)} = -۰۰/۳۶۳\,mm \qquad \blacktriangleright \Delta_{max} = ۰/۳۶۳\,mm \downarrow$$



تیر فرضی

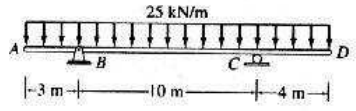
۴۲-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی:

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} = ۰ \quad :$$

$$B_y(۱۰) - \frac{1}{EI}\left[\frac{۲}{۳}(۳۱۲/۵)(۱۰)(۵) - (۱۱۲/۵)(۱۰)(۵) - \frac{1}{۲}(۸۷/۵)(۱۰)\left[\frac{۱۰}{۳}\right]\right] = ۰$$

$$B_y = \frac{۳۳۳/۳۳\,kN.m^۲}{EI}$$



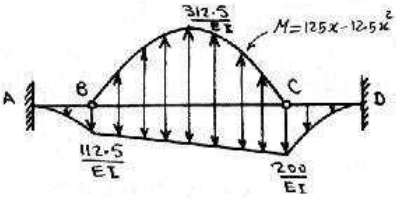
EI = ثابت ، $E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۵۰۰\times ۱۰^۶\ mm^۴$

شکل ۴-۴۲

با فرض این که حداکثر لنگر خمشی تیر فرضی در نقطهٔ M وجود دارد، برش در این نقطه برابر صفر خواهد بود.

$$S_M = \frac{1}{EI}\left[-۳۳۳/۳۳ + \frac{1}{۲}(۱۲۵x_M - ۱۲/۵x_M^۲)x_M + \frac{۲}{۳}\left[\frac{۲۵x_M^۲}{۸}\right]x_M - ۱۱۲/۵x_M - \frac{1}{۲}(۸/۷۵x_M)x_M\right]$$

$$S_M = ۰ \Rightarrow \quad -۴/۱۶۷x_M^۳ + ۵۸/۱۲۵x_M^۲ - ۱۱۲/۵x_M - ۳۳۳/۳۳ = ۰ \Rightarrow \quad x_M = ۴/۷۷\,m$$



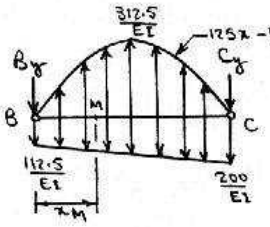
تیر فرضی

$$\Delta_{max}=\Delta_M=\frac{1}{EI}\left[-۳۳۳/۳۳(۴/۷۷)+\frac{1}{2}(۳۱۱/۸۴)\frac{(۴/۷۷)^2}{3}+\frac{2}{3}(۷۱/۱)\frac{(۴/۷۷)^2}{2}-۱۱۲/۵\frac{(۴/۷۷)^2}{2}-\frac{1}{2}(۴۱/۷۴)\frac{(۴/۷۷)^2}{3}\right]$$

$$\Delta_{max}=-\frac{۱۳۰۶/۳\ kN.m^3}{EI}$$

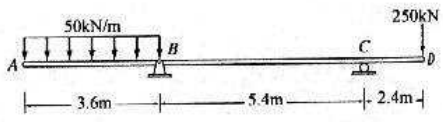
$$\Delta_{max}=-\frac{۱۳۰۶/۳(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^3}{(۲۰۰\times10^3)(۵۰۰\times10^6)}=-۱۳/۰۶\ mm$$

$$\blacktriangleright \Delta_{max}=۱۳/۰۶\ mm\downarrow$$



۴۳-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی:



EI = ثابت ، $E=۱۴۰۰۰\ MPa$ ، $I=۹/۷۶\times10^{-۱}\ mm^4$

شکل ۴-۴۳

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC}=0:\quad -B_y(۵/۴)+\frac{1}{EI}\left[(۳۲۴)(۵/۴)(۲/۷)+\frac{1}{2}(۲۷۶)(۵/۴)(۱/۸)\right]=0$$

$$B_y=\frac{۱۱۲۳/۲\ kN.m^2}{EI}$$

$$+\uparrow \sum F_y^{BC}=0:$$

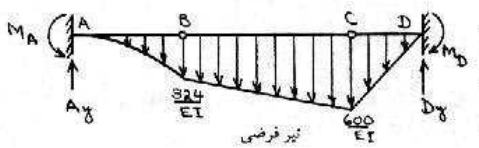
$$\frac{1}{EI}\left[۱۱۲۳/۲-۳۲۴(۵/۴)-\frac{1}{2}(۲۷۶)(۵/۴)\right]+C_y=0$$

$$C_y=\frac{۱۳۷۱/۶\ kN.m^2}{EI}$$

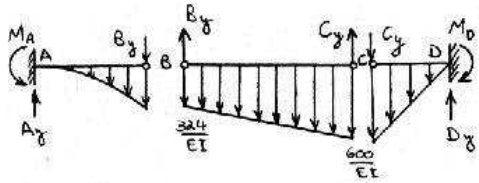
$$+\uparrow \sum F_y^{AB}=0:\quad A_y-\frac{1}{EI}\left[۱۱۲۳/۲+\frac{1}{3}(۳۲۴)(۳/۶)\right]=0$$

$$A_y=\frac{۱۵۱۲\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_A=\frac{۱۵۱۲\ kN.m^2}{EI}\Rightarrow \theta_A=\frac{۱۵۱۲(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^2}{(۱۴۰۰۰)(۹/۷۶\times10^9)}=۰/۰۱۱۰\ rad$$



نیر فرضی



$$\blacktriangleright \theta_A=۰/۰۱۱۰\ rad$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A^{AB}=0:$$

$$M_A-\frac{1}{EI}\left[۱۱۲۳/۲(۳/۶)+\frac{1}{3}(۳۲۴)(۳/۶)\left[\frac{3}{4}\right](۳/۶)\right]=0$$

$$M_A=\frac{۵۰۹۳/۲۸\ kN.m^2}{EI}$$

$$\Delta_A=-\frac{۵۰۹۳/۲۸\ kN.m^3}{EI}\Rightarrow \Delta_A=-\frac{۵۰۹۳/۲۸(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^3}{(۱۴۰۰۰)(۹/۷۶\times10^9)}=-۳۷/۲۸\ mm\qquad \blacktriangleright \Delta_A=۳۷/۲۸\ mm\downarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y^{CD}=0:\quad D_y-\frac{1}{EI}\left[۱۳۷۱/۶+\frac{1}{2}(۶۰۰)(۲/۴)\right]=0\Rightarrow D_y=\frac{۲۰۹۱/۶\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_D=-\frac{۲۰۹۱/۶\ kN.m^2}{EI}\Rightarrow \theta_D=-\frac{۲۰۹۱/۶(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^2}{(۱۴۰۰۰)(۹/۷۶\times10^9)}=-۰/۰۱۵۳\ rad\qquad \blacktriangleright \theta_D=۰/۰۱۵۳\ rad$$

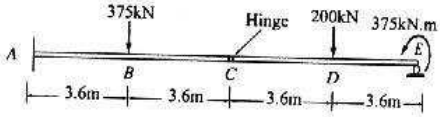
$$+\circlearrowleft \sum M_D^{CD}=0:\quad \frac{1}{EI}\left[۱۳۷۱/۶(۲/۴)+\frac{1}{2}(۶۰۰)(۲/۴)\left[\frac{۴/۸}{3}\right]\right]-M_D=0\Rightarrow M_D=\frac{۴۴۴۳/۸۴\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_D = -\frac{۴۴۴۳/۸۴\ kN.m^۳}{EI} \Rightarrow \Delta_D = -\frac{۴۴۴۳/۸۴(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۱۴۰۰۰)(۹/۷۶\times ۱۰^۹)} = -۳۲/۵۲\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_D = ۳۲/۵۲\ mm \downarrow$$

در مسایل ۴-۴۴ و ۴-۴۵ مقادیر شیب و تغییر مکان نقاط B و D را با استفاده از روش تیر فرضی محاسبه کنید.

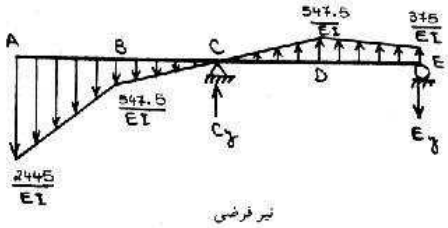
۴۴-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی:



EI = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa ، I = ۲/۳۴×۱۰^۹ mm^۴

شکل ۴-۴۴



تیر فرضی

$$+\circlearrowleft \sum M_E = ۰ \ : \ \frac{۱}{EI}\Big[\frac{۱}{۲}(۱۸۹۷/۵)(۳/۶)(۱۳/۲) + (۵۴۷/۵)(۳/۶)(۱۲/۶) + \frac{۱}{۲}(۵۴۷/۵)(۳/۶)(۹/۶) - \frac{۱}{۲}(۵۴۷/۵)(۳/۶)(۴/۸) - \frac{۱}{۲}(۱۷۲/۵)(۳/۶)(۲/۴) - (۳۷۵)(۳/۶)(۱/۸)\Big] - C_y(۷/۲) = ۰$$

$$C_y = \frac{۹۹۲۷\ kN.m^۲}{EI}$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ \frac{۱}{EI}\Big[-\frac{(۲۴۴۵+۵۴۷/۵)}{۲}(۳/۶) + \frac{(۵۴۷/۵+۳۷۵)}{۲}(۳/۶) + ۹۹۲۷\Big] - E_y = ۰$$

$$E_y = \frac{۶۲۰۱\ kN.m^۲}{EI}$$

$$\theta_B = -\frac{۱}{EI}\Big[\frac{(۲۴۴۵+۵۴۷/۵)}{۲}(۳/۶)\Big] = -\frac{۵۳۸۶/۵\ kN.m^۲}{EI}$$

$$\theta_B = -\frac{۵۳۸۶/۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۲۰۰\times ۱۰^۳)(۲/۳۴\times ۱۰^۹)} = -۰/۰۱۱۵ rad$$

$$\blacktriangleright \theta_B = ۰/۰۱۱۵\ rad \curvearrowleft$$

$$\Delta_B = -\frac{۱}{EI}\Big[(۵۴۷/۵)(۳/۶)(۱/۸) + \frac{۱}{۲}(۱۸۹۷/۵)(۳/۶)(۲/۴)\Big] = -\frac{۱۱۷۴۵\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\Delta_B = -\frac{۱۱۷۴۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۲۰۰\times ۱۰^۳)(۲/۳۴\times ۱۰^۹)} = -۲۵/۱\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_B = ۲۵/۱\ mm \downarrow$$

$$\theta_D = \frac{۱}{EI}\Big[۶۲۰۱ - \frac{(۵۴۷/۵+۳۷۵)}{۲}(۳/۶)\Big] = \frac{۴۵۴۰/۵\ kN.m^۲}{EI} \Rightarrow \theta_D = \frac{۴۵۴۰/۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۲۰۰\times ۱۰^۳)(۲/۳۴\times ۱۰^۹)} = ۰/۰۰۹۷ rad$$

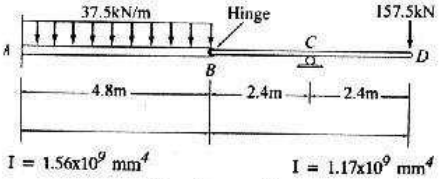
$$\blacktriangleright \theta_D = ۰/۰۰۹۷ rad \curvearrowright$$

$$\Delta_D = \frac{۱}{EI}\Big[(-۶۲۰۱)(۳/۶) + (۳۷۵)(۳/۶)(۱/۸) + \frac{۱}{۲}(۱۷۲/۵)(۳/۶)(۱/۲)\Big] = -\frac{۱۹۵۲۱\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\Delta_D = -\frac{۱۹۵۲۱(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۲۰۰\times ۱۰^۳)(۲/۳۴\times ۱۰^۹)} = -۴۱/۷۱\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_D = ۴۱/۷۱\ mm \downarrow$$

۴۵-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی:



I = 1.56x10^9 mm^4 I = 1.17x10^9 mm^4

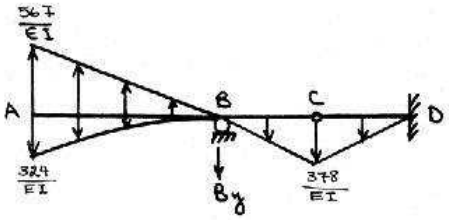
E = ثابت = ۲۱۰ GPa

شکل ۴-۴۵

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = ۰ \ : \ \frac{۱}{EI}\Big[\frac{۱}{۳}(۳۲۴)(۴/۸)(۶) - \frac{۱}{۲}(۵۶۷)(۴/۸)(۵/۶) + \frac{۱}{۲}(۳۷۸)(۲/۴)\Big[\frac{۲/۴}{۳}\Big]\Big] + B_y(۲/۴) = ۰$$

$$B_y = \frac{۱۷۲۸\ kN.m^۲}{EI}$$

$$\theta_{B,L} = \frac{۱}{EI}\Big[\frac{۱}{۲}(۵۶۷)(۴/۸) - \frac{۱}{۳}(۳۲۴)(۴/۸)\Big] = \frac{۸۴۲/۴\ kN.m^۲}{EI}$$



تیر فرضی

$$\theta_{B,L}=\frac{۸۴۲/۴(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۱۰\times۱۰^{۳})(۱/۱۷\times۱۰^{۹})}=۰/۰۰۳۴\ rad$$

$$\blacktriangleright\ \theta_{B,L}=۰/۰۰۳۴\ rad$$

$$\theta_{B,R}=\frac{۱}{EI}\left[۸۴۲/۴-۱۷۲۸\right]=-\frac{۸۸۵/۶\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_{B,R}=-\frac{۸۸۵/۶(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۱۰\times۱۰^{۳})(۱/۱۷\times۱۰^{۹})}=-۰/۰۰۳۶\ rad$$

$$\blacktriangleright\ \theta_{B,R}=۰/۰۰۳۶\ rad$$

$$\Delta_B=\frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۵۶۷)(۴/۸)(۳/۲)-\frac{۱}{۳}(۳۲۴)(۴/۸)(۳/۶)\right]$$

$$\Delta_B=\frac{۲۴۸۸/۳۲\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_B=\frac{۲۴۸۸/۳۲(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۱۰\times۱۰^{۳})(۱/۱۷\times۱۰^{۹})}=۱۰/۱۳\ mm$$

$$\blacktriangleright\ \Delta_B=۱۰/۱۳\ mm\uparrow$$

$$\theta_D=\frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۵۶۷)(۴/۸)-\frac{۱}{۳}(۳۲۴)(۴/۸)-۱۷۲۸-\frac{۱}{۲}(۳۷۸)(۴/۸)\right]=-\frac{۱۷۹۲/۸\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_D=-\frac{۱۷۹۲/۸(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۱۰\times۱۰^{۳})(۱/۱۷\times۱۰^{۹})}=-۰/۰۰۷۳\ rad$$

$$\blacktriangleright\ \theta_D=۰/۰۰۷۳\ rad$$

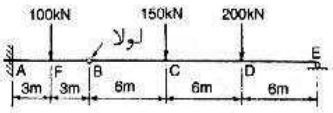
$$\Delta_D=\frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۵۶۷)(۴/۸)(۸)-\frac{۱}{۳}(۳۲۴)(۴/۸)(۸/۴)-۱۷۲۸(۴/۸)-\frac{۱}{۲}(۳۷۸)(۴/۸)(۲/۴)\right]=-\frac{۳۹۳۹/۸۴\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_D=-\frac{۳۹۳۹/۸۴(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۱۰\times۱۰^{۳})(۱/۱۷\times۱۰^{۹})}=-۱۶/۰۴\ mm$$

$$\blacktriangleright\ \Delta_D=۱۶/۰۴\ mm\downarrow$$

در مسایل زیر حداکثر تغییر مکان قائم تیر را با استفاده از روش تیر فرضی محاسبه کنید. (واحد طول متر و واحد بارها کیلونیوتن است.)

۴۶-۴



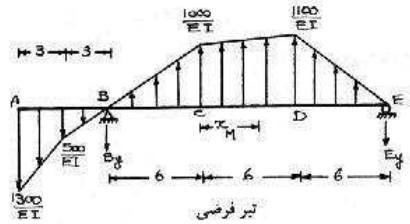
EI = ثابت

شکل ۴۶-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی:

$$+\circlearrowleft\sum M_E=۰:\ \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}(۸۰۰)(۳)(۲۳)+(۵۰۰)(۳)(۲۲/۵)+\frac{۱}{۲}(۵۰۰)(۳)(۲۰)-\frac{۱}{۲}(۱۰۰۰)(۶)(۱۴)-(۱۰۰۰)(۶)(۹)-\frac{۱}{۲}(۱۰۰)(۶)(۸)-\frac{۱}{۲}(۱۱۰۰)(۶)(۴)\right]+B_y(۱۸)=۰$$

$$B_y=\frac{۱۹۵۸/۳۳\ kN.m^{۲}}{EI}$$



تیر فرضی

با فرض این که حداکثر لنگر خمشی تیر فرضی در نقطهٔ M به فاصلهٔ x_M از نقطهٔ C وجود دارد، در نقطهٔ M برش تیر فرضی برابر صفر خواهد بود.

$$S_M=\frac{۱}{EI}\left[-\frac{(۱۳۰۰+۵۰۰)}{۲}(۳)-\frac{۱}{۲}(۵۰۰)(۳)-۱۹۵۸/۳۳+\frac{۱}{۲}(۱۰۰۰)(۶)+(۱۰۰۰+۸/۳۳۳x_M)x_M\right]$$

$$S_M=۰\ \Rightarrow\ ۸/۳۳۳x_M^{۲}+۱۰۰۰x_M-۲۴۰۸/۳۳=۰$$

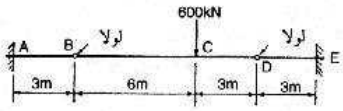
$$x_M=۲/۳۶\ m$$

$$\Delta_{max}=\Delta_M=\frac{۱}{EI}\left[-\frac{۱}{۲}(۸۰۰)(۳)(۱۳/۳۶)-(۵۰۰)(۳)(۱۲/۸۶)-\frac{۱}{۲}(۵۰۰)(۳)(۱۰/۳۶)-۱۹۵۸/۳۳(۸/۳۶)+\frac{۱}{۲}(۱۰۰۰)(۶)(۴/۳۶)+(۱۰۰۰)\frac{(۲/۳۶)^{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}(۱۶/۶۶۶)(۲/۳۶)^{۲}\frac{(۲/۳۶)}{۳}\right]=-\frac{۴۳۵۶۲/۳\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\blacktriangleright\ \Delta_{max}=\frac{۴۳۵۶۲/۳\ kN.m^{۳}}{EI}\downarrow$$

۴۷-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی:



EI = ثابت

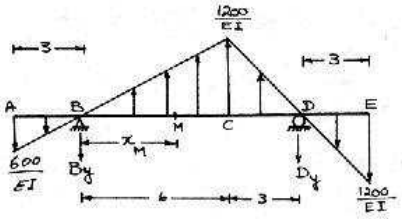
شکل ۴-۴۷

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \;:\; \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(600)(3)(11) - \frac{1}{2}(1200)(6)(5) - \frac{1}{2}(1200)(3)(2) - \frac{1}{2}(1200)(3)(2)\right] + B_y(9) = 0 \;\Rightarrow\; B_y = \frac{1700\ kN.m^2}{EI}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(1200)(9) - \frac{1}{2}(600)(3) - \frac{1}{2}(1200)(3) - 1700\right] - D_y = 0$$

$$D_y = \frac{1000\ kN.m^2}{EI}$$

با فرض این که حداکثر لنگر خمشی تیر فرضی در نقطهٔ M به فاصلهٔ x_M از نقطهٔ B وجود دارد، برش تیر فرضی در نقطهٔ M برابر صفر خواهد بود.



تیر فرضی

$$S_M = \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{2}(600)(3) - 1700 + \frac{1}{2}(200x_M)x_M\right]$$

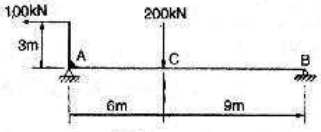
$$S_M = 0 \;\Rightarrow\; 100x_M^2 - 2600 = 0 \;\Rightarrow\; x_M = 5/1\ m$$

$$\Delta_{max} = \Delta_m = \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{2}(600)(3)(7/1) - (1700)(5/1) + \frac{1}{2}(1020)(5/1)\left(\frac{5/1}{3}\right)\right] = -\frac{10638/3\ kN.m^3}{EI}$$

$$\blacktriangleright\ \Delta_{max} = \frac{10638/3\ kN.m^3}{EI}\downarrow$$

۴۸-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی:



EI = ثابت

شکل ۴-۴۸

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; \frac{1}{EI}\left[(300)(2/14)\left[\frac{4/18}{3} + 12/86\right] - \frac{1}{2}(540)(3/86)\left[\frac{3/86}{3} + 9\right] - \frac{1}{2}(540)(9)(6)\right] + A_y(15) = 0$$

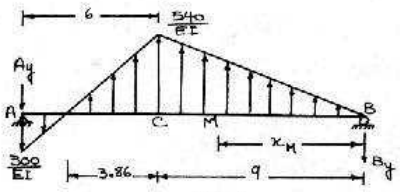
$$A_y = \frac{1380/98\ kN.m^2}{EI}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:$$

$$-B_y + \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(12/86)(540) - \frac{1}{2}(300)(2/14) - 1380/98\right] = 0$$

$$B_y = \frac{1770/22\ kN.m^2}{EI}$$

با فرض این که حداکثر لنگر خمشی تیر فرضی در نقطهٔ M به فاصلهٔ x_M از نقطهٔ B وجود دارد، برش تیر فرضی در نقطهٔ M برابر صفر خواهد بود.



تیر فرضی

$$S_M = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(60x_M)x_M - 1770/22\right]$$

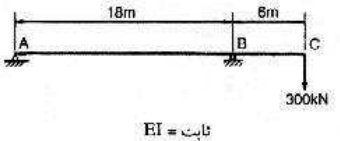
$$S_M = 0 \;\Rightarrow\; 30x_M^2 - 1770/22 = 0 \;\Rightarrow\; x_M = 7/68\ m$$

$$\Delta_{max} = \Delta_M = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(60)(7/68)(7/68)\left[\frac{(7/68)}{3}\right] - 1770/22(7/68)\right] = -\frac{9065/44\ kN.m^3}{EI}$$

$$\blacktriangleright\ \Delta_{max} = \frac{9065/44\ kN.m^3}{EI}\downarrow$$

۴۹-۴

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر فرضی:



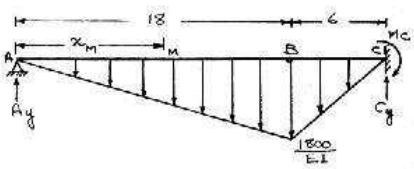
EI = ثابت

شکل ۴-۴۹

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(1800)(18)(6)\right] - A_y(18) = 0$$

$$A_y = \frac{5400\ kN.m^2}{EI}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; \frac{1}{EI}\left[5400 - \frac{1}{2}(1800)(24)\right] + C_y = 0$$



تیر فرضی

$$C_y = \frac{16200\ kN.m^3}{EI}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \ :$$

$$-M_C + \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(1800)(18)(12) + \frac{1}{2}(1800)(6)(4) - (54000)(24)\right] = 0$$

$$M_C = \frac{86400\ kN.m^3}{EI}$$

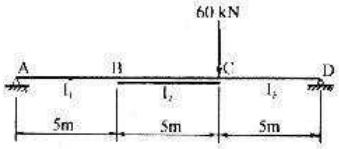
اگر در نقطهٔ M از تیر فرضی حداکثر لنگر خمشی وجود داشته باشد، برش در نقطهٔ مزبور برابر صفر خواهد بود.

$$S_M = \frac{1}{EI}\left[54000 - \frac{1}{2}(100x_M)x_M\right] \ , \ S_M = 0 \Rightarrow 50x_M^2 - 54000 = 0 \Rightarrow x_M = 10/39\ m$$

$$\Delta_m = \frac{1}{EI}\left[(54000)(10/39) - \frac{1}{2}(100)(10/39)(10/39)\frac{(10/39)}{3}\right] = \frac{37412/29\ kN.m^3}{EI} \uparrow \ , \ \Delta_C = \frac{86400\ N.m^3}{EI} \downarrow$$

در نقطهٔ C بیشترین تغییر مکان رو به پایین و در نقطهٔ M حداکثر تغییر مکان رو به بالای تیر رخ می‌دهد.

۴-۵۰



$I_1 = I_3 = I$ و $I_2 = 2I$ ، E = ثابت

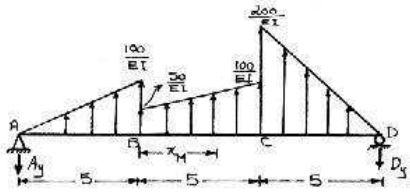
شکل ۴-۵۰

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \ : \ A_y(15) - \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(100)(5)(11/66) + \frac{1}{2}(50)(5)(6/66) + (50)(5)(7/5) + \frac{1}{2}(200)(5)(3/33)\right] = 0 \Rightarrow A_y = \frac{486/1\ kN.m^2}{EI}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \ :$$

$$-D_y + \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(100)(5) + \frac{1}{2}(50)(5) + (50)(5) + \frac{1}{2}(200)(5) - 486/1\right] = 0$$

$$D_y = \frac{638/9\ kN.m^2}{EI}$$



تیر فرضی

اگر حداکثر لنگر خمشی تیر فرضی در نقطهٔ M وجود داشته باشد، در این صورت برش در نقطهٔ M برابر صفر خواهد بود.

$$S_M = \frac{1}{EI}\left[-486/1 + \frac{1}{2}(100)(5) + \frac{1}{2}(10x_M)(x_M) + (50)(x_M)\right]$$

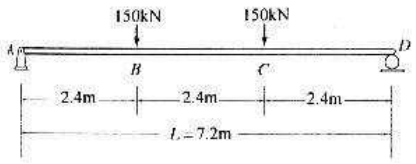
$$S_M = 0 \Rightarrow 5x_M^2 + 50x_M - 236/1 = 0 \Rightarrow x_M = 3/5\ m$$

$$\Delta_{max} = \Delta_M = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(100)(5)(5/167) + \frac{1}{2}(10)(3/5)(3/5)\frac{(3/5)}{3} + (50)(3/5)\frac{(3/5)}{2} - (486/1)(8/5)\right] = -\frac{2462/4\ kN.m^3}{EI}$$

$$\blacktriangleright \Delta_{max} = \frac{2462/4\ kN.m^3}{EI} \downarrow$$

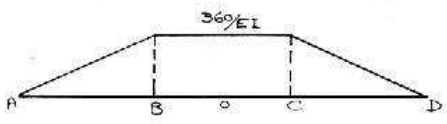
در مسایل ۴-۵۱ تا ۴-۵۶ حداقل ممان اینرسی I تیر را چنان محاسبه کنید که حداکثر خیز تیر به $\frac{1}{360}$ طول دهانه محدود شود، ($\Delta_{max} < \frac{L}{360}$). (از روش لنگر سطح استفاده کنید.)

۴-۵۱



EI = ثابت
E = ۷۰ GPa

شکل ۴-۵۱

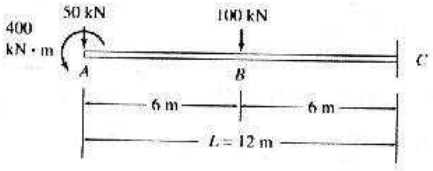


نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

$$\Delta_{max}=\Delta_{AO}=\frac{۱}{EI}\left[\frac{۳۶۰(۲/۴)}{۲}(۱/۶)+(۳۶۰)(۱/۲)(۲/۴+۰/۶)\right]=\frac{۱۹۸۷/۲\ kN.m^۳}{EI}\quad,\quad E=۷۰\ GPa=۷۰\times۱۰^۶\ kN/m^۲$$

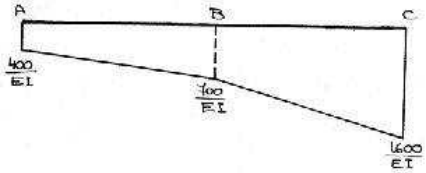
$$\Delta_{max}<\frac{L}{۳۶۰}\ \Rightarrow\ \frac{۱۹۸۷/۲}{(۷۰\times۱۰^۶)I}<\frac{۷/۲}{۳۶۰}\ \Rightarrow\ I>۱/۴۱۹\times۱۰^{-۳}\ m^۴\qquad\blacktriangleright I_{min}=۱/۴۱۹\times۱۰^۹\ mm^۴$$

۵۲-۴



EI = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa

شکل ۴-۵۲



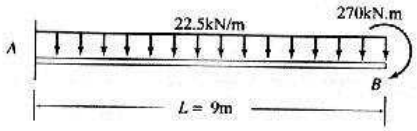
نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

$$\Delta_{max}=\Delta_{AC}=\frac{۱}{EI}\left[(۴۰۰)(۱۲)(۶)+\frac{(۳۰۰)(۶)}{۲}(۴)+(۳۰۰)(۶)(۹)+\frac{(۹۰۰)(۶)}{۲}(۱۰)\right]=\frac{۷۵۶۰۰\ kN.m^۳}{EI}$$

$$E=۲۰۰\ GPa=۲۰۰\times۱۰^۶\ \ kN/m^۲$$

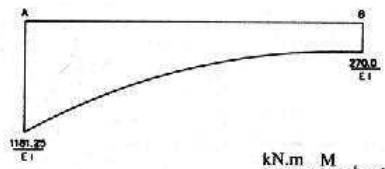
$$\Delta_{max}<\frac{L}{۳۶۰}\ \Rightarrow\ \frac{۷۵۶۰۰}{(۲۰۰\times۱۰^۶)I}<\frac{۱۲}{۳۶۰}\ \Rightarrow\ I>۱/۱۳۴\times۱۰^{-۲}\ m^۴\qquad\blacktriangleright I_{min}=۱/۱۳۴\times۱۰^{۱۰}\ mm^۴$$

۵۳-۴



EI = ثابت
E = ۲۰۰ GPa

شکل ۴-۵۳

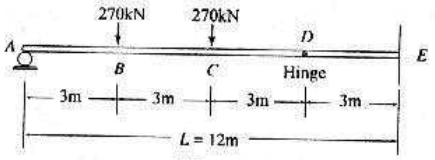


نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

$$\Delta_{max}=\Delta_{BA}=\frac{۱}{EI}\left[(۲۷۰)(۹)(۴/۵)+\frac{(۹۱۱/۲۵)(۹)}{۳}\left[\frac{۳}{۴}\right](۹)\right]=\frac{۲۹۳۸۷/۸۱\ kN.m^۳}{EI}\quad,\quad E=۲۰۰\ GPa=۲۰۰\times۱۰^۶\ kN/m^۲$$

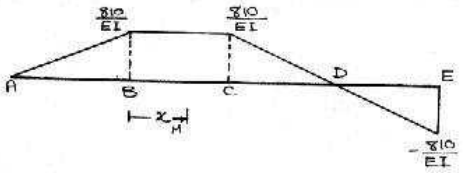
$$\Delta_{max}<\frac{L}{۳۶۰}\ \Rightarrow\ \frac{۲۹۳۸۷/۸۱}{(۲۰۰\times۱۰^۶)I}<\frac{۹}{۳۶۰}\ \Rightarrow\ I>۵/۸۷۸\times۱۰^{-۳}\ m^۴\qquad\blacktriangleright I_{min}=۵/۸۷۸\times۱۰^۹\ mm^۴$$

۵۴-۴



EI = ثابت
E = ۲۰۰ GPa

شکل ۴-۵۴



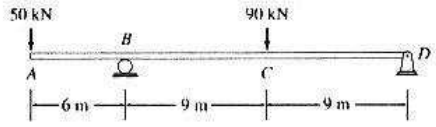
نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

$$\Delta_D=\Delta_{DE}=\left[\frac{۸۱۰}{EI}\right](۱/۵)(۲)=\frac{۲۴۳۰}{EI}\quad,\quad\Delta_{DA}=\left[\frac{۸۱۰}{EI}\right](۱/۵)(۲+۷)+\left[\frac{۸۱۰}{EI}\right](۳)(۴/۵)=\frac{۲۱۸۷۰}{EI}$$

$$\theta_A=\frac{\Delta_D+\Delta_{DA}}{۹}=\frac{۲۷۰۰}{EI}\quad,\quad\theta_D=\theta_{DM}\ \Rightarrow\ \frac{۲۷۰۰}{EI}=\left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]\left[\frac{۳}{۲}\right]+\left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]x_M\Rightarrow\ x_M=۱/۸۳۳\ m$$

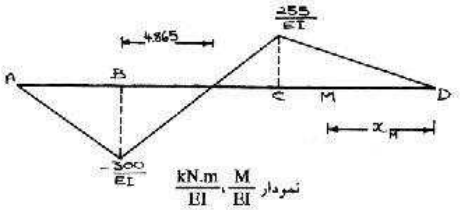
$$\Delta_{max}=\Delta_{AM}=\left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]\left[\frac{۳}{۲}\right](۲)+\left[\frac{۸۱۰}{EI}\right](۳/۹۱۶۶)(۱/۸۳۳)=\frac{۸۲۴۶/۲۵}{EI}\quad,\quad \Delta_{max}<\frac{L}{۳۶۰}\quad\blacktriangleright I=۱/۲۳۷\times ۱۰^{۹}mm^{۴}$$

۴-۵۵ حداکثر تغییر مکان (خیز) را در تیر شکل زیر با استفاده از روش لنگر سطح محاسبه کنید.



EI = ثابت ، E = ۷۰ GPa ، I = ۹۵×۱۰⁶ mm⁴

شکل ۴-۵۵



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

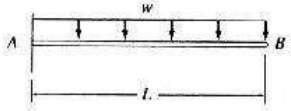
$$\Delta_{BD}=\frac{۱}{EI}\left[\frac{(-۳۰۰)(۴/۸۶۵)}{۲}\left[\frac{۴/۸۶۵}{۳}\right]+\frac{(۲۵۵)(۴/۱۳۵)}{۲}(۴/۸۶۵+۲/۷۵۶۷)+\frac{(۲۵۵)(۹)}{۲}(۹+۳)\right]=\frac{۱۶۶۰۴/۸\,kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\theta_D=\frac{\Delta_{BD}}{۱۸}=\frac{۹۲۲/۴۹\,kN.m^{۲}}{EI}\quad,\quad \theta_D=\theta_{DM}\Rightarrow\frac{۹۲۲/۴۹}{EI}=\frac{\left[\frac{۲۵۵}{EI}\right]\left[\frac{x}{۹}\right](x)}{۲}\Rightarrow x_M=۸/۰۶۹\,m$$

$$\Delta_{MD}=\frac{\left[\frac{۲۵۵}{EI}\right]\left[\frac{۸/۰۶۹}{۹}\right](۸/۰۶۹)}{۲}\left[\frac{۸/۰۶۹}{۳}\right]=\frac{۲۴۸۰/۸۸\,kN.m^{۳}}{EI}\quad,\quad \Delta_{max}=۸/۰۶۹\theta_D-\Delta_{MD}$$

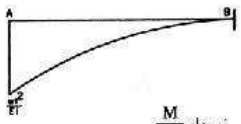
$$\Delta_{max}=(۸/۰۶۹)\left[\frac{۹۲۲/۴۹}{EI}\right]-\frac{۲۴۸۰/۸۸}{EI}=\frac{۴۹۶۲/۶۹\,kN.m^{۳}}{EI}=\frac{۴۹۶۲/۶۹\times ۱۰^{۱۲}}{(۷۰۰۰۰)(۹۵\times ۱۰^{۶})}=۷۴۶/۲\,mm\quad\blacktriangleright\Delta_{max}=۷۴۶/۲\,mm$$

۴-۵۶ مقادیر شیب و خیز در نقطهٔ **B** از تیر نشان داده شده را با روش تیر مزدوج به دست آورید.



EI = ثابت

شکل ۴-۵۶



نمودار $\frac{M}{EI}$

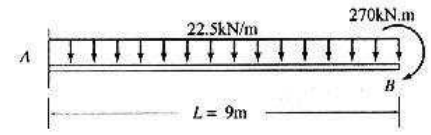
$$\Delta_B=M_B=\frac{\left[\frac{wL^{۲}}{۲}\right](L)}{۳}\left[\frac{۳}{۴}L\right]=\frac{wL^{۴}}{۸EI}$$

$$\blacktriangleright\Delta_B=\frac{wL^{۴}}{۸EI}\downarrow$$

$$\theta_B=S_B=\frac{\left[\frac{wL^{۲}}{۲}\right](L)}{۳}=\frac{wL^{۳}}{۶EI}\quad\blacktriangleright\theta_B=\frac{wL^{۳}}{۶EI}$$

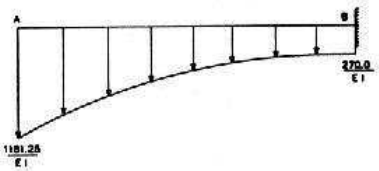
در مسایل ۴-۵۷ تا ۴-۵۹ حداقل ممان اینرسی **I** تیر را چنان محاسبه کنید که حداکثر خیز تیر به $\frac{۱}{۳۶۰}$ طول دهانه محدود شود، $\left(\Delta_{max}<\frac{L}{۳۶۰}\right)$. (از روش تیر مزدوج استفاده کنید.)

۴-۵۷



EI = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa

شکل ۴-۵۷

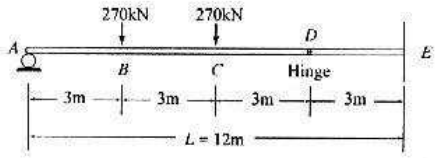


تیر مزدوج

$$\Delta_{max}=M_{max}=M_B=\frac{۱}{EI}\left[(۲۷۰)(۹)(۴/۵)+\frac{(۹۱۱/۲۵)(۹)}{۳}\left[\frac{۳}{۴}\right](۹)\right]=\frac{۲۹۳۸۷/۸۱\,kN.m^{۳}}{EI}\quad,\quad E=۲۰۰\,GPa=۲۰۰\times ۱۰^{۶}\,kN/m^{۲}$$

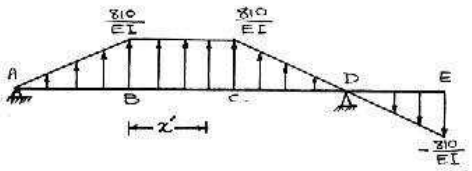
$$\Delta_{max} < \frac{L}{۳۶۰} \Rightarrow \frac{۲۹۳۸۷/۸}{(۲۰۰\times ۱۰^{۶})I} < \frac{۹}{۳۶۰} \Rightarrow I > ۵/۸۷۸\times ۱۰^{-۳} m^{۴} \qquad \blacktriangleright I_{min} = ۵/۸۷۸\times ۱۰^{۹} mm^{۴}$$

۵۸-۴



EI = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa

شکل ۲-۵۸



تیر مزدوج

در تیر مزدوج:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \;:\; \left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]\left[\frac{۳}{۲}\right]\left[۲+(۳+۳+۱)\right] + \left[\frac{۸۱۰}{EI}\right](۳)(۴/۵) - \left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]\left[\frac{۳}{۲}\right](۹+۲) + D_y(۹) = ۰ \Rightarrow D_y = -\frac{۹۴۵}{EI}$$

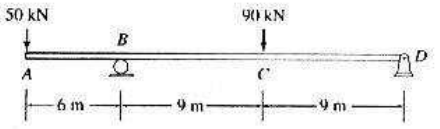
$$\theta_M = S_M = ۰ \Rightarrow -\frac{۹۴۵}{EI} - \left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]\left[\frac{۳}{۲}\right] + \left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]\left[\frac{۳}{۲}\right] + \left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]x = ۰ \Rightarrow x = ۱/۱۶۶۷\, m$$

$$\Delta_{max} = M_M = \left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]\left[\frac{۳}{۲}\right](۲+۳+۱/۱۶۶۷) - \left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]\left[\frac{۳}{۲}\right](۱+۱/۱۶۶۷) + \left[\frac{۹۴۵}{EI}\right](۳+۱/۱۶۶۷) - \left[\frac{۸۱۰}{EI}\right]\frac{(۱/۱۶۶۷)^{۲}}{۲}$$

$$\Delta_{max} = \frac{۸۲۴۶/۲۵}{EI}$$

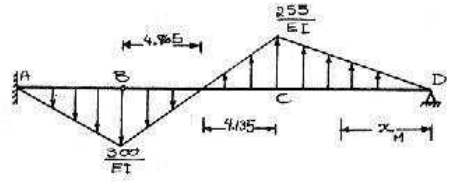
$$\Delta_{max} < \frac{L}{۳۶۰} \Rightarrow \frac{۸۲۴۶/۲۵}{(۲۰۰\times ۱۰^{۶})I} < \frac{۱۲}{۳۶۰} \Rightarrow I > ۱/۲۳۷\times ۱۰^{-۳} m^{۴} \qquad \blacktriangleright I_{min} = ۱/۲۳۷\times ۱۰^{۹} mm^{۴}$$

۵۹-۴ در تیر نشان داده شده، حداکثر تغییر مکان (خیز) را با استفاده از روش تیر مزدوج به دست آورید.



EI = ثابت ، E = ۷۰ GPa ، I = ۹۵×۱۰⁶ mm⁴

شکل ۲-۵۹



تیر مزدوج

در تیر مزدوج:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \;:\; D_y(۱۸) - \left[\frac{۳۰۰}{EI}\right]\left[\frac{۴/۸۶۵^{۲}}{۶}\right] + \left[\frac{۲۵۵}{EI}\right]\left[\frac{۴/۱۳۵}{۲}\right](۷/۶۲۲) + \left[\frac{۲۵۵}{EI}\right]\left[\frac{۹}{۲}\right](۹+۳) = ۰ \Rightarrow D_y = -\frac{۹۲۲/۴۹}{EI}$$

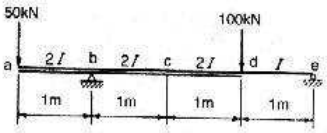
$$\theta_M = S_M = ۰ \Rightarrow \frac{\left[\frac{۲۵۵}{EI}\right]\left[\frac{x}{۹}\right](x)}{۲} - \frac{۹۲۲/۴۹}{EI} = ۰ \Rightarrow x_M = ۸/۰۶۹\, m$$

$$\Delta_{max} = M_M = \left[\frac{۹۲۲/۴۹}{EI}\right](۸/۰۶۹) - \frac{\left[\frac{۲۵۵}{EI}\right]\left[\frac{۸/۰۶۹}{۹}\right](۸/۰۶۹)}{۲}\left[\frac{۸/۰۶۹}{۳}\right] = \frac{۴۹۶۲/۶۹\, kN.m^{۳}}{EI} = \frac{۴۹۶۲/۶۹\times ۱۰^{۱۲}}{(۷۰۰۰۰)(۹۵\times ۱۰^{۶})} = ۷۴۶/۲\, mm$$

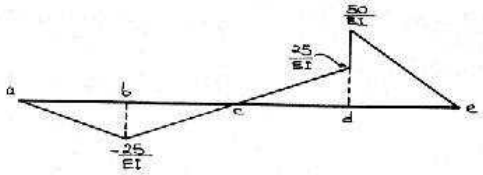
$$\blacktriangleright \Delta_{max} = ۷۴۶/۲\, mm$$

در مسایل ۴-۶۰ و ۴-۶۱ مقادیر شیب و تغییر مکان قائم نقاط a ، b ، c و d را با استفاده از روش لنگر سطح به دست آورید.

۴-۶۰



شکل ۴-۶۰



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

$$\Delta_{cb}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(50)(1)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{(25)(1)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{(25)(1)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\right]=0 \quad , \quad \theta_b=\frac{\Delta_{cb}}{3}=\frac{0}{3}=0 \qquad \blacktriangleright \theta_b=0 \ , \ \delta_b=0$$

$$\Delta_{ab}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(-25)(1)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right]=-\frac{8/333}{EI} \qquad \blacktriangleright \delta_a=\frac{8/333}{EI}\downarrow$$

$$\theta_{ba}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(-25)(1)}{2}\right]=-\frac{12/5}{EI} \quad , \quad \theta_{ba}=\theta_b-\theta_a \qquad \blacktriangleright \theta_a=\frac{12/5}{EI}$$

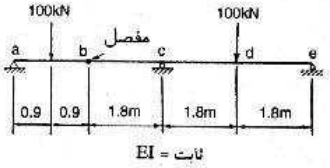
$$\Delta_{cb}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(-25)(1)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right]=-\frac{8/333}{EI} \qquad \blacktriangleright \delta_C=\frac{8/333}{EI}\downarrow$$

$$\theta_{cb}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(-25)(1)}{2}\right]=-\frac{12/5}{EI} \quad , \quad \theta_{cb}=\theta_c-\theta_b \qquad \blacktriangleright \theta_c=\frac{12/5}{EI}$$

$$\Delta_{db}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(25)(1)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{(25)(1)}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right]=-\frac{16/667}{EI} \qquad \blacktriangleright \delta_d=\frac{16/667}{EI}\downarrow$$

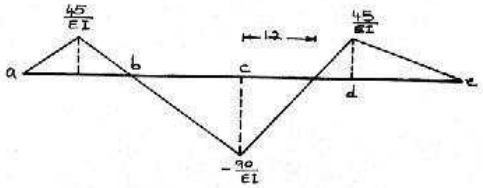
$$\theta_{db}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(25)(1)}{2}-\frac{(25)(1)}{2}\right]=0 \quad , \quad \theta_{db}=\theta_d-\theta_b \qquad \blacktriangleright \theta_d=0$$

۴-۶۱



EI = ثابت

شکل ۴-۶۱



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$

$$\Delta_{ce}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(45)(1/8)}{2}(2/4)+\frac{(45)(0/6)}{2}(1/6)-\frac{(90)(1/2)}{2}(0/4)\right]=\frac{97/2}{EI} \quad , \quad \theta_e=\frac{\Delta_{ce}}{3/6} \qquad \blacktriangleright \theta_e=\frac{27}{EI}$$

$$\Delta_{de}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(45)(1/8)}{2}(0/6)\right]=\frac{24/3}{EI} \quad , \quad \delta_d=1/8\theta_e-\Delta_{de}=1/8\left[\frac{27}{EI}\right]-\left[\frac{24/3}{EI}\right]=\frac{24/3}{EI} \qquad \blacktriangleright \delta_d=\frac{24/3}{EI}\downarrow$$

$$\theta_{ed}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(45)(1/8)}{2}\right]=\frac{40/5}{EI} \quad , \quad \theta_{ed}=\theta_e-\theta_d \qquad \blacktriangleright \theta_d=\frac{13/5}{EI}$$

$$\blacktriangleright \delta_c=0 \quad , \quad \theta_{ec}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(45)(2/4)}{2}+\frac{(-90)(1/2)}{2}\right]=0 \quad , \quad \theta_{ec}=\theta_e-\theta_c \qquad \blacktriangleright \theta_c=\frac{27}{EI}$$

$$\Delta_{be}=\frac{1}{EI}\left[\frac{(45)(1/8)}{2}(4/2)+\frac{(45)(0/6)}{2}(3/4)-\frac{(90)(1/2)}{2}(2/2)-\frac{(90)(1/8)}{2}(1/2)\right]=0$$

$$\delta_b = ۵/۴\theta_e \qquad \blacktriangleright \delta_b = \frac{۱۴۵/۸}{EI} \downarrow$$

$$\theta_{cb,R} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{(۴۵)(۱/۸)}{۲} + \frac{(۴۵)(۰/۶)}{۲} - \frac{(۹۰)(۱/۲)}{۲} - \frac{(۹۰)(۱/۸)}{۲}\right] = -\frac{۸۱}{EI} \quad , \quad \theta_{cb,R} = \theta_c - \theta_{b,R} \qquad \blacktriangleright \theta_{b,R} = \frac{۱۰۸}{EI}$$

$$\Delta_{ba} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{(۴۵)(۱/۸)}{۲}(۰/۹)\right] = \frac{۳۶/۴۵}{EI} \quad , \quad \theta_a = \frac{\delta_b + \Delta_{ba}}{۱/۸} = \frac{۱}{۱/۸EI}(۱۴۵/۸ + ۳۶/۴۵) = \frac{۱۰۱/۲۵}{EI} \qquad \blacktriangleright \theta_a = \frac{۱۰۱/۲۵}{EI}$$

$$\theta_{b,La} = \frac{۱}{EI}\left[\frac{(۴۵)(۱/۸)}{۲}\right] = \frac{۴۰/۵}{EI} \quad , \theta_{b,La} = \theta_a - \theta_{b,L} \quad \Rightarrow \quad \theta_{b,L} = \frac{۱}{EI}(۱۰۱/۲۵ - ۴۰/۵) = \frac{۶۰/۷۵}{EI} \qquad \blacktriangleright \theta_{b,L} = \frac{۶۰/۷۵}{EI}$$

۵- با استفاده از روابط ارائه شده در قضیهٔ دوم کاستلیانو که در زیر آمده‌اند، مقدار Δ (تغییر مکان) یا θ (دوران) نقطهٔ مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

● اگر علامت Δ (θ) مثبت باشد، بدین مفهوم است که تغییر مکان (دوران) حقیقی در جهت نیروی (لنگر) فرضی اعمال شده صورت گرفته است. در صورتی که علامت Δ (θ) منفی باشد، تغییر مکان (دوران) حقیقی در خلاف جهت نیروی (لنگر) فرضی اعمال شده خواهد بود.

در خرپاها: $$\Delta = \sum \left[\frac{\partial F}{\partial P}\right] \frac{FL}{EA}$$

در تیرها: $$\Delta = \int_0^L \left[\frac{\partial M}{\partial P}\right] \frac{M}{EI} dx \quad , \quad \theta = \int_0^L \left[\frac{\partial M}{\partial \overline{M}}\right] \frac{M}{EI} dx$$

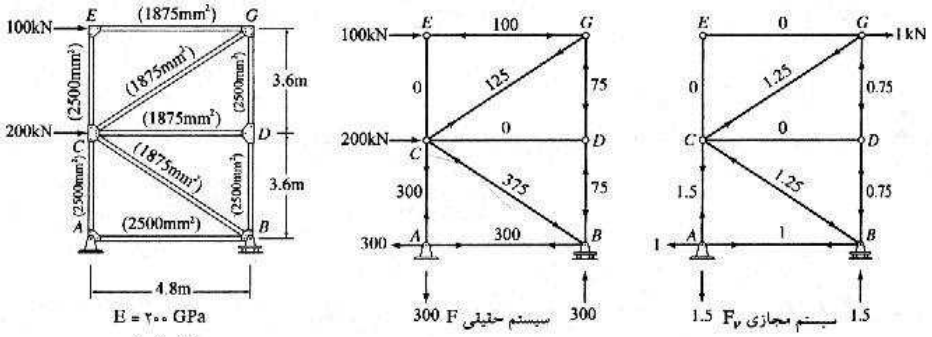
در قابها:

(الف) با در نظر گرفتن تغییر شکل محوری اعضا.

$$\Delta = \sum \left[\frac{\partial F}{\partial P}\right] \frac{FL}{AE} + \sum \int \left[\frac{\partial M}{\partial P}\right] \frac{M}{EI} dx \quad , \quad \theta = \sum \left[\frac{\partial F}{\partial \overline{M}}\right] \frac{FL}{EA} + \sum \int \left[\frac{\partial M}{\partial \overline{M}}\right] \frac{M}{EI} dx$$

(ب) بدون در نظر گرفتن تغییر شکل محوری اعضا. $$\Delta = \sum \int \left[\frac{\partial M}{\partial P}\right] \frac{M}{EI} dx \quad , \quad \theta = \sum \int \left[\frac{\partial M}{\partial \overline{M}}\right] \frac{M}{EI} dx$$

۵-۱ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان افقی نقطهٔ G از خرپای نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



شکل ۵-۱

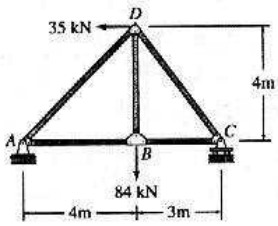
برای ایجاد سهولت در انجام محاسبات، خلاصهٔ نتایج در جدول زیر ارائه شده است. توجه شود که در ستونهای چهارم و پنجم جدول زیر، نیروی کششی در اعضا با علامت «+» و نیروی فشاری با علامت «-» نشان داده شده‌اند.

عضو	L (mm)	A (mm^2)	F (kN)	F_v (kN)	$F_v (\frac{FL}{A})$ kN^2/mm
AB	۴۸۰۰	۲۵۰۰	۳۰۰	۱	۵۷۶
CD	۴۸۰۰	۱۸۷۵	۰	۰	۰
EG	۴۸۰۰	۱۸۷۵	-۱۰۰	۰	۰
AC	۳۶۰۰	۲۵۰۰	۳۰۰	۱/۵	۶۴۸
CE	۳۶۰۰	۲۵۰۰	۰	۰	۰
BD	۳۶۰۰	۲۵۰۰	-۷۵	-۰/۷۵	۸۱
DG	۳۶۰۰	۲۵۰۰	-۷۵	-۰/۷۵	۸۱
BC	۶۰۰۰	۱۸۷۵	-۳۷۵	-۱/۲۵	۱۵۰۰
CG	۶۰۰۰	۱۸۷۵	۱۲۵	۱/۲۵	۵۰۰
				$\Sigma F_v (\frac{FL}{A})$ = ۳۳۸۶	

$$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰۰۰۰\ N/mm^۲ = ۲۰۰\ kN/mm^۲$$

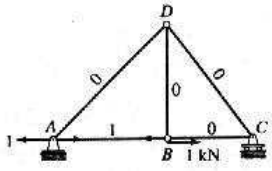
$$۱\,(\Delta_G) = \frac{۱}{E}\sum F_v \left[\frac{FL}{A}\right] \quad \Rightarrow \quad (۱\ kN)\Delta_G = \frac{۳۳۸۶}{۲۰۰} \quad \Rightarrow \quad \Delta_G = ۱۶/۹۳\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_G = ۱۶/۹۳\ mm \rightarrow$$

۵-۲ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان افقی و قائم نقطهٔ B از خرپای نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.

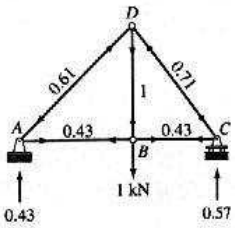


EA = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa
A = ۱۲۰۰ mm^۲

شکل ۵-۲

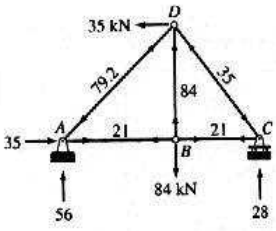


سیستم مجازی برای محاسبهٔ تغییر مکان افقی B ، $F_{v۱}$



سیستم مجازی برای محاسبهٔ تغییر مکان قائم B ، $F_{v۲}$

نتایج تحلیل دو سیستم مجازی و حقیقی در جدول زیر خلاصه شده است.



سیستم حقیقی

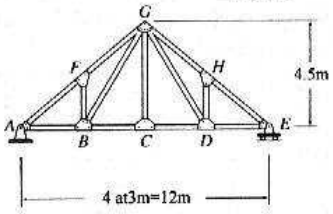
عضو	L (m)	F (kN)	$F_{v۱}$ (kN)	$F_{v۱}$ (FL) (kN^۲.m)	$F_{v۲}$ (kN)	$F_{v۲}$ (FL) (kN^۲.m)
AB	۴	۲۱	۱	۸۴	۰/۲۳	۳۶/۱۲
BC	۳	۲۱	۰	۰	۰/۴۳	۲۷/۰۹
AD	۵/۶۶	-۷۹/۲	۰	۰	-۰/۶۱	۲۷۳/۴۵
BD	۴	۸۴	۰	۰	۱	۳۳۶/۰۰
CD	۵	-۳۵	۰	۰	-۰/۷۱	۱۲۴/۲۵
			$\Sigma F_{v۱}$ (FL) = ۸۴		$\Sigma F_{v۲}$ (FL) = ۷۹۶/۹۱	

$$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^۶\ kN/m^۲ \quad , \quad A = ۱۲۰۰\ mm^۲ = ۱/۲ \times ۱۰^{-۳}\ m^۲$$

$$۱\,(\Delta_{BH}) = \frac{۱}{EA}\sum F_{v۱}(FL) \quad \Rightarrow \quad (۱\ kN)\Delta_{BH} = \frac{۸۴}{(۲۰۰ \times ۱۰^۶)(۱/۲ \times ۱۰^{-۳})} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{BH} = ۰/۰۰۰۳۵ \quad \blacktriangleright \Delta_{BH} = ۰/۳۵\ mm \rightarrow$$

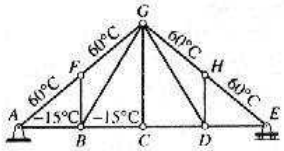
$$۱\,(\Delta_{BV}) = \frac{۱}{EA}\sum F_{v۲}(FL) \quad \Rightarrow \quad (۱\ kN)\Delta_{BV} = \frac{۷۹۶/۹۱}{(۲۰۰ \times ۱۰^۶)(۱/۲ \times ۱۰^{-۳})} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{BV} = ۰/۰۰۳۳۲ \quad \blacktriangleright \Delta_{BV} = ۳/۳۲\ mm \downarrow$$

۵-۳ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان قائم گره C از خرپای نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید. فرض کنید دمای اعضای AB و BC به اندازهٔ ۱۵° C کاهش یافته و دمای اعضای AF ، FG ، GH و EH به اندازهٔ ۶۰° C افزایش یابد.

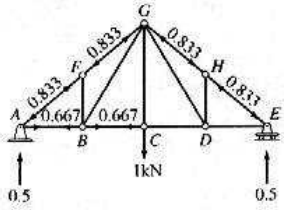


$\alpha = ۶/۵ \times ۱۰^{-۶}$/°C

شکل ۵-۳



سیستم حقیقی ، F



سیستم مجازی ، F_v

$1\,(\Delta_C) = \alpha \sum F_v\,(\Delta T) L$

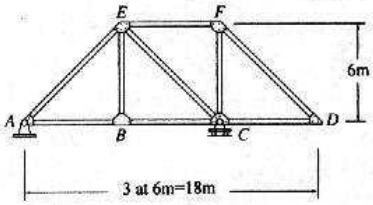
$(1\,kN)\Delta_C = ۶/۵(۱۰^{-۶})(-۸۱۰)$

$\Delta_C = -۰/۰۰۵۲۶\ m = -۵/۲۶\ mm$

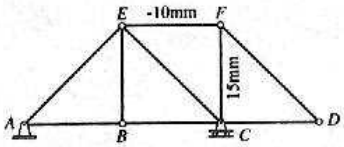
$\blacktriangleright\ \Delta_C = ۵/۲۶\ mm\ \uparrow$

عضو	L (m)	ΔT (°C)	F_v (kN)	F_v (ΔT) L (kN-°C-m)
AB	۳	-۱۵	۰/۶۶۷	-۳۰
BC	۳	-۱۵	۰/۶۶۷	-۳۰
AF	۳/۷۵	۶۰	-۰/۸۳۳	-۱۸۷/۵
FG	۳/۷۵	۶۰	-۰/۸۳۳	-۱۸۷/۵
GH	۳/۷۵	۶۰	-۰/۸۳۳	-۱۸۷/۵
EH	۳/۷۵	۶۰	-۰/۸۳۳	-۱۸۷/۵
			$\Sigma F_v\,(\Delta T) L$ = -۸۱۰	

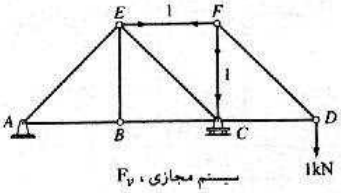
۵-۴ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان قائم نقطهٔ D از خرپای نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید. فرض کنید به علت خطای ساخت، عضو CF به اندازهٔ ۱۵ mm بلندتر و عضو EF به اندازهٔ ۱۰ mm کوتاهتر از مقدار دقیق نشان داده شده باشند.



شکل ۵-۴



بیستم حقیقی، F



بیستم مجازی، F_v

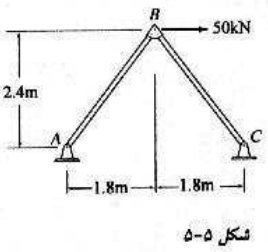
عضو	δ (mm)	F_v (kN)	F_v (δ) (kN.mm)
CF	۱۵	-۱	-۱۵
EF	-۱۰	۱	-۱۰
		$\Sigma F_v\,(\delta)$ = -۲۵	

$1\,(\Delta_D) = \sum F_v\,(\delta) \Rightarrow (1\,kN)\Delta_D = -۲۵ \Rightarrow \Delta_D = -۲۵mm$

$\blacktriangleright\ \Delta_D = ۲۵\ mm\ \uparrow$

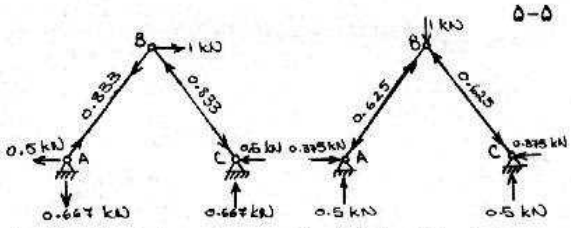
با استفاده از روش کار مجازی مقدار تغییر مکان افقی و قائم گره B از خرپاهای نشان داده شده در مسایل زیر را محاسبه کنید.

۵-۵



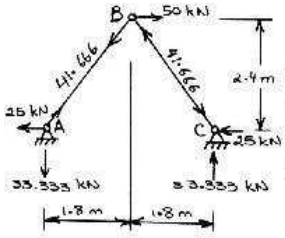
شکل ۵-۵

EA = ثابت
E = ۲۰۰ GPa
A = ۱۸۷۵ mm²



بیستم مجازی برای محاسبهٔ تغییر مکان افقی B، F_{v1}

بیستم مجازی برای محاسبهٔ تغییر مکان قائم B، F_{v2}



سیستم حقیقی ، F

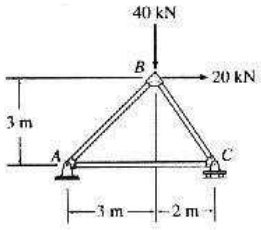
عضو	F (kN)	F_{v_1} (kN)	F_{v_1} (F) (kN^2)	F_{v_2} (kN)	F_{v_2} (F) (kN^2)
AB	۴۱/۶۶۶	۰/۸۳۳	۳۴/۷۰	-۰/۶۲۵	-۲۶/۰۴
BC	-۴۱/۶۶۶	-۰/۸۳۳	۳۴/۷۰	-۰/۶۲۵	۲۶/۰۴
		ΣF_{v_1} (F) = ۶۹/۴		ΣF_{v_2} (F) = ۰	

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰\ kN/mm^2$ ، $L = ۳\ m = ۳۰۰۰\ mm$ ، $A = ۱۸۷۵\ mm^2$

$$(۱)\Delta_{BH} = \frac{L}{EA}\sum F_{v_1}(F) \Rightarrow (۱\ kN)\Delta_{BH} = \frac{۳۰۰۰}{(۲۰۰)(۱۸۷۵)}(۶۹/۴) \Rightarrow \Delta_{BH} = ۰/۵۵۵ \quad \blacktriangleright \Delta_{BH} = ۰/۵۵۵\ mm \rightarrow$$

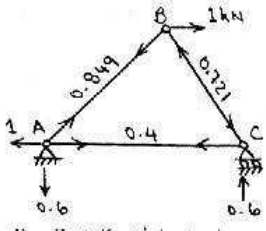
$$(۱)\Delta_{BV} = \frac{L}{EA}\sum F_{v_2}(F) \Rightarrow (۱\ kN)\Delta_{BV} = \frac{۳۰۰۰}{(۲۰۰)(۱۸۷۵)}(۰) \quad \blacktriangleright \Delta_{BV} = ۰$$

۶-۵

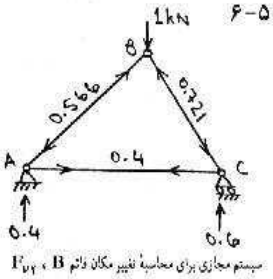


شکل ۵-۶

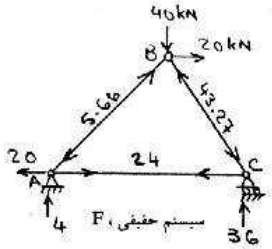
EA = ثابت
E = ۲۰۰ GPa
A = ۱۰۰۰ mm^2



سیستم مجازی برای محاسبهٔ تغییر مکان افقی B ، F_{v_1}



سیستم مجازی برای محاسبهٔ تغییر مکان قائم B ، F_{v_2}



سیستم حقیقی ، F

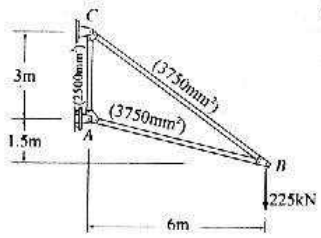
عضو	L (m)	F (kN)	F_{v_1} (kN)	F_{v_1} (FL) (kN^2.m)	F_{v_2} (kN)	F_{v_2} (FL) (kN^2.m)
AB	۴/۲۲	-۵/۶۶	۰/۸۴۹	-۲۰/۳۷	-۰/۵۶۶	۱۳/۵۸
AC	۵	۲۲/۰	۰/۴	۴۸/۰	۰/۴	۴۸/۰
BC	۳/۶۱	-۴۳/۲۷	-۰/۷۲۱	۱۱۲/۶۲	-۰/۷۲۱	۱۱۲/۶۲
			ΣF_{v_1} (FL) = ۱۴۰/۲۵		ΣF_{v_2} (FL) = ۱۷۴/۲	

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^۶\ kN/m^2$ ، $A = ۱۰۰۰\ mm^2 = ۰/۰۰۱\ m^2$

$$(۱)\Delta_{BH} = \frac{۱}{EA}\sum F_{v_1}(FL) \Rightarrow (۱\ kN)\Delta_{BH} = \frac{۱۴۰/۲۵}{(۲۰۰ \times ۱۰^۶)(۰/۰۰۱)} \Rightarrow \Delta_{BH} = ۰/۰۰۰۷ \quad \blacktriangleright \Delta_{BH} = ۰/۷\ mm \rightarrow$$

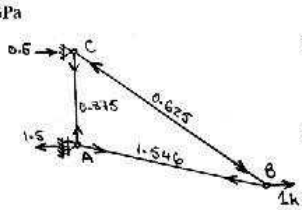
$$(۱)\Delta_{BV} = \frac{۱}{EA}\sum F_{v_2}(FL) \Rightarrow (۱\ kN)\Delta_{BV} = \frac{۱۷۴/۲}{(۲۰۰ \times ۱۰^۶)(۰/۰۰۱)} \Rightarrow \Delta_{BV} = ۰/۰۰۰۸۷\ m \quad \blacktriangleright \Delta_{BV} = ۰/۸۷\ mm \downarrow$$

۷-۵

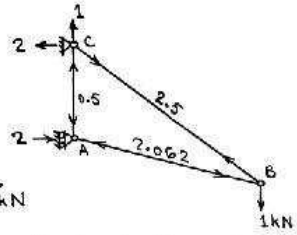


شکل ۵-۷

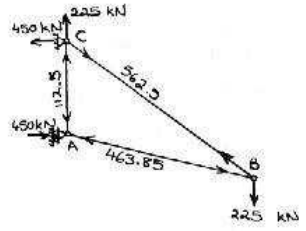
B = ۷۰ GPa



سیستم مجازی برای محاسبهٔ تغییر مکان افقی B ، F_{v_1}



سیستم مجازی برای محاسبهٔ تغییر مکان قائم B ، F_{v_2}



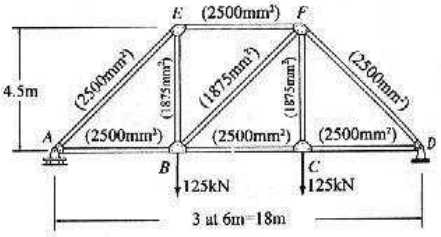
عضو	L (mm)	A (mm^2)	F (kN)	F_{v1} (kN)	$F_{v1}(\frac{FL}{A})(\frac{kN^2}{mm})$	F_{v2} (kN)	$F_{v2}(\frac{FL}{A})(\frac{kN^2}{mm})$
AB	۶۱۸۴/۷	۳۷۵۰	-۴۶۳/۸۵	۱/۵۴۶	-۱۱۸۲/۷	-۲/۰۶۲	۱۵۷۷/۴۴
AC	۳۰۰۰	۲۵۰۰	-۱۱۲/۵	۰/۳۷۵	-۵۰/۶۲	-۰/۵	۶۷/۵
BC	۷۵۰۰	۳۷۵۰	۵۶۲/۵	-۰/۶۲۵	-۷۰۳/۱۳	۲/۵	۲۸۱۲/۵
				$\Sigma F_{v1}(\frac{FL}{A})$ = -۱۹۳۶/۴۵		$\Sigma F_{v2}(\frac{FL}{A})$ = ۴۴۵۷/۴۴	

$E = ۷۰\ GPa = ۷۰\ kN/mm^2$

$$(۱)\Delta_{BH} = \frac{۱}{E}\sum F_{v۱}\left[\frac{FL}{A}\right] \Rightarrow (۱\,kN)\Delta_{BH} = \frac{-۱۹۳۶/۴۵}{۷۰} \Rightarrow \Delta_{BH} = -۲۷/۶۶\ mm \quad \blacktriangleright \Delta_{BH} = ۲۷/۶۶\ mm \leftarrow$$

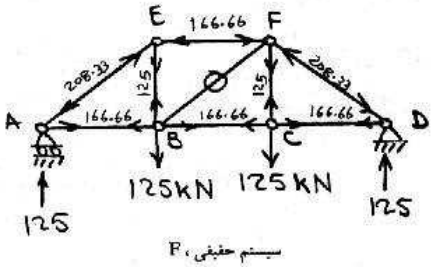
$$(۱)\Delta_{BV} = \frac{۱}{E}\sum F_{v۲}\left[\frac{FL}{A}\right] \Rightarrow (۱\,kN)\Delta_{BV} = \frac{۴۴۵۷/۴۴}{۷۰} \Rightarrow \Delta_{BV} = ۶۳/۶۸\ mm \quad \blacktriangleright \Delta_{BV} = ۶۳/۶۸\ mm \downarrow$$

۸-۵

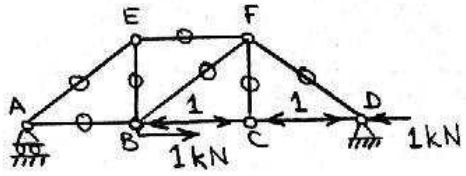


E = ۲۰۰ GPa

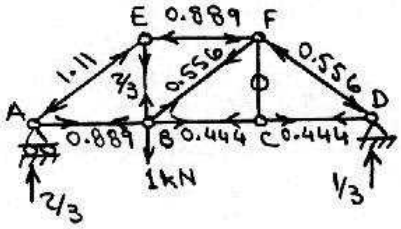
شکل ۵-۸



سیستم حقیقی، F



سیستم مجازی برای محاسبهٔ تغییر مکان افقی B، F_{v2}



سیستم مجازی برای محاسبهٔ تغییر مکان قائم B، F_{v1}

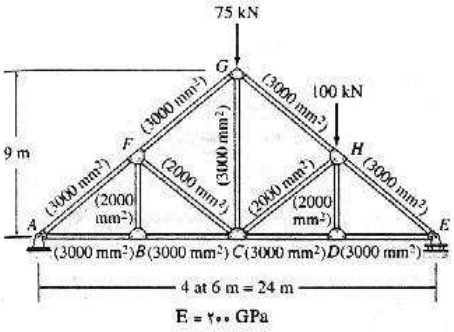
عضو	L (mm)	A (mm^2)	F (kN)	F_{v1} (kN)	$F_{v1}(\frac{FL}{A})(\frac{kN^2}{mm})$	F_{v2} (kN)	$F_{v2}(\frac{FL}{A})(\frac{kN^2}{mm})$
AB	۶۰۰۰	۲۵۰۰	۱۶۶/۶۶	۰/۸۸۹	۳۵۵/۶	۰	۰
BC	۶۰۰۰	۲۵۰۰	۱۶۶/۶۶	۰/۴۴۴	۱۷۷/۶	-۱	-۴۰۰
CD	۶۰۰۰	۲۵۰۰	۱۶۶/۶۶	۰/۴۴۴	۱۷۷/۶	-۱	-۴۰۰
EF	۶۰۰۰	۲۵۰۰	-۱۶۶/۶۶	-۰/۸۸۹	۳۵۵/۶	۰	۰
AE	۷۵۰۰	۲۵۰۰	-۲۰۸/۳۳	-۱/۱۱	۶۹۳/۷۵	۰	۰
BF	۷۵۰۰	۱۸۷۵	۰	۰/۵۵۶	۰	۰	۰
DF	۷۵۰۰	۲۵۰۰	-۲۰۸/۳۳	-۰/۵۵۶	۳۴۷/۵	۰	۰
BE	۴۵۰۰	۱۸۷۵	۱۲۵	۰/۶۶۷	۲۰۰	۰	۰
CF	۴۵۰۰	۱۸۷۵	۱۲۵	۰	۰	۰	۰
				$\Sigma F_{v1}(\frac{FL}{A}) = ۲۳۰۷/۶۵$		$\Sigma F_{v2}(\frac{FL}{A}) = -۸۰۰$	

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰\ kN/mm^2$

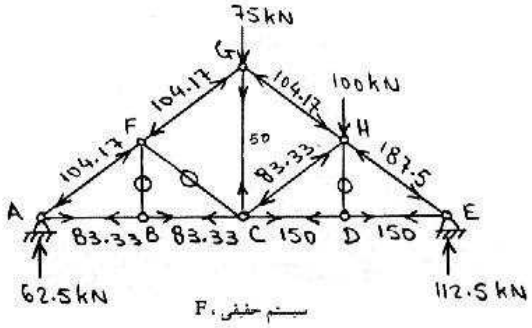
$$۱(\Delta_{BH}) = \frac{۱}{E}\sum F_{v2}\left[\frac{FL}{A}\right] \Rightarrow (۱\,kN)\Delta_{BH} = \frac{-۸۰۰}{۲۰۰} \Rightarrow \Delta_{BH} = -۴\,mm \quad \blacktriangleright \Delta_{BH} = ۴\,mm \leftarrow$$

$$۱(\Delta_{BV}) = \frac{۱}{E}\sum F_{v1}\left[\frac{FL}{A}\right] \Rightarrow (۱\,kN)\Delta_{BV} = \frac{۲۳۰۷/۶۵}{۲۰۰} \Rightarrow \Delta_{BV} = ۱۱/۵۴\,mm \quad \blacktriangleright \Delta_{BV} = ۱۱/۵۴\,mm \downarrow$$

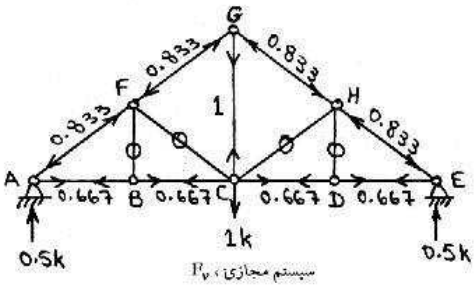
۵-۹ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان قائم گره C از خرپای نشان داده شده در شکل را محاسبه کنید.



شکل ۵-۹



سیستم حقیقی، F



سیستم مجازی، F_v

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۶}\ kN/m^{۲}$

$A = ۳۰۰۰\ mm^{۲} = ۰/۰۰۳\ m^{۲}$

$(۱)\ \Delta_C = \frac{۱}{EA}\sum F_v (FL)$

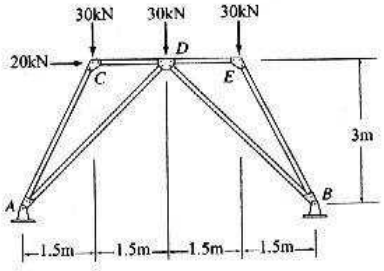
$(۱\ kN)\ \Delta_C = \frac{۵۴۴۱/۴}{(۲۰۰ \times ۱۰^{۶})(۰/۰۰۳)}$

$\Delta_C = ۰/۰۰۹۱\ m$

$\blacktriangleright \Delta_C = ۹/۱\ mm \downarrow$

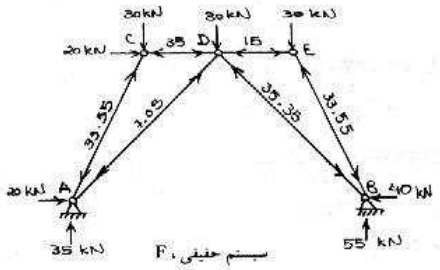
عضو	L (m)	F (kN)	F_v (kN)	F_v (FL) ($kN^{۲}$.m)
AB	۶	۸۳/۳۳	۰/۶۶۷	۳۳۳/۵
BC	۶	۸۳/۳۳	۰/۶۶۷	۳۳۳/۵
CD	۶	۱۵۰	۰/۶۶۷	۶۰۰/۳
DE	۶	۱۵۰	۰/۶۶۷	۶۰۰/۳
AF	۷/۵	-۱۰۴/۱۷	-۰/۸۳۳	۶۵۰/۸
FG	۷/۵	-۱۰۴/۱۷	-۰/۸۳۳	۶۵۰/۸
GH	۷/۵	-۱۰۴/۱۷	-۰/۸۳۳	۶۵۰/۸
EH	۷/۵	-۱۸۷/۵	-۰/۸۳۳	۱۱۷۱/۴
CG	۹	۵۰	۱	۴۵۰
			$\Sigma F_v (FL) = ۵۴۴۱/۴$	

۵-۱۰ با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان افقی گره E از خرپای نشان داده شده در شکل را محاسبه کنید.

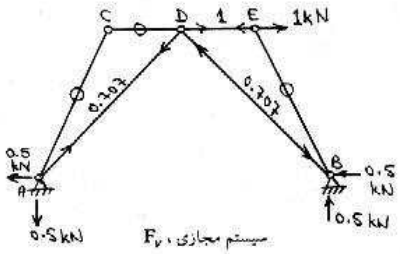


شکل ۵-۱۰

EA = ثابت
E = ۲۰۰ GPa
A = ۳۷۵۰ $mm^{۲}$



سیستم حقیقی، F_v



سیستم مجازی، F_v

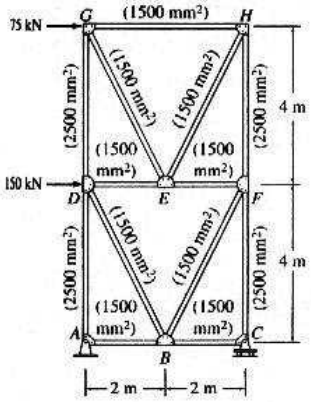
عضو	L (m)	F (kN)	F_v (kN)	F_v (FL) ($kN^{۲}$.m)
AD	۴/۲۴۲	-۷/۰۵	۰/۷۰۷	-۲۱/۱۴
BD	۴/۲۴۲	-۳۵/۳۵	-۰/۷۰۷	۱۰۶/۰۲
DE	۱/۵	-۱۵	۱	-۲۲/۵
			$\Sigma F_v (FL) = ۶۲/۳۸$	

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۶}\ kN/m^{۲}$

$(۱)\ \Delta_{EH} = \frac{۱}{EA}\sum F_v (FL) \Rightarrow (۱\ kN)\ \Delta_{EH} = \frac{۶۲/۳۸}{(۲۰۰ \times ۱۰^{۶})(۳/۷۵ \times ۱۰^{-۳})}$

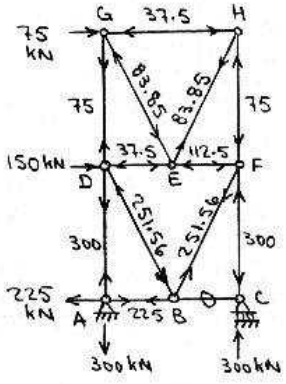
$\Delta_{EH} = ۰/۰۰۰۰۸۳\ m$ $\quad \blacktriangleright \Delta_{EH} = ۰/۰۸۳\ mm \rightarrow$

۵-۱۱ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان افقی گره H از خرپای نشان داده شده در شکل را محاسبه کنید.

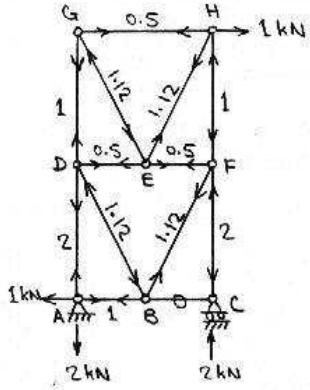


E = ۲۰۰ GPa

شکل ۵-۱۱



سیستم حقیقی، F



سیستم مجازی، F_v

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۶}\ kN/m^{۲}$

$(۱)\ \Delta_H = \frac{۱}{E}\sum F_v \left[\frac{FL}{A}\right]$

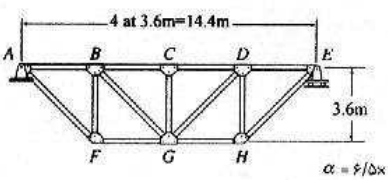
$(۱\ kN)\ \Delta_H = \frac{۴۵۴۸۹۳۰}{۲۰۰ \times ۱۰^{۶}}$

$\Delta_H = ۰/۰۲۲۷\ m$

$\blacktriangleright \Delta_H = ۲۲/۷\ mm \rightarrow$

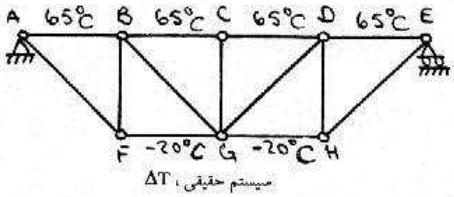
عضو	L (m)	A ($m^۲$)	F (kN)	F_v (kN)	$F_v(\frac{FL}{A})(\frac{kN^۲}{m})$
AD	۴	۰/۰۰۲۵	۳۰۰	۲	۹۶۰۰۰۰
CF	۴	۰/۰۰۲۵	-۳۰۰	-۲	۹۶۰۰۰۰
DG	۴	۰/۰۰۲۵	۷۵	۱	۱۲۰۰۰۰
FH	۴	۰/۰۰۲۵	-۷۵	-۱	۱۲۰۰۰۰
GH	۴	۰/۰۰۱۵	-۳۷/۵	۰/۵	-۵۰۰۰۰
AB	۲	۰/۰۰۱۵	۲۲۵	۱	۳۰۰۰۰۰
DE	۲	۰/۰۰۱۵	-۳۷/۵	۰/۵	-۲۵۰۰۰
EF	۲	۰/۰۰۱۵	-۱۱۲/۵	۰/۵	-۷۵۰۰۰
BD	۴/۴۷	۰/۰۰۱۵	-۲۵۱/۵۶	-۱/۱۲	۸۳۹۶۰۷
BF	۴/۴۷	۰/۰۰۱۵	۲۵۱/۵۶	۱/۱۲	۸۳۹۶۰۷
EG	۴/۴۷	۰/۰۰۱۵	-۸۳/۸۵	-۱/۱۲	۲۷۹۸۵۸
BH	۴/۴۷	۰/۰۰۱۵	۸۳/۸۵	۱/۱۲	۲۷۹۸۵۸
				$\Sigma F_v(\frac{FL}{A})$ =	۴۵۴۸۹۳۰

۵-۱۲ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان قائم گره G از خرپای نشان داده شده در شکل را به دست آورید. فرض کنید دمای اعضای AB ، BC ، CD و DE به اندازهٔ ۶۵°C افزایش یافته و دمای اعضای FG و GH به اندازهٔ ۲۰°C کاهش یابد.

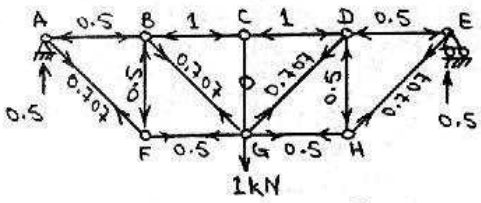


$\alpha = ۶/۵ \times ۱۰^{-۶}/°C$

شکل ۵-۱۲



سیستم حقیقی، ΔT



سیستم مجازی ، F_v

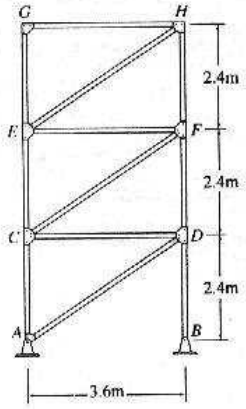
عضو	ΔT (°C)	F_v (kN)	$F_v(\Delta T)$ (kN.°C)
AB	۶۵	-۰/۵	-۳۲/۵
BC	۶۵	-۱	-۶۵
CD	۶۵	-۱	-۶۵
DE	۶۵	-۰/۵	-۳۲/۵
FG	-۲۰	۰/۵	-۱۰
GH	-۲۰	۰/۵	-۱۰
		$\Sigma F_v(\Delta T) = -۲۱۵$	

$$1\,[\Delta_G] = \alpha L \sum F_v(\Delta T)$$

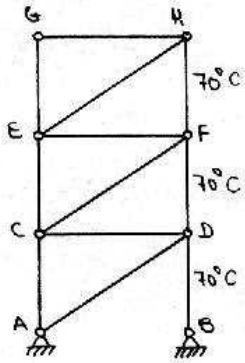
$$(1\,kN)\,\Delta_G = (۶/۵\times ۱۰^{-۶})(۳۶۰۰)(-۲۱۵) \quad \Rightarrow \quad \Delta_G = -۵/۰۳\,mm$$

$$\blacktriangleright \Delta_G = ۵/۰۳\,mm \uparrow$$

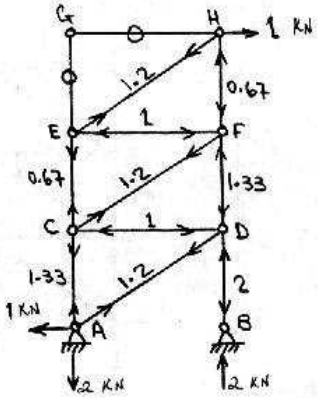
۵-۱۳ تغییر مکان افقی گره **H** از خرپای نشان داده شده در شکل را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه کنید. فرض کنید که دمای اعضای **BD** ، **DF** و **FH** به اندازهٔ ۷۰°C افزایش یابد.



$\alpha = ۶/۵\times ۱۰^{-۶}/°C$



سیستم حقیقی ، ΔT



سیستم مجازی ، F_v

شکل ۵-۱۳

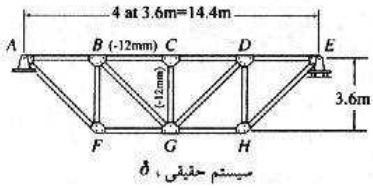
عضو	F_v (kN)
BD	-۲
DF	-۱/۳۳
FH	-۰/۶۷
	$\Sigma F_v = -۴$

$$(۱)\,\Delta_H = \alpha(\Delta T) L \sum F_v$$

$$(1\,kN)\,\Delta_H = (۶/۵\times ۱۰^{-۶})(۷۰)(۲۴۰۰)(-۴)$$

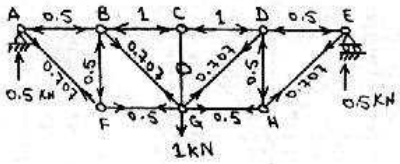
$$\Delta_H = -۴/۳۷\,mm \qquad \blacktriangleright \Delta_H = ۴/۳۷\,mm \leftarrow$$

۵-۱۴ در خرپای نشان داده شده در مسئلهٔ ۵-۱۲ تغییر مکان قائم گره **G** را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه کنید. فرض کنید به علت خطای ساخت، اعضای **BC** و **CG** به اندازهٔ **۱۲ mm** کوتاهتر از مقدار دقیق نشان داده شده باشند.



سیستم حقیقی ، δ

شکل ۵-۱۲



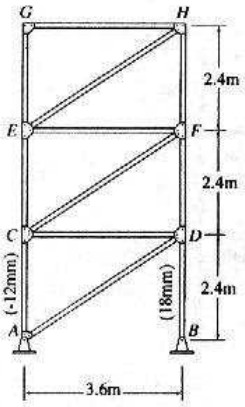
سیستم مجازی ، F_v

عضو	F_v (kN)
BC	-۱
CG	۰
	$\Sigma F_v = -۱$

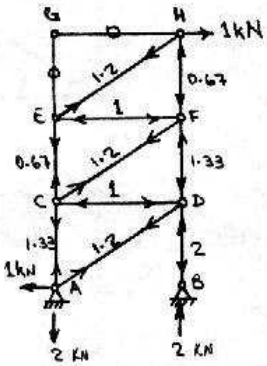
$$(۱)\Delta_G = \alpha \sum F_v \Rightarrow (۱\,kN)\Delta_G = (-۱۲)(-۱) \Rightarrow \Delta_G = ۱۲\,mm$$

$$\blacktriangleright \Delta_G = ۱۲\,mm \downarrow$$

۵-۱۵ در خرپای نشان داده شده در مسئلهٔ ۵-۱۳ تغییر مکان افقی گره H را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه کنید. فرض کنید عضو AC به اندازهٔ ۱۲ mm کوتاهتر و عضو BD به اندازهٔ ۱۸ mm بلندتر از مقدار دقیق نشان داده شده باشند.



سیستم حقیقی ، δ



سیستم مجازی ، F_v

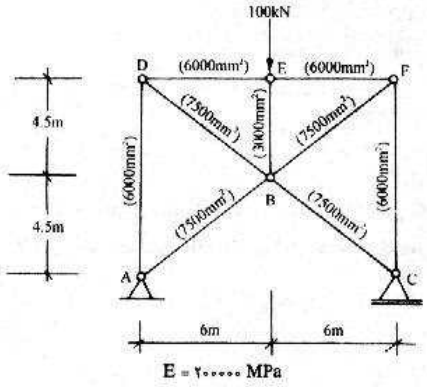
شکل ۵-۱۵

عضو	δ (mm)	F_v (kN)	$F_v(\delta)$ (kN.mm)
AC	-۱۲	۱/۳۳	-۱۶
BD	۱۸	-۲	-۳۶
			$\Sigma F_v(\delta) = -۵۲$

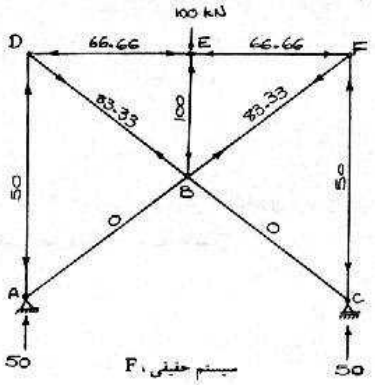
$$(۱)\Delta_H = \sum F_v \delta \Rightarrow (۱\,kN)\Delta_H = -۵۲$$

$$\Delta_H = -۵۲\,mm \qquad \blacktriangleright \Delta_H = ۵۲\,mm \leftarrow$$

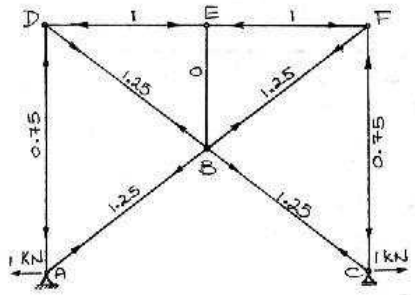
۵-۱۶ با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان افقی گره C از خرپای نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



شکل ۵-۱۶



سیستم حقیقی ، F



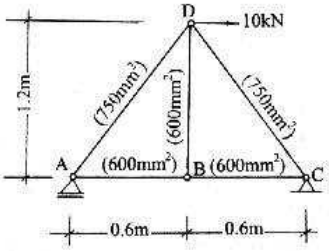
سیستم مجازی ، F_v

عضو	L (m)	A (m^2)	F (kN)	F_v (kN)	$F_v(\frac{FL}{A})(\frac{kN^2}{m})$
BD	۷/۵	۰/۰۰۷۵	۸۳/۳۳	۱/۲۵	۱۰۴۱۶۶/۷
BF	۷/۵	۰/۰۰۷۵	۸۳/۳۳	۱/۲۵	۱۰۴۱۶۶/۷
DE	۶	۰/۰۰۶	-۶۶/۶۶	-۱	۶۶۶۶۶/۶
EF	۶	۰/۰۰۶	-۶۶/۶۶	-۱	۶۶۶۶۶/۶
AD	۹	۰/۰۰۶	-۵۰	-۰/۷۵	۵۶۲۵۰
CF	۹	۰/۰۰۶	-۵۰	-۰/۷۵	۵۶۲۵۰
				$\Sigma F_v(\frac{FL}{A})$ =	۴۵۴۱۶۶/۶

$E = ۲۰۰۰۰۰\ MPa = ۲۰۰ \times ۱۰^۶\ kN/m^۲$

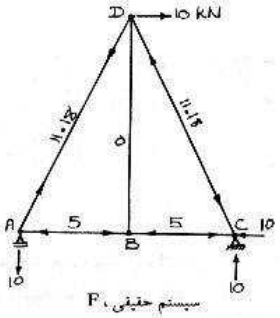
$$(۱)\Delta_C = \frac{۱}{E}\sum F_v\left[\frac{FL}{A}\right] \Rightarrow (۱\ kN)\Delta_C = \frac{۴۵۴۱۶۶/۶}{۲۰۰ \times ۱۰^۶} \Rightarrow \Delta_C = ۰/۰۰۲۲۷\ m \qquad \blacktriangleright \Delta_C = ۲/۲۷\ mm \rightarrow$$

۱۷-۵ با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم گره B از خرپای نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.

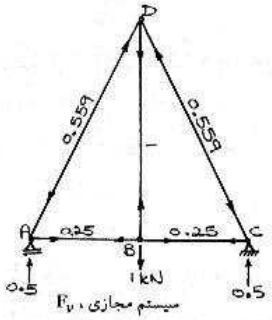


E = ۲۰۰۰۰۰ MPa

شکل ۵-۱۷



سیستم حقیقی ، F



سیستم مجازی ، F_v

$E = ۲۰۰۰۰۰\ MPa = ۲۰۰ \times ۱۰^۶\ \frac{kN}{m^۲}$

$$(۱)\Delta_B = \frac{۱}{E}\sum F_v\left[\frac{FL}{A}\right]$$

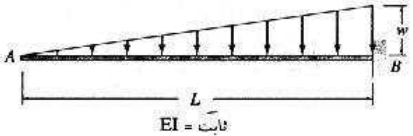
$$(۱\ kN)\Delta_B = \frac{-۲۵۰۰}{۲۰۰ \times ۱۰^۶}$$

$$\Delta_B = -۰/۰۰۰۰۱۲۵\ m$$

$$\blacktriangleright \Delta_B = ۰/۰۱۲۵\ mm \uparrow$$

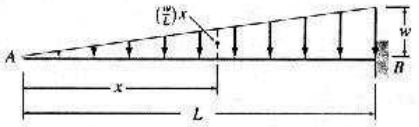
عضو	L (m)	A (m^2)	F (kN)	F_v (kN)	$F_v(\frac{FL}{A})(\frac{kN^2}{m})$
AB	۰/۶	۰/۰۰۰۶	-۵	۰/۲۵	-۱۲۵۰
BC	۰/۶	۰/۰۰۰۶	-۵	۰/۲۵	-۱۲۵۰
AD	۱/۳۴	۰/۰۰۰۷۵	۱۱/۱۸	-۰/۵۵۹	-۱۱۱۶۶
CD	۱/۳۴	۰/۰۰۰۷۵	-۱۱/۱۸	-۰/۵۵۹	۱۱۱۶۶
				$\Sigma F_v(\frac{FL}{A})$ =	-۲۵۰۰

۱۸-۵ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان و شیب نقطهٔ A از تیر نشان داده شده در شکل را محاسبه کنید.

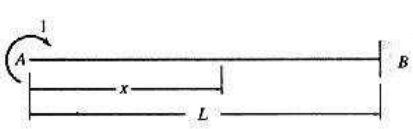


EI = ثابت

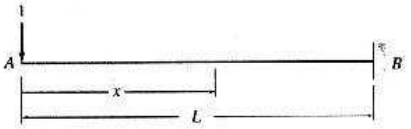
شکل ۵-۱۸



سیستم حقیقی ، M



سیستم مجازی برای محاسبهٔ θ_A ، M_{v1}



سیستم مجازی برای محاسبهٔ Δ_A ، M_{v2}

برای تعیین معادلهٔ لنگر خمشی M و M_v یک محور مختصات x در نظر می‌گیریم که مبدأ آن در نقطهٔ A از تیر واقع شده است.

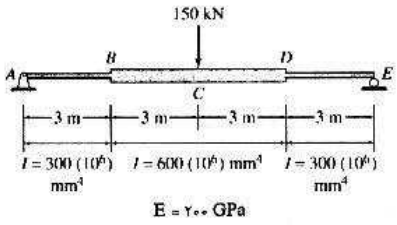
معادلهٔ لنگر خمشی (M): $0<x<L$ ، $M=-\frac{1}{2}(x)\left[\frac{wx}{L}\right]\left[\frac{x}{3}\right]=-\frac{wx^3}{6L}$ ؛ معادلهٔ لنگر خمشی (M_{v1}): $M_{v1}=1$ ، $0<x<L$

$$(1)\theta_A=\int_0^L\frac{M_{v1}M}{EI}dx \Rightarrow (1)\theta_A=\int_0^L 1\left[-\frac{wx^3}{6LEI}\right]dx=-\frac{w}{6EIL}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^L=-\frac{wL^3}{24EI} \quad \blacktriangleright \theta_A=\frac{wL^3}{24EI}$$

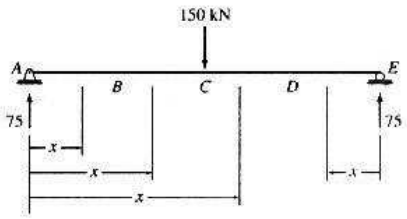
معادلهٔ لنگر خمشی (M_{v2}): $M_{v2}=-1(x)=-x$ ، $0<x<L$

$$(1)\Delta_A=\int_0^L\frac{M_{v2}M}{EI}dx \Rightarrow (1)\Delta_A=\int_0^L(-x)\left[-\frac{wx^3}{6LEI}\right]dx=-\frac{w}{6EIL}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^L=\frac{wL^4}{30EI} \quad \blacktriangleright \Delta_A=\frac{wL^4}{30EI}\downarrow$$

۱۹-۵ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان قائم نقطهٔ D از تیر نشان داده شده در شکل را محاسبه کنید.

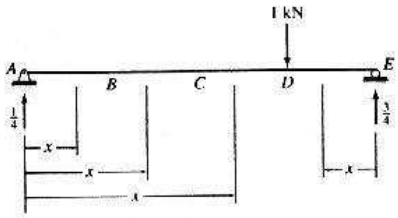


شکل ۵-۱۹



سیستم حقیقی ، M

چون EI تیر در نقاط B و D به طور ناگهانی تغییر کرده و در نقطهٔ C نیز یک بار متمرکز بر تیر اعمال می‌شود، پس لازم است که تیر را به چهار قسمت تقسیم کرده و برای هر قسمت معادلهٔ لنگر خمشی M و M_v را به طور مجزا به دست آوریم.



سیستم مجازی ، M_v

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	EI ($I=۳۰۰\times۱۰^۶\ mm^4$)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰-۳	EI	۷۵x	$\frac{x}{4}$
BC	A	۳-۶	۲EI	۷۵x	$\frac{x}{4}$
CD	A	۶-۹	۲EI	۷۵x-۱۵۰ (x-۶)	$\frac{x}{4}$
ED	E	۰-۳	EI	۷۵x	$\frac{3}{4}x$

$E=۲۰۰\ GPa=۲۰۰\times۱۰^3\ N/mm^2$

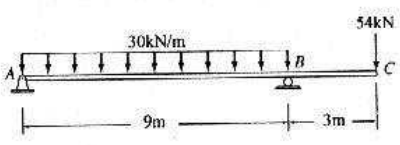
$$(۱)\Delta_D=\sum\int\frac{M_v M}{EI}dx$$

$$(۱)\Delta_D=\frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۳}\left[\frac{x}{۴}\right](۷۵x)dx+\frac{۱}{۲}\int_{۳}^{۶}\left[\frac{x}{۴}\right](۷۵x)dx+\frac{۱}{۲}\int_{۶}^{۹}\left[\frac{x}{۴}\right](-۷۵x+۹۰۰)dx+\int_{۰}^{۳}\left[\frac{۳}{۴}x\right](۷۵x)dx\right]$$

$$(۱\,kN)\Delta_D=\frac{۲۱۹۳/۷۵\,kN^{۲}.m^{۳}}{EI}\Rightarrow\Delta_D=\frac{۲۱۹۳/۷۵\,kN.m^{۳}}{EI}=\frac{۲۱۹۳/۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۳۰۰\times۱۰^{۶})}=۳۶/۶\,mm$$

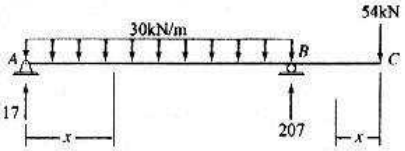
$$\blacktriangleright\Delta_D=۳۶/۶\,mm\downarrow$$

۵-۲۰ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان نقطهٔ C از تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.

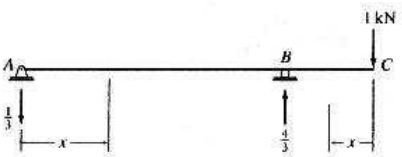


E = ۲۰۰ GPa ، EI = ثابت ، $I=۷/۸۱\times۱۰^{۸}\,mm^{۴}$

شکل ۵-۲۰



سیستم حقیقی ، M



سیستم مجازی ، M_v

قطعه	محور مختصات x		M (kN.m)	M_v (kN.m)
	مبدأ	بازهٔ قطعه (m)		
AB	A	۰-۹	$۱۱۷x-۱۵x^{۲}$	$-\frac{x}{۳}$
CB	C	۰-۳	$-۵۴x$	$-x$

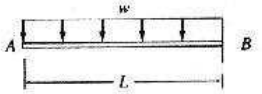
$$(۱)\Delta_C=\sum\int\frac{M_v M}{EI}dx$$

$$(۱)\Delta_C=\frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۹}\left[-\frac{x}{۳}\right](۱۱۷x-۱۵x^{۲})dx+\int_{۰}^{۳}(-x)(-۵۴x)dx\right]$$

$$(۱\,kN)\Delta_C=-\frac{۷۸۹/۷۵\,kN^{۲}.m^{۳}}{EI}\Rightarrow\Delta_C=-\frac{۷۸۹/۷۵\,kN.m^{۳}}{EI}=-\frac{۷۸۹/۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۷/۸۱\times۱۰^{۸})}=-۵/۰۵\,mm$$

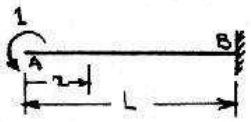
$$\blacktriangleright\Delta_C=۵/۰۵\,mm\uparrow$$

۵-۲۱ با استفاده از روش کار مجازی، شیب و تغییر مکان نقطهٔ A از تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.

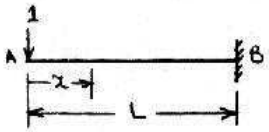


EI = ثابت

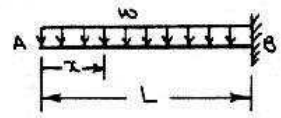
شکل ۵-۲۱



سیستم مجازی برای محاسبهٔ θ_A ، $M_{v۱}$



سیستم مجازی برای محاسبهٔ Δ_A ، $M_{v۲}$



سیستم حقیقی ، M

معادلهٔ لنگر خمشی (M): $M=-\frac{wx^{۲}}{۲}\quad,\quad ۰<x<L$

معادلهٔ لنگر خمشی ($M_{v۱}$): $M=-۱\quad,\quad ۰<x<L$

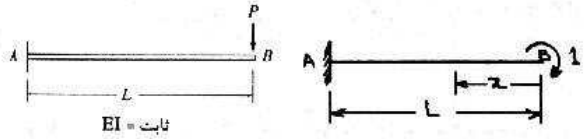
معادلهٔ لنگر خمشی ($M_{v۲}$): $M=-x\quad,\quad ۰<x<L$

$$(۱)\theta_A=\int_{۰}^{L}\frac{M_{v۱}M}{EI}dx\Rightarrow(۱)\theta_A=\frac{۱}{EI}\int_{۰}^{L}(-۱)\left[-\frac{wx^{۲}}{۲}\right]d=\frac{wL^{۳}}{۶EI}$$

$$\blacktriangleright\theta_A=\frac{wL^{۳}}{۶EI}\ \curvearrowleft$$

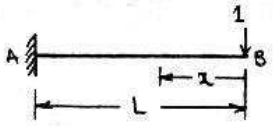
$$(1)\Delta_A=\int_0^L \frac{M_{v2}M}{EI}dx \Rightarrow (1)\Delta_A=\frac{1}{EI}\int_0^L (-x)\left[-\frac{wx^2}{2}\right]dx=\frac{wL^4}{8EI} \qquad \blacktriangleright \Delta_A=\frac{wL^4}{8EI}\downarrow$$

۵-۲۲ با استفاده از روش کار مجازی، شیب و تغییر مکان نقطهٔ B از تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.

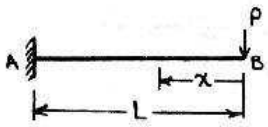


شکل ۵-۲۲

سیستم مجازی برای محاسبهٔ M_{v1} ، θ_B



سیستم مجازی برای محاسبهٔ M_{v2} ، Δ_B



سیستم حقیقی ، M

معادلهٔ لنگر خمشی (M): $M=-Px \quad , \quad 0<x<L$

معادلهٔ لنگر خمشی (M_{v1}): $M=-1 \quad , \quad 0<x<L$

معادلهٔ لنگر خمشی (M_{v2}): $M=-x \quad , \quad 0<x<L$

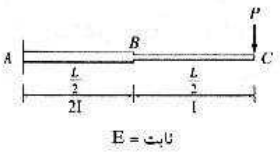
$$(1)\theta_B=\int_0^L \frac{M_{v1}M}{EI}dx \Rightarrow (1)\theta_B=\frac{1}{EI}\int_0^L (-1)\,[-Px]\,dx=\frac{PL^2}{2EI}$$

$$\blacktriangleright \theta_B=\frac{PL^2}{2EI}$$

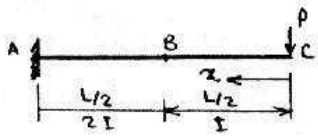
$$(1)\Delta_B=\int_0^L \frac{M_{v2}M}{EI}dx \Rightarrow (1)\Delta_A=\frac{1}{EI}\int_0^L (-x)\,[-Px]\,dx=\frac{PL^3}{3EI} \qquad \blacktriangleright \Delta_A=\frac{PL^3}{3EI}\downarrow$$

در مسایل ۵-۲۳ تا ۵-۲۶ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان نقطهٔ C از تیر نشان داده شده را محاسبه کنید.

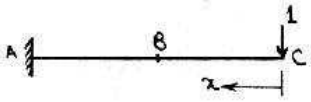
۵-۲۳



شکل ۵-۲۳



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی ، M_v

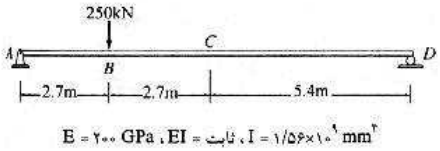
$$(1)\Delta_C=\int_0^L \frac{M_vM}{EI}dx$$

$$(1)\Delta_C=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{\frac{L}{2}}(-x)(-Px)dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{L}{2}}^{L}(-x)(-Px)dx\right]$$

$$\Delta_C=\frac{3PL^3}{16EI} \qquad \blacktriangleright \Delta_C=\frac{3PL^3}{16EI}\downarrow$$

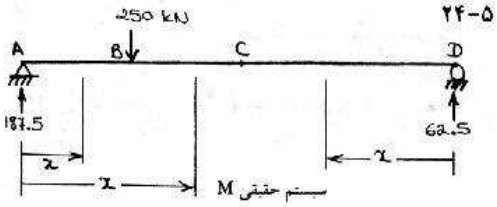
قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه	M	M_v
CB	C	$0-\frac{L}{2}$	- Px	-1 x
BA	C	$\frac{L}{2}-L$	- Px	-1 x

۵-۲۴

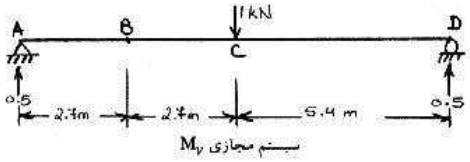


E = ۲۰۰ GPa ، EI = ثابت ، $I=1/56\times10^{-6}\ mm^2$

شکل ۵-۲۴



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_v

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰-۲/۷	۱۸۷/۵x	۰/۵x
BC	A	۲/۷-۵/۴	-۶۲/۵x+۶۷۵	۰/۵x
DC	D	۰-۵/۴	۶۲/۵x	۰/۵x

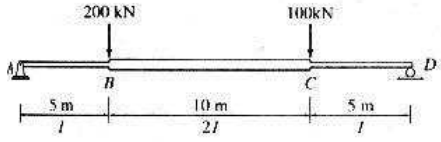
$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۳}\ N/mm^{۲}$

$$(۱)\Delta_C = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \Rightarrow (۱)\Delta_C = \frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۲/۷} (۰/۵x)(۱۸۷/۵x)dx + \int_{۲/۷}^{۵/۴} (۰/۵x)(-۶۲/۵x + ۶۷۵)dx + \int_{۰}^{۵/۴} (۰/۵x)(۶۲/۵x)dx\right]$$

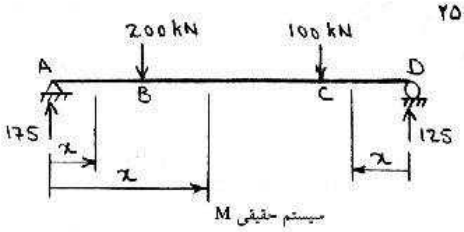
$$(۱\ kN)\Delta_C = \frac{۴۵۱۰/۶۹\ kN^{۲}m^{۳}}{EI} \Rightarrow \Delta_C = \frac{۴۵۱۰/۶۹\ kN.m^{۳}}{EI} = \frac{۴۵۱۰/۶۹(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰ \times ۱۰^{۳})(۱/۵۶ \times ۱۰^{۹})} = ۱۴/۴۵\ mm$$

$\blacktriangleright \Delta_C = ۱۴/۴۵\ mm \downarrow$

۲۵-۵

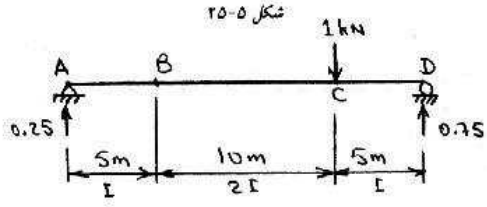


E = ثابت = ۲۵۰ GPa ، $I = ۶۰۰ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$



سیستم حقیقی M

شکل ۵-۲۵



سیستم مجازی M_v

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰-۵	۱۷۵x	۰/۲۵x
BC	A	۵-۱۵	۱۷۵x-۲۰۰ (x-۵)	۰/۲۵x
DC	D	۰-۵	۱۲۵x	۰/۷۵x

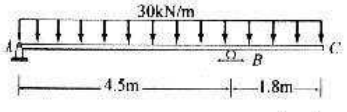
$E = ۲۵۰\ GPa = ۲۵۰ \times ۱۰^{۳}\ N/mm^{۲}$

$$(۱)\Delta_C = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \Rightarrow (۱)\Delta_C = \frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۵} (۰/۲۵x)(۱۷۵x)dx + \frac{۱}{۲}\int_{۵}^{۱۵} (۰/۲۵x)(-۲۵x + ۱۰۰۰)dx + \int_{۰}^{۵} (۰/۷۵x)(۱۲۵x)dx\right]$$

$$(۱\ kN)\Delta_C = \frac{۱۴۸۴۳/۷۵\ kN^{۲}m^{۳}}{EI} \Rightarrow \Delta_C = \frac{۱۴۸۴۳/۷۵\ kN.m^{۳}}{EI} = \frac{۱۴۸۴۳/۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۵۰ \times ۱۰^{۳})(۶۰۰ \times ۱۰^{۶})} = ۹۸/۹۶\ mm$$

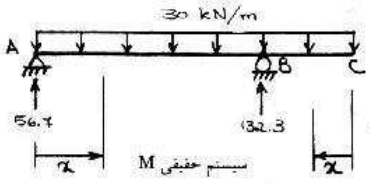
$\blacktriangleright \Delta_C = ۹۸/۹۶\ mm \downarrow$

۲۶-۵



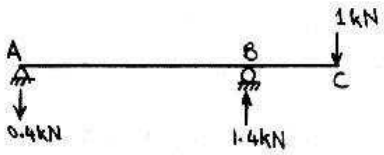
E = ۲۰۰ GPa ، EI = ثابت ، $I = ۱/۳۶ \times ۱۰^{۹}\ mm^{۴}$

شکل ۵-۲۶



سیستم حقیقی M

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۳}\ N/mm^{۲}$



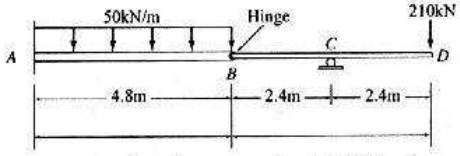
سیستم مجازی M_ν

قطعه	محور مختصات x		M (kN.m)	M_ν (kN.m)
	مبدأ	بازهٔ قطعه (m)		
AB	A	۰ - ۴/۵	$۵۶/۷x - ۱۵x^۲$	$-۰/۴x$
CB	C	۰ - ۱/۸	$-۱۵x^۲$	$-x$

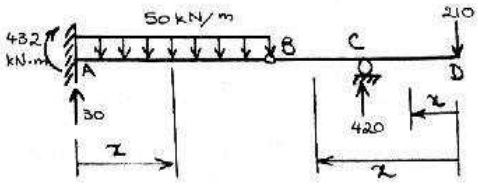
$$(۱)\Delta_C = \sum \int \frac{M_\nu M}{EI} dx \quad \Rightarrow \quad (۱)\Delta_C = \frac{۱}{EI}\left[\int_۰^{۴/۵} (-۰/۴x)(۵۶/۷x - ۱۵x^۲)dx + \int_۰^{۱/۸} (-x)(-۱۵x^۲)dx\right] = -\frac{۳۴/۴۵}{EI}$$

$$\Delta_C = -\frac{۳۴/۴۵\ kN.m^۳}{EI} = \frac{۳۴/۴۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۲۰۰\times ۱۰^۳)(۱/۳۶\times ۱۰^۹)} = -۰/۱۲۷\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = ۰/۱۲۷\ mm\ \uparrow$$

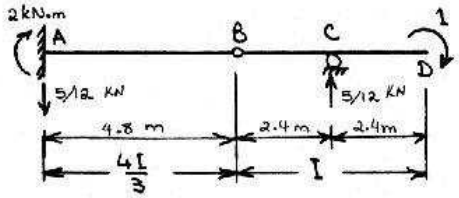
۵-۲۷ با استفاده از روش کار مجازی شیب و تغییر مکان نقطهٔ D از تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



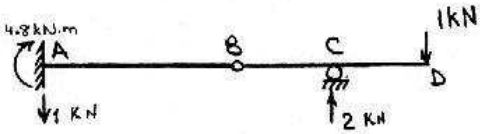
شکل ۵-۲۷



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_{ν_1}



سیستم مجازی M_{ν_2}

قطعه	محور مختصات x		M (kN.m)	M_{ν_1} (kN.m)	M_{ν_2} (kN.m)
	مبدأ	بازهٔ قطعه (m)			
DC	D	۰ - ۲/۴	$-۲۱۰x$	-۱	$-۱x$
CB	D	۲/۴ - ۴/۸	$-۲۱۰x + ۴۲۰(x-۲/۴)$	$-۱ + \frac{۵}{۱۲}(x-۲/۴)$	$x - ۴/۸$
AB	A	۰ - ۴/۸	$۴۳۲ + ۳۰x - ۲۵x^۲$	$۲ - \frac{۵}{۱۲}x$	$۴/۸ - x$

$$E = ۲۱۰\ GPa = ۲۱۰\times ۱۰^۳\ N/mm^۲$$

$$(۱)\theta_D = \sum \int \frac{M_{\nu۱} M}{EI} dx$$

$$(۱)\theta_D = \frac{۱}{EI}\left[\int_۰^{۲/۴} (-۱)(-۲۱۰x)dx + \int_{۲/۴}^{۴/۸} \left(\frac{۵}{۱۲}x - ۲\right)(۲۱۰x - ۱۰۰۸)dx + \frac{۳}{۴}\int_۰^{۴/۸} \left[۲ - \frac{۵x}{۱۲}\right](۴۳۲ + ۳۰x - ۲۵x^۲)dx\right]$$

$$(۱\ kN.m)\theta_D = \frac{۲۳۹۰/۴\ kN^۲ m^۳}{EI} \quad \Rightarrow \quad \theta_D = \frac{۲۳۹۰/۴\ kN.m^۲}{EI} = \frac{۲۳۹۰/۴(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۲۱۰\times ۱۰^۳)(۱/۱۷\times ۱۰^۹)} = ۰/۰۰۹۷\ rad$$

$$\blacktriangleright \theta_D = ۰/۰۰۹۷\ \ rad \ \circlearrowright$$

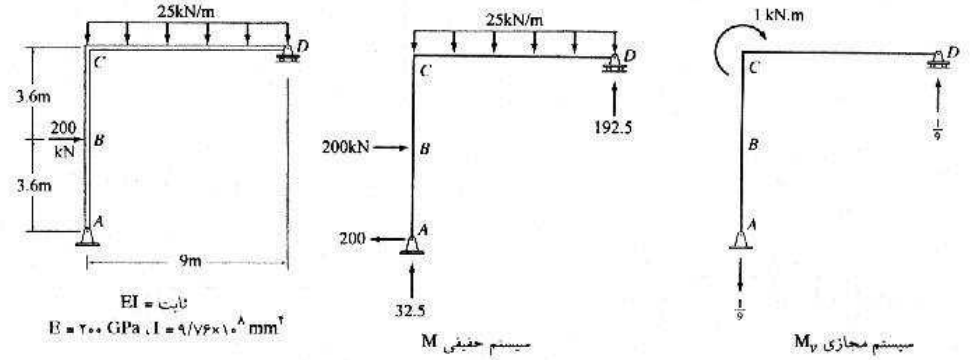
$$(۱)\Delta_D=\sum\int\frac{M_{v۲}M}{EI}dx$$

$$(۱)\Delta_D=\frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۲/۴}(-x)(-۲۱۰x)dx+\int_{۲/۴}^{۴/۸}(x-۴/۸)(۲۱۰x-۱۰۰۸)dx+\frac{۳}{۴}\int_{۰}^{۴/۸}(۴/۸-x)(۴۳۲+۳۰x-۲۵x^{۲})dx\right]$$

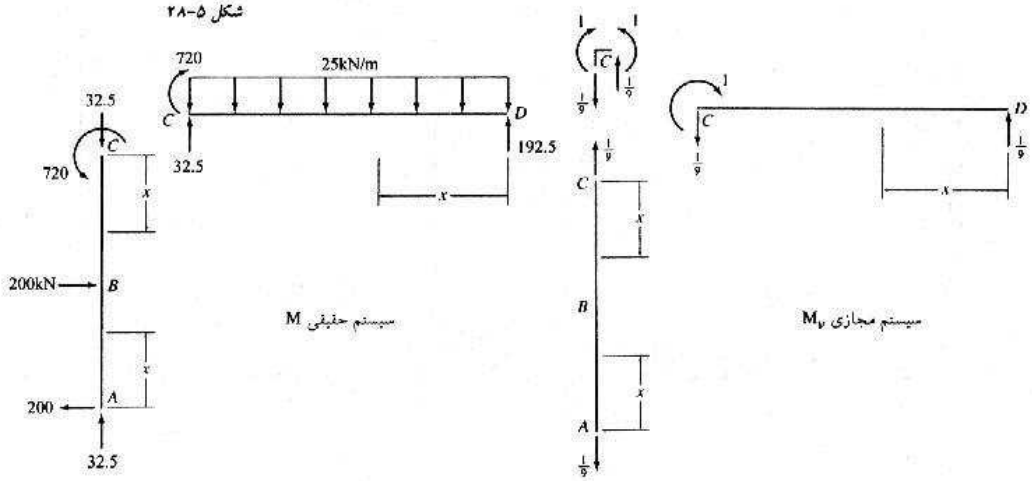
$$(۱\,kN)\Delta_D=\frac{۵۲۵۳/۱۴\,kN^{۲}m^{۳}}{EI}\Rightarrow\Delta_D=\frac{۵۲۵۳/۱۴\,kN.m^{۳}}{EI}=\frac{۵۲۵۳/۱۴(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۱۰\times۱۰^{۳})(۱/۱۷\times۱۰^{۹})}=۲۱/۳۵\,mm$$

$$\blacktriangleright\Delta_D=۲۱/۳۵\,mm\downarrow$$

۵-۲۸ با استفاده از روش کار مجازی دوران نقطهٔ C را در قاب نشان داده شده محاسبه کنید.



شکل ۵-۲۸



$$E=۲۰۰\,GPa=۲۰۰\times۱۰^{۳}\,N/mm^{۲}$$

$$(۱)\theta_C=\sum\int\frac{M_v M}{EI}dx$$

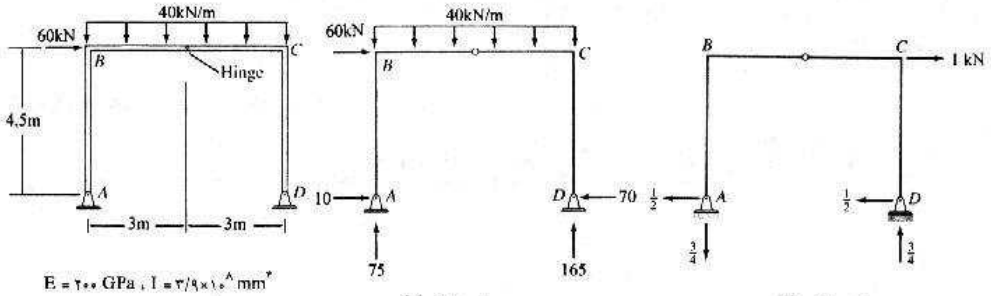
$$(۱)\theta_C=\frac{۱}{EI}\int_{۰}^{۹}\left[\frac{x}{۹}\right]\left[۱۹۲/۵x-۲۵\frac{x^{۲}}{۲}\right]dx$$

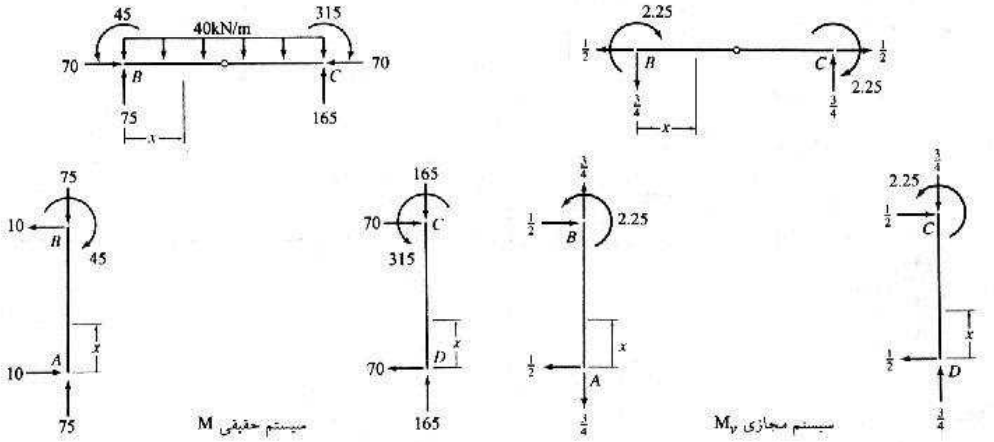
$$(۱\,kN.m)\theta_D=\frac{۲۹۱۹/۳۷۵\,kN^{۲}m^{۳}}{EI}$$

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰-۳/۶	۲۰۰x	۰
CB	C	۰-۳/۶	۷۲۰	۰
DC	D	۰-۹	$۱۹۲/۵x-۲۵\frac{x^{۲}}{۲}$	$\frac{x}{۹}$

$$\theta_D = \frac{۲۹۱۹/۳۷۵\ kN.m^۲}{EI} \Rightarrow \theta_D = \frac{۲۹۱۹/۳۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۲۰۰\times۱۰^۳)(۹/۷۶\times۱۰^۸)} = ۰/۰۱۴۹\ rad \quad \blacktriangleright \theta_D = ۰/۰۱۴۹\ rad \curvearrowleft$$

۲۹-۵ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان افقی گره C را در قاب نشان داده شده محاسبه کنید.





قطعه	محور مختصات x		M (kN.m)	F (kN)	M_v (kN.m)	F_v (kN)
	مبدأ	بازهٔ قطعه (m)				
AB	A	۰-۴/۵	$-۱۰x$	-۷۵	$\frac{x}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$
BC	B	۰-۶	$-۴۵+۷۵x-۲۰x^۲$	-۷۰	$۲/۲۵-\frac{۳}{۴}x$	$\frac{۱}{۲}$
DC	D	۰-۴/۵	$۷۰x$	-۱۶۵	$\frac{x}{۲}$	$-\frac{۳}{۴}$

$$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰\times۱۰^۳\ N/mm^۲$$

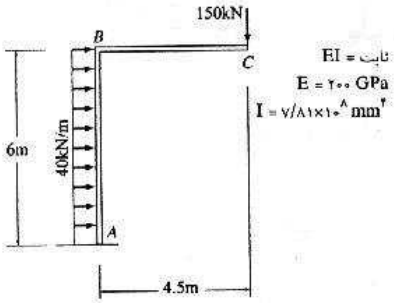
$$(۱)\Delta_C = \sum F_v\left[\frac{FL}{AE}\right] + \sum\int\frac{M_v M}{EI}dx \Rightarrow (۱)\Delta_C = \frac{۱}{AE}\left[\frac{۳}{۴}(-۷۵)(۴/۵) + \frac{۱}{۲}(-۷۰)(۶) - \frac{۳}{۴}(-۱۶۵)(۴/۵)\right] +$$

$$\frac{۱}{EI}\left[\int_۰^{۴/۵}\left[\frac{x}{۲}\right](-۱۰x)dx + \int_۰^{۶}\left[۲/۲۵-\frac{۳}{۴}x\right]\left[-۴۵+۷۵x-۲۰x^۲\right]dx + \int_۰^{۴/۵}\left[\frac{x}{۲}\right](۷۰x)dx\right]$$

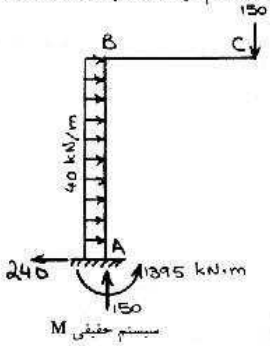
$$(1\,kN)\Delta_C=\frac{93/75\,kN^2m}{AE}+\frac{1518/75\,kN^2m^3}{EI}\Rightarrow\Delta_C=\frac{93/75\,kN.m}{AE}+\frac{1518/75\,kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_C=\frac{93/75(1000)(1000)}{(21875)(200\times10^3)}+\frac{1518/75(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(3/9\times10^{9})}=19/49\,mm\qquad\blacktriangleright\Delta_C=19/49\,mm\rightarrow$$

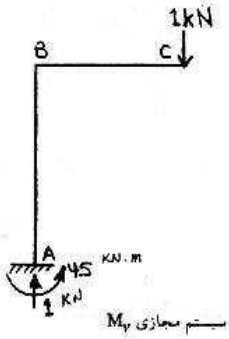
۵-۳۰ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان قائم گره C از قاب نشان داده شده را محاسبه کنید.



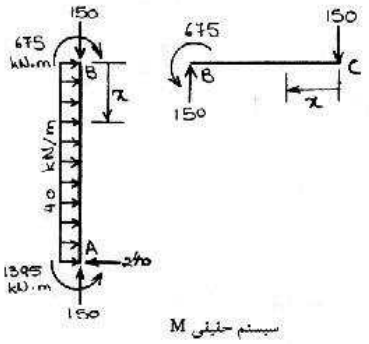
شکل ۵-۳۰



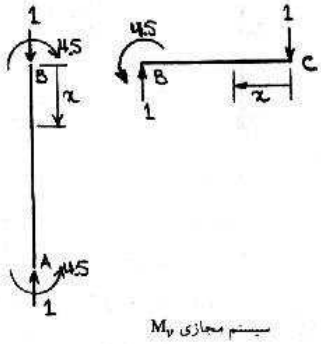
سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_V



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_V

$$E=200\,GPa=200\times10^3\,N/mm^2$$

$$(1)\Delta_C=\sum\int\frac{M_V M}{EI}dx$$

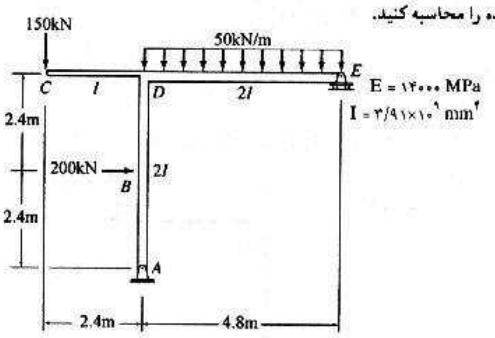
$$(1)\Delta_C=\frac{1}{EI}\left[\int_0^6 4/5\left(675+20x^2\right)dx+\int_0^{4/5}(-x)(-150x)dx\right]$$

$$(1\,kN)\Delta_C=\frac{29261/25\,kN^2m^3}{EI}$$

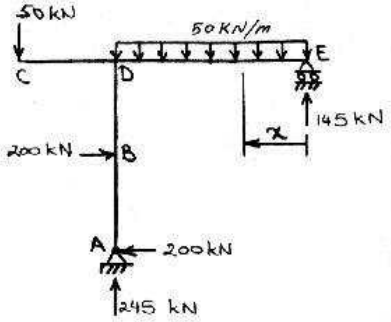
$$\Delta_C=\frac{29261/25\,kN.m^3}{EI}=\frac{29261/25(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(7/81\times10^{8})}=187/33\,mm\qquad\blacktriangleright\Delta_C=187/33\,mm\downarrow$$

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_V (kN.m)
BA	B	۰-۶	$675+20x^2$	۴/۵
CB	C	۰-۴/۵	$-150x$	-x

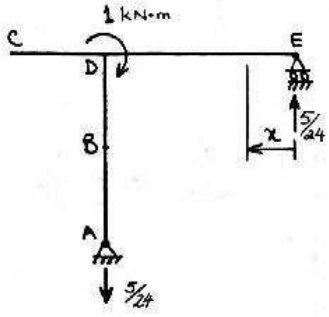
۵-۳۱ با استفاده از روش کار مجازی دوران گره D از قاب نشان داده شده را محاسبه کنید.



شکل ۵-۳۱



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_v

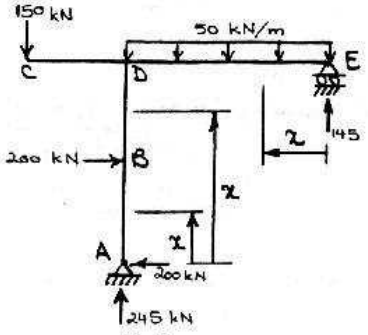
$$M = ۱۴۵x - ۲۵x^۲ \quad , \quad M_v = \frac{۵x}{۲۴}$$

$$(۱)\theta_D = \int_۰^L \frac{M_v M}{EI} dx \quad \Rightarrow \quad (۱)\theta_D = \frac{۱}{۲EI}\int_۰^{۴/۸} \left[\frac{۵x}{۲۴}\right]\left[۱۴۵x - ۲۵x^۲\right] dx$$

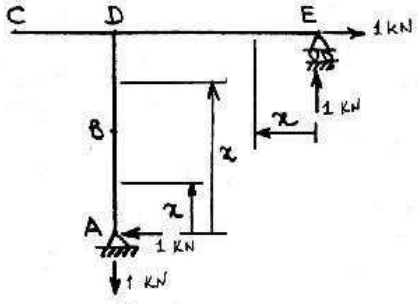
$$(۱\ kN.m)\theta_D = \frac{۲۱۱/۲\ kN^۲m^۲}{EI} \quad \Rightarrow \quad \theta_D = \frac{۲۱۱/۲\ kN.m^۲}{EI}$$

$$\frac{۲۱۱/۲(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۱۴۰۰۰)(۳/۹۱\times ۱۰^۹)} = ۰/۰۰۳۸\ rad \quad \blacktriangleright \theta_D = ۰/۰۰۳۸\ rad$$

۵-۳۲ با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان افقی گره E از قاب نشان داده شده در مسئلهٔ ۵-۳۱ را محاسبه کنید.



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_v

$$E = ۱۴۰۰۰\ MPa \quad , \quad I = ۳/۹۱\times ۱۰^۹\ mm^۴$$

$$(۱)\Delta_E = \sum\int \frac{M_v M}{EI} dx \quad \Rightarrow \quad (۱)\Delta_E = \frac{۱}{۲EI}\left[\int_۰^{۲/۴} x(۲۰۰x)dx + \int_{۲/۴}^{۴/۸} x(۴۸۰)dx + \int_۰^{۴/۸} x(۱۴۵x - ۲۵x^۲)dx\right]$$

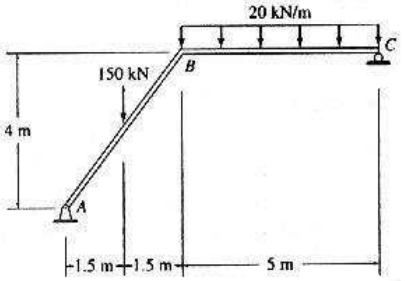
$$(1\,kN)\,\Delta_E = \frac{3548/16\ kN^2.m^3}{EI}$$

$$\Delta_E = \frac{3548/16\ kN.m^3}{EI} = \frac{3548/16\,(1000)(1000)^3}{(14000)(3/91\times10^9)} = 64/82\ mm$$

$$\blacktriangleright\ \Delta_E = 64/82\ mm \rightarrow$$

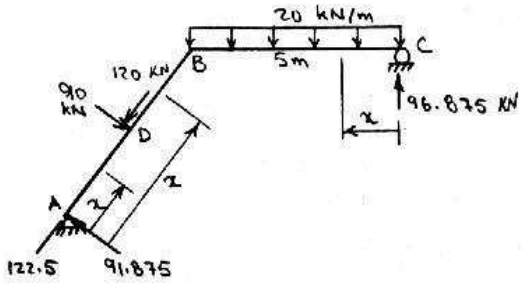
قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰–۲/۴	۲۰۰x	۱x
BD	A	۲/۴–۴/۸	۴۸۰	۱x
ED	E	۰–۴/۸	$125x - \frac{50x^2}{2}$	۱x

۵–۳۳ با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم گره B تاب نشان داده شده در شکل را محاسبه کنید.

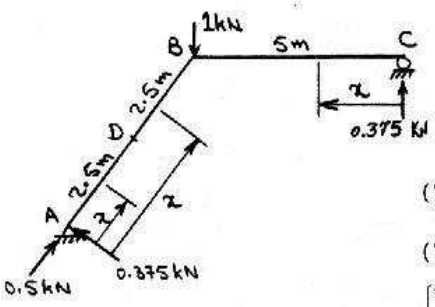


EI = ثابت ، $E = 200\ GPa$ ، $I = 5000\times10^6\ mm^4$

شکل ۵–۳۳



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_v

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AD	A	۰–۲/۵	۹۱/۸۷۵x	۰/۳۷۵x
DB	A	۲/۵–۵	۱/۸۷۵x + ۲۲۵	۰/۳۷۵x
CB	C	۰–۵	$96/875x - 10x^2$	۰/۳۷۵x

$$(1)\,\Delta_B = \sum\int \frac{M_v M}{EI}dx$$

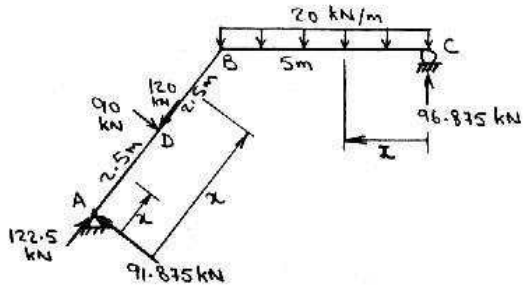
$$(1)\,\Delta_B = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{2/5}(0/375x)(91/875x)dx + \int_{2/5}^{5}(0/375x)(1/875x + 225)dx + \int_0^5(0/375x)(96/875x - 10x^2)dx\right]$$

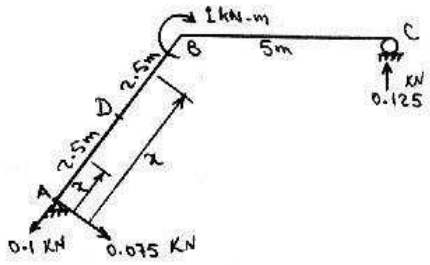
$$(1\,kN)\,\Delta_B = \frac{1923/83\ kN^2.m^3}{EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{1923/83\ kN.m^2}{EI}$$

$$\blacktriangleright\ \Delta_B = 19/24\ mm\downarrow$$

$$\Delta_B = \frac{1923/83\,(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(500\times10^6)} = 19/24\ mm$$

۵-۳۴ با استفاده از روش کار مجازی، دوران گره B را در قاب نشان داده شده در مسئلهٔ ۵-۳۳ محاسبه کنید.





سیستم مجازی M_v

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۳}\ N/mm^{۲}$

$I = ۵۰۰ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AD	A	۰-۲/۵	۹۱/۸۷۵ x	-۰/۰۷۵ x
DB	A	۲/۵-۵	۱/۸۷۵ x + ۲۲۵	-۰/۰۷۵ x
CB	C	۰-۵	۹۶/۸۷۵ x - ۱۰x²	۰/۱۲۵ x

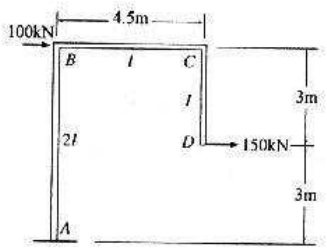
$$(۱)\theta_B = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$(۱)\theta_B = \frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۲/۵} (-۰/۰۷۵x)(۹۱/۸۷۵x)\,dx + \int_{۲/۵}^{۵} (-۰/۰۷۵x)(۱/۸۷۵x + ۲۲۵)\,dx + \int_{۰}^{۵} (۰/۱۲۵x)(۹۶/۸۷۵x - ۱۰x^{۲})\,dx\right]$$

$$(۱\ kN.m)\theta_B = \frac{۱۱۰/۰۱\ kN^{۲}m^{۳}}{EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{۱۱۰/۰۱\ kN.m^{۲}}{EI} = \frac{۱۱۰/۰۱(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۰۰ \times ۱۰^{۳})(۵۰۰ \times ۱۰^{۶})} = ۰/۰۰۱۱\ rad$$

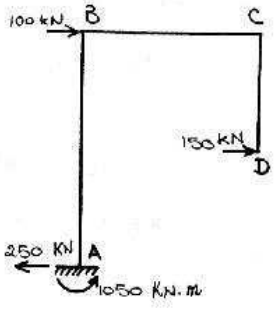
$\blacktriangleright \theta_B = ۰/۰۰۱۱\ rad$

۵-۳۵ با استفاده از روش کار مجازی، دوران گره D از قاب نشان داده شده در شکل را محاسبه کنید.

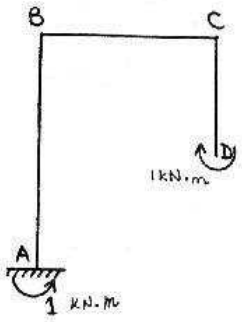


$E = ۷۰\ GPa$; $I = ۱/۱۲ \times ۱۰^{۹}\ mm^{۴}$

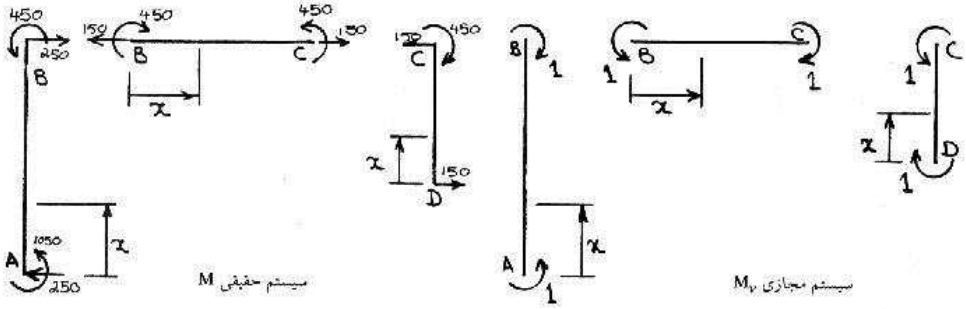
شکل ۵-۳۵



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_v



قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰–۶	$-۱۰۵۰ + ۲۵۰x$	−۱
BC	B	۰–۴/۵	۴۵۰	−۱
DC	D	۰–۳	$-۱۵۰x$	۱

$$E = ۷۰\ GPa = ۷۰ \times ۱۰^۳\ N/mm^۲$$

$$(۱)\theta_B = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx$$

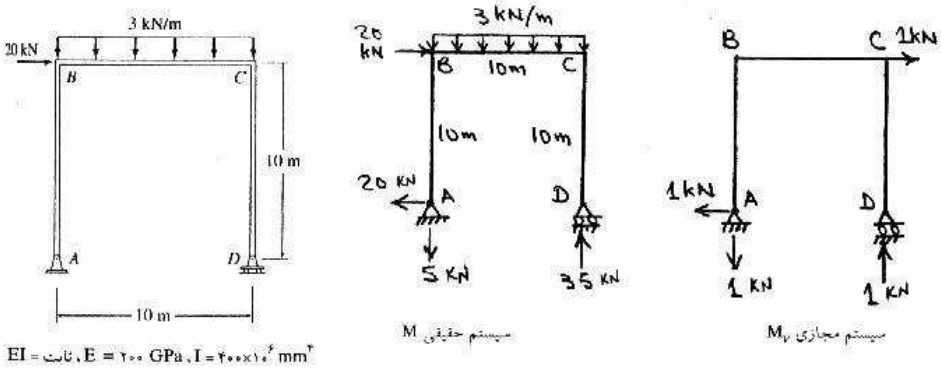
$$(۱)\theta_B = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}\int_۰^۶ (-۱)(-۱۰۵۰ + ۲۵۰x)dx + \int_۰^{۴/۵} (-۱)(۴۵۰)dx + \int_۰^۳ (۱)(-۱۵۰x)dx\right]$$

$$(۱\ kN.m)\theta_D = -\frac{۱۸۰۰\ kN^۲m^۳}{EI} \Rightarrow \theta_D = -\frac{۱۸۰۰\ kN.m^۲}{EI} \Rightarrow \theta_D = -\frac{۱۸۰۰(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۷۰ \times ۱۰^۳)(۱/۱۷ \times ۱۰^۹)} = -۰/۰۲۱۹\ rad$$

$$\blacktriangleright \theta_D = ۰/۰۲۱۹\ \ rad$$

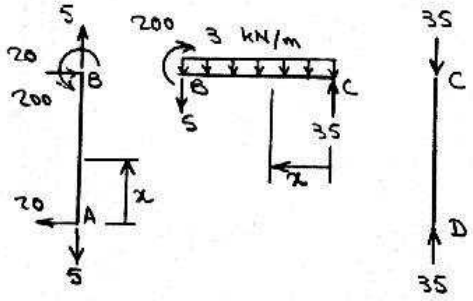
در مسایل ۵-۳۶ و ۵-۳۷ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان افقی گره C از قاب نشان داده شده را محاسبه کنید.

۵-۳۶

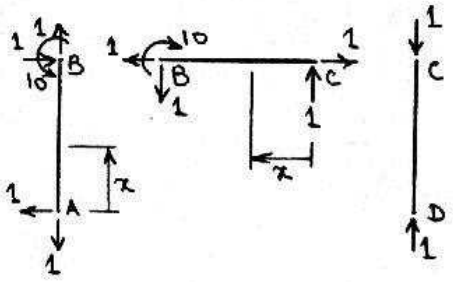


EI = ثابت ، $E = ۲۰۰$ GPa ، $I = ۴۰۰ \times ۱۰^۶\ mm^۴$

شکل ۵-۳۶



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_1

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۳}\ N/mm^{۲}$

$$(۱)\Delta_C = \sum \int \frac{M_۱ M}{EI} dx$$

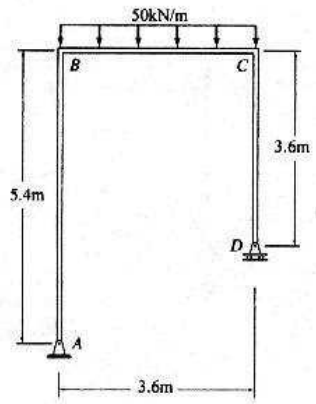
$$(۱)\Delta_C = \frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۱۰} (x)(۲۰x)\,dx + \int_{۰}^{۱۰} (x)(۳۵x - ۱/۵x^{۲})\,dx\right]$$

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$M_۱$ (kN.m)
AB	A	۰-۱۰	۲۰x	۱x
CB	C	۰-۱۰	۳۵x-۱/۵x^{۲}	۱x

$$(۱\,kN)\Delta_C = \frac{۱۴۵۸۳/۳۳\ kN^{۲}m^{۳}}{EI} \Rightarrow \Delta_C = \frac{۱۴۵۸۳/۳۳\ kN.m^{۳}}{EI} = \frac{۱۴۵۸۳/۳۳(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰ \times ۱۰^{۳})(۴۰۰ \times ۱۰^{۶})} = ۱۸۲/۳\ mm$$

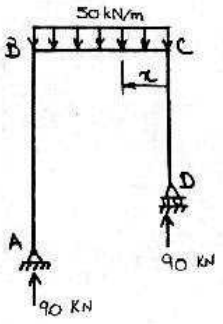
$\blacktriangleright \Delta_C = ۱۸۲/۳\ mm \rightarrow$

۳۷-۵

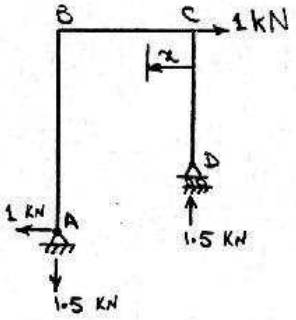


EI = ثابت
E = ۷۰ GPa
I = ۵/۸۶×۱۰^۸ mm^۴

شکل ۵-۳۷



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_1

در قطعهٔ BC:

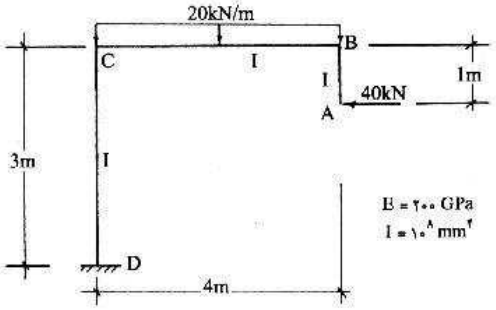
$$M = ۹۰x - ۲۵x^۲ \quad , \quad M_v = ۱/۵x$$

$$(۱)\Delta_C = \int_۰^L \frac{M_v M}{EI}dx \Rightarrow (۱)\Delta_C = \frac{۱}{EI}\int_۰^{۳/۶} (۱/۵x)(۹۰x - ۲۵x^۲)dx \Rightarrow (۱\,kN)\Delta_C = \frac{۵۲۴/۸۸\,kN^۲m^۳}{EI}$$

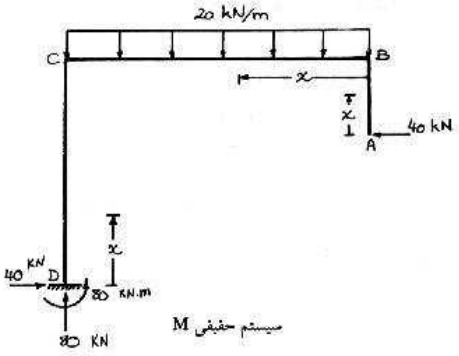
$$\Delta_C = \frac{۵۲۴/۸۸\,kN^۲m^۳}{EI} \Rightarrow \Delta_C = \frac{۵۲۴/۸۸(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۷۰\times۱۰^۳)(۵/۸۶\times۱۰^۸)} = ۱۲/۸\,mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = ۱۲/۸\,mm \rightarrow$$

در مسایل ۵-۳۸ تا ۵-۴۰ دوران نقطهٔ A و تغییر مکان افقی نقطهٔ A از قاب نشان داده شده را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه کنید.

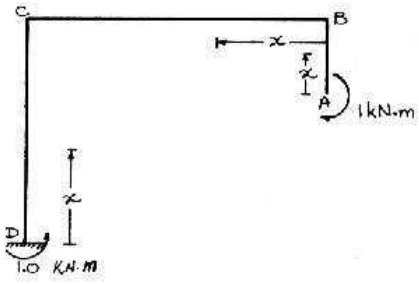
۵-۳۸



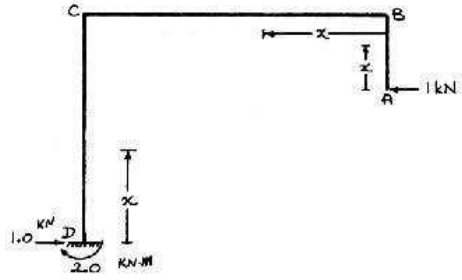
شکل ۵-۳۸



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی برای محاسبهٔ $M_{v۱}$ ، θ_A



سیستم مجازی برای محاسبهٔ $M_{v۲}$ ، Δ_A

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$M_{v۱}$ (kN.m)	$M_{v۲}$ (kN.m)
DC	D	۰-۳	۴۰x + ۸۰	۱	۱x - ۲
BC	B	۰-۲	۴۰ + ۱۰x^۲	۱	۱
AB	A	۰-۱	۴۰x	۱	۱x

$$E = ۲۰۰\,GPa = ۲۰۰\times۱۰^۳\,N/mm^۲$$

$$(۱)\theta_A = \sum\int \frac{M_{v۱}M}{EI}dx \quad , \quad (۱)\Delta_A = \sum\int \frac{M_{v۲}M}{EI}dx$$

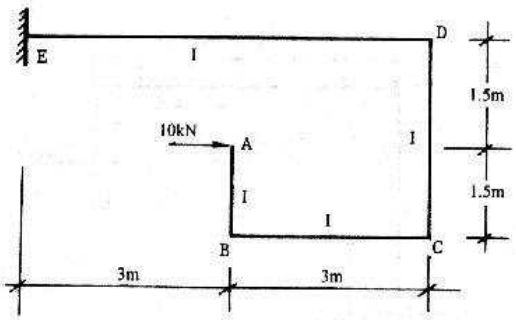
$$(۱)\theta_A=\frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۳}(۱)(۴۰x+۸۰)dx+\int_{۰}^{۴}(۱)(۴۰+۱۰x^{۲})dx+\int_{۰}^{۱}(۱)(۴۰x)dx\right]\Rightarrow(۱\,kN.m)\theta_A=\frac{۸۱۳/۳۳\,kN^{۲}m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_A=\frac{۸۱۳/۳۳\,kN.m^{۲}}{EI}=\frac{۸۱۳/۳۳(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۱۰^{۸})}=۰/۰۴۰۷\,rad\qquad\blacktriangleright\ \theta_A=۰/۰۴۰۷\ \ rad\ \angle$$

$$(۱)\Delta_A=\frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۳}(x-۲)(۴۰x+۸۰)dx+\int_{۰}^{۴}(۱)(۴۰+۱۰x^{۲})dx+\int_{۰}^{۱}(x)(۴۰x)dx\right]\Rightarrow(۱\,kN)\Delta_A=\frac{۲۶۶/۶۶\,kN^{۲}m^{۳}}{EI}$$

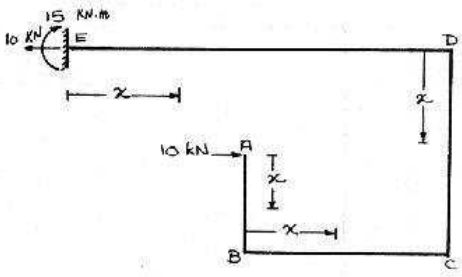
$$\Delta_A=\frac{۲۶۶/۶۶\,kN.m^{۳}}{EI}=\frac{۲۶۶/۶۶(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۱۰^{۸})}=۱۳/۳۳\,mm\qquad\blacktriangleright\ \Delta_A=۱۳/۳۳\,mm\leftarrow$$

۵-۳۹

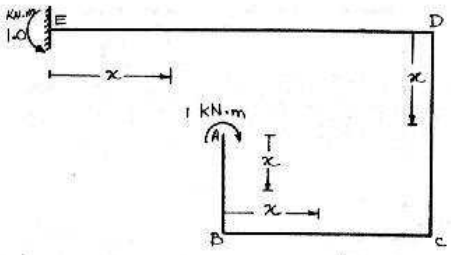


$E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۴/۲\times۱۰^{۷}\,mm^{۴}$

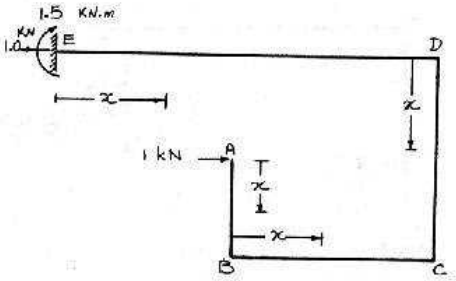
شکل ۵-۳۹



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی برای محاسبهٔ θ_A ، $M_{۷۱}$



سیستم مجازی برای محاسبهٔ Δ_A ، $M_{۷۲}$

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰\times۱۰^{۳}\ \frac{N}{mm^{۲}}$

$(۱)\theta_A=\sum\int\frac{M_{۷۱}M}{EI}dx$

$(۱)\Delta_A=\sum\int\frac{M_{۷۲}M}{EI}dx$

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$M_{۷۱}$ (kN.m)	$M_{۷۲}$ (kN.m)
AB	A	۰-۱/۵	۱۰x	۱	۱x
BC	B	۰-۳	۱۵	۱	۱/۵
DC	D	۰-۳	۱۰x - ۱۵	۱	۱x - ۱/۵
ED	E	۰-۶	-۱۵	۱	-۱/۵

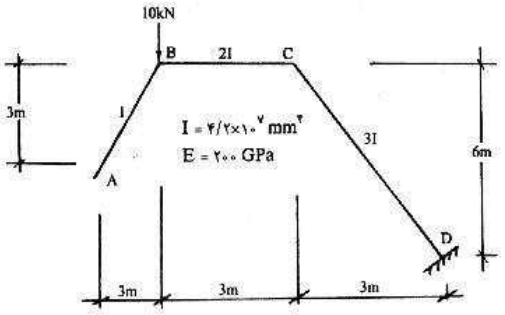
$$(۱)\theta_A=\frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۱/۵}(۱)(۱۰x)dx+\int_{۰}^{۳}(۱)(۱۵)dx+\int_{۰}^{۳}(۱)(۱۰x-۱۵)dx+\int_{۰}^{۶}(۱)(-۱۵)dx\right]\Rightarrow(۱\,kN.m)\theta_A=-\frac{۳۳/۷۵\,kN^{۲}m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_A = -\frac{۳۳/۷۵\,kN.m^۲}{EI} = -\frac{۳۳/۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۲۰۰\times۱۰^۳)(۴/۲\times۱۰^۷)} = -۰/۰۰۴\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_A = ۰/۰۰۴\ \ rad$$

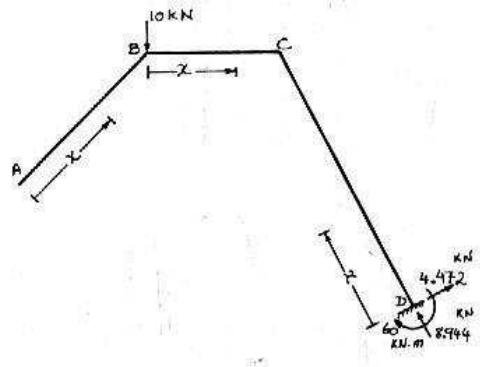
$$(۱)\Delta_A = \frac{۱}{EI}\left[\int_۰^{۱/۵}(x)(۱۰x)dx + \int_۰^{۳}(۱/۵)(۱۵)dx + \int_۰^{۳}(x-۱/۵)(۱۰x-۱۵)dx + \int_۰^{۶}-(۱/۵)(-۱۵)dx\right]$$

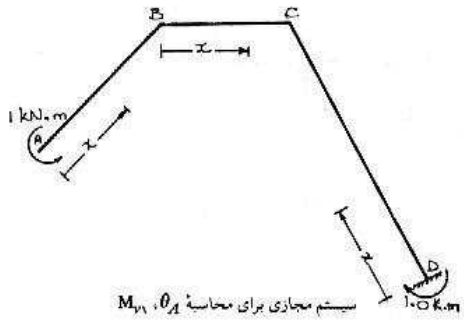
$$(۱\,kN)\Delta_A = \frac{۲۲۵\,kN^۲.m^۳}{EI} \Rightarrow \Delta_A = \frac{۲۲۵\,kN.m^۳}{EI} = \frac{۲۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۲۰۰\times۱۰^۳)(۴/۲\times۱۰^۷)} = ۲۶/۷۸\,mm \qquad \blacktriangleright \Delta_A = ۲۶/۷۸\,mm \rightarrow$$

۴۰-۵

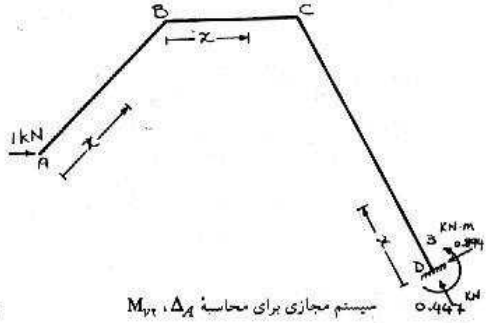


شکل ۴۰-۵





سیستم مجازی برای محاسبهٔ $M_{۷۱}$ ، θ_A



سیستم مجازی برای محاسبهٔ $M_{۷۲}$ ، Δ_A

با توجه به این که در طول قطعهٔ AB هیچ بار خارجی وارد نشده و بنابراین $M = ۰$ است، پس این قسمت در محاسبات وارد نمی‌شود.

قطعه	محور مختصات x		M (kN.m)	$M_{۷۱}$ (kN.m)	$M_{۷۲}$ (kN.m)
	مبدأ	بازهٔ قطعه (m)			
BC	B	۰-۳	۱۰x	۱	۳
DC	D	۰-۶/۷۰۸	-۴/۴۷۲x + ۶۰	۱	۰/۸۹۴x - ۳

$$(۱)\theta_A = \sum\int\frac{M_{۷۱}M}{EI}dx \Rightarrow (۱)\theta_A = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}\int_۰^{۳}(۱)(۱۰x)dx + \frac{۱}{۳}\int_۰^{۶/۷۰۸}(۱)(-۴/۴۷۲x+۶۰)dx\right]$$

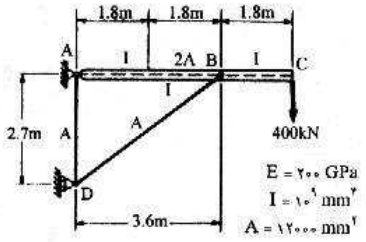
$$(۱\,kN.m)\theta_A = \frac{۱۲۳/۱۲\,kN^۲.m^۳}{EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{۱۲۳/۱۲\,kN.m^۲}{EI} = \frac{۱۲۳/۱۲(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۲۰۰\times۱۰^۳)(۴/۲\times۱۰^۷)} = ۰/۰۱۴۷\ \ rad$$

$$\blacktriangleright \theta_A = ۰/۰۱۴۷\ \ rad$$

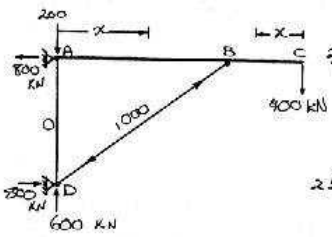
$$(۱)\Delta_A = \sum\int\frac{M_{۷۲}M}{EI}dx \Rightarrow (۱)\Delta_A = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}\int_۰^{۳}(۳)(۱۰x)dx + \frac{۱}{۳}\int_۰^{۶/۷۰۸}(۰/۸۹۴x-۳)(-۴/۴۷۲x+۶۰)dx\right]$$

$$(1\,kN)\,\Delta_A=\frac{۳۳/۸۲۵\,kN^{۲}.m^{۳}}{EI}\quad\Rightarrow\quad \Delta_A=\frac{۳۳/۸۲۵\,kN.m^{۳}}{EI}=\frac{۳۳/۸۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۴/۲\times۱۰^{۷})}$$

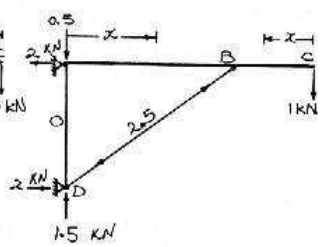
۵-۴۱ تغییر مکان قائم نقطهٔ C از قاب نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



شکل ۵-۴۱



سیستم حقیقی M



سیستم مجازی M_v

$$E=۲۰۰\ GPa=۲۰۰\times۱۰^{۳}\ N/mm^{۲}$$

$$(1)\ \Delta_C=\sum F_v\left[\frac{FL}{AE}\right]+\sum\int\frac{M_v M}{EI}dx$$

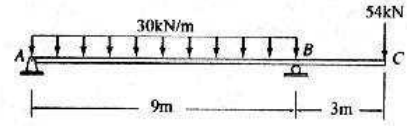
قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	F (kN)	M_v (kN.m)	F_v (kN)
AB	A	۰-۳/۶	$-۲۰۰x$	۸۰۰	$-۰/۵x$	۲
BC	C	۰-۱/۸	$-۴۰۰x$	۰	$-۱x$	۰
BD	-	-	-	-۱۰۰۰	-	$-۲/۵$

$$(1)\ \Delta_C=\frac{۱}{AE}\left[\frac{۱}{۲}(۲)(۸۰۰)(۳/۶)+(-۲/۵)(-۱۰۰۰)(۴/۵)\right]+\frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۳/۶}(-۰/۵x)(-۲۰۰x)dx+\int_{۰}^{۱/۸}(-x)(-۴۰۰x)dx\right]$$

$$(1\,kN)\,\Delta_C=\frac{۱۴۱۳۰\,kN^{۲}.m}{AE}+\frac{۲۳۳۲/۸\,kN^{۲}.m^{۳}}{EI}\quad\Rightarrow\quad \Delta_C=\frac{۱۴۱۳۰\,kN.m}{EA}+\frac{۲۳۳۲/۸\,kN.m^{۳}}{EI}$$

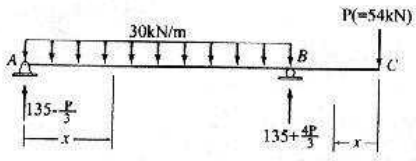
$$\Delta_C=\frac{۱۴۱۳۰(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۱۲۰۰۰)}+\frac{۲۳۳۲/۸(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۱۰^{۹})}=۱۷/۵۵\ mm\qquad\blacktriangleright\ \Delta_C=۱۷/۵۵\ mm\downarrow$$

۵-۴۲ با استفاده از قضیهٔ دوم کاستلیانو تغییر مکان قائم گره C از تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



EI = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa ، I = ۷/۸۱×۱۰^۸ mm^۴

شکل ۵-۴۲



$$P=۵۴\ \ kN\ \ ,\ \ E=۲۰۰\ GPa=۲۰۰\times۱۰^{۳}\ N/mm^{۲}$$

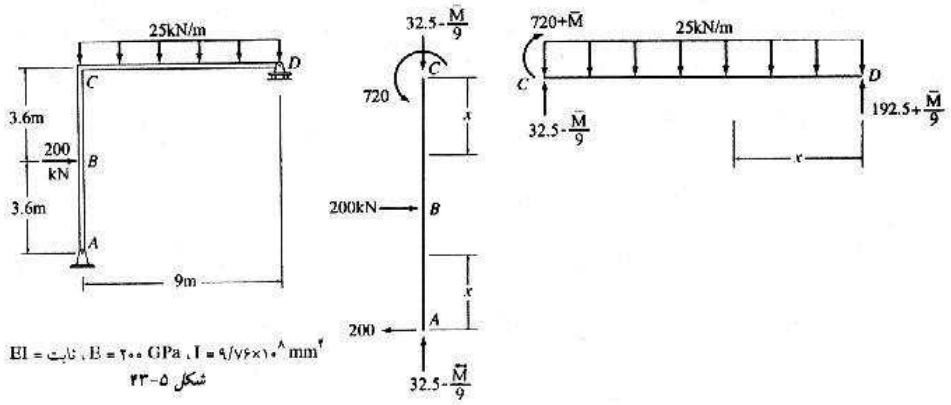
$$\Delta_C=\int_{۰}^{L}\left[\frac{\partial M}{\partial P}\right]\left[\frac{M}{EI}\right]dx$$

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$\frac{\partial M}{\partial P}\ (\frac{kN.m}{kN})$
AB	A	۰-۹	$(۱۳۵-\frac{P}{۳})x-۱۵x^{۲}$	$-\frac{x}{۳}$
CB	C	۰-۳	-Px	-x

$$\Delta_C=\frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۹}\left[-\frac{x}{۳}\right]\left[\left[۱۳۵-\frac{۵۴}{۳}\right]x-۱۵x^{۲}\right]dx+\int_{۰}^{۳}(-x)(-۵۴x)dx\right]\quad\Rightarrow\quad \Delta_C=-\frac{۷۸۹/۷۵\,kN.m^{۳}}{EI}$$

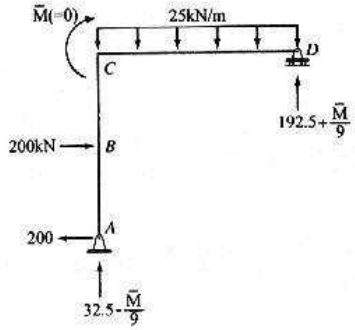
$$\Delta_C = -\frac{۷۸۹/۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۲۰۰\times۱۰^۳)(۷/۸۱\times۱۰^۸)} = -۵/۰۵\ mm \qquad \blacktriangleright\ \Delta_C = ۵/۰۵\ mm\ \uparrow$$

۵-۴۳ با استفاده از قضیهٔ دوم کاستلیانو دوران گره C را در قاب نشان داده شده محاسبه کنید.



EI = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa ، I = ۹/۷۶×۱۰^۸ mm^۴

شکل ۵-۴۳



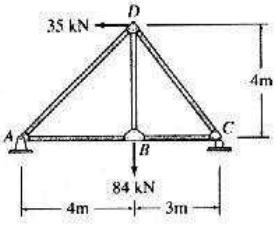
قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}$ $(\frac{kN.m}{kN.m})$
AB	A	۰-۳/۶	۲۰۰ x	۰
CB	C	۰-۳/۶	۷۲۰	۰
DC	D	۰-۹	$(۱۹۲/۵+\frac{\bar{M}}{۹})x-۲۵\frac{x^۲}{۲}$	$\frac{x}{۹}$

$$\bar{M}=۰\ ,\ E=۲۰۰\ GPa=۲۰۰\times۱۰^۳\frac{N}{mm^۲}\ ,\ \theta_C=\sum\int\left[\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}\right]\frac{M}{EI}dx$$

$$\theta_C=\int_۰^۹\left[\frac{x}{۹}\right]\left[۱۹۲/۵x-۲۵\frac{x^۲}{۲}\right]dx \Rightarrow \theta_C=\frac{۲۹۱۹/۳۷۵\ kN.m^۲}{EI}$$

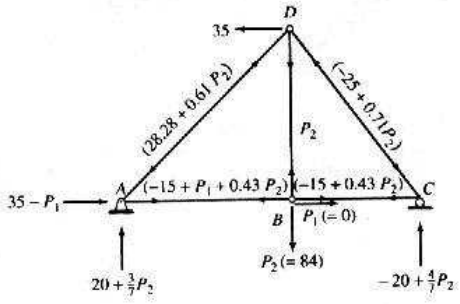
$$\theta_C=\frac{۲۹۱۹/۳۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۲۰۰\times۱۰^۳)(۹/۷۶\times۱۰^۸)}=۰/۰۱۴۹\ rad \qquad \blacktriangleright\ \theta_C=۰/۰۱۴۹\ \ rad\ \curvearrowright$$

۵-۴۴ با استفاده از قضیهٔ دوم کاستلیانو، تغییر مکان افقی و قائم گره B را در خرپای نشان داده شده محاسبه کنید.



EA = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa ، A = ۱۲۰۰ mm^۲

شکل ۵-۴۴



$$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰\ kN/mm^۲ \quad , \quad \Delta_{BH} = \frac{۱}{EA}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P_۱}\right]FL \quad , \quad \Delta_{BV} = \frac{۱}{EA}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P_۲}\right]FL$$

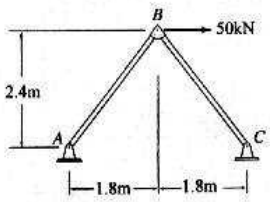
عضو	L (m)	F (kN)	$(\frac{\partial F}{\partial P_۱})(\frac{kN}{kN})$	$(\frac{\partial F}{\partial P_۲})(\frac{kN}{kN})$	به ازای $P_۱ = ۰$ و $P_۲ = ۰$	
					$(\frac{\partial F}{\partial P_۱})$ FL (kN.m)	$(\frac{\partial F}{\partial P_۲})$ FL (kN.m)
AB	۴	$-۱۵ + P_۱ + ۰/۴۳P_۲$	۱	۰/۴۳	۸۴/۴۸	۳۶/۳۲
BC	۳	$-۱۵ + ۰/۴۳P_۲$	۰	۰/۴۳	۰	۲۷/۲۴
AD	۵/۶۶	$-۲۸/۲۸ - ۰/۶۱P_۲$	۰	−۰/۶۱	۰	۲۷۴/۵۵
BD	۴	$P_۲$	۰	۱	۰	۳۳۶/۰۰
CD	۵	$۲۵ - ۰/۷۱P_۲$	۰	−۰/۷۱	۰	۱۲۲/۹۷
					$\Sigma(\frac{\partial F}{\partial P_۱})FL = ۸۴/۴۸$	$\Sigma(\frac{\partial F}{\partial P_۲})FL = ۷۹۷/۰۸$

$$\Delta_{BH} = \frac{۸۴/۴۸\ kN.m}{EA} \Rightarrow \Delta_{BH} = \frac{۸۴/۴۸(۱۰۰۰)}{(۲۰۰)(۱۲۰۰)} = ۰/۳۵\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_{BH} = ۰/۳۵\ mm \rightarrow$$

$$\Delta_{BV} = \frac{۷۹۷/۰۸\ kN.m}{EA} \Rightarrow \Delta_{BV} = \frac{۷۹۷/۰۸(۱۰۰۰)}{(۲۰۰)(۱۲۰۰)} = ۳/۳۲\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_{BV} = ۳/۳۲\ mm \downarrow$$

در مسایل ۵-۴۵ تا ۵-۴۸ با استفاده از قضیهٔ دوم کاستلیانو تغییر مکان افقی و قائم گره B را در خرپاهای نشان داده شده محاسبه کنید.

۵-۴۵

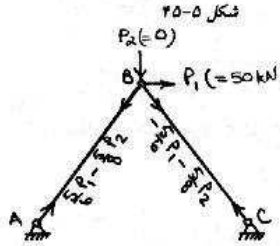


شکل ۵-۴۵

EA = ثابت
E = ۲۰۰ GPa
A = ۱۸۷۵ mm²

قطعه	F (kN)	$(\frac{\partial F}{\partial P_۱})(\frac{kN}{kN})$	$(\frac{\partial F}{\partial P_۲})(\frac{kN}{kN})$	به ازای $P_۱ = ۵۰$ kN و $P_۲ = ۰$	
				$(\frac{\partial F}{\partial P_۱})$ F	$(\frac{\partial F}{\partial P_۲})$ F
AB	$\frac{۵}{۶}P_۱ - \frac{۵}{۸}P_۲$	$\frac{۵}{۶}$	$-\frac{۵}{۸}$	۳۲/۷۲	-۲۶/۰۴
BC	$-\frac{۵}{۶}P_۱ - \frac{۵}{۸}P_۲$	$-\frac{۵}{۶}$	$-\frac{۵}{۸}$	۳۲/۷۲	۲۶/۰۴
				$\Sigma(\frac{\partial F}{\partial P_۱})F = ۶۹/۴۴$	$\Sigma(\frac{\partial F}{\partial P_۲})F = $

$$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰\ kN/mm^۲$$

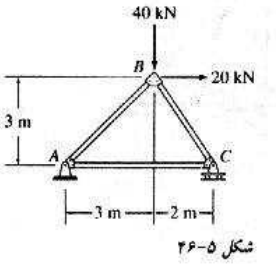


$$\Delta_{BH} = \frac{L}{EA}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P_۱}\right]F \Rightarrow \Delta_{BH} = \frac{۳۰۰۰(۶۹/۴۴)}{(۲۰۰)(۱۸۷۵)} = ۰/۵۵۵\ mm$$

$$\blacktriangleright \Delta_{BH} = ۰/۵۵۵\ mm \rightarrow$$

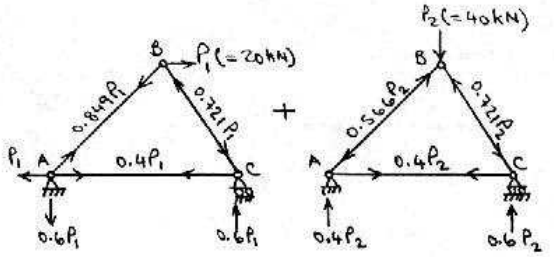
$$\Delta_{BV} = \frac{L}{EA}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P_۲}\right]F \Rightarrow \Delta_{BV} = \frac{۳۰۰۰(۰)}{(۲۰۰)(۱۸۷۵)} = ۰ \qquad \blacktriangleright \Delta_{BV} = ۰$$

۵-۴۶



شکل ۵-۴۶

EA = ثابت
E = ۲۰۰ GPa
A = ۱۰۰۰ mm²

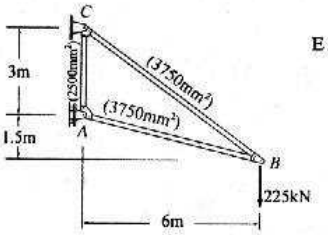


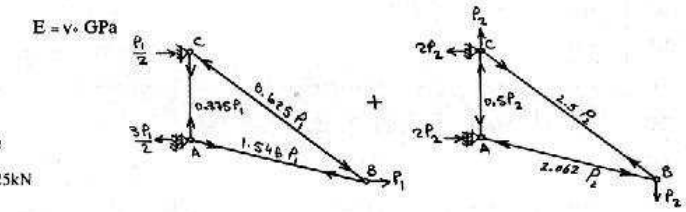
قطعه	L (m)	F (kN)	$(\frac{\partial F}{\partial P_1})(\frac{kN}{kN})$	$(\frac{\partial F}{\partial P_2})(\frac{kN}{kN})$	به ازای $P_1 = ۲۰\ kN$ و $P_2 = ۴۰\ kN$	
					$(\frac{\partial F}{\partial P_1})$ FL (kN.m)	$(\frac{\partial F}{\partial P_2})$ FL (kN.m)
AB	۴/۲۴	$۰/۸۴۹P_1 - ۰/۵۶۶P_2$	۰/۸۴۹	-۰/۵۶۶	-۲۰/۳۷	۱۳/۵۸
AC	۵	$۰/۴\ (P_1 + P_2)$	۰/۴	۰/۴	۴۸	۴۸
BC	۳/۶۱	$-۰/۷۲۱\ (P_1 + P_2)$	-۰/۷۲۱	-۰/۷۲۱	۱۱۲/۶	۱۱۲/۶
					$\Sigma(\frac{\partial F}{\partial P_1})FL = ۱۴۰/۲۳$	$\Sigma(\frac{\partial F}{\partial P_2})FL = ۱۷۴/۱۸$

$$\Delta_{BH} = \frac{1}{EA}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P_1}\right]FL \quad , \quad \Delta_{BV} = \frac{1}{EA}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P_2}\right]FL \quad , \quad E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰\ kN/mm^2$$

$$\Delta_{BH} = \frac{۱۴۰/۲۳(۱۰۰۰)}{(۲۰۰)(۱۰۰۰)} = ۰/۷۰\ mm \quad \blacktriangleright \Delta_{BH} = ۰/۷۰\ mm \rightarrow \quad , \quad \Delta_{BV} = \frac{۱۷۴/۱۸(۱۰۰۰)}{(۲۰۰)(۱۰۰۰)} = ۰/۸۷\ mm \quad \blacktriangleright \Delta_{BV} = ۰/۸۷\ mm \downarrow$$

۴۷-۵





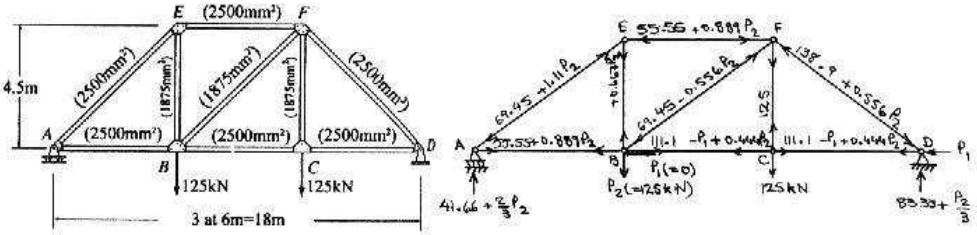
شکل ۵-۴۷

قطعه	L (mm)	A (mm²)	F (kN)	$(\frac{\partial F}{\partial P_1})(\frac{kN}{kN})$	$(\frac{\partial F}{\partial P_2})(\frac{kN}{kN})$	به ازای $P_1 = ۰$ و $P_2 = ۲۲۵\ kN$	
						$\frac{\partial F}{P_1}(\frac{FL}{A})(\frac{kN}{mm})$	$\frac{\partial F}{P_2}(\frac{FL}{A})(\frac{kN}{mm})$
AB	۶۱۸۴/۷	۳۷۵۰	$۱/۵۴۶P_1 - ۲/۰۶۲P_2$	۱/۵۴۶	-۲/۰۶۲	-۱۱۸۲/۹۵	۱۵۷۷/۸
AC	۳۰۰۰	۲۵۰۰	$۰/۳۷۵P_1 - ۰/۵P_2$	۰/۳۷۵	-۰/۵	-۵۰/۶۲	۶۷/۵
BC	۷۵۰۰	۳۷۵۰	$-۰/۶۲۵P_1 + ۲/۵P_2$	-۰/۶۲۵	۲/۵	-۷۰۳/۱۳	۲۸۱۲/۵
						$\Sigma\frac{\partial F}{\partial P_1}(\frac{FL}{A}) = -۱۹۳۶/۷$	$\Sigma\frac{\partial F}{\partial P_2}(\frac{FL}{A}) = ۴۴۵۷/۸$

$$\Delta_{BH} = \frac{1}{E}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P_1}\right]\frac{FL}{A} \quad , \quad \Delta_{BV} = \frac{1}{E}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P_2}\right]\frac{FL}{A} \quad , \quad E = ۷۰\ GPa = ۷۰\ kN/mm^2$$

$$\Delta_{BH} = -\frac{۱۹۳۶/۷}{۷۰} = -۲۷/۶۷\ mm \quad \blacktriangleright \Delta_{BH} = ۲۷/۶۷\ mm \leftarrow \quad , \quad \Delta_{BV} = \frac{۴۴۵۷/۸}{۷۰} = ۶۳/۶۸\ mm \quad \blacktriangleright \Delta_{BV} = ۶۳/۶۸\ mm \downarrow$$

۴۸-۵



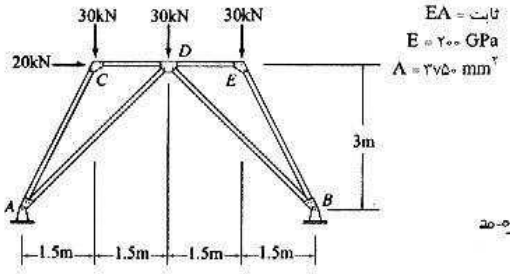
شکل ۵-۴۸

قطعه	L (mm)	A (mm²)	F (kN)	$(\frac{\partial F}{\partial P_1})(\frac{kN}{kN})$	$(\frac{\partial F}{\partial P_2})(\frac{kN}{kN})$	به ازای $P_1 = ۰$ و $P_2 = ۱۲۵$ kN	
						$\frac{\partial F}{\partial P_1}(\frac{FL}{A})(\frac{kN}{mm})$	$\frac{\partial F}{\partial P_2}(\frac{FL}{A})(\frac{kN}{mm})$
AB	۶۰۰۰	۲۵۰۰	۵۵/۵۵+۰/۸۸۹P_2	۰	۰/۸۸۹	۰	۳۵۵/۶
BC	۶۰۰۰	۲۵۰۰	۱۱۱/۱-P_1+۰/۴۴۴P_2	-۱	۰/۴۴۴	-۳۹۹/۸	۱۷۷/۵
CD	۶۰۰۰	۲۵۰۰	۱۱۱/۱-P_1+۰/۴۴۴P_2	-۱	۰/۴۴۴	-۳۹۹/۸	۱۷۷/۵
EF	۶۰۰۰	۲۵۰۰	-۵۵/۵۵-۰/۸۸۹P_2	۰	-۰/۸۸۹	۰	۳۵۵/۶
AE	۷۵۰۰	۲۵۰۰	-۶۹/۴۵-۱/۱۱P_2	۰	-۱/۱۱	۰	۶۹۳/۳
BF	۷۵۰۰	۱۸۷۵	-۶۹/۴۵+۰/۵۵۶P_2	۰	۰/۵۵۶	۰	۰
DF	۷۵۰۰	۲۵۰۰	-۱۳۸/۹-۰/۵۵۶P_2	۰	-۰/۵۵۶	۰	۳۴۷/۶
BB	۴۵۰۰	۱۸۷۵	۴۱/۶۶+۰/۶۶۷P_2	۰	۰/۶۶۷	۰	۲۰۰/۲
CF	۴۵۰۰	۱۸۷۵	۱۲۵	۰	۰	۰	۰
						$\Sigma\frac{\partial F}{P_1}(\frac{FL}{A})$=-۷۹۹/۶	$\Sigma\frac{\partial F}{P_2}(\frac{FL}{A})$=۲۳۰۷/۳

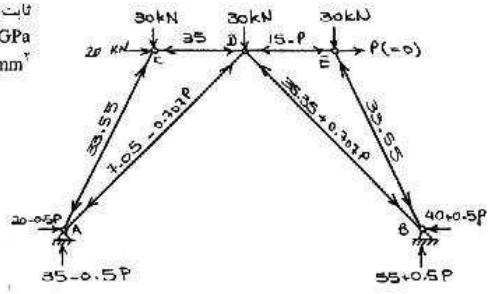
$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰\ kN/mm^2$ ، $\Delta_{BH} = \frac{1}{E}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P_1}\right]\frac{FL}{A}$ ، $\Delta_{BV} = \frac{1}{E}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P_2}\right]\frac{FL}{A}$

$\Delta_{BH} = -\frac{۷۹۹/۶}{۲۰۰} = -۴\ mm$ ▶ $\Delta_{BH} = ۴\ mm \leftarrow$ ، $\Delta_{BV} = \frac{۲۳۰۷/۳}{۲۰۰} = ۱۱/۵۴\ mm$ ▶ $\Delta_{BV} = ۱۱/۵۴\ mm \downarrow$

۴۹-۵ با استفاده از قضیهٔ دوم کاستلیانو، تغییر مکان افقی گره E را در خرپای نشان داده شده محاسبه کنید.



EA = ثابت
E = ۲۰۰ GPa
A = ۲۷۵۰ mm²



شکل ۵-۴۹

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰\ kN/mm^۲$

$$\Delta_{BH} = \frac{۱}{EA}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial P}\right]FL$$

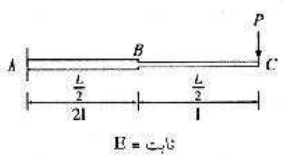
$$\Delta_{BH} = \frac{۶۲/۳۸(۱۰۰۰)}{(۲۰۰)(۳۷۵۰)} = ۰/۰۸۳\ mm$$

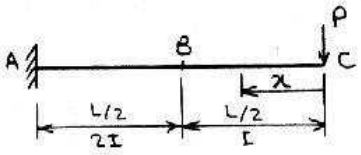
$$\blacktriangleright \Delta_{BH} = ۰/۰۸۳\ mm \rightarrow$$

قطعه	L (mm)	F (kN)	$\frac{\partial F}{\partial P}(\frac{kN}{kN})$	به ازای P = ۰ $\frac{\partial F}{\partial P}$ (FL) (kN.m)
AC	۳/۳۵۴	-۳۳/۵۵	۰	۰
BE	۳/۳۵۴	-۳۳/۵۵	۰	۰
AD	۴/۲۴۲	-۷/۰۵+۰/۷۰۷P	۰/۷۰۷	-۲۱/۱۴
BD	۴/۲۴۲	-۳۵/۳۵-۰/۷۰۷P	-۰/۷۰۷	۱۰۶/۰۲
CD	۱/۵	-۳۵	۰	۰
DE	۱/۵	-۱۵ + P	۱	-۲۲/۵
				$\Sigma\frac{\partial F}{\partial P}(FL)$=۶۲/۳۸

در مسایل ۵-۵۰ تا ۵-۵۳ تغییر مکان قائم نقطهٔ C را در تیرهای نشان داده شده محاسبه کنید.

۵۰-۵





E = ثابت

شکل ۵-۵۰

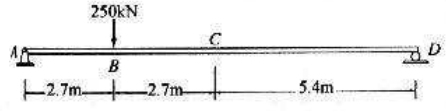
$$\Delta_C = \int_۰^L \left[\frac{\partial M}{\partial P}\right]\left[\frac{M}{EI}\right]dx$$

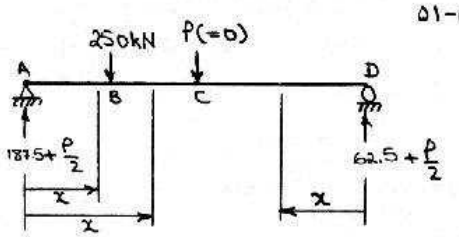
$$\Delta_C = \frac{۱}{EI}\left[\int_۰^{\frac{L}{۲}}(-x)(-Px)dx + \int_{\frac{L}{۲}}^{L}(-x)(-Px)dx\right] = \frac{۳PL^۳}{۱۶EI}$$

$$\blacktriangleright \Delta_C = \frac{۳PL^۳}{۱۶EI}\downarrow$$

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه	M	$\frac{\partial M}{\partial P}$
CB	C	۰ - $\frac{L}{۲}$	-Px	-x
BA	C	$\frac{L}{۲}$ - L	-Px	-x

۵۱-۵





E = ۲۰۰ GPa ، EI = ثابت ، $I = ۱/۵۶\times۱۰^۹\ mm^۴$

شکل ۵-۵۱

$$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰\times۱۰^۳\ N/mm^۲$$

$$\Delta_C = \sum\int\left[\frac{\partial M}{\partial P}\right]\frac{M}{EI}dx$$

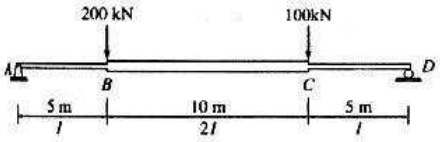
در کلیهٔ روابطی که در ادامه می‌آید، با قرار دادن P = ۰ انتگرال‌گیری انجام می‌شود.

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$\frac{\partial M}{\partial P}(\frac{kN.m}{kN})$
AB	A	۰-۲/۷	(۱۸۷/۵ + ۰/۵ P)x	۰/۵ x
BC	A	۲/۷-۵/۴	-۶۲/۵ x + ۶۷۵ + ۰/۵ Px	۰/۵ x
DC	D	۰-۵/۴	(۶۲/۵ + ۰/۵ P)x	۰/۵ x

$$\Delta_C=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{2/7}(0/5x)(187/5x)dx+\int_{2/7}^{5/4}(0/5x)(675-62/5x)dx+\int_0^{5/4}(0/5x)(62/5x)dx\right]$$

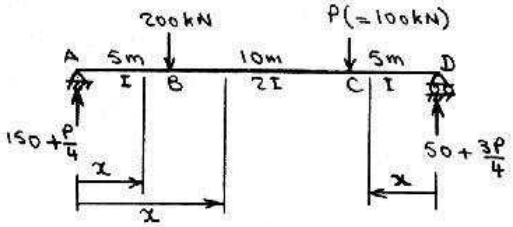
$$\Delta_C=\frac{4510/69\ kN.m^3}{EI}\Rightarrow\Delta_C=\frac{4510/69(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(1/56\times10^9)}=14/45\ mm\qquad\blacktriangleright\Delta_C=14/45\ mm\downarrow$$

۵۲-۵



E = ثابت = ۲۵۰ GPa ، I = ۶۰۰×۱۰^6 mm^4

شکل ۵-۵۲



$$E=250\ GPa=250\times10^3\ N/mm^2$$

$$\Delta_C=\sum\int\left[\frac{\partial M}{\partial P}\right]\frac{M}{EI}dx$$

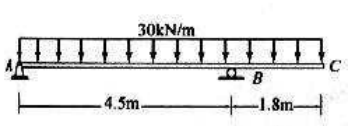
در کلیهٔ روابط زیر قرار می‌دهیم P = ۱۰۰ kN ، سپس انتگرال‌گیری می‌کنیم.

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$\frac{\partial M}{\partial P}$ ($\frac{kN.m}{kN}$)
AB	A	۰-۵	(۱۵۰ + ۰/۲۵ P)x	۰/۲۵ x
BC	A	۵-۱۵	(۱۵۰+۰/۲۵P)x - ۲۰۰(x-۵)	۰/۲۵ x
DC	D	۰-۵	(۵۰ + ۰/۷۵ P)x	۰/۷۵ x

$$\Delta_C=\frac{1}{EI}\left[\int_0^5(0/25x)(175x)dx+\frac{1}{2}\int_5^{15}(0/25x)(-25x+1000)dx+\int_0^5(0/75x)(125x)dx\right]$$

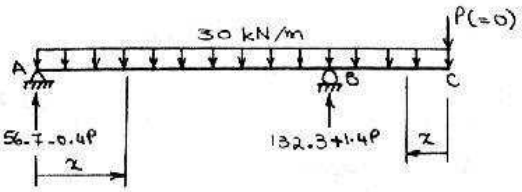
$$\Delta_C=\frac{14843/75\ kN.m^3}{EI}\Rightarrow\Delta_C=\frac{14843/75(1000)(1000)^3}{(250\times10^3)(600\times10^6)}=98/96\ mm\qquad\blacktriangleright\Delta_C=98/96\ mm\downarrow$$

۵۳-۵



E = ۲۰۰ GPa ، EI = ثابت ، I = ۱/۳۶×۱۰^9 mm^4

شکل ۵-۵۳



$$E=200\ GPa=200\times10^3\ N/mm^2$$

$$\Delta_C=\sum\int\left[\frac{\partial M}{\partial P}\right]\frac{M}{EI}dx$$

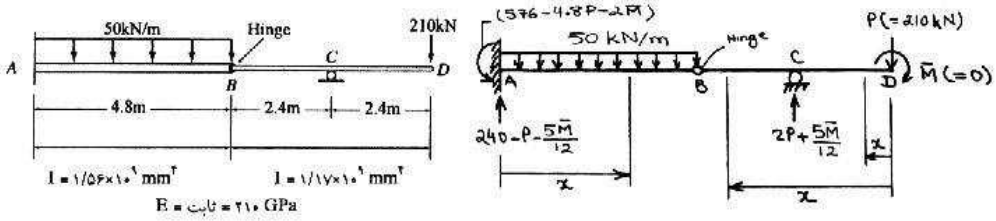
در کلیهٔ روابط زیر با جایگزینی P = ۰ ، انتگرال‌گیری می‌کنیم.

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$\frac{\partial M}{\partial P}$ ($\frac{kN.m}{kN}$)
AB	A	۰-۲/۵	(۵۶/۷-۰/۴P)x - ۱۵x^2	-۰/۴ x
CD	C	۰-۱/۸	-Px - ۱۵x^2	-x

$$\Delta_C=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{2/5}(-0/4x)(56/7x-15x^2)dx+\int_0^{1/8}(-x)(-15x^2)dx\right]\Rightarrow\Delta_C=-\frac{34/45\ kN.m^3}{EI}$$

$$\Delta_C=-\frac{34/45(1000)(1000)^3}{(200\times10^3)(1/36\times10^9)}=-0/127\ mm\qquad\blacktriangleright\Delta_C=0/127\ mm\uparrow$$

۴-۵۴ با استفاده از قضیهٔ دوم کاستلیانو شیب و تغییر مکان قائم نقطهٔ D را در تیر نشان داده شده محاسبه کنید.



شکل ۵-۵۲

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}$ $(\frac{kN.m}{kN.m})$	$\frac{\partial M}{\partial P}$ $(\frac{kN.m}{kN})$
DC	D	۰-۲/۴	$-Px - \bar{M}$	-۱	-x
CB	D	۲/۴-۴/۸	$-Px - \bar{M} + (2P + \frac{5}{12}\bar{M})(x - 2/4)$	$\frac{5}{12}x - 2$	x - ۴/۸
BA	A	۰-۴/۸	$-(576 - 4/8P - \bar{M}) + (240 - P - \frac{5}{12}\bar{M})x - 1/25x^2$	$2 - \frac{5x}{12}$	۴/۸ - x

$$E = 210\ GPa = 210 \times 10^3\ N/mm^2 \quad , \quad I_{BC} = I_{CD} = I \quad , \quad I_{AB} = \frac{4}{3}I \quad , \quad I = 1/17 \times 10^9\ mm^4$$

$$\theta_D = \sum \int \left[\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}\right]\frac{M}{EI}dx \qquad , \qquad \Delta_C = \sum \int \left[\frac{\partial M}{\partial P}\right]\frac{M}{EI}dx$$

در کلیهٔ روابطی که در زیر می‌آید، $P = 210\ kN$ و $\bar{M} = 0$ قرار داده شده و سپس انتگرال‌گیری انجام می‌شود.

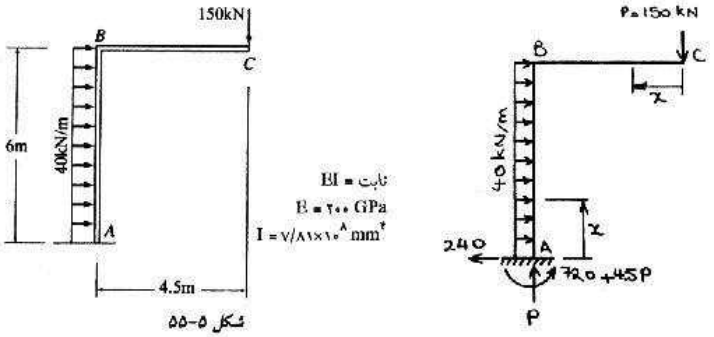
$$\theta_D = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{2/4}(-1)(-210x)dx + \int_{2/4}^{4/8}\left[\frac{5}{12}x - 2\right](210x - 1008)dx + \frac{3}{4}\int_0^{4/8}\left[2 - \frac{5}{12}x\right]\left[432 + 30x - 25x^2\right]dx\right]$$

$$\theta_D = \frac{23904\ kN.m^2}{EI} = \frac{23904(1000)(1000)^2}{(210 \times 10^3)(1/17 \times 10^9)} = 0/0097\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_D = 0/0097\ rad \curvearrowleft$$

$$\Delta_D = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{2/4}(-x)(-210x)dx + \int_{2/4}^{4/8}(x - 4/8)(210x - 1008)dx + \int_0^{4/8}(4/8 - x)\left[432 + 30x - 25x^2\right]dx\right]$$

$$\Delta_D = \frac{5253/14\ kN.m^3}{EI} = \frac{5253/14(1000)(1000)^2}{(210 \times 10^3)(1/17 \times 10^9)} = 21/35\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_D = 21/35\ mm \downarrow$$

۵-۵۵ با استفاده از قضیهٔ دوم کاستلیانو تغییر مکان قائم نقطهٔ C را در قاب نشان داده شده محاسبه کنید.



شکل ۵-۵۵

$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۳}\ N/mm^{۲}$

$\Delta_C = \sum \int \left[\frac{\partial M}{\partial P}\right] \frac{M}{EI} dx$

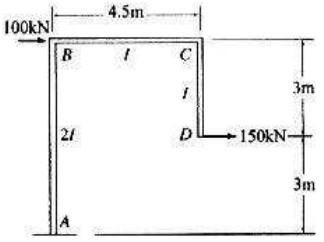
در کلیهٔ روابط با قرار دادن P = ۱۵۰ kN ، انتگرالگیری انجام می‌شود.

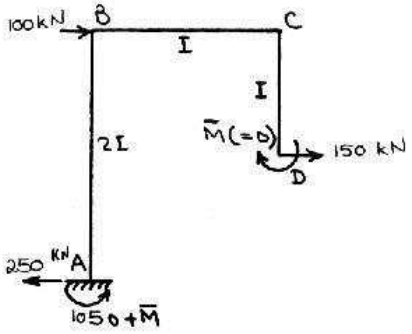
قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$\frac{\partial M}{\partial P}\ (\frac{kN.m}{kN})$
AB	A	۰-۶	$-(۷۲۰+۴/۵P) + ۲۴۰x - ۲۰x^{۲}$	-۴/۵
CB	C	۰-۴/۵	-Px	-x

$$\Delta_C = \frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۶}(-۴/۵)(-۱۳۹۵ + ۲۴۰x - ۲۰x^{۲})dx + \int_{۰}^{۴/۵}(-x)(-۱۵۰x)dx\right] \Rightarrow \Delta_C = \frac{۲۹۲۶۱/۲۵\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_C = \frac{۲۹۲۶۱/۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰ \times ۱۰^{۳})(۷/۸۱ \times ۱۰^{۸})} = ۱۸۷/۳۳\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = ۱۸۷/۳۳\ mm \downarrow$$

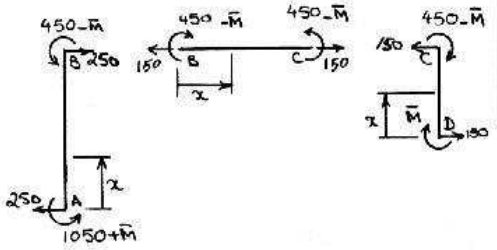
۵-۵۶ با استفاده از قضیهٔ دوم کاستلیانو دوران گره D را در قاب نشان داده شده محاسبه کنید.





E = ۷۰ GPa ، I = ۱/۱۷×۱۰^{۹} mm^{۴}

شکل ۵-۵۶



قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}\ (\frac{kN.m}{kN.m})$
AB	A	۰-۶	$-(۱۰۵۰ + \bar{M}) + ۲۵۰x$	-۱
BC	B	۰-۴/۵	$۲۵۰ - \bar{M}$	-۱
DC	D	۰-۳	$\bar{M} - ۱۵۰x$	۱

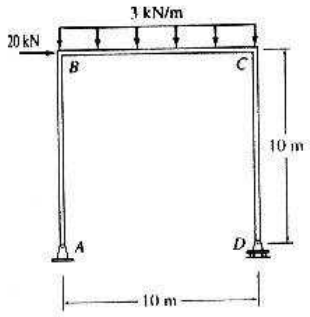
$E = ۷۰\ GPa = ۷۰ \times ۱۰^{۳}\ N/mm^{۲}$

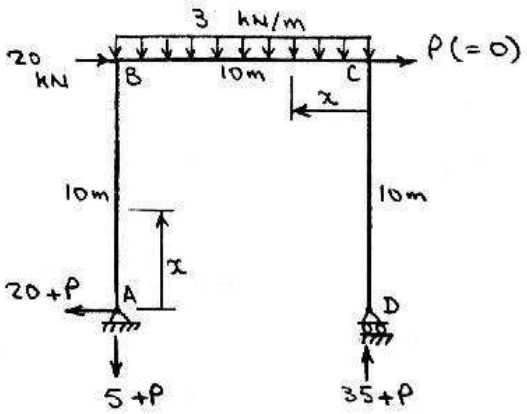
$\theta_D = \sum \int \left[\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}\right] \frac{M}{EI} dx$

$$\theta_D = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۶}(-۱)(-۱۰۵۰ + ۲۵۰x)dx + \int_{۰}^{۴/۵}(-۱)(۴۵۰)dx + \int_{۰}^{۳}(۱)(-۱۵۰x)dx\right] \Rightarrow \theta_D = -\frac{۱۸۰۰\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_D = -\frac{۱۸۰۰(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۲}}{(۷۰ \times ۱۰^{۳})(۱/۱۷ \times ۱۰^{۹})} = -۰/۰۲۱۹\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_D = ۰/۰۲۱۹\ rad$$

۵-۵۷ با استفاده از قضیهٔ دوم کاستلیانو تغییر مکان افقی گره C را در قاب نشان داده شده محاسبه کنید.





E = ۲۰۰ GPa ، EI = ثابت ، $I = ۴۰۰\times۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

شکل ۵-۵۷

$$E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۳}\ N/mm^{۲}$$

$$\Delta_C = \sum \int \left[\frac{\partial M}{\partial P}\right] \frac{M}{EI} dx$$

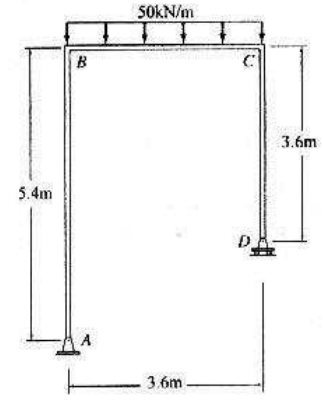
در کلیهٔ روابط P = ۰ قرار داده شده و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

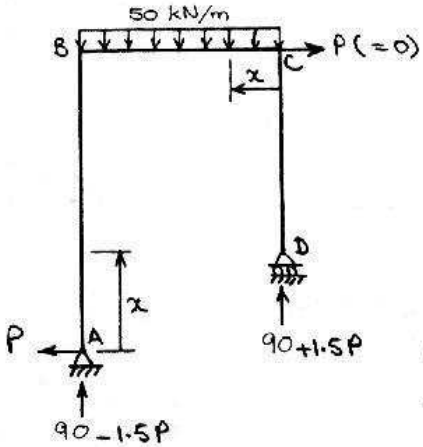
قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$\frac{\partial M}{\partial P}$ $(\frac{kN.m}{kN})$
AB	A	۰-۳	$(۲۰ + P)\,x$	x
CB	C	۰-۳	$(۳۵+P)x - ۱/۵x^{۲}$	x

$$\Delta_C = \frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۱۰} (x)(۲۰x)dx + \int_{۰}^{۱۰} (x)(۳۵x - ۱/۵x^{۲})dx\right] \Rightarrow \Delta_C = \frac{۱۴۵۸۳/۳۳\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_C = \frac{۱۴۵۸۳/۳۳(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۴۰۰\times۱۰^{۶})} = ۱۸۲/۳\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = ۱۸۲/۳\ mm \rightarrow$$

۵-۵۸ با استفاده از قضیهٔ دوم کاستلیانو تغییر مکان افقی گره C را در قاب نشان داده شده محاسبه کنید.





EI = ثابت ، E = ۷۰ GPa ، $I = ۵/۸۶\times۱۰^{۸}\ mm^{۴}$

شکل ۵-۵۸

$$E = ۷۰\ GPa = ۷۰ \times ۱۰^{۳}\ \frac{N}{mm^{۲}}$$

$$\Delta_C = \int \left[\frac{\partial M}{\partial P}\right] \frac{M}{EI} dx$$

در کلیهٔ روابط با قرار دادن P = ۰، انتگرال‌گیری انجام می‌شود.

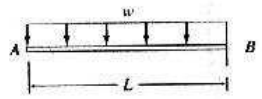
قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	$\frac{\partial M}{\partial P}\ (\frac{kN.m}{kN})$
AB	A	۰-۵/۴	Px	x
CB	C	۰-۳/۶	$(۹۰+۱/۵P)x - ۲۵x^۲$	۱/۵x

$$\Delta_C = \frac{۱}{EI}\int_۰^{۳/۶} (۱/۵x)(۹۰x - ۲۵x^۲)dx$$

$$\Delta_C = \frac{۵۲۴/۸۸\ kN.m^۳}{EI}$$

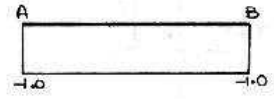
$$\Delta_C = \frac{۵۲۴/۸۸(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۷۰\times ۱۰^۳)(۵/۸۶\times ۱۰^۸)} = ۱۲/۸\ mm \qquad \blacktriangleright \Delta_C = ۱۲/۸\ mm \rightarrow$$

۵-۵۹ مسئلهٔ ۵-۲۱ را با انتگرال‌گیری به روش مور مجدداً حل کنید.

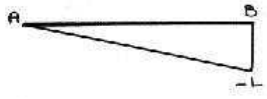


EI = ثابت

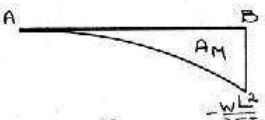
شکل ۵-۵۹



نمودار لنگر خمشی $M_{۲۱}$



نمودار لنگر خمشی $M_{۲۲}$



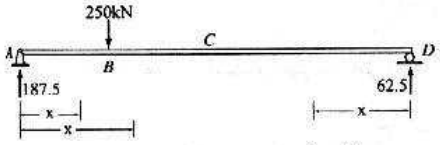
نمودار $\frac{M}{EI}$

$$A_M = \left[-\frac{wL^۲}{۲EI}\right]\left[\frac{L}{۳}\right] = -\frac{wL^۳}{۶EI} \quad , \quad \bar{y}_۱ = -۱ \quad , \quad \bar{y}_۲ = -\frac{۳L}{۴}$$

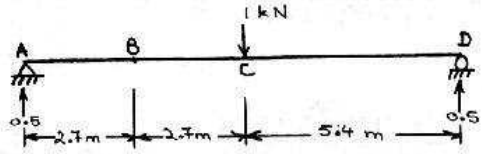
$$\theta_A = \int_۰^L \frac{M_{۲۱}M}{EI}dx = A_M\bar{y}_۱ \Rightarrow \theta_A = \left[-\frac{wL^۳}{۶EI}\right](-۱) = \frac{wL^۳}{۶EI} \qquad \blacktriangleright \theta_A = \frac{wL^۳}{۶EI} \curvearrowleft$$

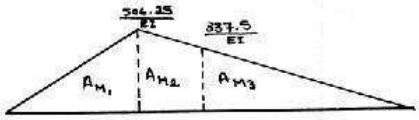
$$\Delta_A = \int_۰^L \frac{M_{۲۲}M}{EI}dx = A_M\bar{y}_۲ \Rightarrow \Delta_A = \left[-\frac{wL^۳}{۶EI}\right]\left[-\frac{۳L}{۴}\right] = \frac{wL^۴}{۸EI} \qquad \blacktriangleright \Delta_A = \frac{wL^۴}{۸EI} \downarrow$$

۵-۶۰ مسئلهٔ ۵-۲۴ را با انتگرال‌گیری به روش مور مجدداً حل کنید.

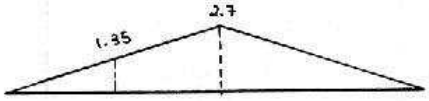


E = ثابت = ۲۵۰ GPa ، $I = ۶۰۰\times ۱۰^۶\ mm^۴$





نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m}{EI}$



نمودار لنگر خمشی $M_۲$ ، kN.m

$$A_{M۱} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۵۰۶/۲۵}{EI}\right](۲/۷) = \frac{۶۸۳/۴۴\ kN.m^۲}{EI} \quad , \quad A_{M۲} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۵۰۶/۲۵ + ۳۳۷/۵}{EI}\right](۲/۷) = ۱۱۳۹/۰۶$$

$$A_{M۳} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۳۳۷/۵}{EI}\right](۵/۴) = \frac{۹۱۱/۲۵\ kN.m^۲}{EI}$$

$$\bar{y}_۱ = \frac{\left[\frac{۲}{۳}\right](۲/۷)}{۵/۴}(۲/۷) = ۰/۹\ \ kN.m \quad , \quad \bar{y}_۲ = \frac{۲/۷ + \frac{۲(۳۳۷/۵)+۵۰۶/۲۵}{۳۳۷/۵+۵۰۶/۲۵}\left[\frac{۲/۷}{۳}\right]}{۵/۴}(۲/۷) = ۱/۹۸\ \ kN.m$$

$$\bar{y}_۳ = \left[\frac{۲}{۳}\right](۲/۷) = ۱/۸\ \ kN.m$$

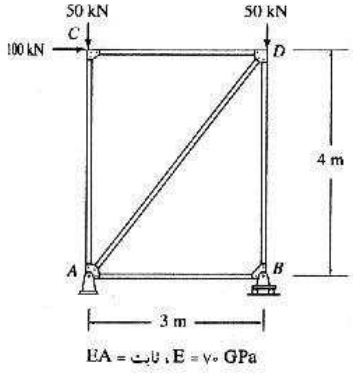
$$(1)\Delta_C = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx = \sum_{i=1}^{3} A_{Mi}\bar{y}_i \quad \Rightarrow \quad (1\,kN)\Delta_C = \frac{۶۸۳/۴۴}{EI}(۰/۹) + \frac{۱۱۳۹/۰۶}{EI}(۱/۹۸) + \frac{۹۱۱/۲۵}{EI}(۱/۸)$$

$$(1\,kN)\Delta_C = \frac{۴۵۱۰/۶۸\,kN^{۲}m^{۳}}{EI} \quad \Rightarrow \quad \Delta_C = \frac{۴۵۱۰/۶۸\,kN.m^{۳}}{EI} = \frac{۴۵۱۰/۶۸(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۱/۵۶\times۱۰^{۹})} = ۱۴/۴۵\,mm$$

$$\blacktriangleright \Delta_C = ۱۴/۴۵\,mm \downarrow$$

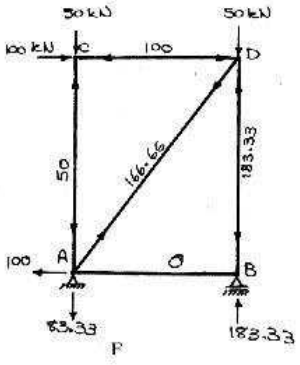
در مسایل ۵-۶۱ تا ۵-۶۳ حداقل سطح مقطع اعضا را طوری تعیین کنید که تغییر مکان افقی گره D از ۱۰ mm تجاوز نکند. (از روش کار مجازی استفاده کنید.)

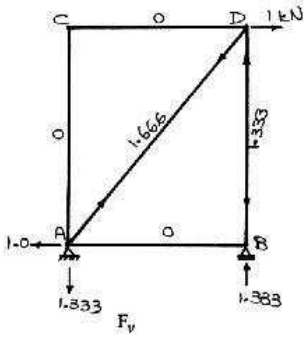
۵-۶۱



EA = ثابت ، E = ۷۰ GPa

شکل ۵-۶۱





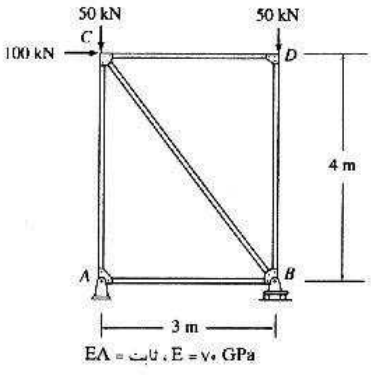
عضو	L (mm)	F (kN)	F_v (kN)	F_v FL ($kN^{۲}$.mm)
AB	۳۰۰۰	۰	۰	۰
CD	۳۰۰۰	-۱۰۰	۰	۰
AC	۴۰۰۰	-۵۰	۰	۰
BD	۴۰۰۰	-۱۸۳/۳۳۳	-۱/۳۳۳	۹۷۷۵۳۱/۵۶
AD	۵۰۰۰	۱۶۶/۶۶۶	۱/۶۶۶	۱۳۸۸۳۲۷/۷۸
			Σ	۲۳۶۵۸۵۹/۳۴

$$E = ۷۰\,GPa = ۷۰ \quad kN/mm^{۲}$$

$$(1)\delta = \sum \frac{F_v FL}{AE} \quad \Rightarrow \quad (1\,kN)(۱۰) = \frac{۲۳۶۵۸۵۹/۳۴}{A(۷۰)}$$

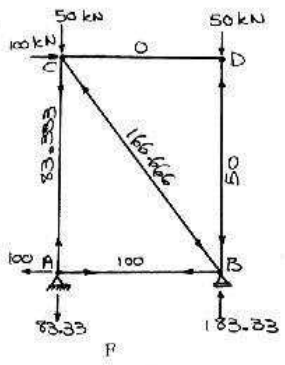
$$A > ۳۳۷۹/۸\,mm^{۲} \qquad \blacktriangleright A_{min} = ۳۳۷۹/۸\,mm^{۲}$$

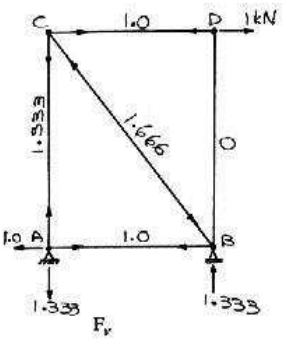
۵-۶۲



EA = ثابت ، E = ۷۰ GPa

شکل ۵-۶۲





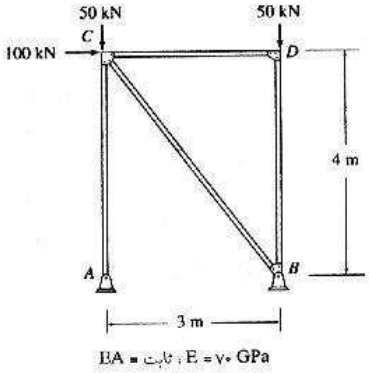
عضو	L (mm)	F (kN)	F_v (kN)	F_v FL (kN^2.mm)
AB	۳۰۰۰	۱۰۰	۱	۳۰۰۰۰۰
CD	۳۰۰۰	۰	۱	۰
AC	۴۰۰۰	۸۳/۳۳۳	۱/۳۳۳	۴۴۴۳۳۱/۵۶
BD	۴۰۰۰	-۵۰	۰	۰
BC	۵۰۰۰	-۱۶۶/۶۶۶	-۱/۶۶۶	۱۳۸۸۳۲۷/۷۸
			Σ	۲۱۳۲۶۵۹/۳۴

$E = ۷۰\ GPa = ۷۰\ \ kN/mm^2$

$(۱)\delta = \sum \frac{F_v F L}{AE} \Rightarrow (۱\ kN)\delta = \frac{۲۱۳۲۶۵۹/۳۴}{A(۷۰)}$

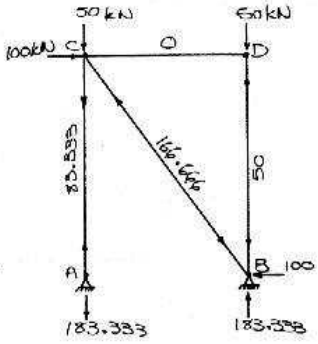
$A > ۳۰۴۶/۶\ mm^2 \qquad \blacktriangleright A_{min} = ۳۰۴۶/۶\ mm^2$

۶۳-۵

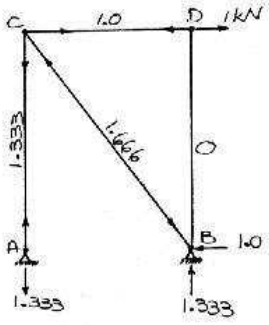


BA = ثابت ؛ E = ۷۰ GPa

شکل ۵-۶۳



F



F_v

عضو	L (mm)	F (kN)	F_v (kN)	F_v FL (kN^2.mm)
CD	۳۰۰۰	۰	۱	۰
AC	۴۰۰۰	۸۳/۳۳۳	۱/۳۳۳	۴۴۴۳۳۱/۵۶
BD	۴۰۰۰	-۵۰	۰	۰
BC	۵۰۰۰	-۱۶۶/۶۶۶	-۱/۶۶۶	۱۳۸۸۳۲۷/۷۸
			Σ	۱۸۳۲۶۵۹/۳۴

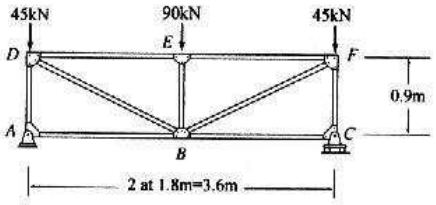
$E = ۷۰\ GPa = ۷۰\ \ kN/mm^2$

$(۱)\delta = \sum \frac{F_v F L}{AE} \Rightarrow (۱\ kN)(۱۰) = \frac{۱۸۳۲۶۵۹/۳۴}{A(۷۰)}$

$A > ۲۶۱۸/۱\ mm^2 \qquad \blacktriangleright A_{min} = ۲۶۱۸/۱\ mm^2$

در مسایل ۵-۶۴ تا ۵-۶۶ حداقل سطح مقطع اعضای خرپا را طوری تعیین کنید که تغییر مکان قائم گره B از mm ۱۰ تجاوز نکند. (از روش کار مجازی استفاده کنید.)

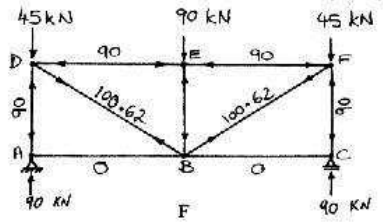
۶۴-۵

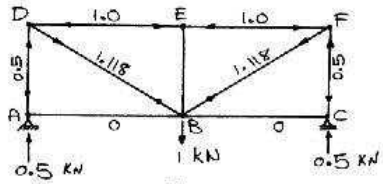


E = ۱۱۲۰۰ MPa ، EA = ثابت

شکل ۵-۶۴

عضو	L (mm)	F (kN)	F_v (kN)	F_v FL (kN^2.mm)
AB	۱۸۰۰	۰	۰	۰
BC	۱۸۰۰	۰	۰	۰
DE	۱۸۰۰	-۹۰	-۱/۰	۱۶۲۰۰۰
EF	۱۸۰۰	-۹۰	-۱/۰	۱۶۲۰۰۰
AD	۹۰۰	-۹۰	-۰/۵	۴۰۵۰۰
BE	۹۰۰	-۹۰	۰	۰
CF	۹۰۰	-۹۰	-۰/۵	۴۰۵۰۰
BD	۲۰۱۲/۵	۱۰۰/۶۲	۱/۱۱۸	۲۲۶۳۹۲/۵
BF	۲۰۱۲/۵	۱۰۰/۶۲	۱/۱۱۸	۲۲۶۳۹۲/۵
			Σ	۸۵۷۷۸۵

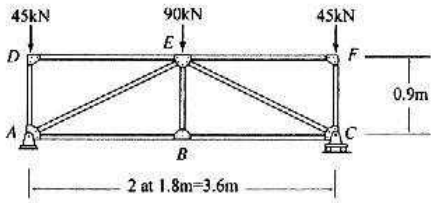




$$(1)\delta = \sum \frac{F_v F L}{AE} \Rightarrow (1\ kN)(10/1) = \frac{85785}{A(11/2)}$$

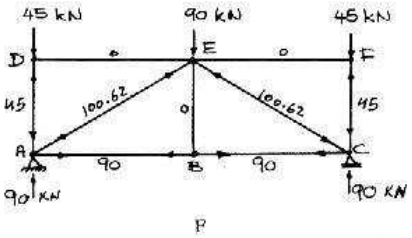
$$A > 7685/8\ mm^2 \qquad \blacktriangleright A_{min} = 7685/8\ mm^2$$

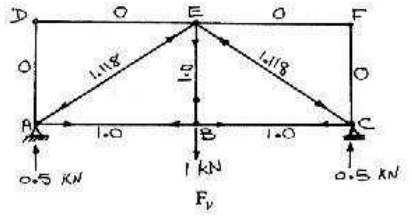
۶۵-۵



E = ۱۱۲۰۰ MPa ، EA = ثابت

شکل ۵-۶۵





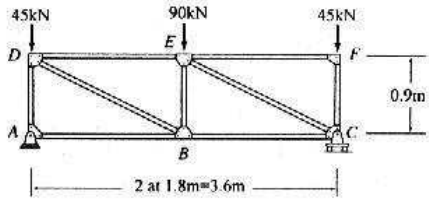
عضو	L (mm)	F (kN)	F_v (kN)	F_v FL (kN^۲.mm)
AB	۱۸۰۰	۹۰	۱/۰	۱۶۲۰۰۰
BC	۱۸۰۰	۹۰	۱/۰	۱۶۲۰۰۰
DE	۱۸۰۰	۰	۰	۰
EF	۱۸۰۰	۰	۰	۰
AD	۹۰۰	-۴۵	۰	۰
BE	۹۰۰	۰	۱	۰
CF	۹۰۰	-۴۵	۰	۰
AE	۲۰۱۲/۵	-۱۰۰/۶۲	-۱/۱۱۸	۲۲۶۳۹۲/۵
CE	۲۰۱۲/۵	-۱۰۰/۶۲	-۱/۱۱۸	۲۲۶۳۹۲/۵
			Σ	۷۷۶۷۸۵

$E = ۱۱۲۰۰\ MPa = ۱۱/۲\ kN/mm^۲$

$(۱)\delta = \sum \frac{F_v FL}{AE} \Rightarrow (۱\ kN)(۱۰) = \frac{۷۷۶۷۸۵}{A(۱۱/۲)}$

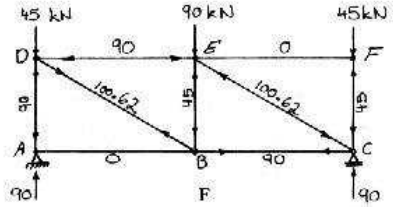
$A > ۶۹۳۵/۶\ mm^۲ \qquad \blacktriangleright A_{min} = ۶۹۳۵/۶\ mm^۲$

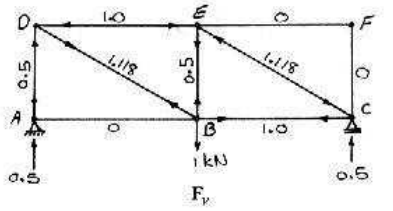
۶۶-۵



E = ۱۱۲۰۰ MPa ، EA = ثابت

شکل ۵-۶۶





عضو	L (mm)	F (kN)	F_v (kN)	F_v FL (kN^۲.mm)
AB	۱۸۰۰	۰	۰	۰
BC	۱۸۰۰	۹۰	۱/۰	۱۶۲۰۰۰
DE	۱۸۰۰	-۹۰	-۱/۰	۱۶۲۰۰۰
EF	۱۸۰۰	۰	۰	۰
AD	۹۰۰	-۹۰	-۰/۵	۴۰۵۰۰
BE	۹۰۰	-۴۵	۰/۵	-۲۰۲۵۰
CF	۹۰۰	-۴۵	۰	۰
BD	۲۰۱۲/۵	۱۰۰/۶۲	۱/۱۱۸	۲۲۶۳۹۲/۵
CE	۲۰۱۲/۵	-۱۰۰/۶۲	-۱/۱۱۸	۲۲۶۳۹۲/۵
			Σ	۷۹۷۰۳۵

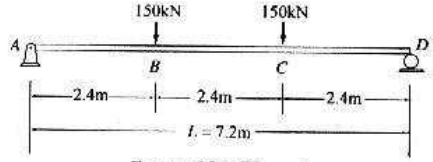
$E = ۱۱۲۰۰\ MPa = ۱۱/۲\ kN/mm^۲$

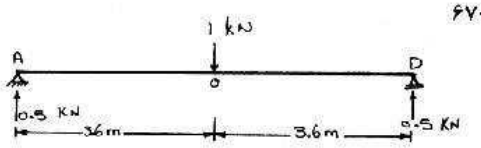
$(۱)\delta = \sum \frac{F_v FL}{AE} \Rightarrow (۱\ kN)(۱۰) = \frac{۷۹۷۰۳۵}{A(۱۱/۲)}$

$A > ۷۱۱۶/۴\ mm^۲ \qquad \blacktriangleright A_{min} = ۷۱۱۶/۴\ mm^۲$

در مسایل ۵-۶۷ تا ۵-۶۹ حداقل ممان اینرسی I تیر را چنان محاسبه کنید که حداکثر خیز تیر به $\frac{۱}{۳۶۰}$ طول دهانه محدود شود، $(\Delta_{max} < \frac{L}{۳۶۰})$.

۶۷-۵





M_v

E = ۷۰ GPa ، EI = ثابت

شکل ۵-۶۷

$$(1)\ \delta_0 = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$\delta_0 = \frac{2}{EI}\left[\int_0^{2/4} (150x)(0/5x)dx + \int_{2/4}^{2/6} (360)(0/5x)dx\right]$$

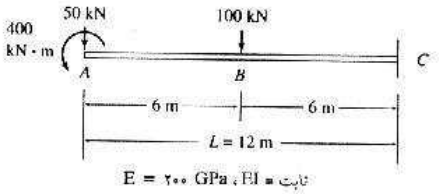
$$\delta_0 = \Delta_{max} = \frac{1987/2}{EI}$$

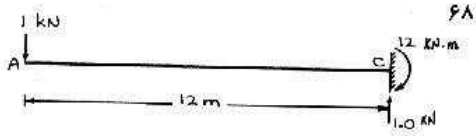
$$\Delta_{max} < \frac{L}{360} \Rightarrow \frac{1987/2 \times 10^{12}}{(70 \times 10^3)I} < \frac{7200}{360}$$

$$\blacktriangleright I_{min} = 1/4119 \times 10^9 mm^4$$

عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰-۲/۴	۱۵۰ x	۰/۵ x
BC	A	۲/۴-۴/۸	۳۶۰	۰/۵ x
CD	D	۰-۲/۴	۱۵۰ x	۰/۵ x

۶۸-۵





M_v

E = ۲۰۰ GPa ، EI = ثابت

شکل ۵-۶۸

$$(1)\ \delta_0 = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx$$

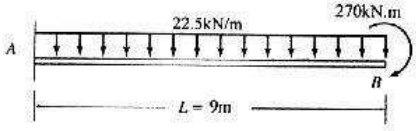
$$\delta_0 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^6 (400 + 50x)(x)dx + \int_0^6 (-1600 + 150x)(-12 + x)dx\right] = \frac{7560}{EI}$$

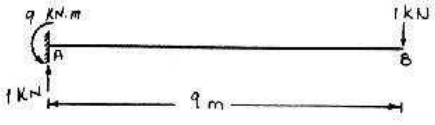
$$\delta_0 = \Delta_{max} = \frac{7560}{EI}, \quad \Delta_{max} < \frac{L}{360} \Rightarrow \frac{7560 \times 10^{12}}{(200 \times 10^3)I} < \frac{12000}{360}$$

$$\blacktriangleright I_{min} = 1/133 \times 10^{10} mm^4$$

عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰-۶	-۴۰۰ - ۵۰x	-x
BC	C	۰-۶	-۱۶۰۰ + ۱۵۰x	-۱۲ + x

۶۹-۵





M_v

E = ۲۰۰ GPa ، EI = ثابت

شکل ۵-۶۹

عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	B	۰-۹	$-۲۷۰-۱۱/۲۵x^۲$	$-x$

$$(۱)\ \delta_o = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx$$

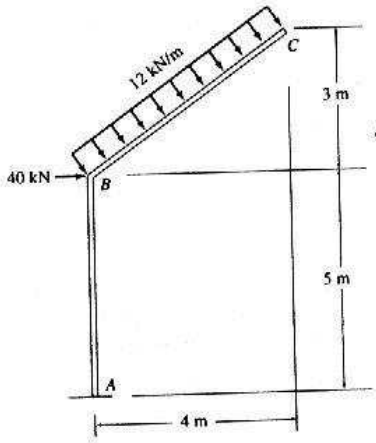
$$\delta_o = \frac{۱}{EI}\int_۰^۹ (۲۷۰ + ۱۱/۲۵x^۲)(x)dx = \frac{۲۹۳۸۷/۸۱}{EI}$$

$$\delta_o = \Delta_{max} = \frac{۲۹۳۸۷/۸۱}{EI}$$

$$\Delta_{max} < \frac{L}{۳۶۰} \Rightarrow \frac{۲۹۳۸۷/۸۱}{(۲۰۰\times ۱۰^۶)I} < \frac{۹}{۳۶۰}$$

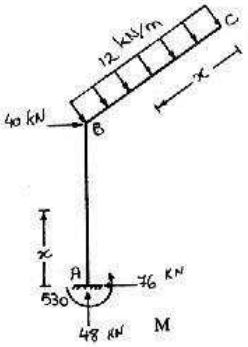
$$\blacktriangleright I_{min} = ۵/۸۷۸ \times ۱۰^۹ mm^۴$$

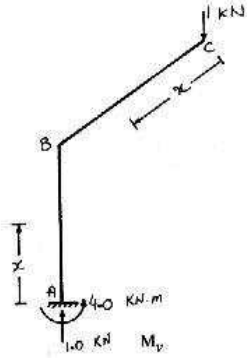
۵-۷۰ با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم گره C از قاب نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.



EI = ثابت ، $E = ۷۰$ GPa ، $I = ۱۰۳۰\times ۱۰^۶$ mm^۴

شکل ۵-۷۰





عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰-۵	۵۳۰-۷۶x	۴
CB	C	۰-۵	$۶x^۲$	۰/۸x

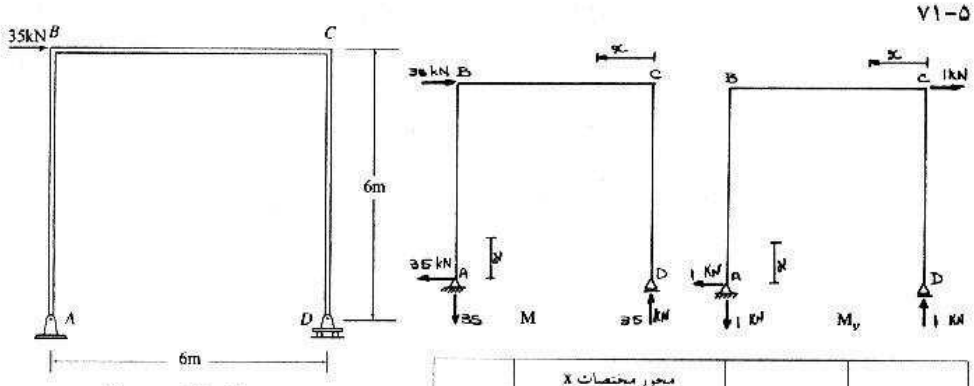
$$(۱)\ \delta_C = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$\delta_C = \frac{۱}{EI}\left[\int_۰^۵ (۵۳۰ - ۷۶x)(۴)dx + \int_۰^۵ (۶x^۲)(۰/۸x)dx\right] = \frac{۷۵۵۰\ kN.m^۳}{EI} = \frac{۷۵۵۰\times ۱۰^{۱۲}}{(۷۰۰۰۰)(۱۰۳۰\times ۱۰^۶)} = ۱۰۴/۷\ mm$$

$$\blacktriangleright \delta_C = ۱۰۴/۷\ mm \downarrow$$

در مسایل ۵-۷۱ و ۵-۷۲ حداقل ممان اینرسی I اعضای قاب را چنان محاسبه کنید که حداکثر تغییر مکان افقی گره C به ۲۵ mm محدود شود. (از روش کار مجازی استفاده کنید.)

۷۱-۵



عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰-۶	۳۵x	x
CB	C	۰-۶	۳۵x	x

E = ۲۰۰ GPa ، EI = ثابت

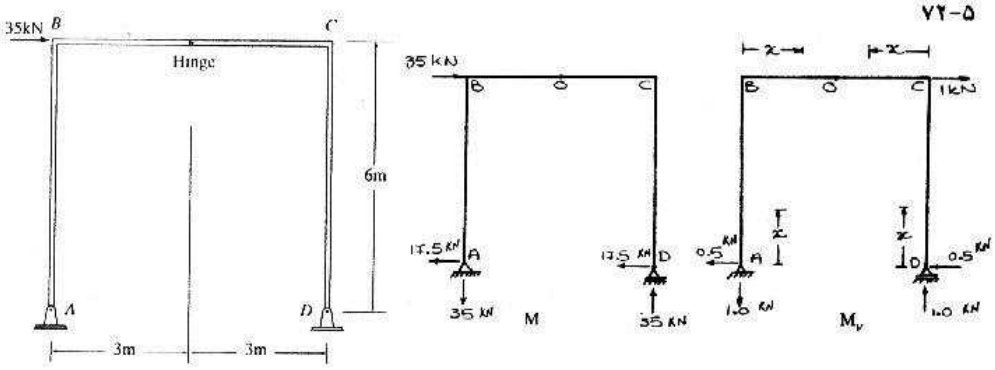
شکل ۵-۷۱

$$(۱)\ \delta_C = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$\delta_C = \frac{۱}{EI}\left[۲\int_۰^۶ (۳۵x)(x)dx\right] = \frac{۵۰۴۰\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\delta_C = \le ۲۵\ mm \ \Rightarrow\ \frac{۵۰۴۰ \times ۱۰^۹}{(۲۰۰)I} < ۲۵ \ \Rightarrow\ I > ۱۰۰۸ \times ۱۰^۹ mm^۴ \qquad \blacktriangleright I_{min} = ۱۰۰۸ \times ۱۰^۹ mm^۴$$

۷۲-۵



E = ۲۰۰ GPa ، EI = ثابت

شکل ۵-۷۲

عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AB	A	۰-۶	۱۷/۵x	۰/۵ x
BO	B	۰-۳	۱۰۵ - ۳۵x	۳ - x
DC	D	۰-۶	۱۷/۵ x	۰/۵ x
CO	C	۰-۳	-۱۰۵ + ۳۵x	-۳ + x

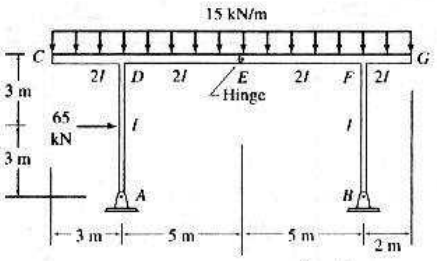
$$(۱)\ \delta_C = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$\delta_C = \frac{۲}{EI}\left[\int_۰^۶ (۱۷/۵x)(۰/۵x)dx + \int_۰^۳ (۳-x)(۱۰۵-۳۵x)dx\right]$$

$$\delta_C = \frac{۱۸۹۰\ kN.m^۳}{EI} \quad ,\quad \delta_C \le ۲۵\ mm$$

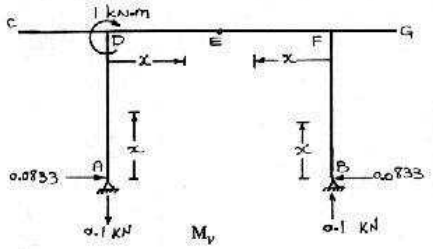
$$\frac{۱۸۹۰ \times ۱۰^۹}{(۲۰۰)I} < ۲۵ \qquad \blacktriangleright I_{min} = ۳/۷۸ \times ۱۰^۸ mm^۴$$

۵-۷۳ با استفاده از روش کار مجازی، دوران گره D از قاب نشان داده شده را محاسبه کنید.

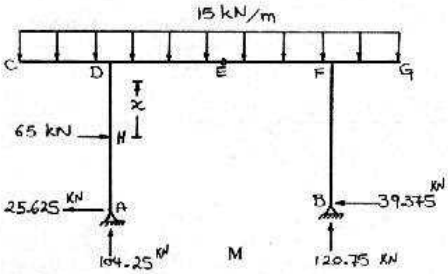


$E = ۲۰۰\ GPa\ ,\ I = ۳۵۰ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

شکل ۵-۷۳



عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AH	A	۰-۳	۲۵/۶۲۵x	-۰/۰۸۳۳x
BF	B	۰-۶	۳۹/۳۷۵x	۰/۰۸۳۳x
DE	D	۰-۵	$۷/۵x^{۲}$-۵۹/۲۵x+۱۰۸/۷۵	-۰/۵+۰/۱x
FE	F	۰-۵	$۷/۵x^{۲}$-۹۰/۷۵x+۲۶۶/۲۵	-۰/۱x+۰/۵
HD	H	۰-۳	۷۶/۸۷۵-۳۹/۳۷۵x	-۰/۲۵-۰/۰۸۳۳x

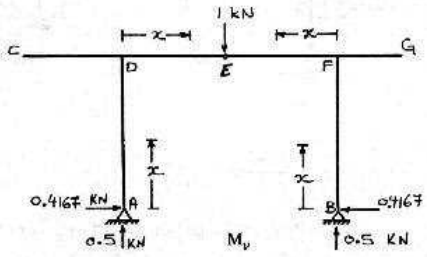


$$(۱)\theta_C = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$(۱)\theta_C = \frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۳}(۲۵/۶۲۵x)(-۰/۰۸۳۳x) + (۷۶/۸۷۵ - ۳۹/۳۷۵x)(-۰/۲۵ - ۰/۰۸۳۳x)dx + \int_{۰}^{۶}(۳۹/۳۷۵x)(۰/۰۸۳۳x)dx + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۵}(۰/۱x - ۰/۵)(۳۱/۵x - ۱۵۷/۵)dx\right] \Rightarrow \theta_C = \frac{۲۷۰\ kN.m^{۲}}{EI} = \frac{۲۷۰ \times ۱۰^{۶}}{(۲۰۰)(۳۵۰ \times ۱۰^{۶})} = ۰/۰۰۳۸۶\ rad$$

$$\blacktriangleright \theta_C = ۰/۰۰۳۸۶\ rad \circlearrowleft$$

۵-۷۴ با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان قائم گره E از قاب نشان داده شده در مسئلهٔ قبل را به دست آورید.

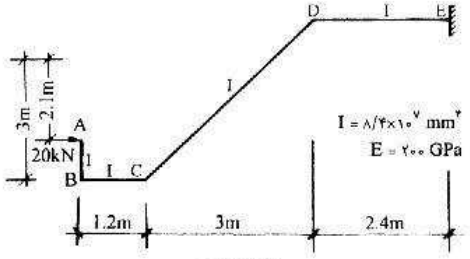


عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AH	A	۰-۳	۲۵/۶۲۵x	-۰/۴۱۶۷x
BF	B	۰-۶	۳۹/۳۷۵x	۰/۴۱۶۷x
DE	D	۰-۵	$۷/۵x^{۲}$-۵۹/۲۵x+۱۰۸/۷۵	-۰/۵x + ۲/۵
FE	F	۰-۵	$۷/۵x^{۲}$-۹۰/۷۵x+۲۶۶/۲۵	-۰/۵x + ۲/۵
HD	H	۰-۳	۷۶/۸۷۵-۳۹/۳۷۵x	-۱/۲۵-۰/۴۱۶۷x

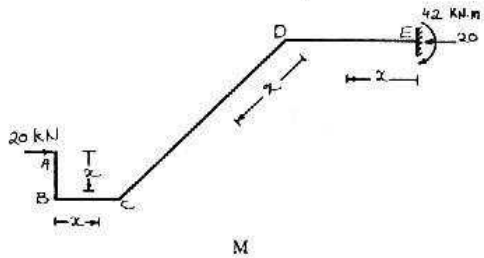
$$(۱)\delta_E = \frac{۱}{EI}\left[\int_{۰}^{۳}(۲۵/۶۲۵x)(-۰/۴۱۶۷x)dx + \int_{۰}^{۳}(۷۶/۸۷۵ - ۳۹/۳۷۵x)(-۱/۲۵ - ۰/۴۱۶۷x)dx + \int_{۰}^{۶}(۳۹/۳۷۵x)(۰/۴۱۶۷x)dx + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۵}(۲/۵ - ۰/۵x)(۱۵x^{۲} - ۱۵۰x + ۳۷۵)dx\right] \Rightarrow \delta_E = \frac{۱۶۰۷/۹۰۱\ kN.m^{۳}}{EI} = \frac{۱۶۰۷/۹۱ \times ۱۰^{۹}}{(۲۰۰)(۳۵۰ \times ۱۰^{۶})} = ۲۲/۹۷\ mm$$

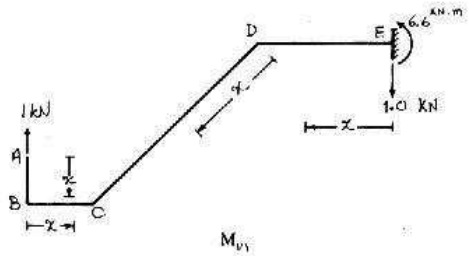
$$\blacktriangleright \delta_E = ۲۲/۹۷\ mm \downarrow$$

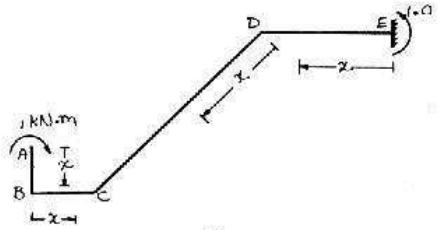
۵-۷۵ تغییر مکان قائم و دوران نقطهٔ A از قاب نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.



شکل ۵-۷۵







عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	EI: M (kN.m)	M_{v_1} (kN.m)	M_{v_2} (kN.m)
AB	A	۰-۰/۹	$-۲۰x$	۰	-۱
BC	B	۰-۱/۲	۱۸	x	۱
DC	D	۰-۳√۲	$-۴۲+۱۰\sqrt{۲}x$	$۴/۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}x$	۱
ED	E	۰-۲/۴	-۴۲	۶/۶-x	۱

$$(۱\,kN.m)\theta_A=\sum\int\frac{M_{v_2}M}{EI}dx \qquad , \qquad (۱\,kN)\delta_A=\sum\int\frac{M_{v_1}M}{EI}dx$$

$$\delta_A=\frac{۱}{EA}\left[\int_۰^{۱/۲}(۱۸)(x)dx+\int_۰^{۳\sqrt{۲}}\left(-۴۲+۱۰\sqrt{۲}x\right)\left[۴/۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}x\right]dx+\int_۰^{۲/۴}(-۴۲)(۶/۶-x)dx\right]=-\frac{۷۳۲/۴۶\,kN.m^۳}{EI}$$

$$\delta_A=-\frac{۷۳۲/۴۶(۱۰^۹)}{(۲۰۰)(۸/۴\times۱۰^۷)}=-۴۳/۶\,mm \qquad \blacktriangleright \delta_A=۴۳/۶\,mm\downarrow$$

$$\theta_A=\frac{۱}{EI}\left[\int_۰^{۰/۹}(-۱)(-۲۰x)\,dx+\int_۰^{۱/۲}(۱۸)dx+\int_۰^{۳\sqrt{۲}}\left[-۴۲+۱۰\sqrt{۲}x\right]dx+\int_۰^{۲/۴}(-۴۲)dx\right]=-\frac{۱۲۲/۰۱\,kN.m^۲}{EI}$$

$$\theta_A=-\frac{۱۲۲/۰۱(۱۰^۶)}{(۲۰۰)(۸/۴\times۱۰^۷)}=-۰/۰۰۷۲۶\ rad \qquad \blacktriangleright \theta_A=۰/۰۰۷۲۶\ rad\ \circlearrowleft$$

۶

خطوط تأثیر در سازه‌های معین

خطوط تأثیر در سازه‌های معین استاتیکی

تعریف: اگر مقدار یک تابع (که می‌تواند واکنش تکیه‌گاهی، نیروی برشی، لنگر خمشی و یا غیره ... باشد) را در مقابل موقعیتهای مختلف اعمال بار واحد بر یک سازه ترسیم کنیم، به نمودار حاصل خط تأثیر تابع مزبور گفته می‌شود.

● قبل از هر چیز لازم است توجه داشته باشیم که در سازه‌های معین استاتیکی، خطوط تأثیر برای تمام توابع (به استثنای تغییر شکلها) به صورت خط مستقیم است.

استفاده از روابط تعادل برای ترسیم خطوط تأثیر

در این روش بار واحد را در موقعیتهای مختلفی روی سازه قرار داده و مقدار تابع مورد نظر (واکنش تکیه‌گاهی، نیروی برشی یا لنگر خمشی و غیره ...) را به ازای این موقعیتها با استفاده از روابط تعادل محاسبه می‌کنیم. نمودار تابع را روی یک دستگاه مختصات که محور افقی آن معرف موقعیت اعمال بار واحد است، ترسیم می‌کنیم.

استفاده از اصل مولر - برسلاو برای ترسیم خطوط تأثیر

۱- ابتدا شکل ظاهری نمودار خط تأثیر را طبق مراحل زیر ترسیم می‌کنیم:

(الف) قید (گیرداری) متناظر با تابع (واکنش تکیه‌گاهی، لنگر خمشی، نیروی برشی و ...) را از سازهٔ مورد نظر حذف می‌کنیم.

(ب) تغییر مکان (دوران) کوچکی متناظر با قید (گیرداری) حذف شده در محل قید و همراستا با قید حذف شده، بر مکانیسم ایجاد شده در مرحلهٔ (الف) اعمال می‌کنیم. با توجه به شرایط پیوستگی و تکیه‌گاهی سازه، تغییر شکل مکانیسم را تحت اثر تغییر مکان (دوران) کوچک اعمال شده به دست می‌آوریم. بدین ترتیب شکل ظاهری نمودار خط تأثیر تعیین می‌شود. [توجه داریم که در سازه‌های معین استاتیکی، خطوط تأثیر تمامی توابع (به استثنای تغییر شکلها) به صورت خط مستقیم است.]

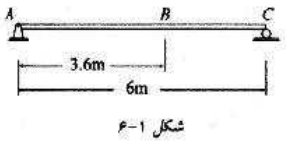
۲- مقدار عددی تابع خط تأثیر را در نقاط مختلف با استفاده از روابط تعادل و هندسهٔ نمودار خط تأثیر محاسبه می‌کنیم. برای این منظور می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

(الف) یک بار واحد در نقاطی که محاسبهٔ مقدار تابع متناظر با آن مورد نظر است، بر سازه اعمال کرده و سپس با استفاده از روابط تعادل و معادلات شرطی، مقدار تابع (واکنش تکیه‌گاهی، لنگر خمشی، نیروی برشی و غیره ...) را به دست می‌آوریم. اگر تابع مورد نظر نیروی برشی باشد، لازم است که بار واحد، یک بار درست در سمت چپ و یک بار درست در سمت راست مقطعی که تابع نیروی برشی آن محاسبه می‌شود، قرار داده شود تا مقدار تابع خط تأثیر برش در دو موقعیت مزبور به دست آید.

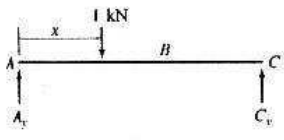
(ب) با توجه به هندسهٔ خط تأثیر و شیب آن در نقاط مختلف، مقدار عددی تابع خط تأثیر را در سایر نقاط باقی‌مانده به دست می‌آوریم.

● برای ترسیم خط تأثیر مربوط به تغییر مکان یک نقطه از سازه، کافی است که بار واحد را در نقطهٔ مزبور قرار داده و معادلهٔ منحنی الاستیک (تغییر شکل) سازه را به دست آوریم. معادلهٔ تغییر مکان (دوران) سازه، نشان دهندهٔ خط تأثیر تغییر مکان (دوران) نقطهٔ مزبور خواهد بود.

۶-۱ در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، C_y ، نیروی برشی (S_B) و لنگر خمشی (M_B) مقطع B را ترسیم کنید.



شکل ۱-۶



از روابط تعادل برای ترسیم خطوط تأثیر استفاده می‌کنیم.

خط تأثیر A_y: $(+\circlearrowleft) \sum M_C = 0$:

$$-A_y(۶)+۱(۶-x)=۰ \Rightarrow A_y=۱-\frac{x}{۶}$$

خط تأثیر C_y:

$$+\circlearrowleft \sum M_A=۰ \;:\; -۱(x)+C_y(۶)=۰ \Rightarrow C_y=\frac{x}{۶}$$

خط تأثیر S_B:

در قسمت AB $(۰\le x<۳/۶\ m)$:

$$+\uparrow \sum F_y^{BC}=۰ \;:\; S_B+C_y=۰ \Rightarrow S_B=-C_y=-\frac{x}{۶}$$

در قسمت BC $(۳/۶\ m<x\le ۶\ m)$:

$$+\uparrow \sum F_y^{AB}=۰ \;:\; S_B-A_y=۰ \Rightarrow S_B=A_y=۱-\frac{x}{۶}$$

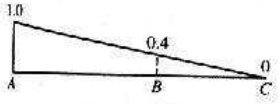
خط تأثیر M_B:

در قسمت AB $(۰\le x\le ۳/۶\ m)$:

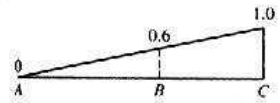
$$+\circlearrowleft \sum M_B^{BC}=۰ \;:\; -M_B+C_y(۲/۴)=۰ \Rightarrow M_B=۲/۴C_y=\frac{۲x}{۵}$$

در قسمت BC $(۳/۶\ m\le x\le ۶\ m)$:

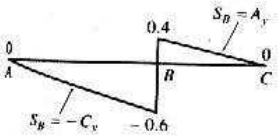
$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB}=۰ \;:\; M_B-A_y(۳/۶)=۰ \Rightarrow M_B=۳/۶A_y=۳/۶-\frac{۳x}{۵}$$



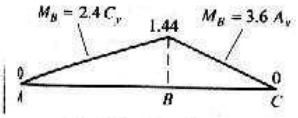
خط تأثیر A_y، kN/kN



خط تأثیر C_y، kN/kN

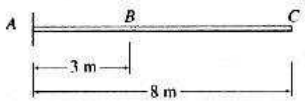


خط تأثیر S_B، kN/kN

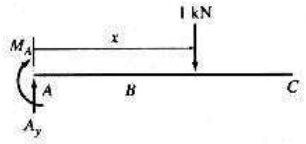


خط تأثیر M_B، kN.m/kN

۶-۲ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y و M_A، نیروی برشی (S_B) و لنگر خمشی (M_B) مقطع B را ترسیم کنید.



شکل ۶-۲

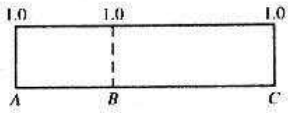


خط تأثیر A_y:

$$+\uparrow \sum F_y=۰ \;:\; A_y-۱=۰ \Rightarrow A_y=۱$$

خط تأثیر M_A:

$$+\circlearrowleft \sum M_A=۰ \;:\; -M_A-۱(x)=۰ \Rightarrow M_A=-x$$



خط تأثیر A_y، kN/kN

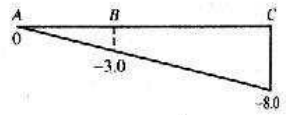
خط تأثیر S_B:

در قسمت AB $(۰\le x<۳\ m)$:

$$+\uparrow \sum F_y^{BC}=۰ \;:\; S_B=۰$$

در قسمت BC $(۳\ m<x\le ۸\ m)$:

$$+\uparrow \sum F_y^{AB}=۰ \;:\; -S_B+A_y=۰ \Rightarrow S_B=A_y=۱$$



خط تأثیر M_A، kN.m/kN

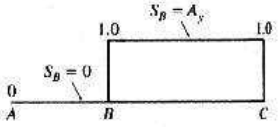
خط تأثیر M_B:

در قسمت AB $(۰\le x\le ۳\ m)$:

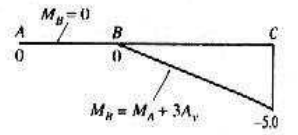
$$+\circlearrowleft \sum M_B^{BC}=۰ \;:\; -M_B=۰ \Rightarrow M_B=۰$$

در قسمت BC $(۳\ m\le x\le ۸\ m)$:

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{BC}=۰ \;:\; -M_B-۱(x-۳)=۰ \Rightarrow M_B=-x+۳$$

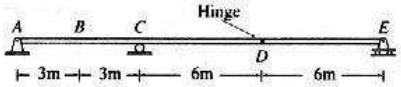


خط تأثیر S_B، kN/kN

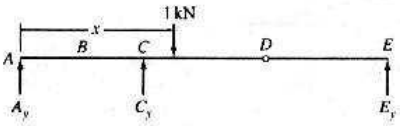


خط تأثیر M_B، kN.m/kN

۶-۳ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، C_y و E_y ، نیروی برشی $(S_{C,R})$ در سمت راست تکیه‌گاه C و لنگر خمشی (M_B) مقطع B را ترسیم کنید.



شکل ۶-۳



خط تأثیر E_y:

در قسمت AD $(0 \le x \le 12\ m)$:

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{DE} = 0 \quad : \quad E_y(6) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 0$$

در قسمت DE $(12\ m \le x \le 18\ m)$:

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{DE} = 0 \quad : \quad E_y(6) - 1(x-12) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{x}{6} - 2$$

خط تأثیر C_y:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad -1(x) + C_y(6) + E_y(18) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = \frac{x}{6} - 3E_y$$

در قسمت AD $(0 \le x \le 12\ m)$:

$$C_y = \frac{x}{6} - 3(0) = \frac{x}{6}$$

در قسمت DE $(12\ m \le x \le 18\ m)$:

$$C_y = \frac{x}{6} - 3\left[\frac{x}{6} - 2\right] = 6 - \frac{x}{3}$$

خط تأثیر A_y :

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad A_y - 1 + C_y + E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 1 - C_y - E_y$$

در قسمت AD $(0 \le x \le 12\ m)$:

$$A_y = 1 - \frac{x}{6} - 0 = 1 - \frac{x}{6}$$

در قسمت DE $(12\ m \le x \le 18\ m)$:

$$A_y = 1 - \left[6 - \frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6} - 2\right] = \frac{x}{6} - 3$$

خط تأثیر $S_{C,R}$: در قسمت AC $(0 \le x < 6\ m)$:

$$+\uparrow \sum F_y^{CE} = 0 \quad : \quad S_{C,R} + E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{C,R} = -E_y = 0$$

در قسمت CB :

$$+\uparrow \sum F_y^{CE} = 0 \quad : \quad S_{C,R} - 1 + E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{C,R} = 1 - E_y$$

$$S_{C,R} = 1 - 0 = 1 \qquad (6\ m < x \le 12\ m)$$

$$S_{C,R} = 1 - \left[\frac{x}{6} - 2\right] = 3 - \frac{x}{6} \qquad (12\ m \le x \le 18\ m)$$

خط تأثیر M_B:

در قسمت AB $(0 \le x \le 3\ m)$:

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \quad : \quad M_B + 1(3-x) - A_y(3) = 0$$

$$M_B = (x-3) + 3A_y = (x-3) + 3\left[1 - \frac{x}{6}\right] = \frac{x}{2}$$

در قسمت BE :

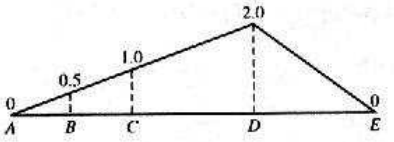
$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \quad : \quad M_B - A_y(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = 3A_y$$

$$M_B = 3\left[1 - \frac{x}{6}\right] = 3 - \frac{x}{2} \qquad (3\ m \le x \le 12\ m)$$

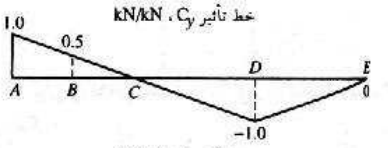
$$M_B = 3\left[\frac{x}{6} - 3\right] = \frac{x}{2} - 9 \qquad (12\text{m} < x < 18\text{m})$$



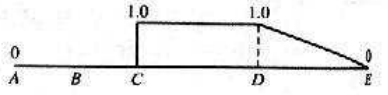
خط تأثیر E_y ، kN/kN



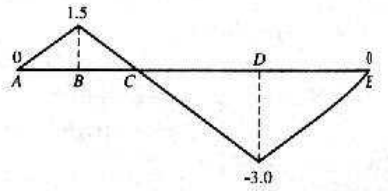
خط تأثیر C_y ، kN/kN



خط تأثیر A_y ، kN/kN

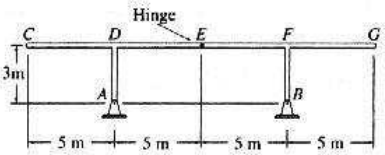


خط تأثیر $S_{C,R}$ ، kN/kN

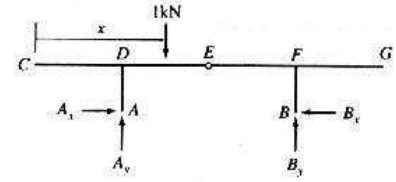


خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

۶-۴ برای قاب نشان داده شده در شکل، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_x ، A_y ، B_x و B_y و نیروی برشی مفصل E را ترسیم کنید.



شکل ۶-۴

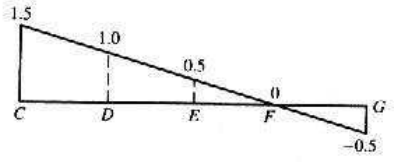


خط تأثیر A_y:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;:\; -A_y(10) + 1(15 - x) = 0 \Rightarrow A_y = 1.5 - \frac{x}{10}$$

خط تأثیر B_y:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y - 1 + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 1 - A_y = \frac{x}{10} - 0.5$$



خط تأثیر A_y ، kN/kN

خط تأثیر A_x:

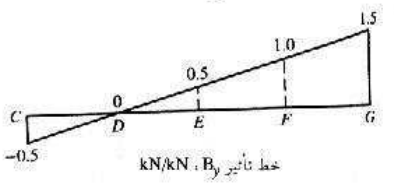
در قسمت CE ($0 \le x \le 10$ m):

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{CE} = 0 \;:\; A_x(3) - A_y(5) + 1(10 - x) = 0$$

$$A_x = \frac{5}{3}A_y - \frac{1}{3}(10 - x) = \frac{x - 5}{6}$$

در قسمت EG ($10\text{ m} \le x \le 20$ m):

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{CE} = 0 \;:\; A_x(3) - A_y(5) = 0 \Rightarrow A_x = \frac{5}{3}A_y = \frac{15 - x}{6}$$



خط تأثیر B_y ، kN/kN

خط تأثیر B_x:

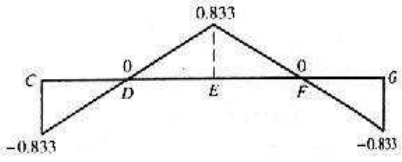
$$\pm \sum F_x = 0 \;:\; A_x - B_x = 0 \Rightarrow B_x = A_x$$

در قسمت CE ($0 \le x \le 10$ m):

$$B_x = \frac{x - 5}{6}$$

در قسمت EG ($10\text{ m} < x < 20$ m):

$$B_x = \frac{15 - x}{6}$$



خط تأثیر A_x و B_x ، kN/kN

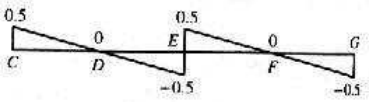
خط تأثیر S_E:

در قسمت CE ($0 \le x < 10$ m):

$$+\uparrow \sum F_y^{CE} = 0 \;:\; -S_E - 1 + A_y = 0 \Rightarrow S_E = A_y - 1 = -0.5 - \frac{x}{10}$$

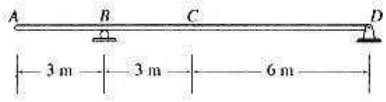
در قسمت EG ($10\text{ m} < x \le 20$ m):

$$+\uparrow \sum F_y^{CE} = 0 \;:\; -S_E + A_y = 0 \Rightarrow S_E = A_y = 1.5 - \frac{x}{10}$$



خط تأثیر S_E ، kN/kN

۶-۵ در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی B_y و D_y ، نیروی برشی (S_C) و لنگر خمشی (M_C) مقطع C را ترسیم کنید.



شکل ۶-۵

تکیه‌گاه غلتکی B را حذف کرده و در امتداد B_y یک تغییر مکان کوچک Δ به نقطهٔ B از تیر مزبور می‌دهیم. تغییر شکل مکانیسم موجود، شکل ظاهری خط تأثیر B_y را نشان می‌دهد. برای محاسبهٔ مقدار عددی خط تأثیر B_y در نقاط مختلف، یک بار ۱ kN در نقطهٔ B قرار داده و با استفاده از روابط تعادل مقدار B_y را در این حالت به دست می‌آوریم.

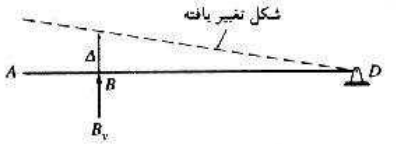
$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \;:\; 1(9) - B_y(9) = 0 \Rightarrow B_y = 1 \;\; kN$$

با استفاده از هندسهٔ خط تأثیر و شیب آن در قسمتهای مختلف، مقدار تابع خط تأثیر B_y در نقطهٔ A و C نیز محاسبه خواهد شد.

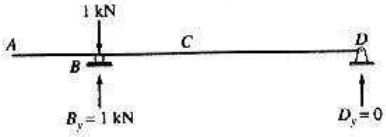
$$AA' = \left[\frac{1}{9}\right](12) = \frac{4}{3}\ kN/kN$$

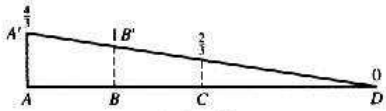
خط تأثیر D_y:

با روشی مشابه آنچه که در ترسیم خط تأثیر B_y شرح داده شد، می‌توان خط تأثیر D_y را نیز ترسیم کرد.

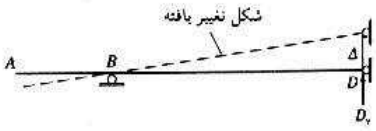


مکانیسم حاصل از حذف B_y

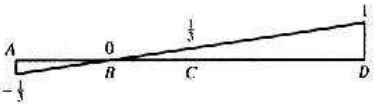




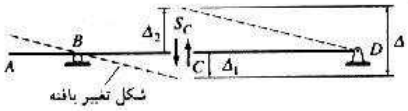
خط تأثیر B_y، kN/kN



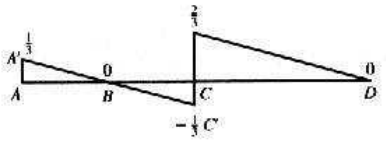
مکانیسم حاصل از حذف D_y

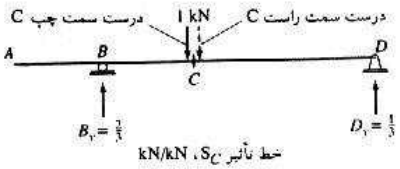


خط تأثیر D_y، kN/kN

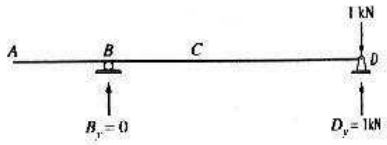


مکانیسم حاصل از حذف S_C





خط تأثیر S_C، kN/kN



خط تأثیر S_C:

تیر را در نقطهٔ C بریده، در نقطهٔ C به قطعهٔ سمت چپ تغییر مکان کوچک Δ_1 را رو به پایین (در جهت برش) و به قطعهٔ سمت راست تغییر مکان کوچک Δ_2 را رو به بالا (در جهت برش) اعمال می‌کنیم. بدین ترتیب تغییر شکل مکانیسم موجود، شکل ظاهری خط تأثیر را نشان می‌دهد.

برای محاسبهٔ مقدار عددی تابع خط تأثیر S_C در نقاط مختلف، بار واحد را یک بار درست در سمت چپ و بار دیگر درست در سمت راست مقطع C تیر اصلی قرار داده به ازای این دو موقعیت، برش S_C را با استفاده از روابط تعادل به دست می‌آوریم.

بار واحد درست در سمت چپ مقطع C:

$$+\uparrow \sum F_y^{CD} = 0 \ : \ S_C + D_y = 0 \ \Rightarrow \ S_C = -D_y = -\frac{1}{3}\ kN$$

بار واحد درست در سمت راست مقطع C:

$$+\uparrow \sum F_y^{AC} = 0 \ : \ S_C - B_y = 0 \ \Rightarrow \ S_C = B_y = \frac{2}{3}\ kN$$

برای محاسبهٔ مقدار عددی تابع خط تأثیر در سایر نقاط می‌توان از هندسهٔ خط تأثیر استفاده کرد.

$$AA' = -CC' = \frac{1}{3}\ kN/kN$$

خط تأثیر M_C:

در نقطهٔ C از تیر یک مفصل داخلی قرار داده، یک دوران θ در مفصل C به تیر اعمال می‌کنیم، به طوری که قطعهٔ AC در خلاف جهت عقربه‌های ساعت و قطعهٔ CD در جهت عقربه‌های ساعت دوران کند. بدین ترتیب شکل ظاهری خط تأثیر تعیین می‌شود.

برای محاسبهٔ مقدار عددی تابع خط تأثیر M_C در نقاط مختلف، کافی است که در تیر اصلی یک بار واحد در نقطهٔ C اعمال کرده و با استفاده از روابط تعادل مقدار M_C را به ازای این موقعیت بار واحد به دست آوریم.

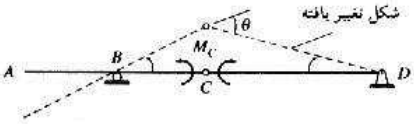
بار واحد در نقطهٔ C:

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \quad : \quad 1(6) - B_y(9) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = \frac{2}{3} \ kN$$

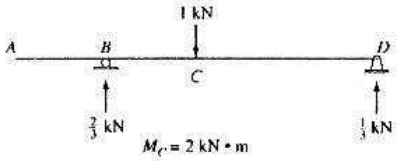
$$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \quad : \quad M_C - \left(\frac{2}{3}\right)(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = 2 \ kN.m$$

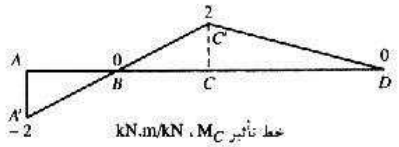
برای تعیین مقدار عددی تابع خط تأثیر M_C در سایر نقاط می‌توان از هندسهٔ خط تأثیر کمک گرفت.

$$AA' = -CC' = -2 \quad kN.m/kN$$



مکانیسم حاصل از حذف M_C

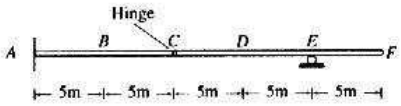




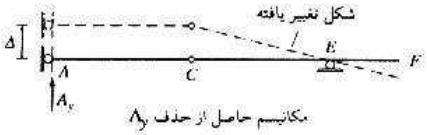
خط تأثیر M_C، kN.m/kN

۶-۶ در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y، E_y و M_A، نیروی برشی (S_B) مقطع B و لنگر خمشی (M_D) مقطع D را ترسیم کنید.

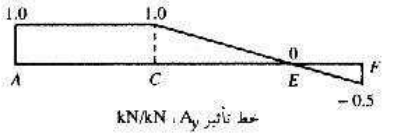
برای ترسیم شکل ظاهری خطوط تأثیر از اصل مولر - برسلاو استفاده کرده، سپس مقادیر عددی توابع خط تأثیر در نقاط مختلف را با استفاده از روابط تعادل و هندسهٔ خطوط تأثیر محاسبه می‌کنیم.



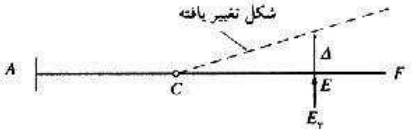
شکل ۶-۶



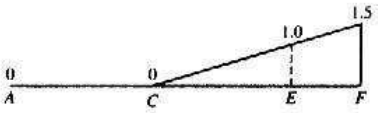
مکانیسم حاصل از حذف A_y



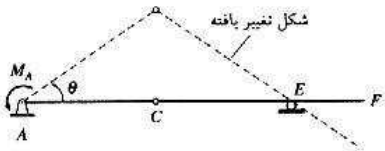
خط تأثیر A_y، kN/kN



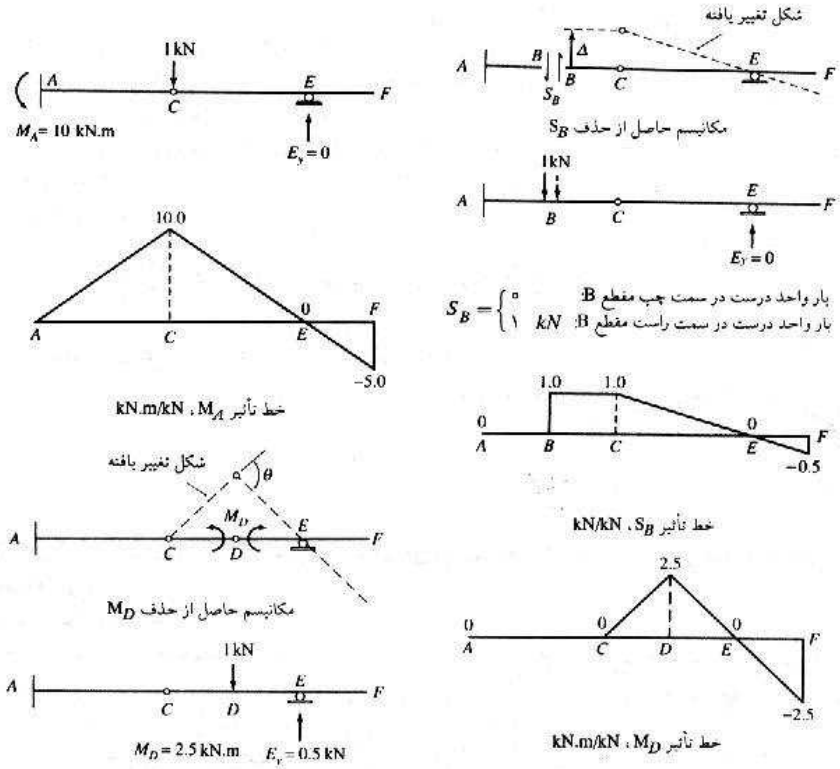
مکانیسم حاصل از حذف E_y



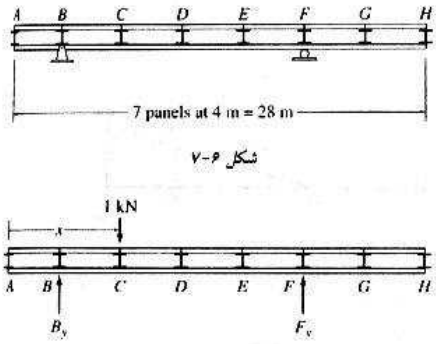
خط تأثیر E_y، kN/kN



مکانیسم حاصل از حذف M_A



۶-۷ برای شاهتیر کف نشان داده شده در شکل، خطوط تأثیر نیروی برشی (S_{CD}) دهانهٔ CD و لنگر خمشی (M_D) مقطع D را ترسیم کنید.



شکل ۶-۷

خط تأثیر S_{CD}:

برای ترسیم خط تأثیر S_{CD} بار واحد (۱ kN) را در نقاط B، C، D و F قرار داده، سپس واکنشهای تکیه‌گاهی و برش (S_{CD}) را با استفاده از روابط تعادل محاسبه می‌کنیم.

بار ۱ kN در B: $F_y = ۰$ $S_{CD} = ۰$

بار ۱ kN در C: $F_y = \frac{۱}{۴}$ kN $S_{CD} = -\frac{۱}{۴}$ kN

بار ۱ kN در D: $B_y = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$ kN $S_{CD} = \frac{۱}{۲}$ kN

بار ۱ kN در F: $B_y = ۰$ $S_{CD} = ۰$

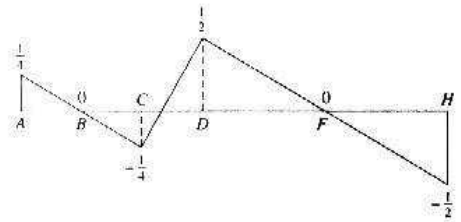
خط تأثیر M_D:

برای ترسیم خط تأثیر M_D بار واحد (۱ kN) را در نقاط B، D و F قرار داده، سپس واکنشهای تکیه‌گاهی و لنگر خمشی M_D را با استفاده از روابط تعادل محاسبه می‌کنیم.

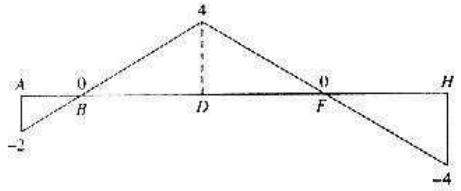
بار ۱ kN در B: $F_y = ۰$ $M_D = ۰$

بار ۱ kN در D: $B_y = \frac{۱}{۲}$ kN $M_D = \left(\frac{۱}{۲}\right) ۸ = ۴$ kN.m

بار ۱ kN در F: $B_y = ۰$ $M_D = ۰$

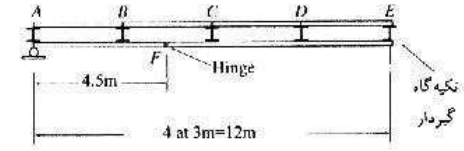


خط تأثیر S_{CD} ، kN/kN



خط تأثیر M_D ، kN.m/kN

۸-۶ برای شاهتیر کف نشان داده شده در شکل، خطوط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی A_y ، برش (S_{CD}) دهانهٔ CD و لنگر خمشی (M_D) مقطع D را ترسیم کنید.



شکل ۸-۶

خط تأثیر A_y :

برای ترسیم خط تأثیر A_y بار واحد (۱ kN) را در نقاط A ، B و C قرار داده، سپس واکنش تکیه‌گاهی A_y را با استفاده از رابطهٔ شرطی $\sum M_F^{AF} = 0$ محاسبه می‌کنیم.

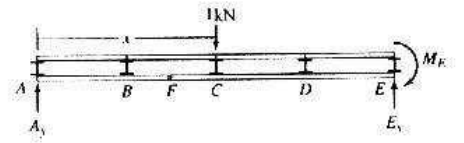
بار ۱ kN در A : $A_y = 1 \quad kN$

بار ۱ kN در B : $(+\circlearrowleft) \sum M_F^{AF} = 0 \quad : \quad -A_y(4/5) + 1(1/5) = 0$

$A_y = \frac{1}{4} \quad kN$

بار ۱ kN در C :

$(+\circlearrowleft) \sum M_F^{AF} = 0 \quad : \quad -A_y(4/5) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 0$



خط تأثیر S_{CD}:

برای ترسیم خط تأثیر S_{CD} ، بار واحد (۱ kN) را در هر پنج نقطهٔ A تا E قرار داده با استفاده از روابط تعادل، واکنش تکیه‌گاهی و نیروی برشی (S_{CD}) را به دست می‌آوریم.

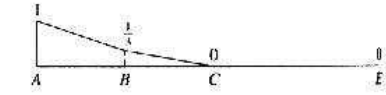
بار ۱ kN در A : $A_y = 1 \quad , \quad S_{CD} = 0$ و بار (۱ kN) در C :

$A_y = 0 \quad , \quad S_{CD} = -1 \quad kN$

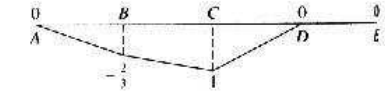
بار ۱ kN در B : $A_y = \frac{1}{4} \quad , \quad S_{CD} = \left(\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{3}{4} \quad kN$

بار ۱ kN در D : $A_y = 0 \quad , \quad S_{CD} = 0$ و بار (۱ kN) در E :

$A_y = 0 \quad , \quad S_{CD} = 0$



خط تأثیر A_y ، kN/kN

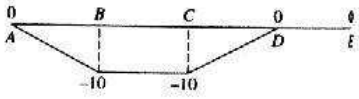


خط تأثیر S_{CD} ، kN/kN

خط تأثیر M_D:

بار ۱ kN در A : $A_y = 1 \quad kN \quad , \quad M_D = 0$

بار ۱ kN در B : $A_y = \frac{1}{4} \quad , \quad M_D = \left(\frac{1}{4}\right) 9/0 - 1(6/0) = -3 \quad kN.m$



خط تأثیر M_D ، kN.m/kN

بار ۱ kN در C: $A_y = 0 \quad , \quad M_D = -1(3/0) = -3 \ \ kN.m$

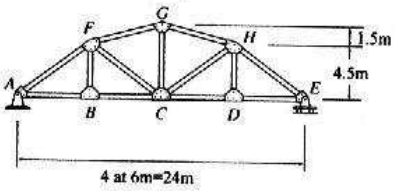
بار ۱ kN در D: $A_y = 0 \quad , \quad M_D = 0$

بار ۱ kN در B: $A_y = 0 \quad , \quad M_D = 0$

۹-۶ در خرپای پارکر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر نیروی داخلی اعضای AF ، CF و CG را ترسیم کنید.

خطوط تأثیر A_y و E_y:

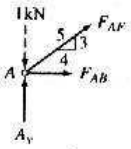
خطوط تأثیر A_y و E_y به کمک معادلات تعادل $\Sigma M_A = 0$ و $\Sigma M_E = 0$ به دست می‌آیند.



شکل ۹-۶

خط تأثیر F_{AF}:

برای ترسیم خط تأثیر F_{AF} از رابطهٔ تعادل $\sum F_y^A = 0$ در گرهٔ A استفاده می‌کنیم.

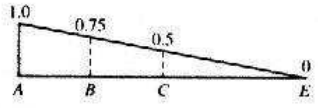


بار ۱ kN در A:

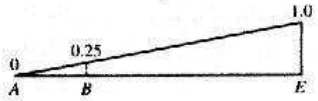
$$+\uparrow \sum F_y^A = 0 \ : \ A_y - 1 + \frac{3}{5}F_{AF} = 0 \ \Rightarrow \ F_{AF} = 0$$

در قسمت BC (۶ m ≤ x ≤ ۲۴ m):

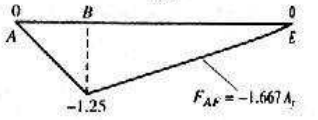
$$+\uparrow \sum F_y^A = 0 \ : \ A_y + \frac{3}{5}F_{AF} = 0 \ \Rightarrow \ F_{AF} = -\frac{5}{3}A_y$$



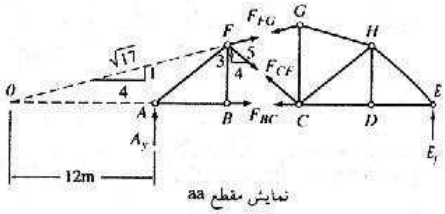
خط تأثیر A_y ، kN/kN



خط تأثیر E_y ، kN/kN



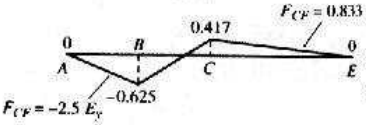
خط تأثیر F_{AF} ، kN/kN



نمایش مقطع aa

خط تأثیر F_{CF}:

برای ترسیم خط تأثیر F_{CF} از مقطع aa که اعضای BC ، CF و FG را قطع می‌کند، استفاده می‌کنیم. با نوشتن معادلهٔ $\Sigma M_O = 0$ برای نمودار جسم آزاد سمت چپ و راست مقطع aa ، نیروی F_{CF} محاسبه می‌شود.



خط تأثیر F_{CF} ، kN/kN

در قسمت AB (۰ ≤ x ≤ ۶ m):

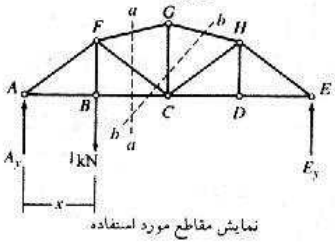
$$+\circlearrowleft \sum M_O^{CEG} = 0 \ : \ \frac{3}{5}F_{CF}(24) + E_y(36) = 0 \ \Rightarrow \ F_{CF} = -2/5E_y$$

در قسمت CE (۱۲ m ≤ x ≤ ۲۴ m):

$$+\circlearrowleft \sum M_O^{ABF} = 0 \ : \ A_y(12) - \frac{4}{5}F_{CF}(4/5) - \frac{3}{5}F_{CF}(18) = 0$$

$$F_{CF} = -/833A_y$$

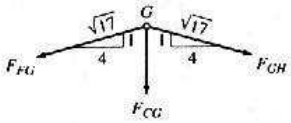
در فاصلهٔ BC خط تأثیر F_{CF} به صورت خطی بین مقادیر نقاط B و C تغییر می‌کند.



نمایش مقاطع مورد استفاده

خط تأثیر F_{CG}:

ابتدا با استفاده از روابط تعادل گره G، مقدار F_{CG} را بر حسب F_{FG} محاسبه کرده و سپس با تعیین نمودار خط تأثیر F_{FG}، خط تأثیر F_{CG} تعیین خواهد شد.



$$+\uparrow \sum F_y^G = 0 \quad : \quad -F_{CG} - \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) F_{FG} - \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) F_{GH} = 0$$

$$F_{CG} = -\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\left(F_{FG} + F_{GH}\right)$$

$$\pm \rightarrow \sum F_x^G = 0 \quad : \quad -\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) F_{FG} + \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) F_{GH} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GH} = F_{FG}$$

از دو رابطهٔ اخیر می‌توان نتیجه گرفت:

$$F_{CG} = -\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right) F_{FG} = -0.485 F_{FG} \qquad (I)$$

با استفاده از مقطع aa و روابط تعادل دو قسمت طرفین این مقطع، خط تأثیر F_{FG} به دست می‌آید.

در قسمت AB (0 ≤ x ≤ 6 m):

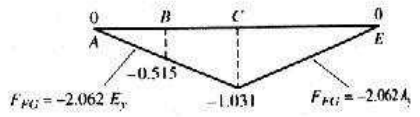
$$+\circlearrowleft \sum M_C^{CEG} = 0 \quad : \quad \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) F_{FG}(6) + E_y(12) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FG} = -2.062 E_y$$

در قسمت CE (12 m ≤ x ≤ 24 m):

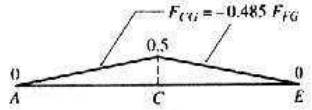
$$+\circlearrowleft \sum M_C^{ABF} = 0 \quad : \quad -\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) F_{FG}(6) - \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) F_{FG}(4/5) - A_y(12) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FG} = -2.062 A_y$$

در فاصلهٔ BC خط تأثیر F_{FG} به صورت خطی بین مقادیر نقاط B و C تغییر می‌کند.

به این ترتیب با توجه به رابطهٔ (I)، خط تأثیر F_{CG} از ضرب تابع خط تأثیر F_{FG} در ضریب (-0.485) به دست می‌آید.

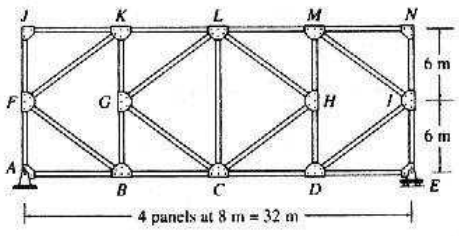


خط تأثیر F_{FG}، kN/kN

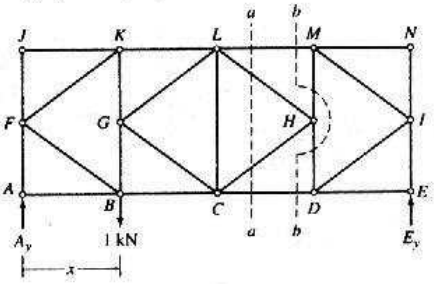


خط تأثیر F_{CG}، kN/kN

۶-۱۰ در خرپای K نشان داده شده در شکل زیر، خط تأثیر نیروی داخلی عضو HL را ترسیم کنید.



شکل ۶-۱۰



ابتدا خطوط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی A_y و E_y را ترسیم کرده، سپس خطوط تأثیر نیروی محوری سایر اعضا را به کمک روش مقاطع و با استفاده از روابط تعادل، بر حسب A_y و E_y به دست می‌آوریم.

خط تأثیر F_{LM}:

با استفاده از مقطع bb و روابط تعادل دو قسمت طرفین این مقطع، نمودار خط تأثیر F_{LM} را ترسیم می‌کنیم.

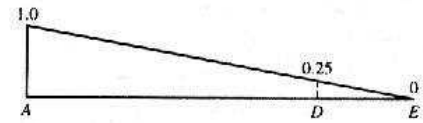
در قسمت AC (0 ≤ x ≤ 16 m):

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{DENM} = 0 \quad : \quad F_{LM}(12) + E_y(8) = 0$$

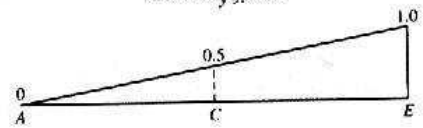
$$F_{LM} = -0.667 E_y \qquad (I)$$

در قسمت DE (24 m ≤ x ≤ 32 m):

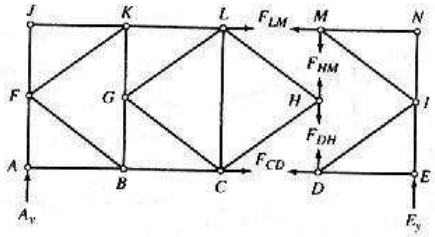
$$+\circlearrowleft \sum M_D^{ACHLJ} = 0 \quad : \quad -F_{LM}(12) - A_y(24) = 0$$



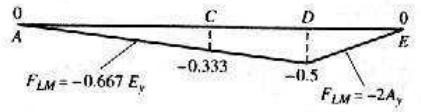
خط تأثیر A_y، kN/kN



خط تأثیر E_y، kN/kN



مقطع bb



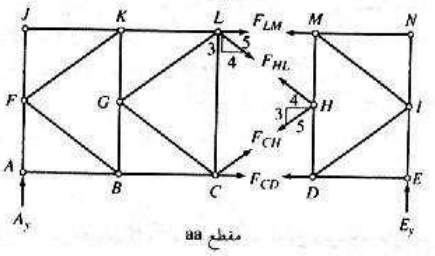
خط تأثیر F_{LM} ، kN/kN

$$F_{LM} = -۲A_y \qquad (II)$$

در فاصلهٔ CD، خط تأثیر F_{LM} به صورت خطی بین مقادیر نقاط C و D تغییر می‌کند.

خط تأثیر F_{HL}:

با توجه به مقطع aa، روابط تعادل را برای دو قسمت طرفین مقطع مزبور می‌نویسیم. بدین ترتیب رابطهٔ بین F_{HL} با مقادیر E_y ، A_y و F_{LM} به دست خواهد آمد.



مقطع aa

در قسمت AC ($۰ \le x \le ۱۶$ m):

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{DENM} = ۰ \quad :$$

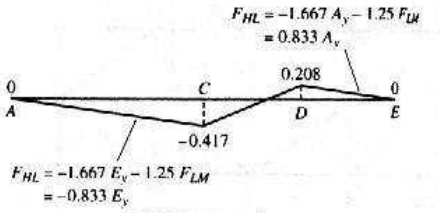
$$F_{LM}(۱۲) + \frac{۴}{۵}F_{HL}(۶) + \frac{۳}{۵}F_{HL}(۸) + E_y(۱۶) = ۰$$

$$F_{HL} = -۱/۶۶۷E_y - ۱/۲۵F_{LM} \qquad (III)$$

در قسمت DE ($۲۴\text{ m} \le x \le ۳۲$ m):

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{ACLJ} = ۰ \quad : \quad -A_y(۱۶) - F_{LM}(۱۲) - \frac{۴}{۵}F_{HL}(۱۲) = ۰$$

$$F_{HL} = -۱/۶۶۷A_y - ۱/۲۵F_{LM} \qquad (IV)$$



خط تأثیر F_{HL} ، kN/kN

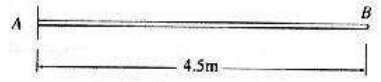
با جایگزینی روابط (I) و (II) در معادلات (III) و (IV) مقدار F_{HL} در نواحی مختلف بر حسب واکنشهای تکیه‌گاهی A_y و E_y به دست خواهد آمد.

در قسمت AC ($۰ \le x \le ۱۶$ m):

$$\begin{cases} F_{HL} = -۰/۸۳۳E_y \\ F_{HL} = ۰/۸۳۳A_y \end{cases}$$

در قسمت DE ($۲۴\text{ m} \le x \le ۳۲$ m):

۶-۱۱ خط تأثیر تغییر مکان قائم انتهای B، از تیر طرهٔ نشان داده شده در شکل زیر را ترسیم کنید.



$EI =$ ثابت ، $E = ۲۰۰$ GPa ، $I = ۲\times۱۰^{۸}\text{ mm}^{۴}$

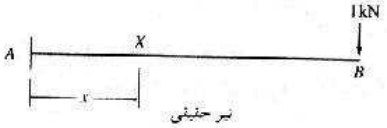
شکل ۶-۱۱

برای این منظور کافی است که یک بار واحد (۱ kN) را در انتهای B تیر قرار داده و معادلهٔ منحنی الاستیک (تغییر شکل) تیر را به دست آورد.

برای محاسبهٔ تغییر مکان تیر از روش تیر مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$M_x = \frac{۱}{EI}\left\{-۴/۵\left[۱ - \frac{x}{۴/۵}\right]x\left[\frac{x}{۲}\right] - \frac{۱}{۲}\left[۴/۵ - ۴/۵\left[۱ - \frac{x}{۴/۵}\right]\right]x\left[\frac{۲x}{۳}\right]\right\}$$

$$M_x = \frac{(x^{۳} - ۱۳/۵x^{۲})}{۶EI}$$



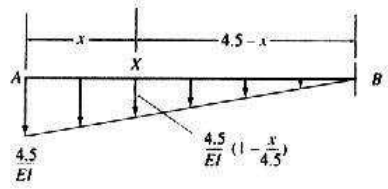
تیر حقیقی

تغییر مکان نقطهٔ X از تیر حقیقی تحت اثر بار واحد (۱ kN) در B:

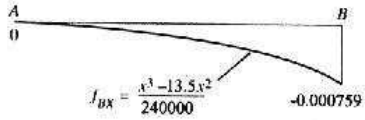
$$\delta_{XB} = \frac{(x^{۳} - ۱۳/۵x^{۲})}{۶EI}$$



نمودار $\frac{M}{EI}$ ، $\frac{kN.m/kN}{EI}$



تیر مزدوج



خط تأثیر تغییر مکان قائم نقطهٔ B ، m/kN

طبق قانون ماکسول:

$$\delta_{X\,B} = \delta_{B\,X}$$

معادلهٔ منحنی خط تأثیر تغییر مکان B :

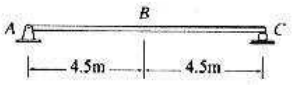
$$\delta_{B\,X} = \frac{(x^3 - 13/5x^2)}{6EI}$$

$$E = 200 \times 10^6\ kN/m^2 \quad , \quad I = 2 \times 10^{-3}\ m^2 \Rightarrow EI = 40000\ kN.m^2$$

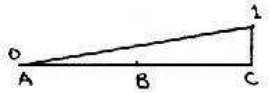
$$\delta_{B\,X} = \frac{x^3 - 13/5x^2}{240000}$$

برای تیرهای نشان داده شده در مسایل ۶-۱۲ و ۶-۱۳ ، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y و C_y ، نیروی برشی (S_B) و لنگر خمشی (M_B) مقطع B را ترسیم کنید.

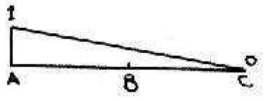
۶-۱۲



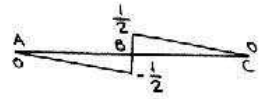
شکل ۶-۱۲



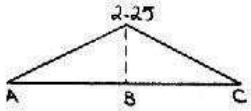
خط تأثیر C_y ، kN/kN



خط تأثیر A_y ، kN/kN

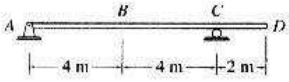


خط تأثیر S_B ، kN/kN

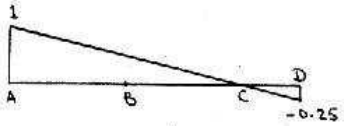


خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

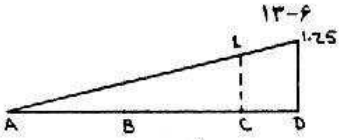
۶-۱۳



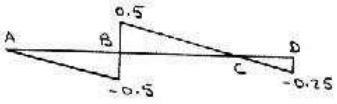
شکل ۶-۱۳



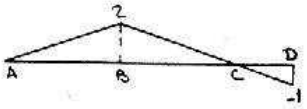
خط تأثیر A_y ، kN/kN



خط تأثیر C_y ، kN/kN

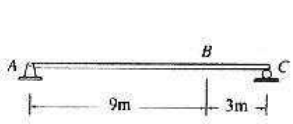


خط تأثیر S_B ، kN/kN

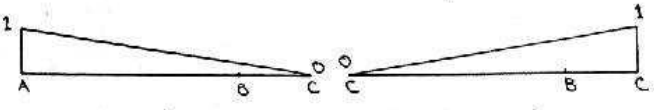


خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

۶-۱۴ خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y و C_y ، برش $(S_{A,R})$ در سمت راست تکیه‌گاه A و لنگر خمشی (M_B) مقطع B را برای تیر نشان داده شده در شکل زیر ترسیم کنید.

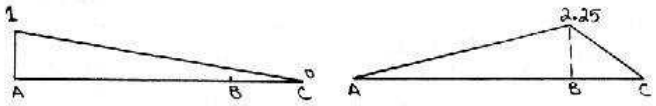


شکل ۶-۱۴



خط تأثیر A_y ، kN/kN

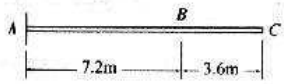
خط تأثیر C_y ، kN/kN



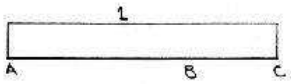
خط تأثیر $S_{A,R}$ ، kN/kN

خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

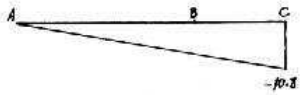
۶-۱۵ برای تیر نشان داده شده در شکل، خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y و M_A ، نیروی برشی (S_B) و لنگر خمشی (M_B) در مقطع B را ترسیم کنید.



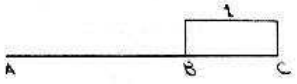
شکل ۶-۱۵



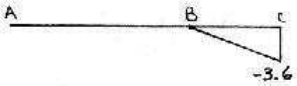
خط تأثیر A_y ، kN/kN



خط تأثیر M_A ، kN.m/kN

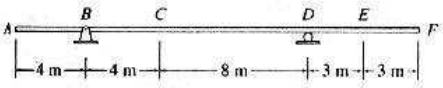


خط تأثیر S_B ، kN/kN

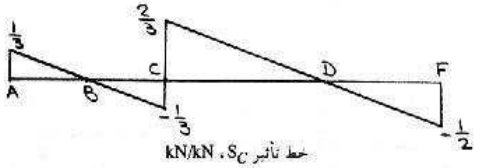


خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

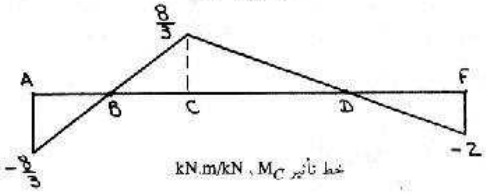
۶-۱۶ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر نیروی برشی (S_C) و لنگر خمشی (M_C) مقطع C ، نیروی برشی $(S_{D,L})$ در سمت چپ تکیه‌گاه D و نیروی برشی $(S_{D,R})$ در سمت راست تکیه‌گاه D را ترسیم کنید.



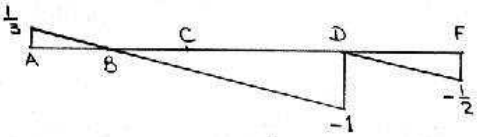
شکل ۶-۱۶



خط تأثیر S_C ، kN/kN



خط تأثیر M_C ، kN.m/kN

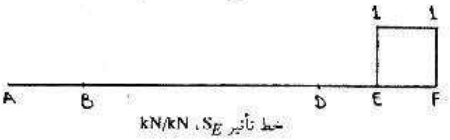


خط تأثیر $S_{D,L}$ ، kN/kN

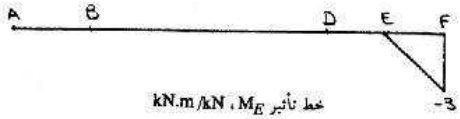


خط تأثیر $S_{D,R}$ ، kN/kN

۶-۱۷ برای تیر نشان داده شده در مسئلهٔ ۶-۱۶ ، خط تأثیر نیروی برشی (S_E) و لنگر خمشی (M_E) مقطع E را ترسیم کنید.

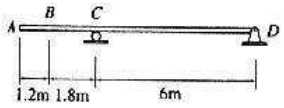


خط تأثیر S_E ، kN/kN

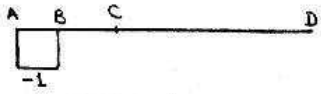


خط تأثیر M_E ، kN.m/kN

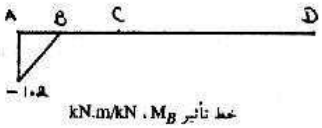
۶-۱۸ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر نیروی برشی (S_B) و لنگر خمشی (M_B) مقطع B و نیروی برشی ($S_{C,L}$) در سمت چپ تکیه‌گاه C و نیروی برشی ($S_{C,R}$) در سمت راست تکیه‌گاه C را ترسیم کنید.



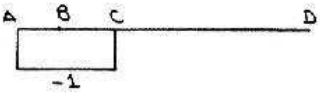
شکل ۶-۱۸



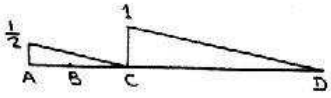
خط تأثیر S_B ، kN/kN



خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

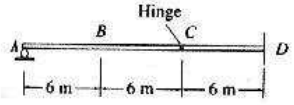


خط تأثیر $S_{C,L}$ ، kN/kN

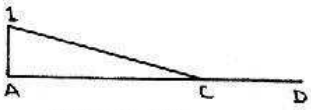


خط تأثیر $S_{C,R}$ ، kN/kN

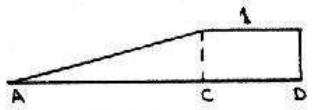
۶-۱۹ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، D_y و M_D را ترسیم کنید.



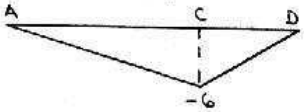
شکل ۶-۱۹



خط تأثیر A_y ، kN/kN

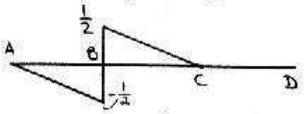


خط تأثیر D_y ، kN/kN

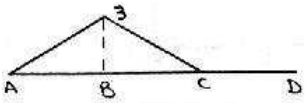


خط تأثیر M_D ، kN.m/kN

۶-۲۰ برای تیر نشان داده شده در مسئلهٔ ۶-۱۹، خطوط تأثیر نیروی برشی (S_B) و لنگر خمشی (M_B) مقطع B را ترسیم کنید.

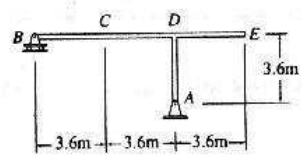


خط تأثیر S_B ، kN/kN

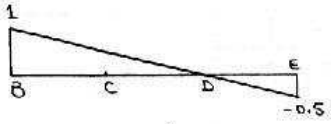


خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

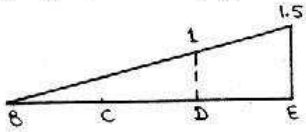
۶-۲۱ در قاب نشان داده شده، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y و B_y، نیروی برشی (S_C) و لنگر خمشی (M_C) مقطع C را ترسیم کنید.



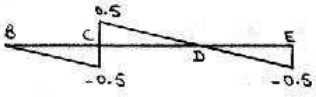
شکل ۶-۲۱



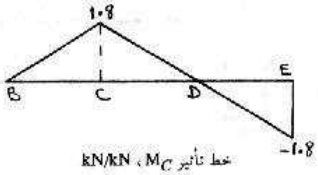
خط تأثیر B_y ، kN/kN



خط تأثیر A_y ، kN/kN

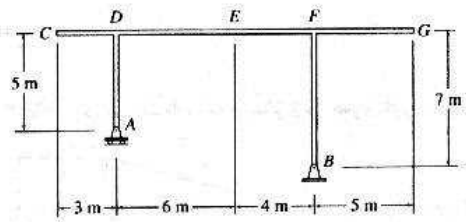


خط تأثیر S_C ، kN/kN

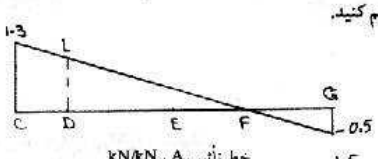


خط تأثیر M_C ، kN/kN

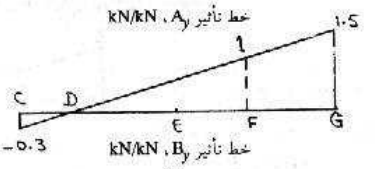
۶-۲۲ برای قاب نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y و B_y، نیروی برشی (S_E) و لنگر خمشی (M_E) مقطع E را ترسیم کنید.



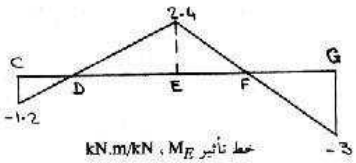
شکل ۶-۲۲



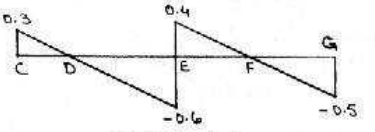
خط تأثیر A_y ، kN/kN



خط تأثیر B_y ، kN/kN

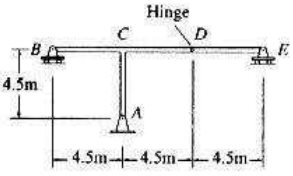


خط تأثیر M_E ، kN.m/kN

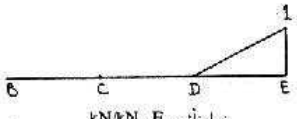


خط تأثیر S_E ، kN/kN

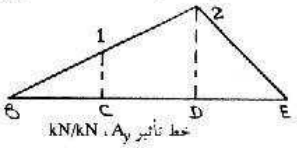
۶-۲۳ خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، B_y ، E_y و نیروی برشی (S_D) مفصل داخلی **D** را ترسیم کنید.



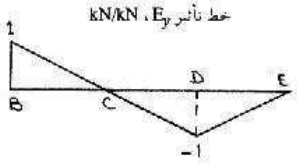
شکل ۶-۲۳



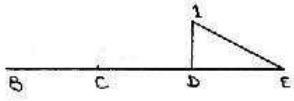
خط تأثیر E_y ، kN/kN



خط تأثیر A_y ، kN/kN

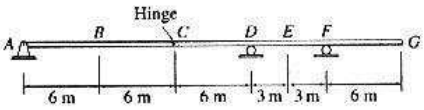


خط تأثیر B_y ، kN/kN

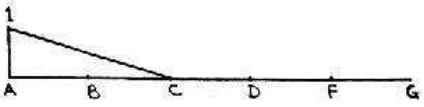


خط تأثیر S_D ، kN/kN

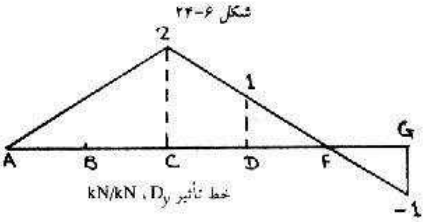
۶-۲۴ برای تیر نشان داده شده در شکل، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، D_y و F_y را ترسیم کنید.



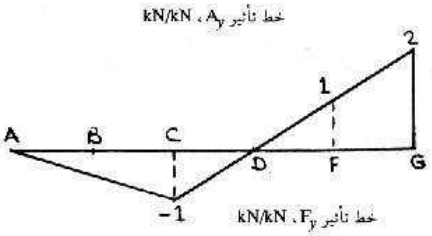
شکل ۶-۲۴



خط تأثیر A_y ، kN/kN

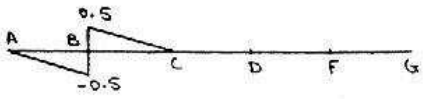


خط تأثیر D_y ، kN/kN

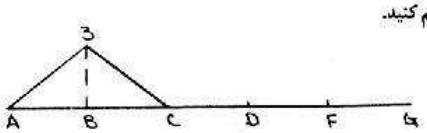


خط تأثیر F_y ، kN/kN

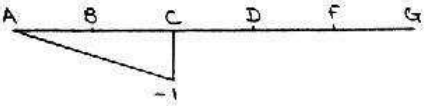
۶-۲۵ در تیر مسئلهٔ ۶-۲۴ ، خطوط تأثیر نیروی برشی (S_B) و لنگر خمشی (M_B) در مقطع **B** و نیروی برشی (S_C) مفصل داخلی **C** را ترسیم کنید.



خط تأثیر S_B ، kN/kN

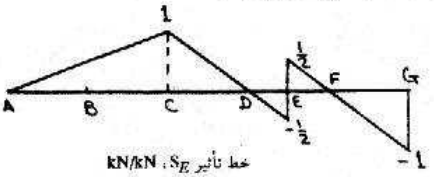


خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

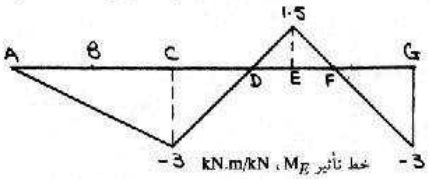


خط تأثیر S_C ، kN/kN

۶-۲۶ در تیر مسئلهٔ ۶-۲۴ خطوط تأثیر نیروی برشی (S_E) و لنگر خمشی (M_E) در مقطع E را ترسیم کنید.



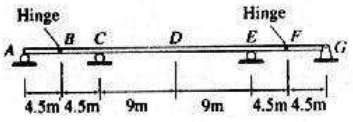
خط تأثیر S_E ، kN/kN



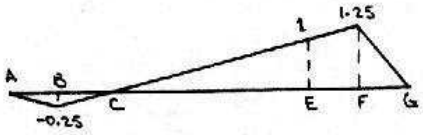
خط تأثیر M_E ، kN.m/kN

برای تیرهای نشان داده شده در مسایل ۶-۲۷ و ۶-۲۸ خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، C_y ، E_y و G_y را ترسیم کنید.

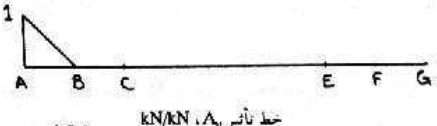
۶-۲۷



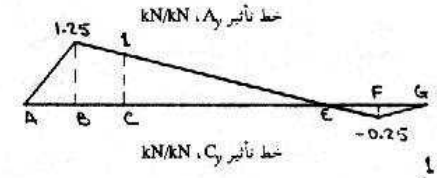
شکل ۶-۲۷



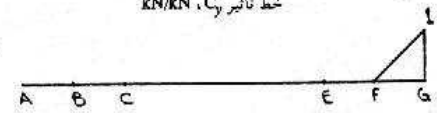
خط تأثیر E_y ، kN/kN



خط تأثیر A_y ، kN/kN

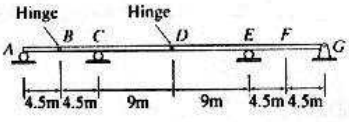


خط تأثیر C_y ، kN/kN

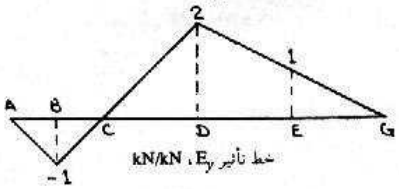


خط تأثیر G_y ، kN/kN

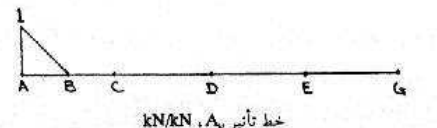
۶-۲۸



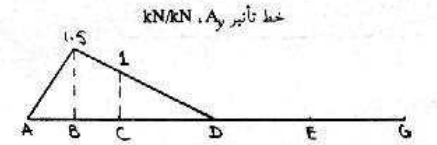
شکل ۶-۲۸



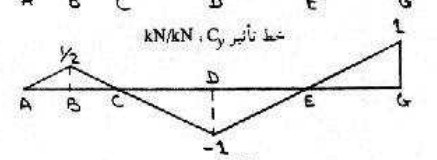
خط تأثیر E_y ، kN/kN



خط تأثیر A_y ، kN/kN

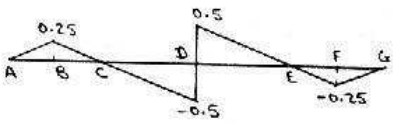


خط تأثیر C_y ، kN/kN

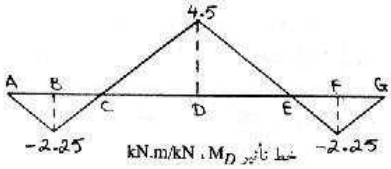


خط تأثیر G_y ، kN/kN

۶-۲۹ برای تیر نشان داده شده در مسئلهٔ ۶-۲۷، خطوط تأثیر نیروی برشی (S_D) و لنگر خمشی (M_D) در نقطهٔ D را ترسیم کنید.

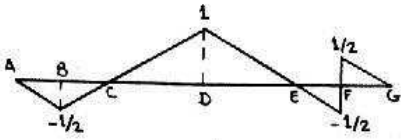


خط تأثیر S_D ، kN/kN

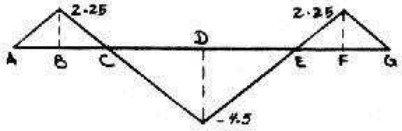


خط تأثیر M_D ، kN.m/kN

۶-۳۰ برای تیر نشان داده شده در مسئلهٔ ۶-۲۸، خطوط تأثیر نیروی برشی (S_F) و لنگر خمشی (M_F) در نقطهٔ F را ترسیم کنید.

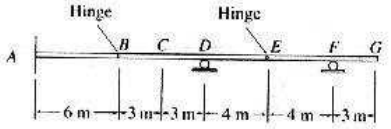


خط تأثیر S_F ، kN/kN

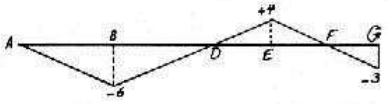


خط تأثیر M_F ، kN.m/kN

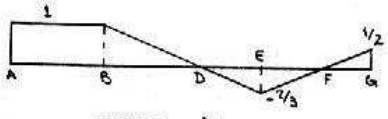
۶-۳۱ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، D_y ، F_y و M_A را ترسیم کنید.



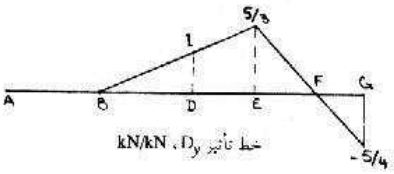
شکل ۶-۳۱



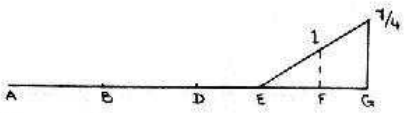
خط تأثیر M_A ، kN.m/kN



خط تأثیر A_y ، kN/kN

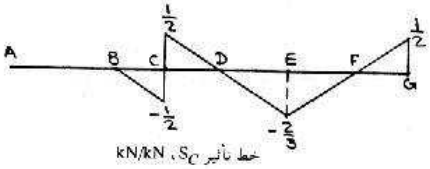


خط تأثیر D_y ، kN/kN

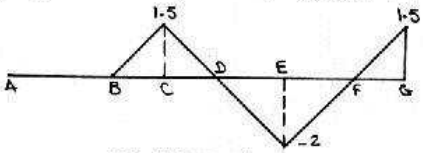


خط تأثیر F_y ، kN/kN

۶-۳۲ برای تیر نشان داده شده در مسئلهٔ ۶-۳۱، خطوط تأثیر نیروی برشی (S_C) و لنگر خمشی (M_C) در نقطهٔ C را ترسیم کنید.

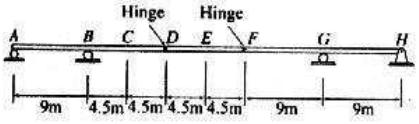


خط تأثیر S_C ، kN/kN

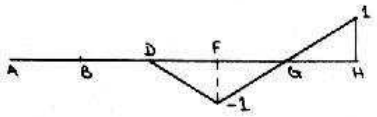


خط تأثیر M_C ، kN.m/kN

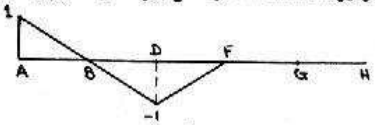
۶-۳۳ در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، B_y ، G_y و H_y را ترسیم کنید.



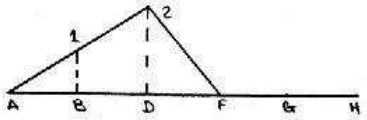
شکل ۶-۳۳



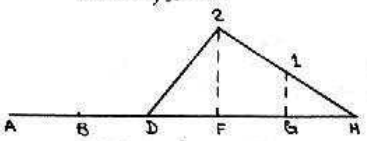
خط تأثیر H_y ، kN/kN



خط تأثیر A_y ، kN/kN

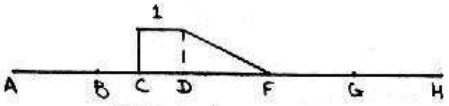


خط تأثیر B_y ، kN/kN

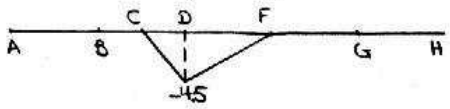


خط تأثیر G_y ، kN/kN

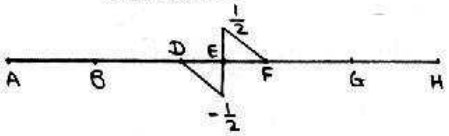
۶-۳۴ برای تیر نشان داده شده در مسئلهٔ ۶-۳۳، خطوط تأثیر نیروی برشی (S_C) ، لنگر خمشی (M_C) در نقطهٔ C و نیروی برشی (S_E) و لنگر خمشی (M_E) در مقطع E را ترسیم کنید.



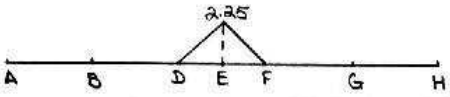
خط تأثیر S_C ، kN/kN



خط تأثیر M_C ، kN.m/kN

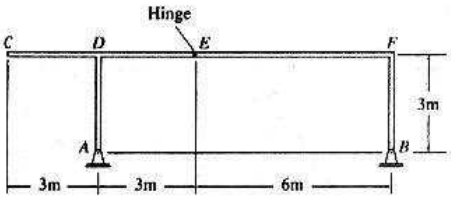


خط تأثیر S_E ، kN/kN

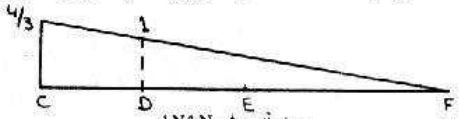


خط تأثیر M_E ، kN.m/kN

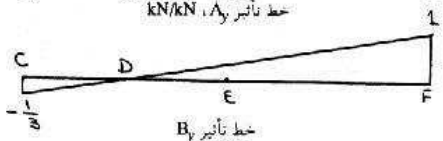
۶-۳۵ در قاب نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، A_x ، B_y و B_x را ترسیم کنید.



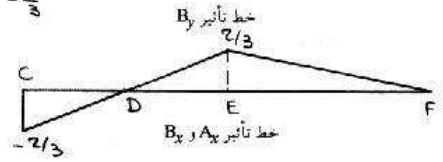
شکل ۶-۳۵



خط تأثیر A_y ، kN/kN

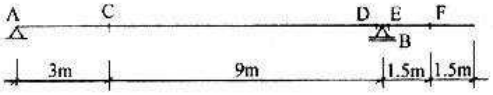


خط تأثیر B_y

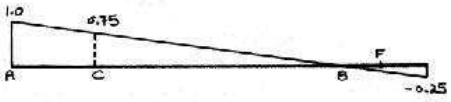


خط تأثیر B_x و A_x

۶-۳۶ برای تیر نشان داده شده در شکل، خطوط تأثیر M_F ، M_E ، M_D ، M_C ، V_F ، V_E ، V_D ، V_C ، R_A و R_B را رسم کنید. (نقاط D و E به فاصلهٔ ε از نقطهٔ B قرار دارند.)



شکل ۶-۳۶



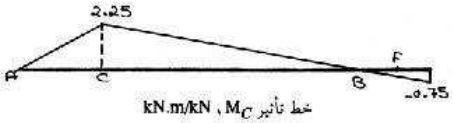
خط تأثیر R_A ، kN/kN



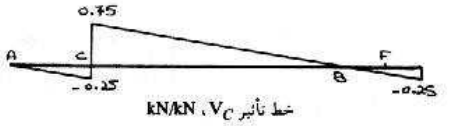
خط تأثیر V_F ، kN/kN



خط تأثیر R_B ، kN/kN



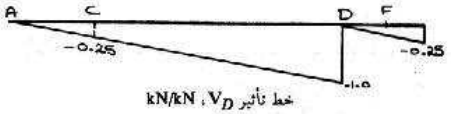
خط تأثیر M_C ، kN.m/kN



خط تأثیر V_C ، kN/kN



خط تأثیر M_E و M_D ، kN.m/kN



خط تأثیر V_D ، kN/kN

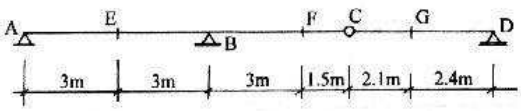


خط تأثیر M_F ، kN.m/kN

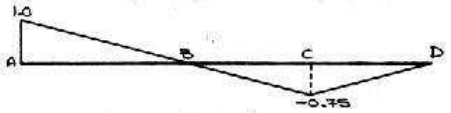


خط تأثیر V_E ، kN/kN

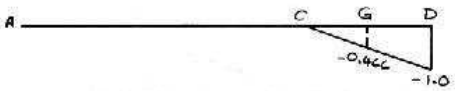
۶-۳۷ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر R_A ، R_B ، R_D ، V_E ، V_F ، V_D ، V_G ، M_E و M_F را رسم کنید.



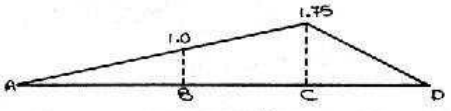
شکل ۶-۳۷



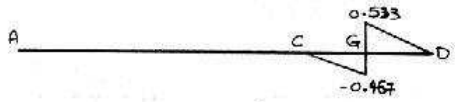
خط تأثیر R_A ، kN/kN



خط تأثیر V_D ، kN/kN



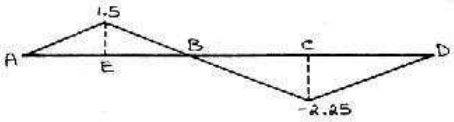
خط تأثیر R_B ، kN/kN



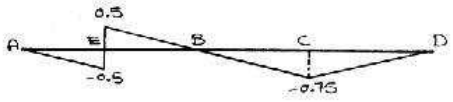
خط تأثیر V_G ، kN/kN



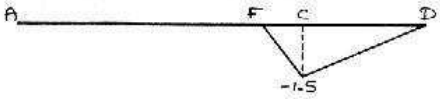
خط تأثیر R_D ، kN/kN



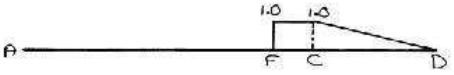
خط تأثیر M_E ؛ kN.m/kN



خط تأثیر V_E ؛ kN/kN

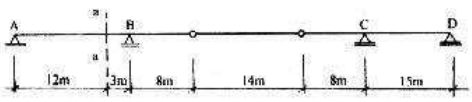


خط تأثیر M_F ؛ kN.m/kN

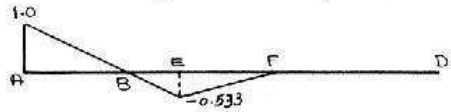


خط تأثیر V_F ؛ kN/kN

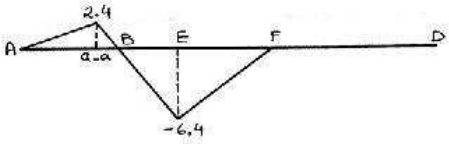
۶-۳۸ برای سیستم نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر R_A ، R_B و $M_{a\text{-}a}$ را رسم کنید. (بار واحد از A تا D حرکت می‌کند.)



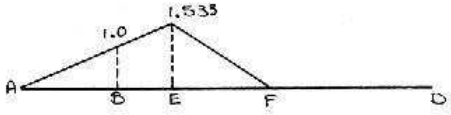
شکل ۶-۳۸



خط تأثیر R_A ؛ kN/kN

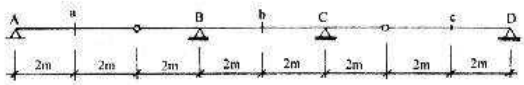


خط تأثیر $M_{a\text{-}a}$ ؛ kN.m/kN

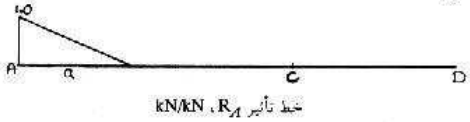


خط تأثیر R_B ؛ kN/kN

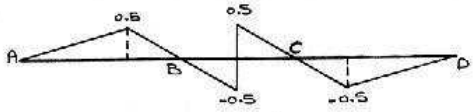
۶-۳۹ برای سیستم نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر R_A ، R_B ، R_C ، R_D ، M_B ، M_C ، V_a ، M_a ، V_b ، M_b ، V_c و M_c را رسم کنید.



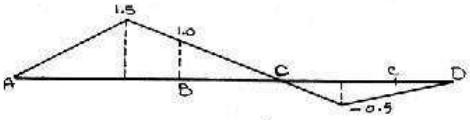
شکل ۶-۳۹



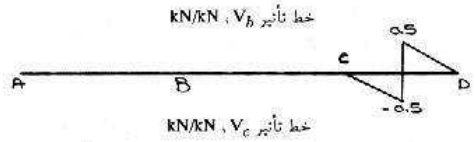
خط تأثیر R_A ؛ kN/kN



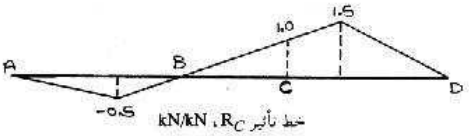
خط تأثیر V_b ؛ kN/kN



خط تأثیر R_B ؛ kN/kN



خط تأثیر V_c ؛ kN/kN



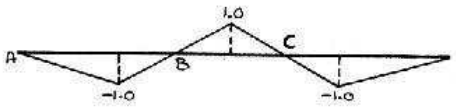
خط تأثیر R_C ؛ kN/kN



خط تأثیر M_a ؛ kN.m/kN



خط تأثیر R_D ؛ kN/kN



خط تأثیر M_b ، kN.m/kN

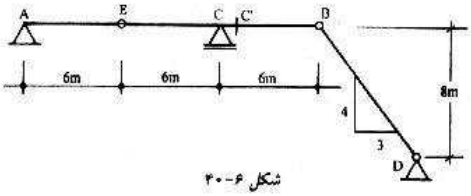


خط تأثیر M_c ، kN.m/kN

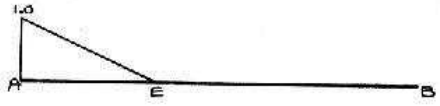


خط تأثیر V_a ، kN/kN

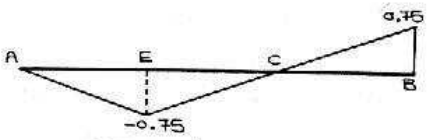
۶-۴۰ خطوط تأثیر A_y ، D_x ، V_C و M_C را برای سیستم نشان داده شده در شکل ترسیم کنید. بار واحد از A تا B حرکت می‌کند.



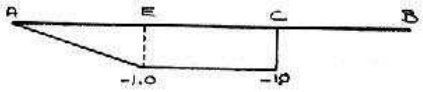
شکل ۶-۴۰



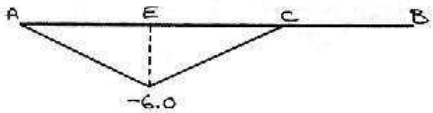
خط تأثیر A_y ، kN/kN



خط تأثیر D_H ، kN/kN

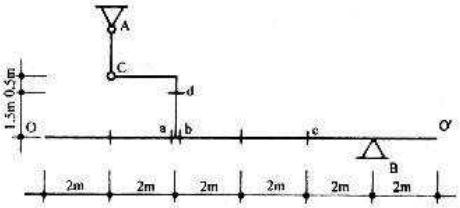


خط تأثیر V_C ، kN/kN

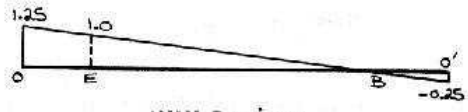


خط تأثیر M_C ، kN.m/kN

۶-۴۱ خطوط تأثیر R_A ، R_B ، V_a ، M_a ، V_b ، M_b ، V_c ، M_c ، V_d و M_d را برای سیستم نشان داده شده در شکل زیر ترسیم کنید. بار واحد از O تا O′ حرکت می‌کند.



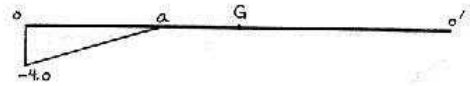
شکل ۶-۴۱



خط تأثیر R_A ، kN/kN



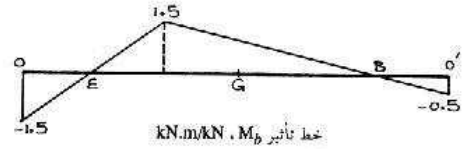
خط تأثیر R_B ، kN/kN



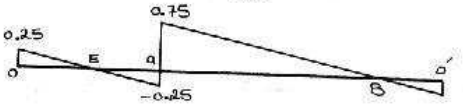
خط تأثیر M_a ، kN.m/kN



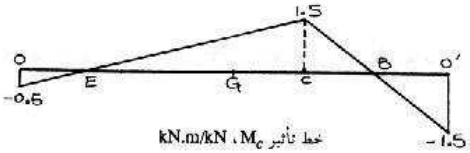
خط تأثیر V_a ، kN/kN



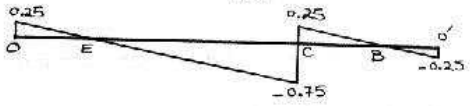
خط تأثیر M_b ، kN.m/kN



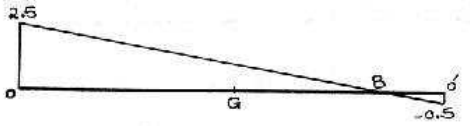
خط تأثیر V_b ، kN/kN



خط تأثیر M_c ، kN.m/kN



خط تأثیر V_c ، kN/kN

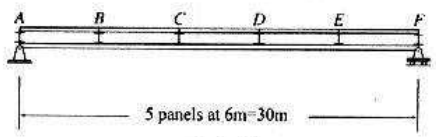


خط تأثیر M_d ، kN.m/kN

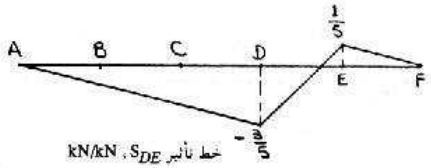


خط تأثیر V_d ، kN/kN

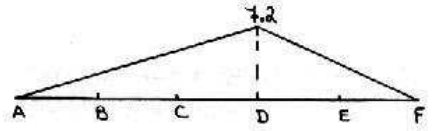
۶-۴۲ برای شاهتیر کف نشان داده شده در شکل، خطوط تأثیر برش (S_{DE}) دهانهٔ DE و لنگر خمشی (M_D) مقطع D را ترسیم کنید.



شکل ۶-۴۲

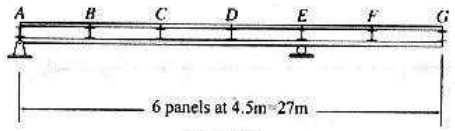


خط تأثیر S_{DE} ، kN/kN

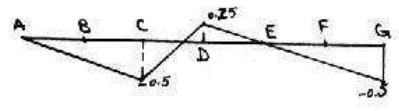


خط تأثیر M_D ، kN.m/kN

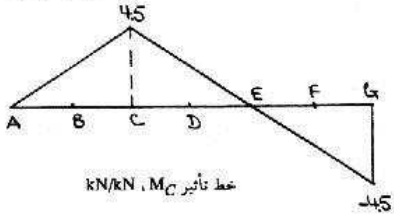
۶-۴۳ در شاهتیر کف نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر برش (S_{CD}) دهانهٔ CD و لنگر خمشی (M_C) مقطع C را ترسیم کنید.



شکل ۶-۴۳



خط تأثیر S_{CD} ، kN/kN

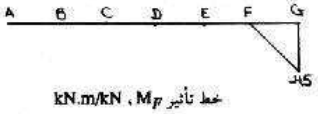


خط تأثیر M_C ، kN/kN

۶-۴۴ برای شاهتیر کف مسئلهٔ ۶-۴۳ ، خطوط تأثیر برش (S_{EF}) دهانهٔ EF و لنگر خمشی (M_F) مقطع F را ترسیم کنید.

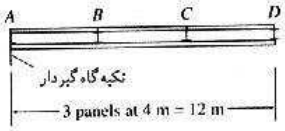


خط تأثیر S_{EF} ، kN/kN

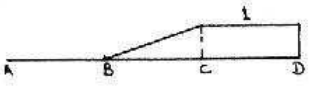


خط تأثیر M_F ، kN.m/kN

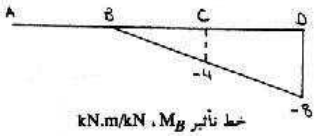
۶-۴۵ در شاهتیر کف نشان داده شده در شکل، خطوط تأثیر برش (S_{BC}) دهانهٔ BC و لنگر خمشی (M_B) مقطع B را ترسیم کنید.



شکل ۶-۴۵

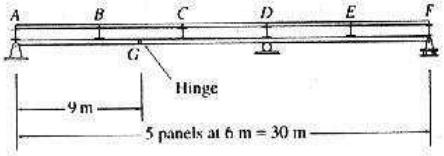


خط تأثیر S_{BC} ، kN/kN

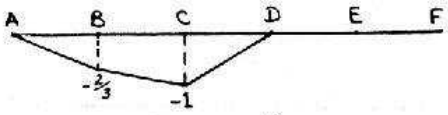


خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

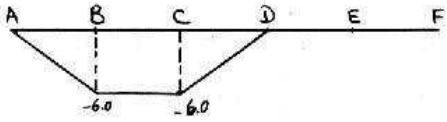
۶-۴۶ برای شاهتیر کف نشان داده شده، خطوط تأثیر برش (S_{CD}) دهانهٔ CD و لنگر خمشی (M_D) مقطع D را ترسیم کنید.



شکل ۶-۴۶

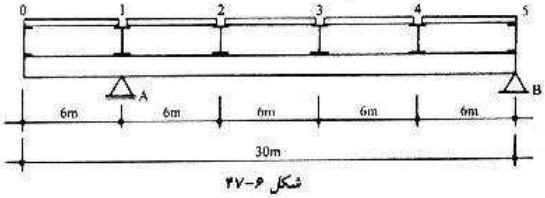


خط تأثیر S_{CD} ، kN/kN

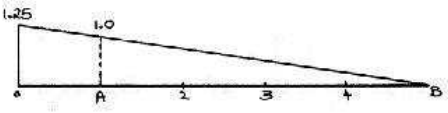


خط تأثیر M_D ، kN.m/kN

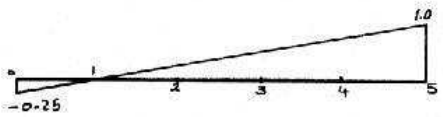
۶-۴۷ خطوط تأثیر را برای R_A ، R_B ، $S_{۱-۲}$ و $M_۲$ شاهتیر نشان داده شده در شکل زیر رسم کنید.



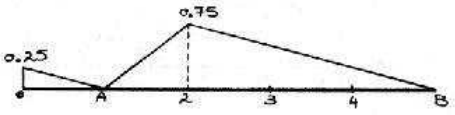
شکل ۶-۴۷



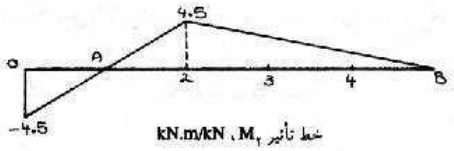
خط تأثیر R_A ، kN/kN



خط تأثیر R_B ، kN/kN

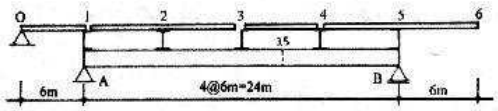


خط تأثیر $S_{۱-۲}$ ، kN/kN

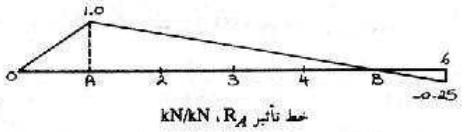


خط تأثیر $M_۲$ ، kN.m/kN

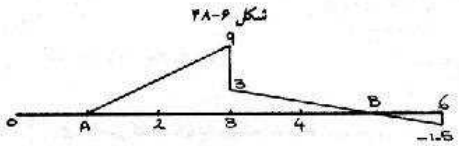
۶-۴۸ برای شاهتیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر R_A ، $S_{۲-۲}$ ، $S_{۲-۳}$ ، $M_۲$ و $M_۳$ را ترسیم کنید.



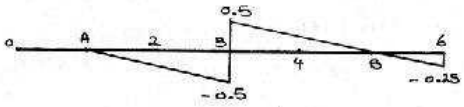
شکل ۶-۴۸



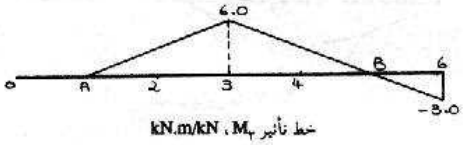
خط تأثیر R_A ، kN/kN



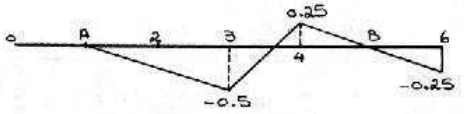
خط تأثیر $M_۲$ ، kN.m/kN



خط تأثیر $S_{۲-۳}$ ، kN/kN

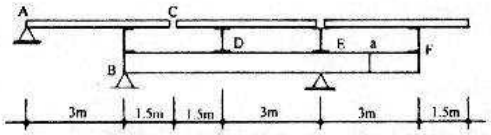


خط تأثیر $M_۳$ ، kN.m/kN

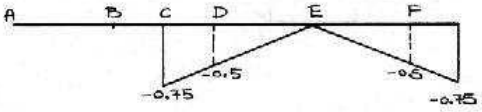


خط تأثیر $S_{۲-۴}$ ، kN/kN

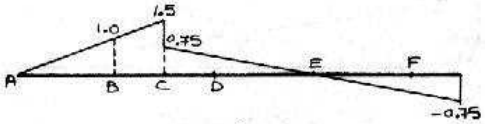
۶-۴۹ برای شاهتیر نشان داده شده در شکل زیر خطوط تأثیر را برای توابع M_E ، M_a ، M_D ، V_{DE} ، R_E و R_B ترسیم کنید.



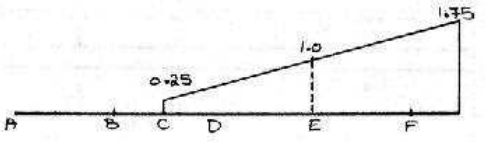
شکل ۶-۴۹



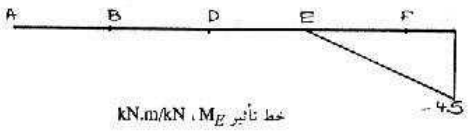
خط تأثیر S_{DE} ، kN/kN



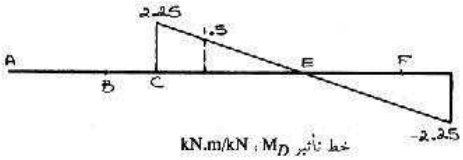
خط تأثیر R_B ، kN/kN



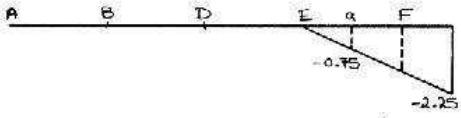
خط تأثیر R_E ، kN/kN



خط تأثیر M_E ، kN.m/kN

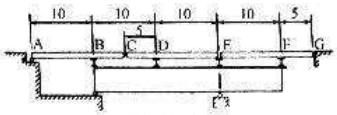


خط تأثیر M_D ، kN.m/kN

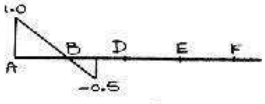


خط تأثیر M_a ، kN.m/kN

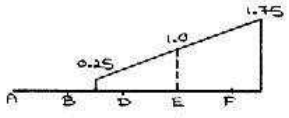
۶-۵۰ برای شاهتیر کف نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر R_A ، R_E ، S_{DE} ، M_D و M_E را ترسیم کنید.



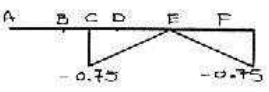
شکل ۶-۵۰



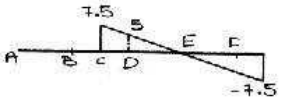
خط تأثیر R_A ، kN/kN



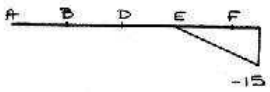
خط تأثیر R_E ، kN/kN



خط تأثیر S_{DE} ، kN/kN

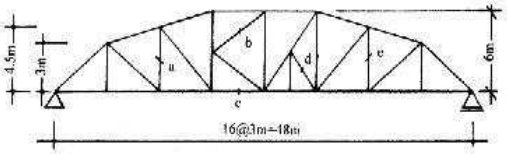


خط تأثیر M_D ، kN.m/kN

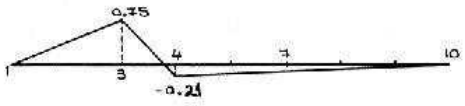


خط تأثیر M_E ، kN.m/kN

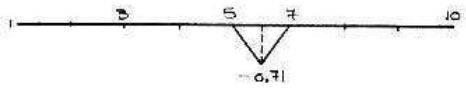
۶-۵۱ برای اعضای مشخص شده در خرپای شکل زیر، خطوط تأثیر نیروی محوری را ترسیم کنید.



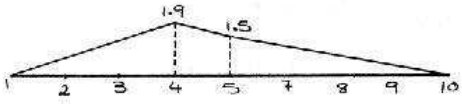
شکل ۶-۵۱



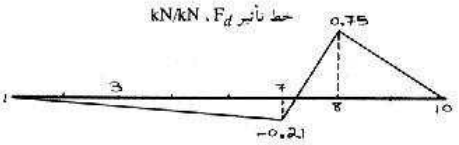
خط تأثیر F_a ، kN/kN



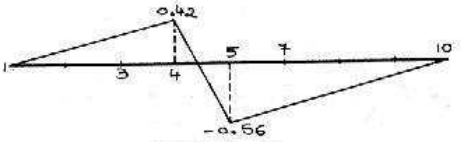
خط تأثیر F_d ، kN/kN



خط تأثیر F_c ، kN/kN

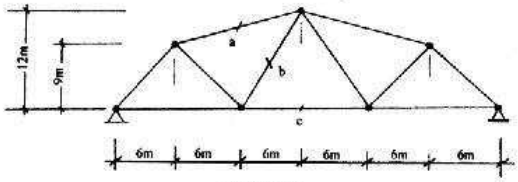


خط تأثیر F_e ، kN/kN

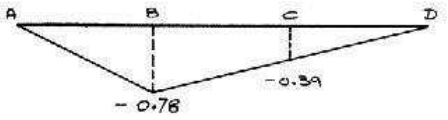


خط تأثیر F_b ، kN/kN

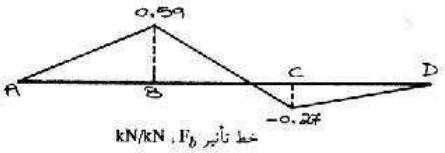
۶-۵۲ برای اعضای مشخص شده در خرپای شکل زیر، خطوط تأثیر نیروی محوری را ترسیم کنید.



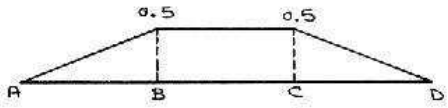
شکل ۶-۵۲



خط تأثیر F_a ، kN/kN



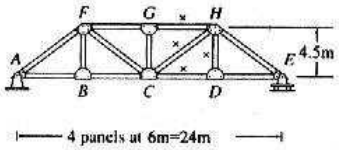
خط تأثیر F_b ، kN/kN



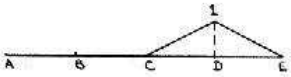
خط تأثیر F_c ، kN/kN

برای خرپاهای نشان داده شده در مسایل ۶-۵۳ تا ۶-۵۹ ، خطوط تأثیر نیروی محوری اعضای مشخص شده با علامت «x» را ترسیم کنید.

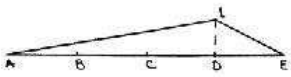
۶-۵۳



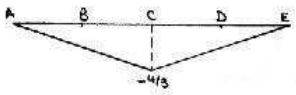
شکل ۶-۵۳



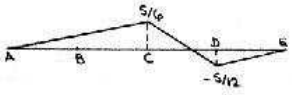
خط تأثیر F_{DH} ، kN/kN



خط تأثیر F_{CD} ، kN/kN

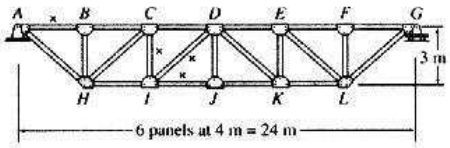


خط تأثیر F_{GH} ، kN/kN

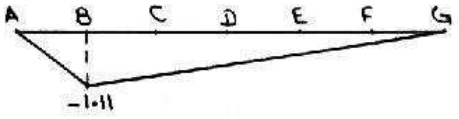


خط تأثیر F_{CH} ، kN/kN

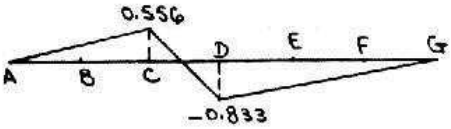
۶-۵۴



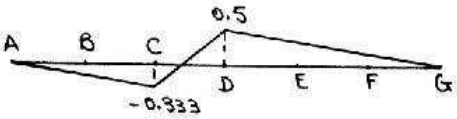
شکل ۶-۵۴



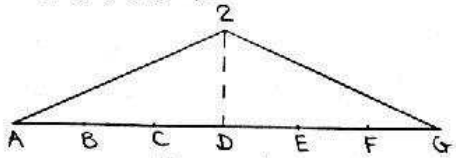
خط تأثیر F_{AB} ، kN/kN



خط تأثیر F_{DI} ، kN/kN

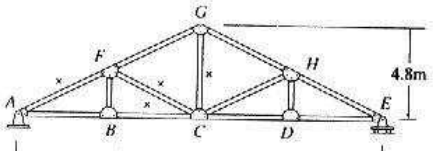


خط تأثیر F_{CI} ، kN/kN

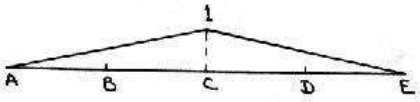


خط تأثیر F_{II} ، kN/kN

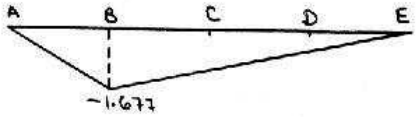
۵۵-۶



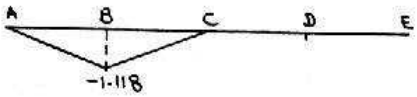
شکل ۶-۵۵



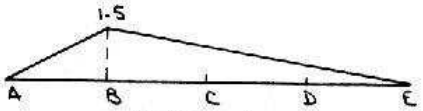
خط تأثیر F_{CG} ، kN/kN



خط تأثیر F_{AF} ، kN/kN

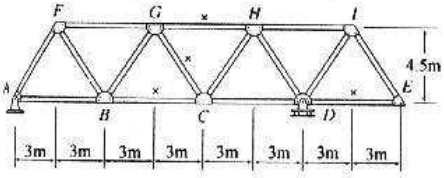


خط تأثیر F_{CF} ، kN/kN

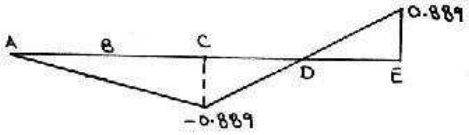


خط تأثیر F_{BC} ، kN/kN

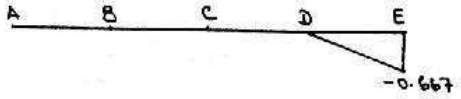
۵۶-۶



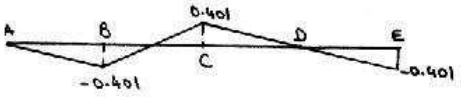
شکل ۶-۵۶



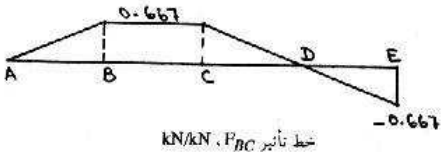
خط تأثیر F_{GH} ، kN/kN



خط تأثیر F_{DE} ، kN/kN

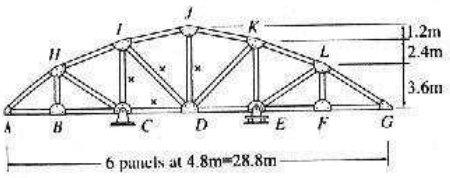


خط تأثیر F_{CG} ، kN/kN

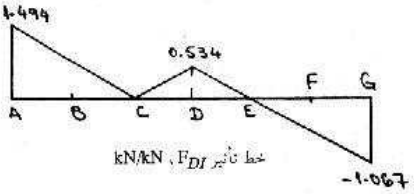


خط تأثیر F_{BC} ، kN/kN

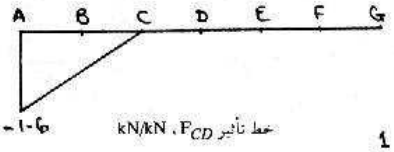
۵۷-۶



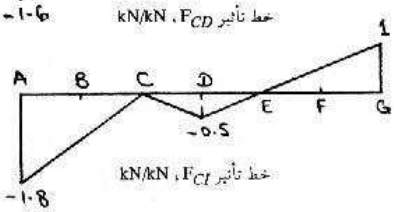
شکل ۶-۵۷



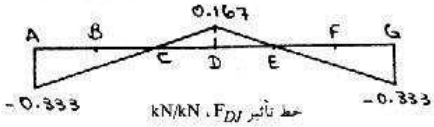
خط تأثیر F_{DI}، kN/kN



خط تأثیر F_{CD}، kN/kN

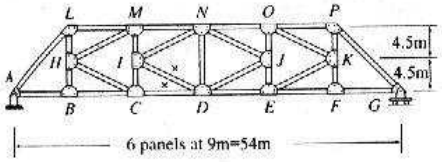


خط تأثیر F_{CI}، kN/kN

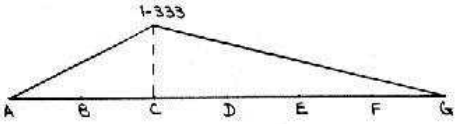


خط تأثیر F_{DI}، kN/kN

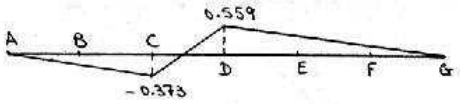
۵۸-۶



شکل ۶-۵۸

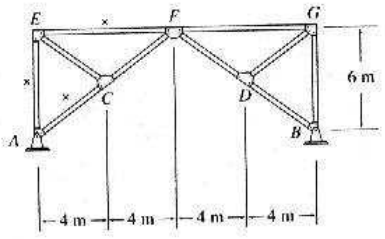


خط تأثیر F_{CD}

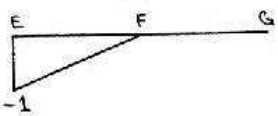


خط تأثیر F_{DI}

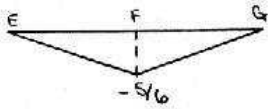
۵۹-۶



شکل ۶-۵۹



خط تأثیر F_{AE}، kN/kN



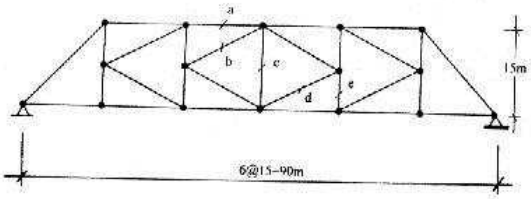
خط تأثیر F_{AC}، kN/kN



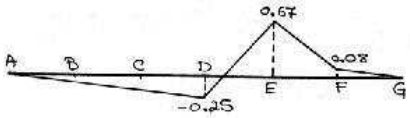
خط تأثیر F_{EF}، kN/kN

در خرپاهای نشان داده شده در مسایل ۶-۶۰ و ۶-۶۱ خط تأثیر نیروی محوری اعضای علامت زده شده را ترسیم کنید.

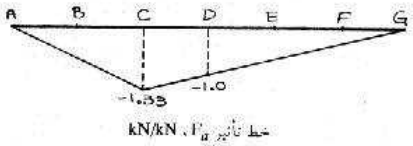
۶۰-۶



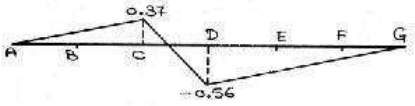
شکل ۶-۶۰



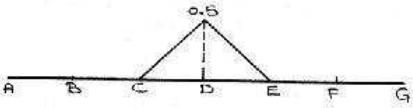
خط تأثیر F_e ، kN/kN



خط تأثیر F_a ، kN/kN

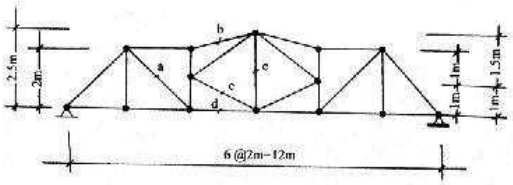


خط تأثیر F_b ، kN/kN

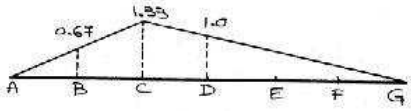


خط تأثیر F_c ، kN/kN

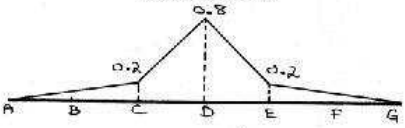
۶۱-۶



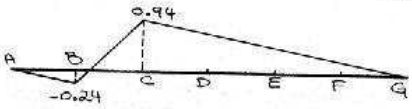
شکل ۶-۶۱



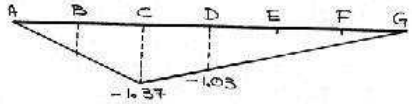
خط تأثیر F_d ، kN/kN



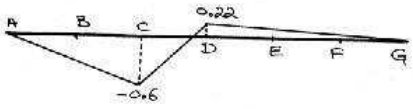
خط تأثیر F_e ، kN/kN



خط تأثیر F_a ، kN/kN



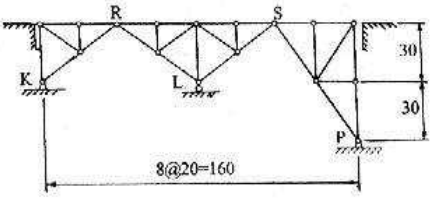
خط تأثیر F_b ، kN/kN



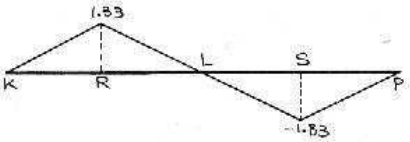
خط تأثیر F_c ، kN/kN

خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی سازه‌های نشان داده شده در مسایل ۶-۶۲ تا ۶-۶۵ را رسم کنید.

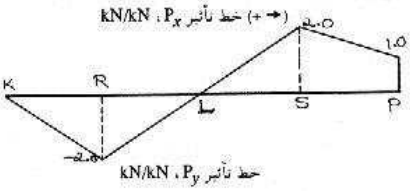
۶-۶۲



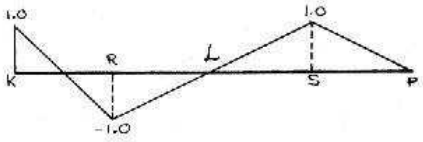
شکل ۶-۶۲



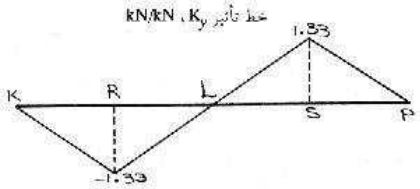
خط تأثیر P_x (+ →) kN/kN



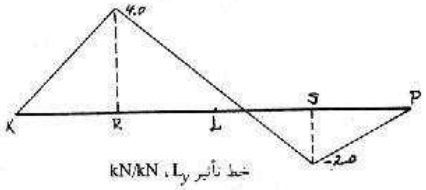
خط تأثیر P_y kN/kN



خط تأثیر K_y kN/kN

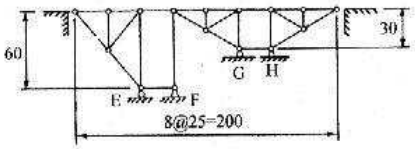


خط تأثیر K_x (+ →) kN/kN

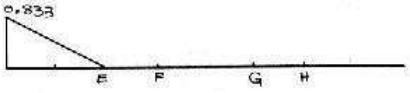


خط تأثیر L_y kN/kN

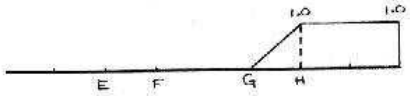
۶-۶۳



شکل ۶-۶۳



خط تأثیر H_x (+ →) kN/kN



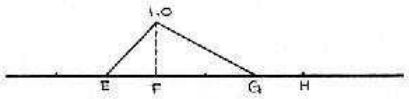
خط تأثیر H_y kN/kN



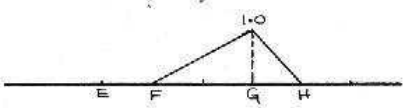
خط تأثیر E_y kN/kN



خط تأثیر F_x (+ →) kN/kN

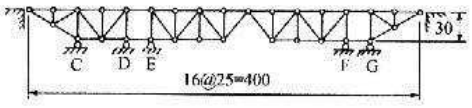


خط تأثیر F_y kN/kN



خط تأثیر G_y kN/kN

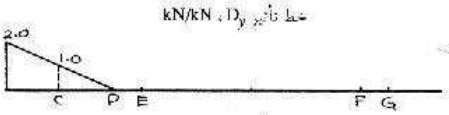
۶۴-۶



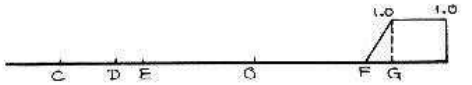
شکل ۶-۶۴



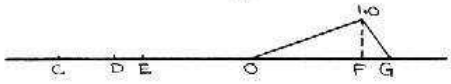
خط تأثیر D_y ، kN/kN



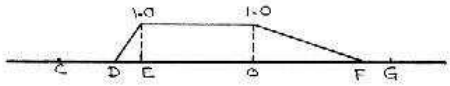
خط تأثیر C_y ، kN/kN



خط تأثیر G_y ، kN/kN

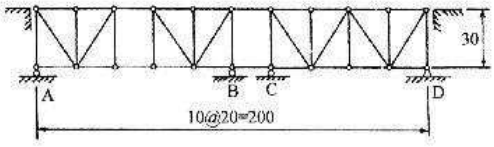


خط تأثیر F_y ، kN/kN

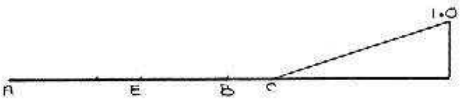


خط تأثیر E_y ، kN/kN

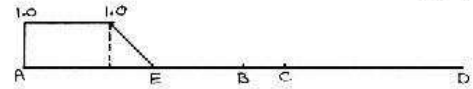
۶۵-۶



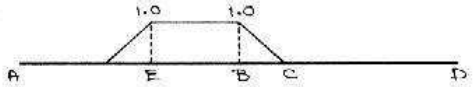
شکل ۶-۶۵



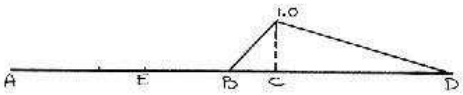
خط تأثیر D_y ، kN/kN



خط تأثیر A_y ، kN/kN

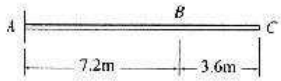


خط تأثیر B_y ، kN/kN



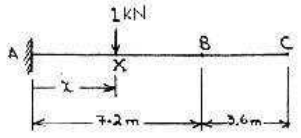
خط تأثیر C_y ، kN/kN

۶-۶۶ خط تأثیر تغییر مکان قائم نقطهٔ B را در تیر طرهٔ نشان داده شده در شکل زیر ترسیم کنید.



شکل ۶-۶۶

برای محاسبهٔ تغییر مکانها از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.

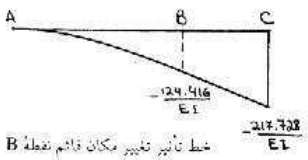


در قسمت AB ($0 \le x \le 7/2$ m):

$$\delta_{B\,X} = \frac{1}{6EI}\left(x^3 - 21/6x^2\right)$$

در قسمت BC ($7/2$ m $\le x \le 10/8$ m):

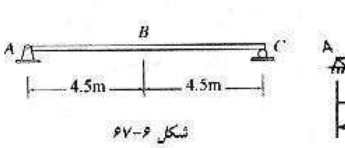
$$\delta_{B\,X} = -\frac{7/2}{EI}\left(3/6x - 8/64\right)$$



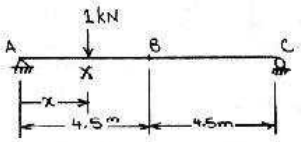
خط تأثیر تغییر مکان قائم نقطهٔ B

۶-۶۷ برای تیر سادهٔ نشان داده شده در شکل زیر، خط تأثیر تغییر مکان قائم نقطهٔ B را ترسیم کنید.

برای محاسبهٔ تغییر مکانها از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



شکل ۶-۶۷

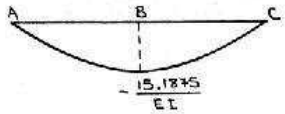


در قسمت AB ($0 \le x \le 4/5\ m$):

$$\delta_{BX} = \frac{1}{12EI}\left[x^3 - 60/75x\right]$$

در قسمت BC ($4/5\ m \le x \le 9\ m$):

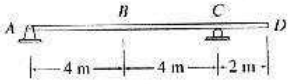
$$\delta_{BX} = \frac{1}{12EI}\left[(9-x)^3 - 60/75(9-x)\right]$$



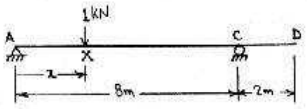
خط تأثیر تغییر مکان قائم B

۶-۶۸ در تیر نشان داده شده، خط تأثیر تغییر مکان قائم نقطهٔ D را ترسیم کنید.

برای محاسبهٔ تغییر مکانها از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



شکل ۶-۶۸

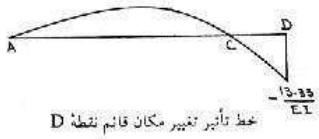


در قسمت AC ($0 \le x \le 8\ m$):

$$\delta_{DX} = \frac{x}{24EI}\left[64 - x^2\right]$$

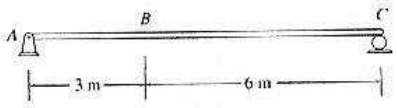
در قسمت CD ($8m \le x \le 10\ m$):

$$\delta_{DX} = \frac{1}{6EI}\left[-640 + 256x - 30x^2 + x^3\right]$$

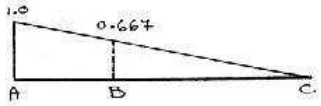


خط تأثیر تغییر مکان قائم نقطهٔ D

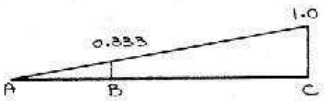
۶-۶۹ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی R_A ، R_C ، نیروی برشی S_B و لنگر خمشی M_B را ترسیم کنید.



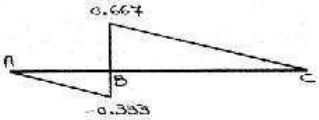
شکل ۶-۶۹



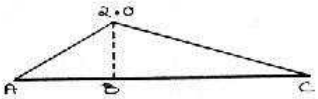
خط تأثیر R_A



خط تأثیر R_C

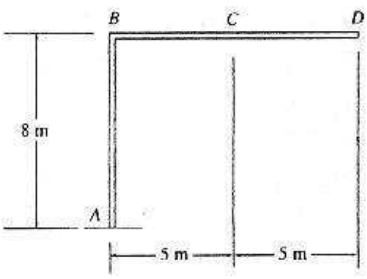


خط تأثیر S_B

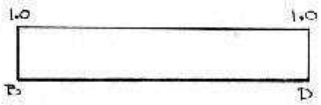


خط تأثیر M_B

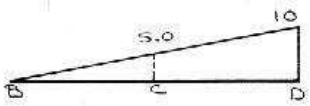
۶-۷۰ برای قاب نشان داده شده خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی قائم R_A و لنگر خمشی M_A ، نیروی برشی S_C و لنگر خمشی M_C را ترسیم کنید. (بار واحد در امتداد BD حرکت می‌کند.)



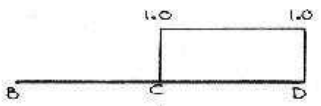
شکل ۶-۷۰



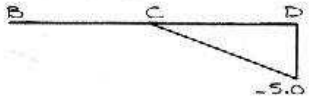
خط تأثیر R_A



خط تأثیر M_A (+)

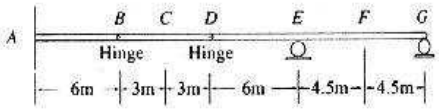


خط تأثیر S_C

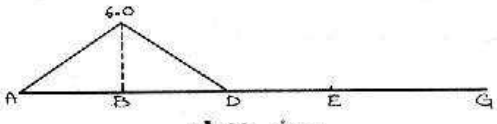


خط تأثیر M_C

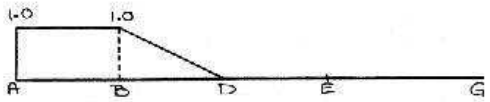
۶-۷۱ برای تیر نشان داده شده، خط تأثیر کلیهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی را ترسیم کنید.



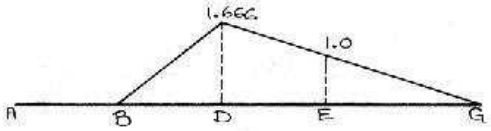
شکل ۶-۷۱



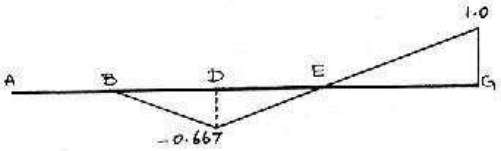
خط تأثیر M_A (+)



خط تأثیر R_A

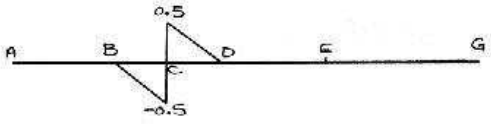


خط تأثیر R_E

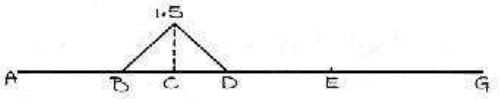


خط تأثیر R_G

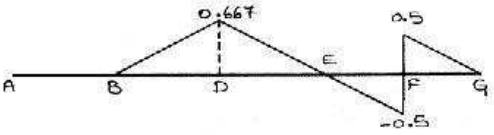
۶-۷۲ برای تیر نشان داده شده در مسئلهٔ قبل، خط تأثیر نیروهای برشی S_C و S_F و لنگرهای خمشی M_C و M_P را ترسیم کنید.



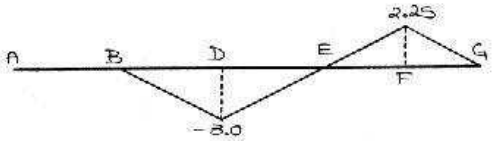
خط تأثیر S_C



خط تأثیر M_C

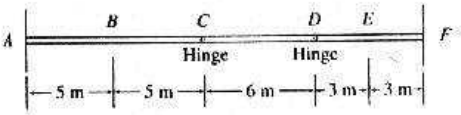


خط تأثیر S_F

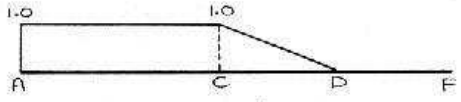


خط تأثیر M_P

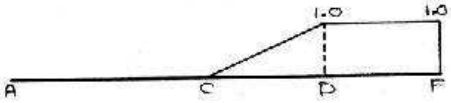
۶-۷۳ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی **A** و **F** را ترسیم کنید.



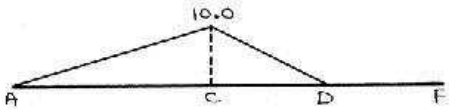
شکل ۶-۷۳



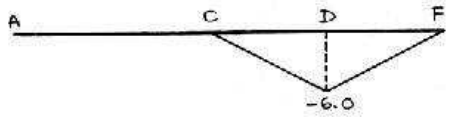
خط تأثیر R_A (+ ↑)



خط تأثیر R_F (+ ↑)

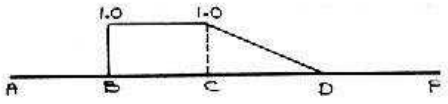


خط تأثیر M_A (+↻)

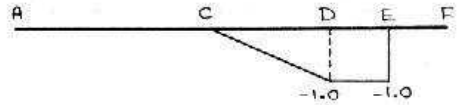


خط تأثیر M_F (+↻)

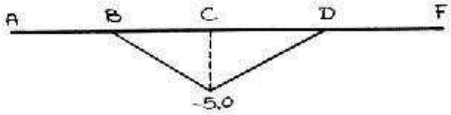
۶-۷۴ برای تیر نشان داده شده در مسئلهٔ قبل خط تأثیر نیروهای برشی S_B و S_E و لنگرهای خمشی M_B و M_E را به دست آورید.



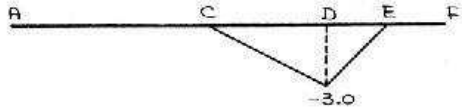
خط تأثیر S_B



خط تأثیر S_E

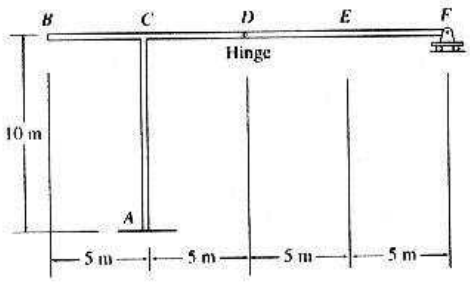


خط تأثیر M_B

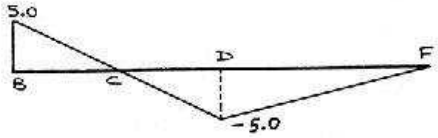


خط تأثیر M_E

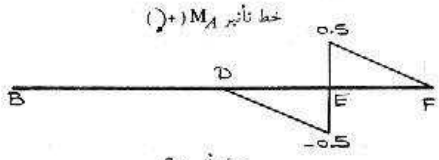
۶-۷۵ خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی قائم R_A و R_F و لنگر خمشی M_A ، نیروی برشی S_E و لنگر خمشی M_E را برای قاب نشان داده شده ترسیم کنید.



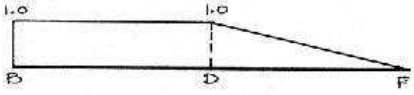
شکل ۶-۷۵



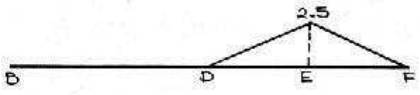
خط تأثیر M_A (+↻)



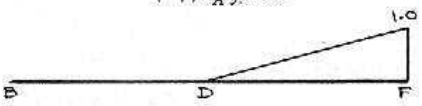
خط تأثیر S_E



خط تأثیر R_A (+ ↑)

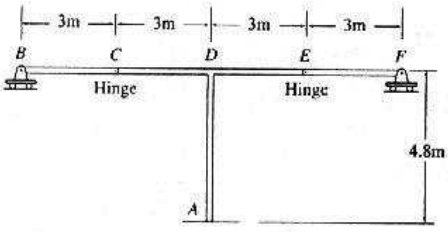


خط تأثیر M_E



خط تأثیر R_F (+ ↑)

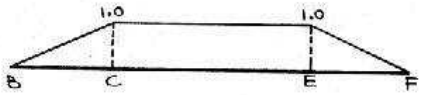
۶-۷۶ برای قاب نشان داده شده خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی قائم R_B ، R_A و لنگر خمشی M_A و نیروی برشی در مفصل داخلی C را ترسیم کنید.



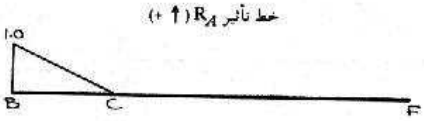
شکل ۶-۷۶



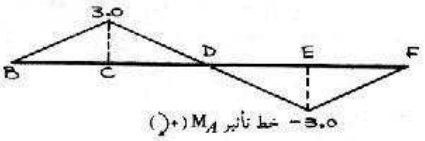
خط تأثیر S_C



خط تأثیر R_A (+ ↑)

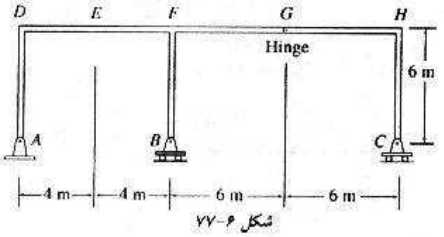


خط تأثیر R_B (+ ↑)

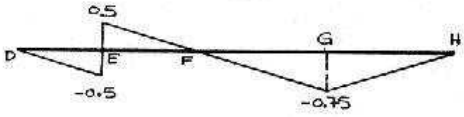


خط تأثیر M_A (+)

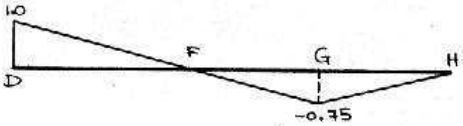
۶-۷۷ در قاب نشان داده شده، خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی قائم R_A ، R_B و R_C و نیروی برشی S_E و لنگر خمشی M_E را ترسیم کنید.



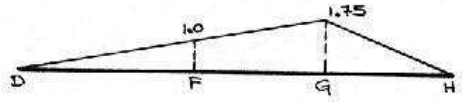
شکل ۶-۷۷



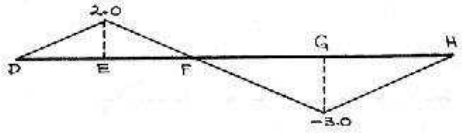
خط تأثیر S_E



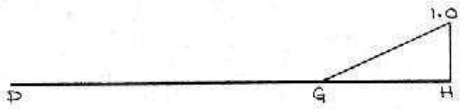
خط تأثیر R_A (+ ↑)



خط تأثیر R_B (+ ↑)

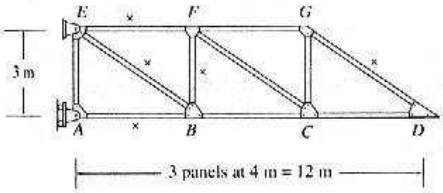


خط تأثیر M_E

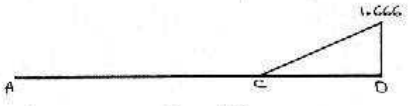


خط تأثیر R_C (+ ↑)

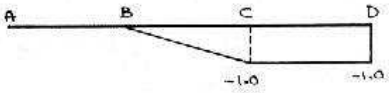
۶-۷۸ در خرپای نشان داده شده خط تأثیر نیروی محوری اعضایی را که با علامت ×۱ مشخص شده‌اند، ترسیم کنید. (بار زنده بر روی تار تحتانی خرپا حرکت می‌کند.)



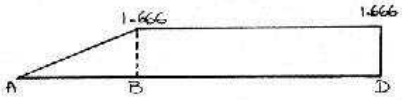
شکل ۶-۷۸



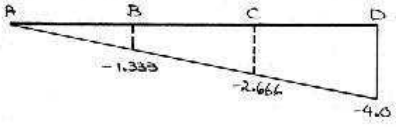
خط تأثیر F_{GD}



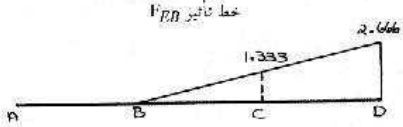
خط تأثیر F_{FB}



خط تأثیر F_{EB}

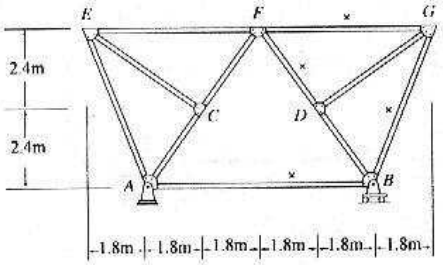


خط تأثیر F_{AB}

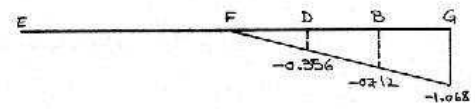


خط تأثیر F_{EF}

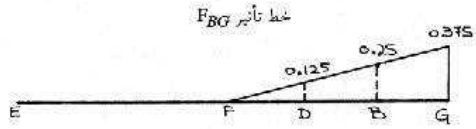
۶-۷۹ در خرپای نشان داده شده خط تأثیر نیروی محوری اعضایی را که با علامت ×۱ مشخص شده‌اند، ترسیم کنید. (بار زنده بر روی تار فوقانی خرپا حرکت می‌کند.)



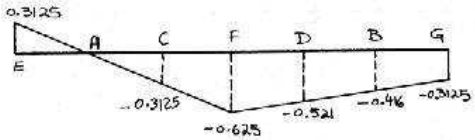
شکل ۶-۷۹



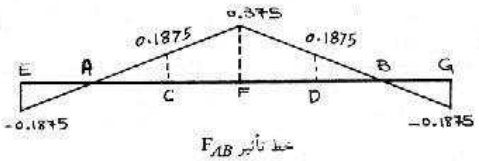
خط تأثیر F_{BG}



خط تأثیر F_{FG}

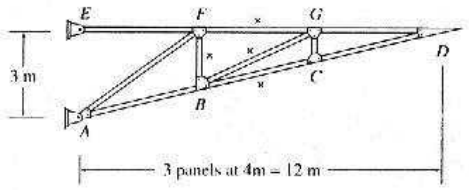


خط تأثیر F_{FD}

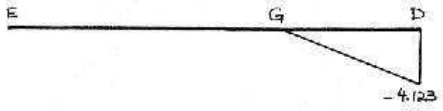


خط تأثیر F_{AB}

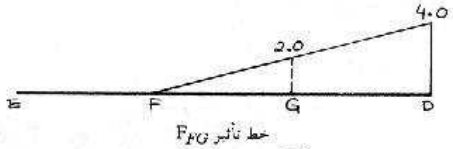
۶-۸۰ در خرپای نشان داده شده خط تأثیر نیروی محوری اعضایی را که با علامت «×» مشخص شده‌اند، ترسیم کنید. (بار زنده بر روی تار فوقانی خرپا حرکت می‌کند.)



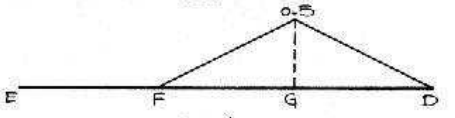
شکل ۶-۸۰



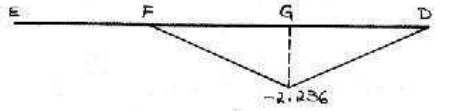
خط تأثیر F_{BC}



خط تأثیر F_{FG}

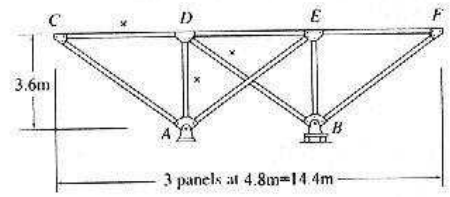


خط تأثیر F_{BF}

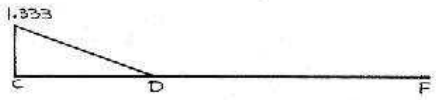


خط تأثیر F_{BG}

۶-۸۱ در خرپای شکل زیر خط تأثیر اعضایی را که با علامت «×» مشخص شده‌اند، ترسیم کنید. (بار زنده بر روی تار فوقانی خرپا حرکت می‌کند.)



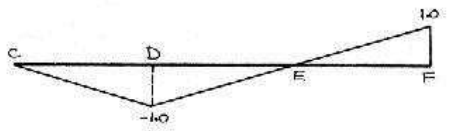
شکل ۶-۸۱



خط تأثیر F_{CD}



خط تأثیر F_{DB}

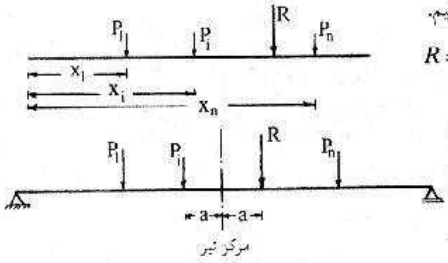


خط تأثیر F_{AD}

حداکثر مطلق لنگر خمشی در تیر ساده، تحت اثر مجموعه بارهای متمرکز

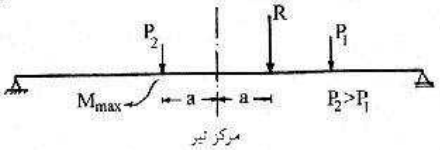
۱- برآیند مجموعه بارهای متمرکز و نقطه اثر این برآیند را مشخص می‌کنیم.

$$R = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

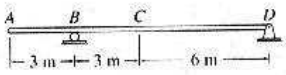


۲- مجموعهٔ بارها را بر روی تیر حرکت داده و همواره چنان قرار می‌دهیم که مرکز تیر در وسط برآیند R و یکی از نیروهای P_i قرار گیرد. لنگر خمشی را در زیر نقطه اثر بار P_i محاسبه می‌کنیم. به این ترتیب با جا به جا کردن بارها و قرار دادن کلیهٔ آنها در موقعیتی که شرح داده شد، حداکثر مطلق لنگر خمشی از بین تمامی مقادیر محاسبه شده، به دست خواهد آمد.

● اگر مجموعهٔ بارها، تنها شامل دو بار متمرکز باشد، حداکثر مطلق لنگر خمشی در زیر نقطه اثر بار بزرگتر پدید خواهد آمد، آن هم هنگامی که مرکز تیر در وسط فاصلهٔ نقطه اثر برآیند R و نیروی متمرکز بزرگتر واقع شود. در این حالت اگر یکی از بارهای متمرکز از روی تیر خارج شده باشد، لنگر خمشی حداکثر مطلق زمانی حاصل می‌شود که بار متمرکز بزرگتر درست در مرکز تیر واقع شده باشد.

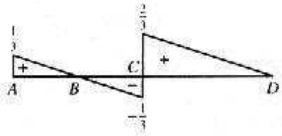


۷-۱ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقادیر حداکثر لنگرهای خمشی مثبت و منفی و حداکثر برشهای مثبت و منفی نقطهٔ C را تعیین کنید. بارهای وارد بر تیر مزبور عبارتند از: بار متمرکز زنده ۹۰ kN، بار گستردهٔ زنده به شدت ۴۰ kN/m و بار مردهٔ گسترده به شدت ۲۰ kN/m که روی کل تیر اعمال می‌شود.

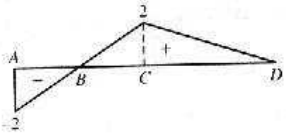


شکل ۷-۱

خطوط تأثیر نیروی برشی (S_C) و لنگر خمشی (M_C) برای نقطهٔ C در شکل مقابل نشان داده شده‌اند. ترتیب قرارگیری بارها بر روی تیر جهت دستیابی به $S^+_{C_{max}}$، $S^-_{C_{max}}$، $M^+_{C_{max}}$ و $M^-_{C_{max}}$ در شکلهای زیر نشان داده شده‌اند.



خط تأثیر S_C ، kN/kN



خط تأثیر M_C ، kN.m/kN

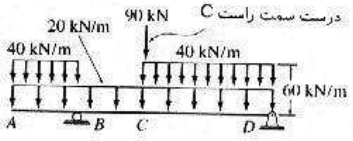
محاسبهٔ $S^+_{C_{max}}$ (حداکثر برش مثبت در C):

اثر بار زندهٔ متمرکز:
$$S_C = ۹۰ \left[\frac{۲}{۳}\right] = ۶۰ \quad kN$$

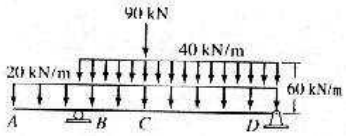
اثر بار زندهٔ گسترده:
$$S_C = ۴۰ \left[\left[\frac{۱}{۲}\right](۳)\left[\frac{۱}{۳}\right] + \left[\frac{۱}{۲}\right](۶)\left[\frac{۲}{۳}\right]\right] = ۱۰۰ \quad kN$$

اثر بار مردهٔ گسترده:
$$S_C = ۲۰ \left[\left[\frac{۱}{۲}\right](۳)\left[\frac{۱}{۳}\right] + \left[\frac{۱}{۲}\right](۳)\left[-\frac{۱}{۳}\right] + \left[\frac{۱}{۲}\right](۶)\left[\frac{۲}{۳}\right]\right] = ۴۰ \quad kN$$

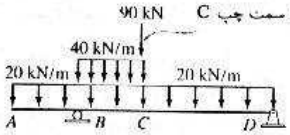
$$\blacktriangleright S^+_{C_{max}} = ۶۰ + ۱۰۰ + ۴۰ = ۲۰۰ \quad kN$$



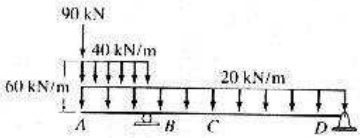
ترتیب بارهای وارده برای $S^{+}_{C_{max}}$



ترتیب بارهای وارده برای $M^{+}_{C_{max}}$



ترتیب بارهای وارده برای $S^{-}_{C_{max}}$



ترتیب بارهای وارده برای $M^{-}_{C_{max}}$

محاسبهٔ $S^{-}_{C_{max}}$ (حداکثر برش منفی در C):

$$S^{-}_{C_{max}} = ۹۰\left[-\frac{۱}{۳}\right] + ۴۰\left[\frac{۱}{۲}\right](۳)\left[-\frac{۱}{۳}\right] + ۲۰\left[\left[\frac{۱}{۲}\right](۳)\left[\frac{۱}{۳}\right] + \left[\frac{۱}{۲}\right](۳)\left[-\frac{۱}{۳}\right] + \left[\frac{۱}{۲}\right](۶)\left[\frac{۲}{۳}\right]\right] = -۱۰ \quad kN$$

$$\blacktriangleright S^{-}_{C_{max}} = -۱۰ \quad kN$$

محاسبهٔ $M^{+}_{C_{max}}$ (حداکثر لنگر خمشی مثبت در C):

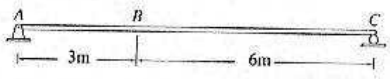
$$M^{+}_{C_{max}} = ۹۰(۲) + ۴۰\left[\frac{۱}{۲}\right](۹)(۲) + ۲۰\left[\left[\frac{۱}{۲}\right](۳)(-۲) + \left[\frac{۱}{۲}\right](۹)(۲)\right] = ۶۶۰ \quad kN.m \qquad \blacktriangleright M^{+}_{C_{max}} = ۶۶۰ \quad kN.m$$

محاسبهٔ $M^{-}_{C_{max}}$ (حداکثر لنگر خمشی منفی در C):

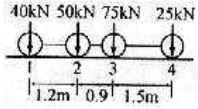
$$M^{-}_{C_{max}} = ۹۰(-۲) + ۴۰\left[\frac{۱}{۲}\right](۳)(-۲) + ۲۰\left[\left[\frac{۱}{۲}\right](۳)(-۲) + \left[\frac{۱}{۲}\right](۹)(۲)\right] = -۱۸۰ \quad kN.m \qquad \blacktriangleright M^{-}_{C_{max}} = -۱۸۰ \quad kN.m$$

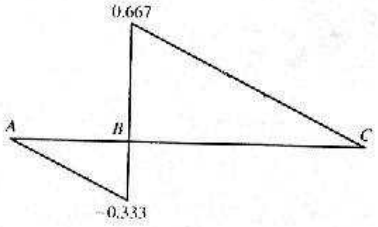
۲-۷ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، حداکثر نیروی برشی (S_B) نقطهٔ B را تحت اثر مجموعه بارهای متمرکز نشان داده شده، تعیین کنید.

مرقعیتهای مختلف مجموعه بارها برای رسیدن به حداکثر S_B در شکلهای زیر نشان داده شده‌اند.



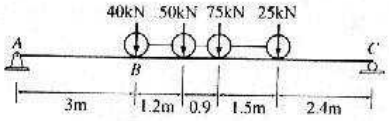
شکل ۲-۷



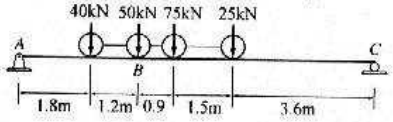


خط تأثیر S_B، kN/kN

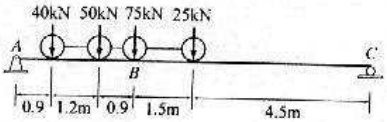
بارگذاری (۱):



بارگذاری (۲):



بارگذاری (۳):



بارگذاری (۱):

$$S_B = -۴۰(۶)\left[\frac{۱}{۹}\right] + ۵۰(۴/۸)\left[\frac{۱}{۹}\right] + ۷۵(۳/۹)\left[\frac{۱}{۹}\right] + ۲۵(۲/۴)\left[\frac{۱}{۹}\right] = ۹۲/۵$$

بارگذاری (۲):

$$S_{B_2} = -۴۰(۱/۸)\left[\frac{۱}{۹}\right] + ۵۰(۶)\left[\frac{۱}{۹}\right] + ۷۵(۵/۱)\left[\frac{۱}{۹}\right] + ۲۵(۳/۶)\left[\frac{۱}{۹}\right] = ۷۷/۸۳$$

بارگذاری (۳):

$$S_{B_3} = -۴۰(۰/۹)\left[\frac{۱}{۹}\right] - ۵۰(۲/۱)\left[\frac{۱}{۹}\right] + ۷۵(۶)\left[\frac{۱}{۹}\right] + ۲۵(۴/۵)\left[\frac{۱}{۹}\right] = ۴۶/۸۳$$

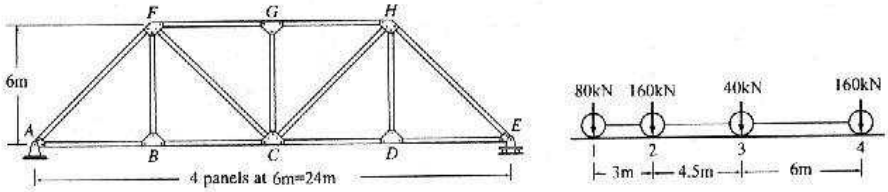
بارگذاری (۴):

$$S_{B_4} = -۵۰(۰/۶)\left[\frac{۱}{۹}\right] - ۷۵(۱/۵)\left[\frac{۱}{۹}\right] + ۲۵(۶)\left[\frac{۱}{۹}\right] = ۰/۸۳۳$$

از بین بارگذاریهای بالا، بارگذاری شمارهٔ (۱) حداکثر نیروی برشی را در نقطهٔ B ایجاد می‌کند.

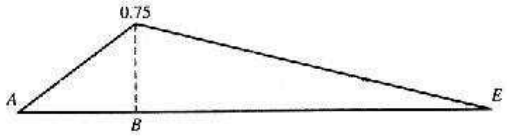
$$\blacktriangleright S_{B_{max}} = ۷۷/۸۳ \ kN$$

۳-۷ در خرپای وارن نشان داده شده، حداکثر نیروی محوری عضو BC را تحت اثر مجموعه بارهای متمرکز نشان داده شده، تعیین کنید.

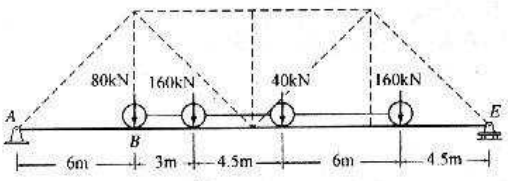


شکل ۳-۷

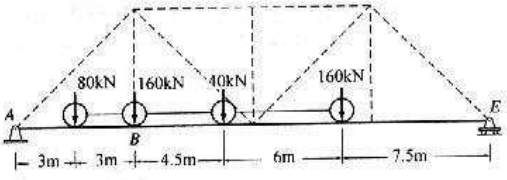
موقعیتهای مختلف بارها برای رسیدن به حداکثر F_{BC} در شکلهای زیر نشان داده شده‌اند.



خط تاثیر F_{BC}، kN/kN



بارگذاری (۱)



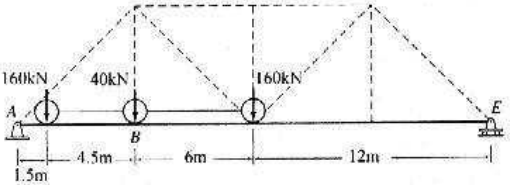
بارگذاری (۲)

بارگذاری (۱):

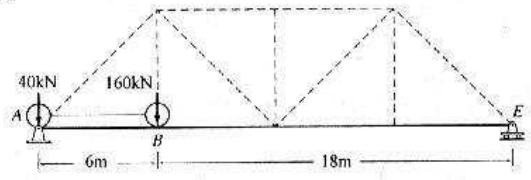
$$F_{BC} = \left[۸۰(۱۸) + ۱۶۰(۱۵) + ۴۰(۱۰/۵) + ۱۶۰(۴/۵)\right]\left[\frac{۱}{۲۴}\right] = ۲۰۷/۵ \ kN \quad (T)$$

بارگذاری (۲):

$$F_{BC} = ۸۰(۳)\left[\frac{۳}{۲۴}\right] + \left[۱۶۰(۱۸) + ۴۰(۱۳/۵) + ۱۶۰(۷/۵)\right]\left[\frac{۱}{۲۴}\right] = ۲۲۲/۵ \ kN \quad (T)$$



بارگذاری (۳)



بارگذاری (۴)

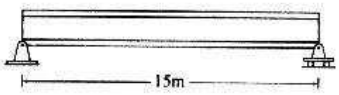
بارگذاری (۳):
$$F_{BC} = ۱۶۰(۱/۵)\left[\frac{۳}{۲۴}\right] + \left[۴۰(۱۸) + ۱۶۰(۱۲)\right]\left[\frac{۱}{۲۴}\right] = ۱۴۰ \quad kN \quad (T)$$

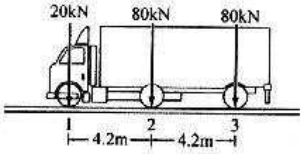
بارگذاری (۴):
$$F_{BC} = ۱۶۰(۱۸)\left[\frac{۱}{۲۴}\right] = ۱۲۰ \quad kN \quad (T)$$

از بین بارگذاریهای بالا، بارگذاری شمارهٔ (۲) بیشترین نیروی محوری را در عضو BC ایجاد می‌کند.

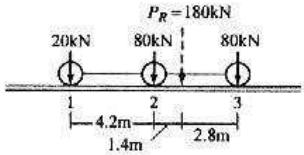
$$\blacktriangleright F_{BC} = ۲۲۲/۷۵ \; kN \quad (T)$$

۴-۷ در تیر نشان داده شده، حداکثر مطلق لنگر خمشی را تحت اثر بار کامیون HS۲۰-۴۴ تعیین کنید.





شکل ۴-۷



$$P_R = \sum P_i = ۲۰ + ۸۰ + ۸۰ = ۱۸۰ \quad kN$$

$$P_R(\bar{x}) = \sum P_i x_i$$

$$۱۸۰(\bar{x}) = ۲۰(۸/۴) + ۸۰(۴/۲)$$

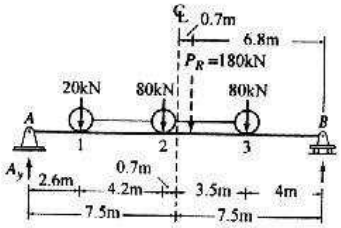
$$\bar{x} = ۲/۸ \, m$$

با توجه به این که دومین بار متمرکز ۸۰ kN به برآیند R نزدیکتر است، حداکثر مطلق لنگر خمشی، هنگامی ایجاد می‌شود که مرکز تیر در وسط فاصلهٔ بین دومین بار ۸۰ kN و برآیند R قرار گیرد.

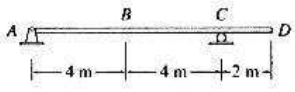
$$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \; : \; -A_y(۱۵) + ۱۸۰(۶/۸) = ۰ \Rightarrow \vec{A}_y = ۸۱/۶ \quad kN\uparrow$$

$$M_۲ = ۸۱/۶(۲/۶ + ۴/۲) - ۲۰(۴/۲) = ۴۷۰/۸۸ \quad kN.m = \text{حداکثر مطلق لنگر خمشی}$$

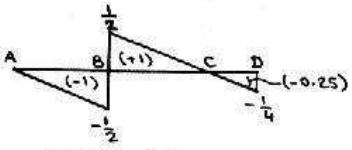
$$\blacktriangleright \; ۴۷۰/۸۸ \quad kN.m = \text{حداکثر مطلق لنگر خمشی}$$



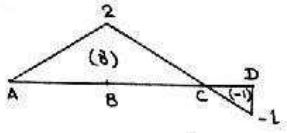
۵-۷ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقادیر حداکثر لنگرهای خمشی مثبت و منفی و حداکثر برشهای مثبت و منفی نقطهٔ B را تعیین کنید. بارهای وارد بر تیر عبارتند از: بار متمرکز زنده به شدت ۱۰۰ kN، بار گستردهٔ زنده به شدت ۵۰ kN/m و بار گستردهٔ مرده به شدت ۲۰ kN/m که روی کل تیر اعمال می‌شود.



شکل ۵-۷



خط تأثیر S_B، kN/kN



خط تأثیر M_B، kN.m/kN

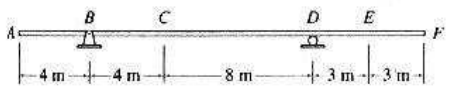
محاسبهٔ $S^+_{B_{max}}$ (حداکثر برش مثبت در B):
$$S^+_{B_{max}} = ۱۰۰\left[\frac{۱}{۲}\right] + ۵۰(۱) + ۲۰(-۰/۲۵) = ۹۵ \quad kN \qquad \blacktriangleright S^+_{B_{max}} = ۹۵ \quad kN$$

محاسبهٔ $S^-_{B_{max}}$ (حداکثر برش منفی در B):
$$S^-_{B_{max}} = ۱۰۰\left[-\frac{۱}{۲}\right] + ۵۰(-۱ - ۰/۲۵) + ۲۰(-۰/۲۵) = -۱۱۷/۵ \quad kN \qquad \blacktriangleright S^-_{B_{max}} = -۱۱۷/۵ \quad kN$$

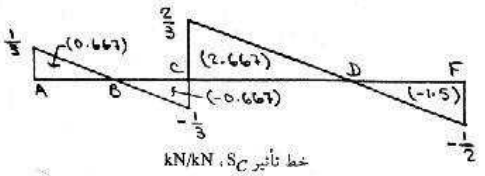
محاسبهٔ $M^+_{B_{max}}$ (حداکثر لنگر خمشی مثبت در B):
$$M^+_{B_{max}} = ۱۰۰(۲) + ۵۰(۸) + ۲۰(۸ - ۱) = ۷۴۰ \quad kN.m \qquad \blacktriangleright M^+_{B_{max}} = ۷۴۰ \quad kN.m$$

محاسبهٔ $M^-_{B_{max}}$ (حداکثر لنگر خمشی منفی در B):
$$M^-_{B_{max}} = ۱۰۰(-۱) + ۵۰(-۱) + ۲۰(۸ - ۱) = -۱۰ \quad kN.m \qquad \blacktriangleright M^-_{B_{max}} = -۱۰ \quad kN.m$$

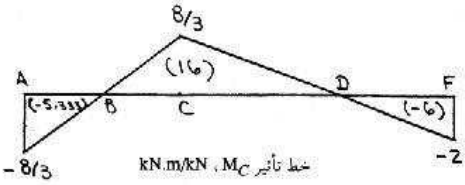
۷-۶ در تیر نشان داده شده، مقادیر حداکثر لنگرهای خمشی مثبت و منفی و حداکثر برشهای مثبت و منفی نقطهٔ C را تعیین کنید. بارهای وارد بر تیر عبارتند از: بار متمرکز زنده ۱۵۰ kN ، بار گستردهٔ زنده به شدت ۵۰ kN/m و بار گستردهٔ مرده به شدت ۲۵ kN/m که بر روی کل تیر اعمال می‌شود.



شکل ۷-۶



خط تأثیر S_C ، kN/kN



خط تأثیر M_C ، kN.m/kN

محاسبهٔ $S^{+}_{C_{max}}$ (حداکثر برش مثبت در C) :

$$S^{+}_{C_{max}} = ۱۵۰\left[\frac{۲}{۳}\right] + ۵۰(۰/۶۶۷ + ۲/۶۶۷) + ۲۵(۲/۶۶۷ - ۱/۵)$$

$$S^{+}_{C_{max}} = ۲۹۵/۹ \ kN \quad \blacktriangleright S^{+}_{C_{max}} = ۲۹۵/۹ \ kN$$

محاسبهٔ $S^{-}_{C_{max}}$ (حداکثر برش منفی در C) :

$$S^{-}_{C_{max}} = ۱۵۰\left[-\frac{۱}{۲}\right] + ۵۰(-۰/۶۶۷ - ۱/۵) + ۲۵(۲/۶۶۷ - ۱/۵) = -۱۵۴/۲ \ kN \quad \blacktriangleright S^{-}_{C_{max}} = -۱۵۴/۲ \ kN$$

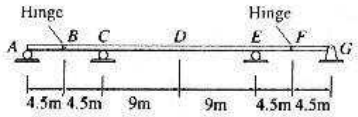
محاسبهٔ $M^{+}_{C_{max}}$ (حداکثر لنگر خمشی مثبت در C) :

$$M^{+}_{C_{max}} = ۱۵۰\left[\frac{۸}{۳}\right] + ۵۰(۱۶) + ۲۵(-۵/۳۳۳ + ۱۶ - ۶) = ۱۳۱۶/۷ \ kN.m \quad \blacktriangleright M^{+}_{C_{max}} = ۱۳۱۶/۷ \ kN.m$$

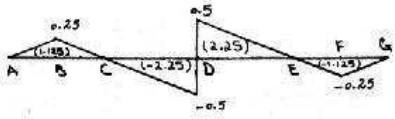
محاسبهٔ $M^{-}_{C_{max}}$ (حداکثر لنگر خمشی منفی در C) :

$$M^{-}_{C_{max}} = ۱۵۰\left[-\frac{۸}{۳}\right] + ۵۰(-۵/۳۳۳ - ۶) + ۲۵(-۵/۳۳۳ + ۱۶ - ۶) = -۸۵۰ \ kN.m \quad \blacktriangleright M^{-}_{C_{max}} = -۸۵۰ \ kN.m$$

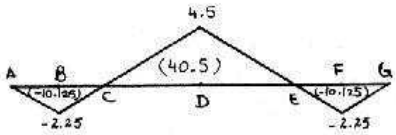
۷-۷ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، حداکثر لنگرهای خمشی مثبت و منفی و حداکثر برشهای مثبت و منفی نقطهٔ D را تعیین کنید. بارهای وارد بر تیر عبارتند از: بار متمرکز زنده ۱۵۰ kN ، بار گستردهٔ زنده به شدت ۵۰ kN/m و بار گستردهٔ مرده به شدت ۱۵ kN/m که روی کل تیر اعمال می‌شود.



شکل ۷-۷



خط تأثیر S_D ، kN/kN



خط تأثیر M_D ، kN.m/kN

محاسبهٔ $S^{+}_{D_{max}}$ (حداکثر برش مثبت در D) :

$$S^{+}_{D_{max}} = ۱۵۰\left[\frac{۱}{۲}\right] + ۵۰(۱/۱۲۵ + ۲/۲۵) = ۲۴۳/۷۵ \ kN$$

$$\blacktriangleright S^{+}_{D_{max}} = ۲۴۳/۷۵ \ kN$$

محاسبهٔ $S^{-}_{D_{max}}$ (حداکثر برش منفی در D) :

$$S^{-}_{D_{max}} = ۱۵۰\left[-\frac{۱}{۲}\right] + ۵۰(-۱/۱۲۵ - ۲/۲۵) = -۲۴۳/۷۵ \ kN$$

$$\blacktriangleright S^{-}_{D_{max}} = -۲۴۳/۷۵ \ kN$$

محاسبهٔ $M^{+}_{D_{max}}$ (حداکثر لنگر خمشی مثبت در D) :

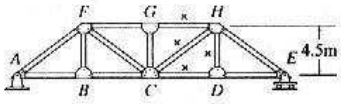
$$M^{+}_{D_{max}} = ۱۵۰(۴/۵) + ۵۰(۴۰/۵) + ۱۵\left[۲(-۱۰/۱۲۵) + ۴۰/۵\right] = ۳۰۰۳/۷۵ \ kN.m \quad \blacktriangleright M^{+}_{D_{max}} = ۳۰۰۳/۷۵ \ kN.m$$

محاسبه $M^{-}_{D_{max}}$ (حداکثر لنگر خمشی منفی در D) :

$$M^{-}_{D_{max}} = ۱۵۰(-۲/۲۵) + ۵۰(۲)(-۱۰/۱۲۵) + ۱۵\left[۲(-۱۰/۱۲۵) + ۴۰/۵\right] = -۱۰۴۶/۲۵ \ kN \quad \blacktriangleright M^{-}_{D_{max}} = -۱۰۴۶/۲۵ \ kN.m$$

۸-۷ برای خرپای نشان داده شده در شکل زیر، حداکثر نیروی کششی و فشاری عضو CH را تحت اثر مجموعه بارهای زیر تعیین کنید: یک بار زندهٔ متمرکز ۱۳۵ kN ، بار گستردهٔ زنده به شدت ۳۰ kN/m و بار گستردهٔ مرده به شدت ۱۵ kN/m که بر کل طول خرپا اعمال می‌شود.

محاسبهٔ $F^{+}_{CH_{max}}$ (حداکثر نیروی کششی عضو CH) :



$$F^{+}_{CH_{max}} = ۱۳۵\left[\frac{۵}{۶}\right] + ۳۰(۶/۶۶۶) + ۱۵(۶/۶۶۶ - ۱/۶۶۶) = ۳۸۷/۵ \quad kN$$

$$\blacktriangleright F^{+}_{CH_{max}} = ۳۸۷/۵ \quad kN \quad (T)$$

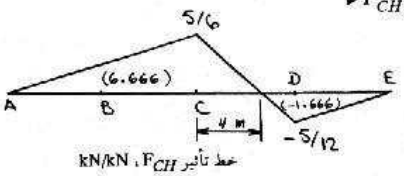
4 panels at 6m=24m

شکل ۷-۸

محاسبهٔ $F^{-}_{CH_{max}}$ (حداکثر نیروی فشاری عضو CH) :

$$F^{-}_{CH_{max}} = ۱۳۵\left[-\frac{۵}{۱۲}\right] + ۳۰(-۱/۶۶۶) + ۱۵(۶/۶۶۶ - ۱/۶۶۶) = -۳۱/۲۵ \quad kN$$

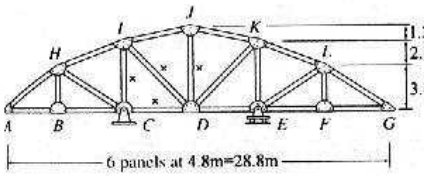
$$\blacktriangleright F^{-}_{CH_{max}} = ۳۱/۲۵ \quad kN \quad (C)$$



خط تأثیر F_{CH} ، kN/kN

۹-۷ برای خرپای نشان داده شده در شکل زیر، حداکثر نیروی کششی و فشاری عضو IJ را تعیین کنید. بارهای وارد بر خرپا عبارتند از: بار زندهٔ متمرکز ۱۸۰ kN ، یک بار گستردهٔ زنده به شدت ۶۰ kN/m و بار گستردهٔ مرده به شدت ۳۰ kN/m که بر کل طول خرپا وارد می‌شود.

محاسبهٔ $F^{+}_{IJ_{max}}$ (حداکثر نیروی کششی عضو IJ) :



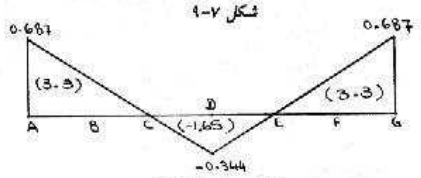
6 panels at 4.8m=28.8m

شکل ۷-۹

$$F^{+}_{IJ_{max}} = ۱۸۰(۰/۶۸۷) + ۶۰(۲)(۳/۳) + ۳۰\left[۲(۳/۳) - ۱/۶۵\right]$$

$$F^{+}_{IJ_{max}} = ۶۶۸/۱۶ \quad kN \qquad \blacktriangleright F^{+}_{IJ_{max}} = ۶۶۸/۱۶ \quad kN \quad (T)$$

محاسبهٔ $F^{-}_{IJ_{max}}$ (حداکثر نیروی فشاری عضو IJ) :



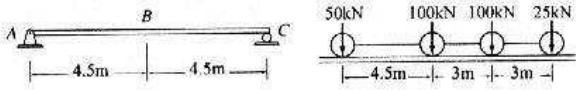
خط تأثیر F_{IJ} ، kN/kN

$$F^{-}_{IJ_{max}} = ۱۸۰(-۰/۳۴۴) + ۶۰(-۱/۶۵) + ۳۰\left[۲(۳/۳) - ۱/۶۵\right]$$

$$F^{-}_{IJ_{max}} = -۱۲/۴۲ \quad kN \qquad \blacktriangleright F^{-}_{IJ_{max}} = ۱۲/۴۲ \quad kN \quad (C)$$

۱۰-۷ برای تیر نشان داده شده، حداکثر لنگر خمشی و نیروی برشی مثبت نقطهٔ B را تحت اثر مجموعه بارهای متمرکز شکل زیر تعیین کنید.

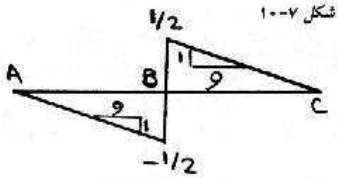
فرض می‌کنیم بارهای متمرکز به ترتیب در بارگذاریهای (۱) تا (۴) از سمت چپ به راست روی نقطهٔ B قرار گیرند.



بارگذاری (۱) :

$$S_B = ۵۰\left[\frac{۱}{۲}\right] = ۲۵ \quad kN$$

شکل ۷-۱۰



خط تأثیر S_B ، kN/kN

بارگذاری (۲) :

$$S_B = ۱۰۰\left[\frac{۱}{۲}\right] + ۱۰۰\left[\frac{۱}{۶}\right] = ۶۶/۶۷ \quad kN$$

بارگذاری (۳) :

$$S_B = ۱۰۰\left[-\frac{۱}{۶}\right] + ۱۰۰\left[\frac{۱}{۲}\right] + ۲۵\left[\frac{۱}{۶}\right] = ۳۷/۵ \quad kN$$

بارگذاری (۴) :

$$S_B = ۱۰۰\left[-\frac{۱}{۶}\right] + ۲۵\left[\frac{۱}{۲}\right] = -۴/۱۷ \quad kN$$

از بین بارگذاریهای بالا، بارگذاری شمارهٔ (۲) بیشترین نیروی برشی مثبت را در B ایجاد می‌کند.

بارگذاری (۱) : $M_B = ۵۰(۲/۲۵) = ۱۱۲/۵ \quad kN.m$

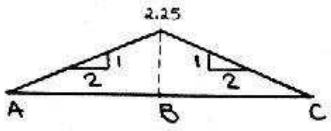
بارگذاری (۲) : $M_B = ۱۰۰(۲/۲۵) + ۱۰۰(۰/۷۵) = ۳۰۰ \quad kN.m$

بارگذاری (۳) : $M_B = ۱۰۰(۰/۷۵) + ۱۰۰(۲/۲۵) + ۲۵(۰/۷۵) = ۳۱۸/۷۵ \quad kN.m$

بارگذاری (۴) : $M_B = ۱۰۰(۰/۷۵) + ۲۵(۲/۲۵) = ۱۳۱/۲۵ \quad kN.m$

از بین بارگذاریهای بالا، بارگذاری شمارهٔ (۳) بیشترین لنگر خمشی مثبت را در نقطهٔ B ایجاد می‌کند.

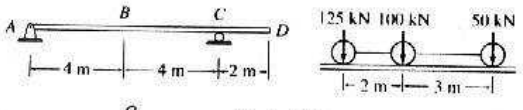
$\blacktriangleright M^{+}_{B_{max}} = ۳۱۸/۷۵ \quad kN.m$



خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

$\blacktriangleright S^{+}_{B_{max}} = ۶۶/۶۷ \quad kN$

۷-۱۱ برای تیر شکل زیر، حداکثر لنگر خمشی مثبت را در نقطهٔ B، تحت اثر مجموعه بارهای متحرک نشان داده شده به دست آورید.



شکل ۷-۱۱

فرض می‌کنیم بارهای متمرکز به ترتیب در بارگذاریهای (۱) تا (۳) از سمت چپ به راست روی نقطهٔ B قرار گیرند.

بارگذاری (۱) :

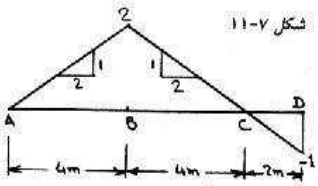
$M_B = ۱۲۵(۲) + ۱۰۰(۱) + ۵۰(-۰/۵) = ۳۲۵ \quad kN.m$

بارگذاری (۲) : $M_B = ۱۲۵(۱) + ۱۰۰(۲) + ۵۰(۰/۵) = ۳۵۰ \quad kN.m$

بارگذاری (۳) : $M_B = ۱۰۰(۰/۵) + ۵۰(۲) = ۱۵۰ \quad kN.m$

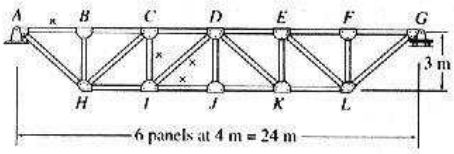
از بین بارگذاریهای بالا، بارگذاری شمارهٔ (۲) بیشترین لنگر خمشی مثبت را در نقطهٔ B ایجاد می‌کند.

$\blacktriangleright M^{+}_{B_{max}} = ۳۵۰ \quad kN.m$



خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

۷-۱۲ در خرپای شکل زیر، حداکثر نیروی کششی عضو DI را تحت اثر مجموعه بارهای متحرک نشان داده شده تعیین کنید.



شکل ۷-۱۲

فرض می‌کنیم بارهای متمرکز به ترتیب در بارگذاریهای (۱) تا (۳) از سمت چپ به راست روی نقطهٔ C قرار گیرند.

بارگذاری (۱) :

$F_{DI} = ۱۲۵(۰/۵۵۶) - ۱۰۰\left[\frac{۰/۴}{۲/۸۸}\right] - ۵۰\left[\frac{۱۱}{۱۴/۴}\right] = ۱۷/۴۲ \quad kN$

بارگذاری (۲) :

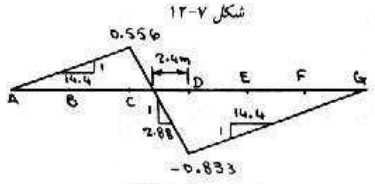
$F_{DI} = ۱۲۵\left[\frac{۶}{۱۴/۴}\right] + ۱۰۰(۰/۵۵۶) - ۵۰\left[\frac{۱/۴}{۲/۸۸}\right] = ۸۳/۳۸ \quad kN$

بارگذاری (۳) :

$F_{DI} = ۱۲۵\left[\frac{۳}{۱۴/۴}\right] + ۱۰۰\left[\frac{۵}{۱۴/۴}\right] + ۵۰(۰/۵۵۶) = ۸۸/۵۶ \quad kN$

از بین بارگذاریهای بالا، بارگذاری شمارهٔ (۳) بیشترین نیروی محوری کششی را در عضو DI ایجاد می‌کند.

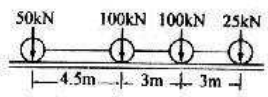
$\blacktriangleright F_{DI_{max}} = ۸۸/۵۶ \quad kN \quad (T)$



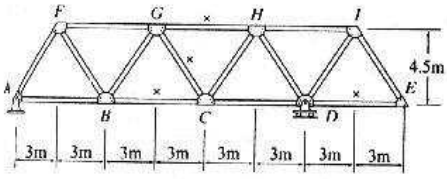
خط تأثیر F_{DI} ، kN/kN

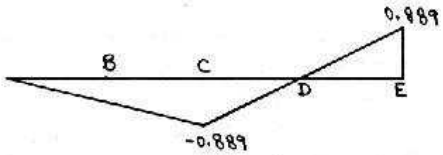
۷-۱۳ برای خرپای نشان داده شده در شکل زیر، بیشترین نیروی فشاری عضو GH را تحت اثر مجموعه بارهای متحرک نشان داده شده به دست آورید.

فرض می‌کنیم بارها در بارگذاریهای زیر به ترتیب از سمت راست به چپ روی نقطهٔ C قرار گیرند.



شکل ۷-۱۳





خط تأثیر F_{GH}، kN/kN

بارگذاری (۱) :

$$F_{GH} = \left[25(12) + 100(9+6) + 50(1/5)\right]\left[-\frac{0/889}{12}\right]$$

$$F_{GH} = -138/9 \quad kN$$

بارگذاری (۲) :

$$F_{GH} = 25(3)\left[-\frac{0/889}{6}\right] + \left[100(12+9) + 50(4/5)\right]\left[-\frac{0/889}{12}\right]$$

$$F_{GH} = -183/36 \quad kN$$

بارگذاری (۳) :

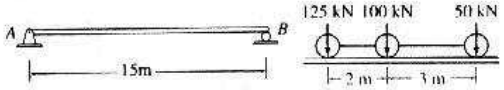
$$F_{GH} = \left[25(0) + 100(3)\right]\left[-\frac{0/889}{6}\right] + \left[100(12) + 50(7/5)\right]\left[-\frac{0/889}{12}\right] = -161/13 \quad kN$$

از بین بارگذاریهای بالا، بارگذاری شمارهٔ (۲) بیشترین نیروی محوری فشاری را در عضو GH ایجاد می‌کند

$$\blacktriangleright F_{GH_{max}} = 183/36 \quad kN \quad (C)$$

۷-۱۴ در تیر سادهٔ شکل زیر، حداکثر مطلق برش را تحت اثر مجموعه بارهای متحرک نشان داده شده به دست آورید.

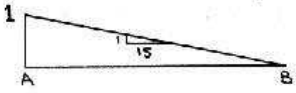
فرض می‌کنیم بارهای متمرکز به ترتیب از چپ به راست بر روی نقطهٔ A قرار گیرند.



شکل ۷-۱۴

بارگذاری (۱) :

$$S_{A,R} = \left[125(15) + 100(13) + 50(10)\right]\left[\frac{1}{15}\right] = 245 \quad kN$$



خط تأثیر $S_{A,R}$، kN/kN

بارگذاری (۲) :

$$S_{A,R} = \left[100(15) + 50(12)\right]\left[\frac{1}{15}\right] = 140 \quad kN$$

بارگذاری (۳) :

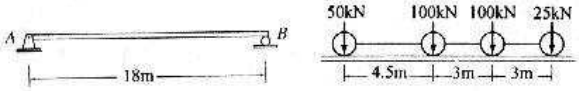
$$S_{A,R} = 50(1) = 50 \quad kN$$

بارگذاری شمارهٔ (۱) حداکثر مطلق برش را در سمت راست تکیه‌گاه A ایجاد می‌کند.

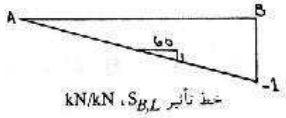
$$\blacktriangleright S_{A,R} = 245 \quad kN$$ (حداکثر مطلق برش)

۷-۱۵ در تیر سادهٔ شکل زیر، حداکثر مطلق برش را تحت اثر مجموعه بارهای متحرک نشان داده شده به دست آورید.

فرض می‌کنیم بارهای متمرکز به ترتیب از راست به چپ بر روی نقطهٔ B قرار گیرند.



شکل ۷-۱۵



خط تأثیر $S_{B,L}$، kN/kN

بارگذاری (۱) :

$$S_{B,L} = \left[25(18) + 100(15+12) + 50(7/5)\right]\left[-\frac{1}{18}\right] = -195/83 \quad kN$$

بارگذاری (۲) :

$$S_{B,L} = \left[100(18+15) + 50(10/5)\right]\left[-\frac{1}{18}\right] = -212/5 \quad kN$$

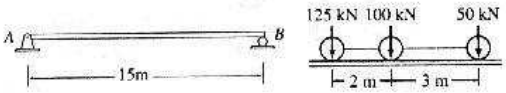
بارگذاری (۳) :

$$S_B = \left[100(18) + 50(13/5)\right]\left[-\frac{1}{18}\right] = -137/5 \quad kN$$

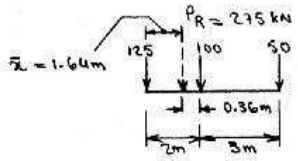
از بین بارگذاریهای بالا، بارگذاری شمارهٔ (۲) حداکثر مطلق برش را در سمت چپ تکیه‌گاه B ایجاد می‌کند.

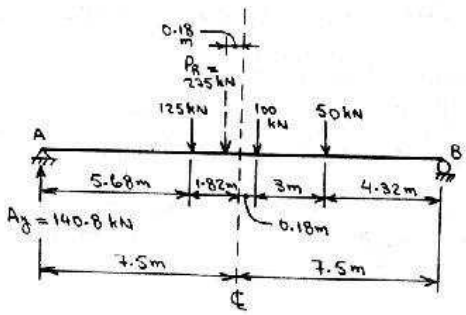
$$\blacktriangleright S_{B,L} = -212/5 \quad kN$$ (حداکثر مطلق برش)

۷-۱۶ در تیر سادهٔ شکل زیر، حداکثر مطلق لنگر خمشی را تحت اثر مجموعه بارهای متحرک نشان داده شده به دست آورید.



شکل ۷-۱۶





$$\bar{x} = \frac{100(2) + 50(5)}{275} = 1/64\ m$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad : \quad -A_y(15) + 275(7/5 + 0/18) = 0$$

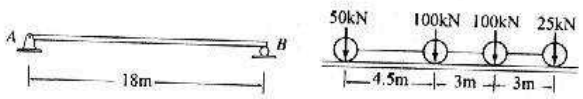
$$A_y = 140/8\ \ kN$$

$$M_{max} = M_2 = 140/8(7/5 + 0/18) - 125(2)$$

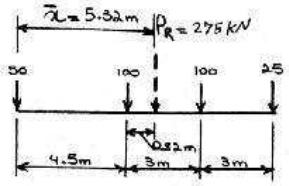
$$M_{max} = 831/3\ \ kN.m$$

$$\blacktriangleright M_{max} = 831/3\ \ kN.m$$ (حداکثر لنگر خمشی)

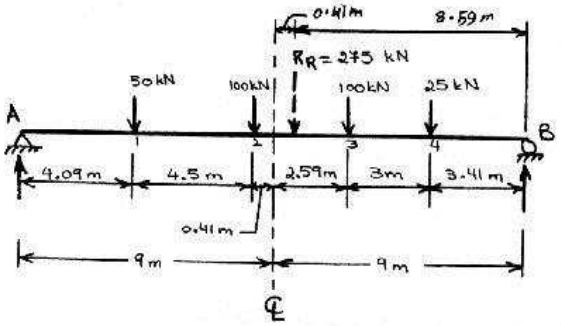
۱۷-۷ در تیر سادهٔ نشان داده شده، حداکثر مطلق لنگر خمشی را تحت اثر مجموعه بارهای متحرک نشان داده شده محاسبه کنید.



شکل ۷-۱۷



$$\bar{x} = \frac{100(4/5 + 7/5) + 25(10/5)}{275} = 5/32\ m$$



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad :$$

$$-A_y(18) + 275(9 - 0/41) = 0$$

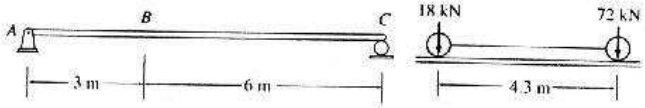
$$A_y = 131/24\ \ kN$$

$$M_{max} = M_2 = 131/24(4/09 + 4/5) - 50(4/5)$$

$$M_{max} = 902/35\ \ kN.m$$

$$\blacktriangleright M_{max} = 902/35\ \ kN.m$$ (حداکثر مطلق لنگر خمشی)

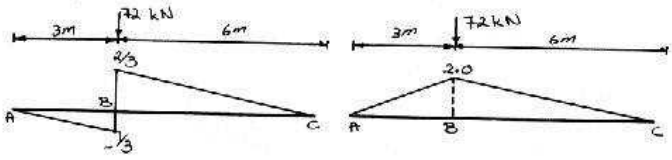
۱۸-۷ در تیر شکل زیر حداکثر مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطهٔ **B** را تحت اثر بار متحرک نشان داده شده به دست آورید. (بار از چپ به راست حرکت می‌کند.)



شکل ۷-۱۸

$$M_{B_{max}} = 72(2) = 144\ \ kN.m$$

$$\blacktriangleright M_{B_{max}} = 144\ \ kN.m$$

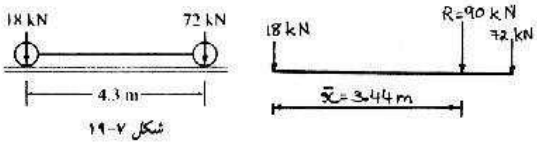


موقعیت متناظر با $S_{B_{max}}$ موقعیت متناظر با $M_{B_{max}}$

$$S_{B_{max}} = 72\left(\frac{2}{3}\right) = 48\ \ kN$$

$$\blacktriangleright S_{B_{max}} = 48\ \ kN$$

۱۹-۷ حداکثر لنگر خمشی مطلق را در تیر ساده‌ای با دهانهٔ ۱۲ m تحت بارگذاری نشان داده شده به دست آورید.



شکل ۱۹-۷

$$\bar{x}=\frac{۷۲(۴/۳)}{(۷۲+۱۸)}=۳/۴۴\ m$$

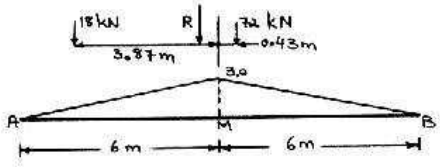
$$R_A=\frac{۹۰(۶+۰/۴۳)}{۱۲}=۴۸/۲۲۵\ \ kN$$

$$\vec{R}_A=۴۸/۲۲۵\ \ kN\uparrow$$

$$R_B=۹۰-R_A=۴۱/۷۷۵\ \ kN\ \Rightarrow\ \vec{R}_B=۴۱/۷۷۵\ \ kN\uparrow$$

$$M_{max}=R_B(۶-۰/۴۳)=۴۱/۷۷۵(۶-۰/۴۳)=۲۳۲/۷\ \ kN.m$$

$$\blacktriangleright M_{max}=۲۳۲/۷\ \ kN.m$$

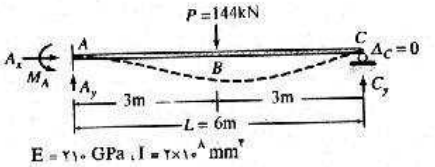


۸- دستگاه معادلات حاصل از مرحلهٔ ۷ را حل کرده، کلیهٔ نیروهای (لنگرهای) اضافی مجهول را به دست می‌آوریم.
۹- پس از محاسبهٔ نیروهای (لنگرهای) اضافی، حل (پاسخ) سازهٔ نامعین اصلی را می‌توانیم از بر هم نهی حل (پاسخ) سازهٔ اولیه تحت اثر بارهای خارجی و پاسخهای سازهٔ اولیه تحت اثر نیروهای (لنگرهای) اضافی به دست آوریم.

تحلیل سازه‌های نامعین با استفاده از قضیهٔ حداقل انرژی کرنشی

۱- درجهٔ نامعینی سازه را مشخص می‌کنیم. (درجات نامعینی خارجی و داخلی سازه به طور جداگانه تعیین می‌شوند.)
۲- نیروها و لنگرهای اضافی را مشخص کرده و آنها را به صورت بارهای مجهول خارجی (R_i) بر سازه اعمال می‌کنیم.
R_i = نیروی داخلی مجهول یا واکنش تکیه‌گاهی مجهول i ام.
۳- کل انرژی کرنشی (U) سازه را با استفاده از روابط ارائه شده در فصل (۵) محاسبه می‌کنیم. (مثلاً انرژی کرنشی خمشی در اعضای سازه از رابطهٔ $\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx$ یا انرژی کرنشی نیروی محوری از رابطهٔ $\frac{F^2L}{2AE}$ به دست می‌آید.)
۴- تابع انرژی کرنشی کل (U) را با توجه به تغییرات کمیتها (R_i) پایا می‌کنیم. به عبارت دیگر مشتقات جزیی U را نسبت به متغیرهای R_i برابر صفر قرار می‌دهیم: $\frac{\partial U}{\partial R_i} = 0$
۵- از مرحلهٔ ۴ یک دستگاه معادلات به دست می‌آید که با حل آن نیروها و لنگرهای مجهول (R_i) محاسبه می‌شوند.
● در مواقعی که تغییرات درجه حرارت یا نشستهای تکیه‌گاهی در سازه وجود دارد، دیگر نمی‌توان از قضیهٔ حداقل انرژی کرنشی استفاده کرد.

۸-۱ با استفاده از روش نیرو، تیر نامعین نشان داده شده در شکل زیر را تحلیل کنید.

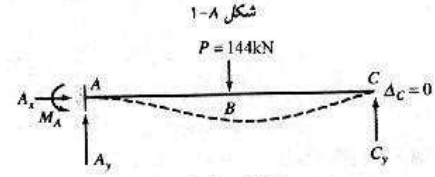


E = ۲۱۰ GPa ، I = ۲×۱۰^۸ mm^۴

شکل ۸-۱

تیر مزبور یک درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، واکنش تکیه‌گاهی C_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

تیر اولیه به همراه بارگذاریهای مربوط به آن در شکلهای مقابل نشان داده شده‌اند. تغییر مکانهای Δ_{CO} و δ_{CC} را با استفاده از روش کار مجازی فصل (۵) یا به کمک روابط ارائه شده در پیوست (ب) محاسبه می‌کنیم.



تیر نامعین اصلی

$$L = ۶۰۰۰\ mm \quad , \quad E = ۲۱۰\ kN/mm^۲$$

$$\Delta_{CO} = -\frac{5PL^3}{48EI} = -\frac{5(144)(6000)^3}{48(210)(2\times10^8)} = -۷۷/۱۴۳\ mm$$

$$\delta_{CC} = \frac{(1)L^3}{3EI} = \frac{(1)(6000)^3}{3(210)(2\times10^8)} = ۱/۷۱۴\ \ mm/kN$$

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

$$\Delta_C = \Delta_{CO} + C_y\delta_{CC}$$

$$\Delta_C = ۰ \Rightarrow -۷۷/۱۴۳ + ۱/۷۱۴C_y = ۰$$

$$C_y = ۴۵\ \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{C}_y = ۴۵\ \ kN\uparrow$$

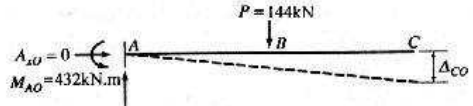
$$\pm\sum F_x = ۰ \ : \ A_x = ۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = ۰$$

$$+\uparrow\sum F_y = ۰ \ : \ A_y - ۱۴۴ + ۴۵ = ۰$$

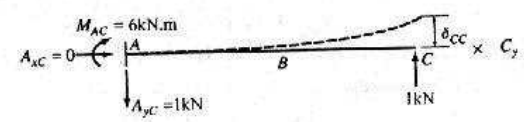
$$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۹۹\ \ kN\uparrow$$

$$+)\ \sum M_A = ۰ \ : \ M_A - ۱۴۴(۳) + ۴۵(۶) = ۰$$

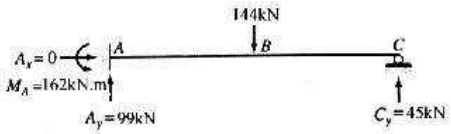
$$\blacktriangleright \vec{M}_A = ۱۶۲\ \ kN.m\ )$$



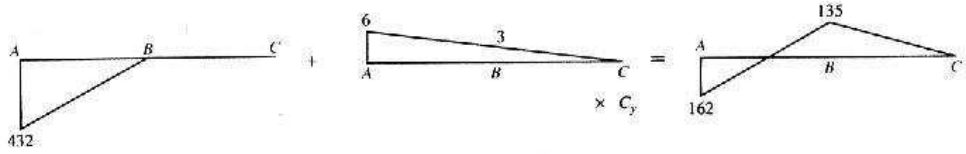
تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی



تیر اولیه تحت اثر بار واحد مؤثر در نقطهٔ C

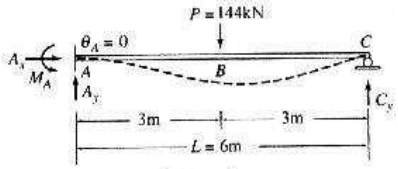


واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین

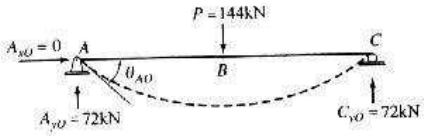


نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m نمودار لنگر خمشی تیر اولیه تحت اثر بار واحد در C ، kN.m نمودار لنگر خمشی تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی ، kN.m

برای حل مسئلهٔ فوق به جای این که واکنش تکیه‌گاهی C_y را به عنوان مجهول اضافی انتخاب کنیم، می‌توان لنگر گیرداری تکیه‌گاه A را به عنوان مجهول اضافی انتخاب کرد. دورانهای θ_{AO} و θ_{AA} را با استفاده از روش کار مجازی فصل (۵) یا به کمک روابط ارائه شده در پیوست (ب) محاسبه می‌کنیم.



تیر نامعین اصلی



تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی

$$\theta_{AO} = -\frac{PL^2}{16EI} = -\frac{144(6000)^2}{16(210)(2\times10^8)} = -0.00774 \ rad$$

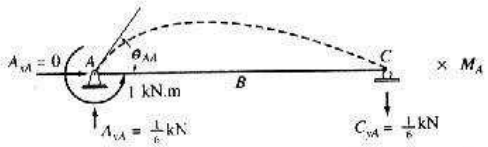
$$\theta_{AA} = \frac{(1)L}{3EI} = \frac{(1000)(6000)}{3(210)(2\times10^8)} = 0.0004762 \ rad/kN.m$$

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

$$\theta_A = \theta_{AO} + M_A\theta_{AA}$$

$$\theta_A = 0 \Rightarrow -0.00774 + 0.0004762 M_A = 0$$

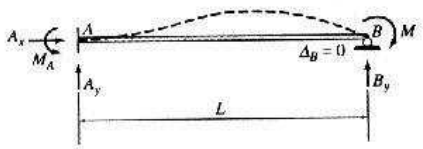
$$M_A = 162 \ kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = 162 \ kN.m \ \Big) \ O.K.$$



تیر اولیه تحت اثر لنگر واحد مؤثر در نقطهٔ A

۸-۲ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش نیرو محاسبه کرده، سپس نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مزبور را ترسیم کنید.

تیر مزبور یک درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه واکنش تکیه‌گاهی B_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.



ثابت = EI

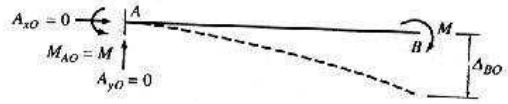
تیر نامعین اصلی

شکل ۸-۲

تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی را با Δ_{BO} و تیر اولیه تحت اثر لنگر واحد مؤثر در B را با δ_{BB} نشان می‌دهیم.

تغییر مکانهای Δ_{BO} و δ_{BB} را با استفاده از روشهای ارائه شده در فصل (۵)، یا به کمک روابطی که در پیوست (ب) داده شده‌اند، محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta_{BO} = -\frac{ML^2}{2EI} \quad , \quad \delta_{BB} = \frac{(1)L^3}{3EI}$$



تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

$$\Delta_B = \Delta_{BO} + B_y \delta_{BB}$$

$$\Delta_B = 0 \Rightarrow -\frac{ML^2}{2EI} + B_y\left[\frac{L^3}{3EI}\right] = 0$$

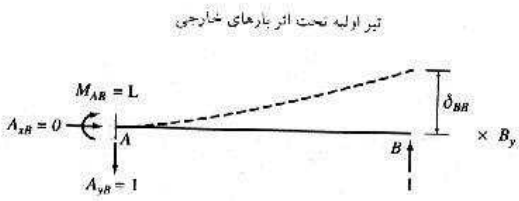
$$B_y = \frac{3M}{2L} \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = \frac{3M}{2L}\uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x = 0$$

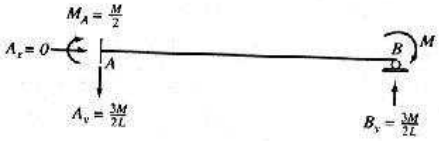
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + \frac{3M}{2L} = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = \frac{3M}{2L}\downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; M_A - M + \left[\frac{3M}{2L}\right](L) = 0$$

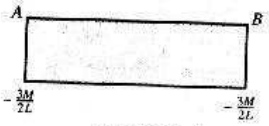
$$\blacktriangleright \vec{M}_A = \frac{M}{2}\;)$$



تیر اولیه تحت اثر بار واحد مؤثر در نقطهٔ B



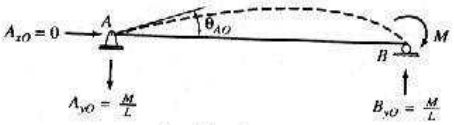
واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین



نمودار نیروی برشی



نمودار لنگر خمشی



تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی

واکنشهای تکیه‌گاهی را یک بار دیگر و با این فرض که لنگر گیرداری تکیه‌گاه A به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته شود، به دست می‌آوریم.
دورانهای θ_{AO} و θ_{AA} را با استفاده از روشهای ارائه شده در فصل (۵) یا به کمک روابط ارائه شده در پیوست (ب) محاسبه می‌کنیم.

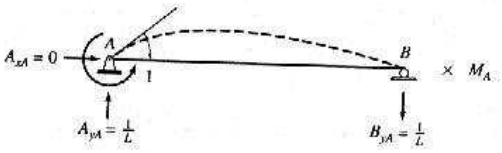
$$\theta_{AO} = \frac{ML}{6EI} \quad , \quad \theta_{AA} = \frac{(1)L}{3EI}$$

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

$$\theta_A = \theta_{AO} + M_A\theta_{AA}$$

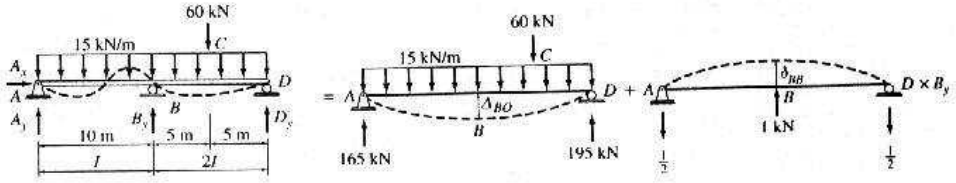
$$\theta_A = 0 \Rightarrow \frac{ML}{6EI} + M_A\left[\frac{L}{3EI}\right] = 0 \Rightarrow M_A = -\frac{M}{2}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A = \frac{M}{2}\;) \quad O.K.$$



تیر اولیه تحت اثر لنگر واحد مؤثر در نقطهٔ A

۸-۳ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر دو دهانهٔ نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش نیرو محاسبه کرده، سپس نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مزبور را ترسیم کنید.



E = ۲۰۰ GPa ، I = ۷۰۰×۱۰^{۶} mm^{۴}

تیر نامعین

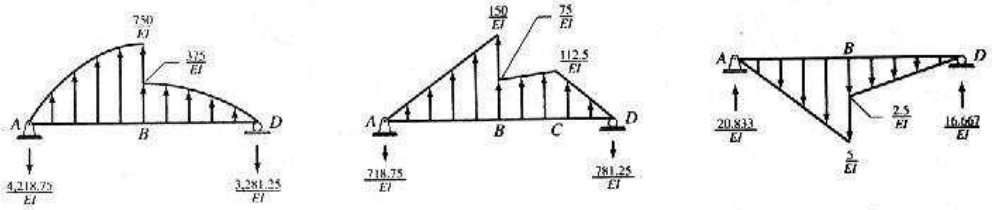
تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی

تیر اولیه تحت اثر بار واحد مؤثر در نقطهٔ B

شکل ۸-۳

این تیر یک درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، واکنش تکیه‌گاهی B_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. تیر اولیه به همراه بارگذاریهای مربوط به آن در شکلهای بالا نشان داده شده‌اند.

تغییر مکانهای Δ_{BO} و δ_{BB} را با استفاده از روشهای ارائه شده در فصل (۵) ، یا به کمک روابطی که در پیوست (ب) داده شده‌اند، محاسبه می‌کنیم



تیر مزدوج مربوط به بار گسترده

تیر مزدوج مربوط به بار متمرکز خارجی

تیر مزدوج مربوط به بار واحد مؤثر در نقطهٔ B

تغییر مکانهای Δ_{BO} و δ_{BB} را با استفاده از روش تیر مزدوج محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta_{BO}=\frac{1}{EI}\left[(-۴۲۱۸/۷۵)(۱۰)+\frac{۲}{۳}(۱۰)(۷۵۰)\left[\frac{۳۰}{۸}\right]\right]+\left[(-۷۱۸/۷۵)(۱۰)+\frac{۱}{۲}(۱۰)(۱۵۰)\left[\frac{۱۰}{۳}\right]\right]=-\frac{۲۸۱۲۵\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\delta_{BB}=\frac{1}{EI}\left[(۲۰/۸۳۳)(۱۰)-\frac{۱}{۲}(۱۰)(۵)\left[\frac{۱۰}{۳}\right]\right]=\frac{۱۲۵}{EI}\ \ kN.m^{۳}/kN$$

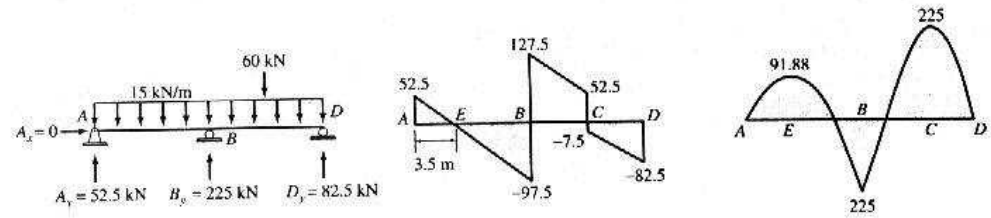
رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها: $\quad \Delta_B=\Delta_{BO}+B_y\,\delta_{BB}$

$$\Delta_B=۰ \ \Rightarrow\ -\frac{۲۸۱۲۵}{EI}+B_y\left[\frac{۱۲۵}{EI}\right]=۰ \ \Rightarrow\ B_y=۲۲۵\ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y=۲۲۵\ \ kN\uparrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x=۰ \ :\ A_x=۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_x=۰$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D=۰ \ :\ ۶۰(۵)+۱۵(۲۰)(۱۰)-۲۲۵(۱۰)-A_y(۲۰)=۰ \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=۵۲/۵\ \ kN\uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_y=۰ \ :\ ۵۲/۵+۲۲۵-۱۵(۲۰)-۶۰+D_y=۰ \ \Rightarrow\ D_y=۸۲/۵\ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y=۸۲/۵\ \ kN\uparrow$$



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین

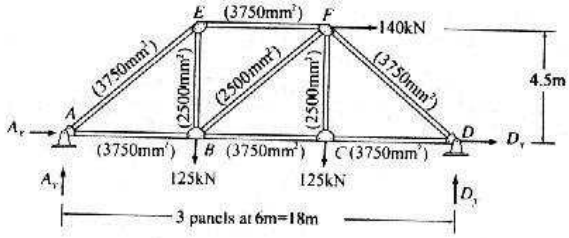
نمودار نیروی برشی ، kN

نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۸-۴ واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی هر یک از اعضای خرپای نشان داده شده در شکل را با استفاده از روش نیرو محاسبه کنید.

خرپای مزبور یک درجه نامعین خارجی است. برای تعیین خرپای اولیه واکنش تکیه‌گاهی D_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

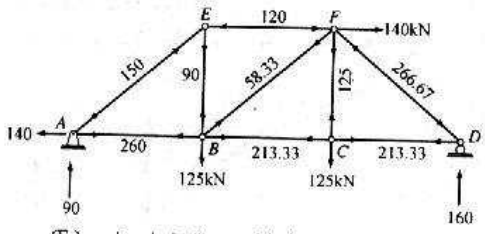
تغییر مکانهای Δ_{DO} و δ_{DD} را با استفاده از روش کار مجازی، محاسبه می‌کنیم.



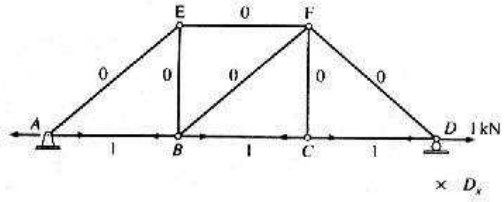
E = ۲۰۰ GPa

خرپای نامعین اصلی

شکل ۸-۴



خرپای اولیه تحت اثر بارهای خارجی (F_o)



خرپای اولیه تحت اثر بار واحد مؤثر در گره D (u_D)

$$\Delta = \sum \frac{F F_v L}{AE} \quad , \quad E = ۲۰۰\ kN/mm^۲$$

$$\Delta_{DO} = \frac{۱}{E} \sum \frac{F_o\ u_D L}{A}$$

$$\delta_{DD} = \frac{۱}{E} \sum \frac{u_D^۲ L}{A}$$

$$\Delta_{DO} = \frac{۱۰۹۸/۶۶\ kN/mm}{E}$$

$$\delta_{DD} = \frac{۴/۸(۱/mm)}{E}$$

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

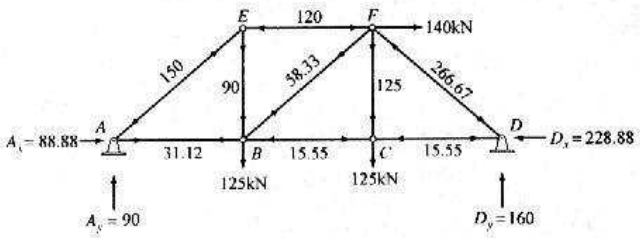
$$\Delta_D = \Delta_{DO} + D_x \delta_{DD}$$

$$\Delta_D = ۰ \Rightarrow \frac{۱۰۹۸/۶۶}{E} + D_x \left[\frac{۴/۸}{E}\right] = ۰$$

$$D_x = -۲۲۸/۸۸\ \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{D_x} = ۲۲۸/۸۸\ \ kN \leftarrow$$

عضو	L (mm)	A (mm²)	F_o (kN)	u_D (kN/kN)	$\frac{F_o u_D L}{A}$ (kN/mm)	$\frac{u_D^۲ L}{A}$ (۱/mm)	$F = F_o + u_D D_x$ (kN)
AB	۶۰۰۰	۳۷۵۰	۲۶۰	۱	۴۱۶	۱/۶	۳۱/۱۲
BC	۶۰۰۰	۳۷۵۰	۲۱۳/۳۳	۱	۳۴۱/۳۳	۱/۶	-۱۵/۵۵
CD	۶۰۰۰	۳۷۵۰	۲۱۳/۳۳	۱	۳۴۱/۳۳	۱/۶	-۱۵/۵۵
EF	۶۰۰۰	۳۷۵۰	-۱۲۰	۰	۰	۰	-۱۲۰
BE	۴۵۰۰	۲۵۰۰	۹۰	۰	۰	۰	۹۰
CF	۴۵۰۰	۲۵۰۰	۱۲۵	۰	۰	۰	۱۲۵
AE	۷۵۰۰	۳۷۵۰	-۱۵۰	۰	۰	۰	-۱۵۰
BF	۷۵۰۰	۲۵۰۰	۵۸/۳۳	۰	۰	۰	۵۸/۳۳
DF	۷۵۰۰	۳۷۵۰	-۲۶۶/۶۷	۰	۰	۰	-۲۶۶/۶۷
				Σ	۱۰۹۸/۶۶	۴/۸	



$A_x = -۱۴۰ - ۱(-۲۲۸/۸۸) = ۸۸/۸۸ \ kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_x = ۸۸/۸۸ \ kN \rightarrow$

$A_y = ۹۰ + ۰ = ۹۰ \ kN$

$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۹۰ \ kN \uparrow$

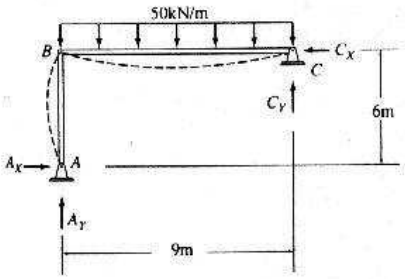
$D_y = ۱۶۰ + ۰ = ۱۶۰ \ kN$

$\blacktriangleright \vec{D}_y = ۱۶۰ \ kN \uparrow$

واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضای خرپای نامعین

۸-۵ برای قاب نشان داده شده در شکل زیر واکنشهای تکیه‌گاهی را با استفاده از روش نیرو محاسبه کرده، سپس نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی این قاب را ترسیم کنید.

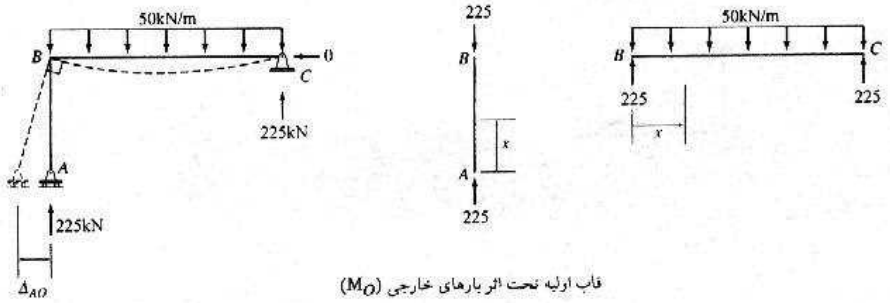
قاب مزبور یک درجه نامعین خارجی است. برای تعیین قاب اولیه، واکنش تکیه‌گاهی A_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. تغییر مکانهای Δ_{AO} و δ_{AA} را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.



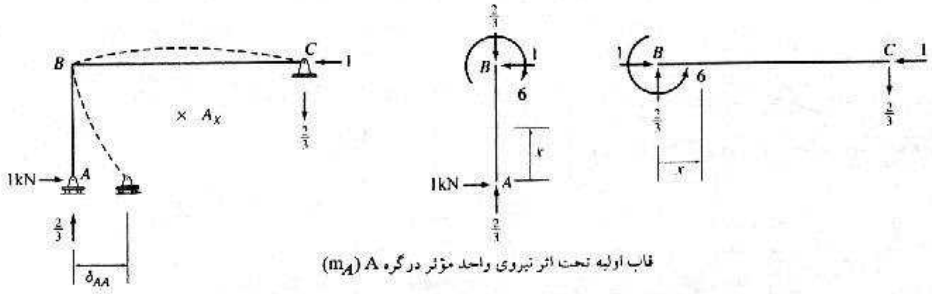
ثابت = EI

قاب نامعین اصلی

شکل ۸-۵



قاب اولیه تحت اثر بارهای خارجی (M_O)



قاب اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در گره A (m_A)

$$\Delta_{AO}=\sum\int\frac{M_O m_A}{EI}dx \quad , \quad \delta_{AA}=\sum\int\frac{m_A^2}{EI}dx$$

$$\Delta_{AO}=\frac{1}{EI}\int_0^9(225x-25x^2)\left[-6+\frac{2}{3}x\right]dx$$

$$\Delta_{AO}=-\frac{9112/5\ kN.m^3}{EI}$$

عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M_O (kN.m)	m_A (kN.m/kN)
AB	A	۰-۶	۰	$-1x$
BC	B	۰-۹	$225x-25x^2$	$-6+\frac{2}{3}x$

$$\delta_{AA}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^6(-x)^2dx+\int_0^9\left[-6+\frac{2}{3}x\right]^2dx\right] \Rightarrow \delta_{AA}=\frac{180\ m^3}{EI}$$

روابط سازگاری تغییر شکلها: $\Delta_A=\Delta_{AO}+A_x\delta_{AA}$

$$\Delta_A=0 \Rightarrow -\frac{9112/5}{EI}+A_x\left(\frac{180}{EI}\right)=0 \Rightarrow A_x=50/625\ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{A_x}=50/625\ kN\rightarrow$$

$$C_x=0-1(50/625)=-50/625\ kN$$

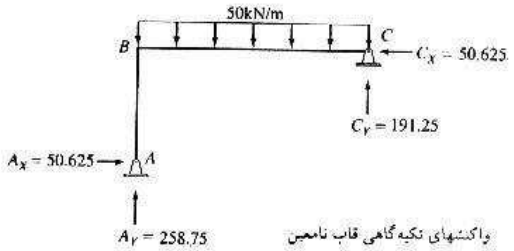
$$\blacktriangleright \vec{C_x}=50/625\ kN\leftarrow$$

$$C_y=225-\frac{2}{3}(50/625)=191/25\ kN$$

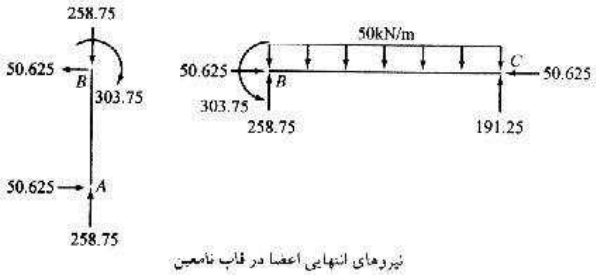
$$\blacktriangleright \vec{C_y}=191/25\ kN\uparrow$$

$$A_y=225+\frac{2}{3}(50/625)=258/75\ kN$$

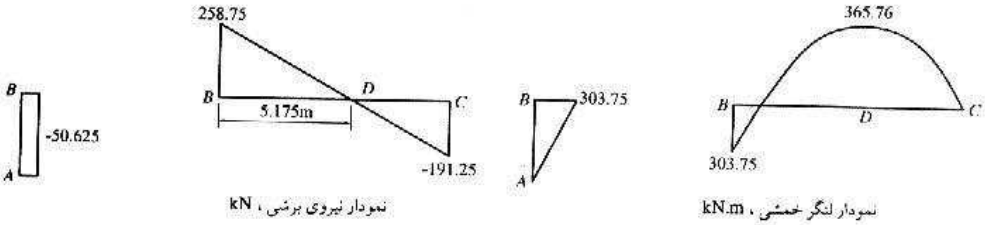
$$\blacktriangleright \vec{A_y}=258/75\ kN\uparrow$$



واکنشهای تکیه‌گاهی قاب نامعین



نیروهای انتهایی اعضا در قاب نامعین



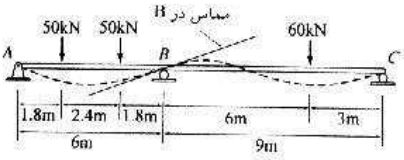
نمودار نیروی برشی ، kN — نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۸-۶ تیر نامعین نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش نیرو تحلیل کنید. لنگر خمشی گره B را به عنوان مجهول اضافی فرض کنید.

برای حل مسئله ابتدا باید $\theta_{BOrel.}$ و $\theta_{BBrel.}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور از روش تیر مزدوج استفاده می‌کنیم.

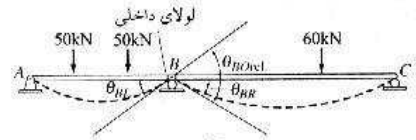
$$\theta_{BOrel.}=\theta_{BL}+\theta_{BR} \quad , \quad \theta_{BB\,rel.}=-\theta_{BBL}+\theta_{BBR}$$

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها: $\theta_{BOrel.}+M_B\theta_{BB\,rel.}=0$



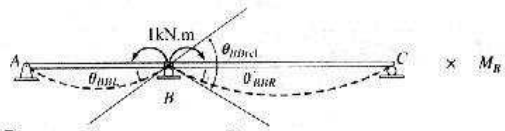
EI = ثابت
تیر نامعین اصلی

شکل ۸-۶



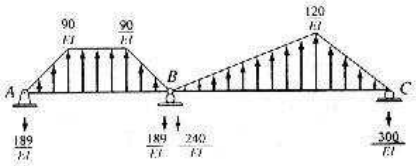
مماس درست سمت چپ B مماس درست سمت راست B

تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی

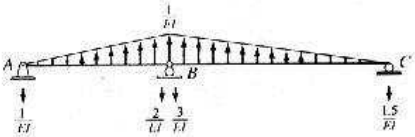


مماس درست سمت چپ B مماس درست سمت راست B

تیر اولیه تحت اثر لنگر خمشی واحد مؤثر بر B



تیر مزدوج تیر اولیه تحت بارهای خارجی



تیر مزدوج تیر اولیه تحت لنگر خمشی واحد مؤثر در گره B

$$\theta_{BL}=\frac{۱۸۹\ kN.m^{۲}}{EI}\ \text{(}\triangle\text{)},\quad \theta_{BR}=\frac{۲۴۰\ kN.m^{۲}}{EI}\ \text{(}\triangle\text{)}\Rightarrow\ \theta_{BOrel.}=\theta_{BL}+\theta_{BR}=\frac{۱۸۹+۲۴۰}{EI}=\frac{۴۲۹\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_{BBL}=\frac{۲(kN.m^{۲}/kN.m)}{EI}\ \text{(}\triangle\text{)},\quad \theta_{BBR}=\frac{۳(kN.m^{۲}/kN.m)}{EI}\ \text{(}\triangle\text{)}\Rightarrow\ \theta_{BBrel.}=\theta_{BBL}+\theta_{BBR}=\frac{۲+۳}{EI}=\frac{۵(kN.m^{۲}/kN.m)}{EI}$$

$$\theta_{BOrel.}+M_B\,\theta_{BBrel.}=۰\ \Rightarrow\ \frac{۴۲۹}{EI}+M_B\left[\frac{۵}{EI}\right]=۰\ \Rightarrow\ M_B=-۸۵/۸\ \ kN.m$$

$$+\circlearrowleft\sum M_B^{AB}=۰\ :\ ۵۰(۱/۸+۴/۲)-A_y(۶)-۸۵/۸=۰\ \Rightarrow\ A_y=۳۵/۷\ \ kN\qquad \blacktriangleright A_y=۳۵/۷\ \ kN\uparrow$$

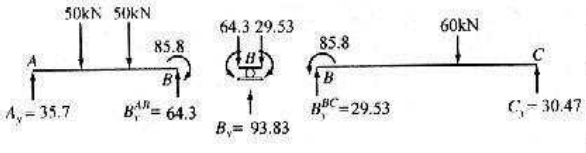
$$+\circlearrowleft\sum M_B=۰\ :$$

$$۵۰(۱/۸+۴/۲)-۳۵/۷(۶)-۶۰(۶)+C_y(۹)=۰$$

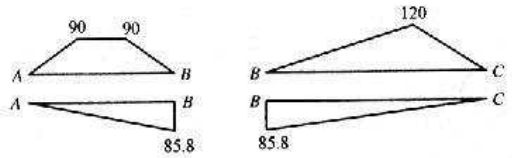
$$C_y=۳۰/۴۷\ \ kN\qquad \blacktriangleright \vec{C_y}=۳۰/۴۷\ \ kN\uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_y=۰\ :\ ۳۰/۴۷+B_y+۳۵/۷-۲(۵۰)-۶۰=۰$$

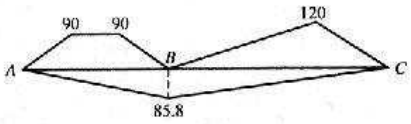
$$B_y=۹۳/۸۳\ \ kN\qquad \blacktriangleright \vec{B_y}=۹۳/۸۳\ \ kN\uparrow$$



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروهای انتهایی اعضا در تیر نامعین اصلی



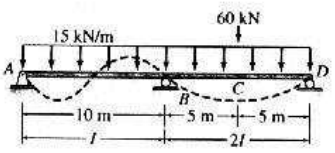
نمودار لنگر خمشی اعضای AB و BC ، kN.m



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۸-۷ با استفاده از روش نیرو، تیر یکسرهٔ نشان داده شده در شکل زیر را تحلیل کرده، سپس نمودار لنگر خمشی آن را ترسیم کنید. فرض کنید که لنگر خمشی گره B به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته شود.

برای حل مسئله ابتدا باید θ_{BOrel} و θ_{BBrel} را محاسبه کنیم. برای این منظور از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



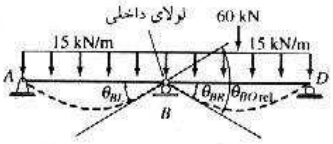
$E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۷۰۰ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

تیر نامعین اصلی

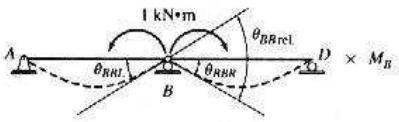
شکل ۸-۷

$$\theta_{B\,Orel.} = \theta_{BL} + \theta_{BR} \quad , \quad \theta_{B\,Brel.} = \theta_{BBL} + \theta_{BBR}$$

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها: $\theta_{B\,Orel.} + M_B\,\theta_{B\,Brel.} = ۰$



تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی



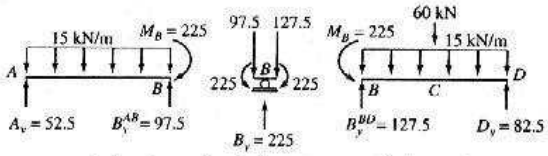
تیر اولیه تحت اثر لنگر خمشی واحد مؤثر بر B

$$\theta_{BL} = \frac{wL^{۳}}{۲۴EI} = \frac{۱۵(۱۰)^{۳}}{۲۴E(I)} = \frac{۶۲۵\ kN.m^{۲}}{EI} \quad , \quad \theta_{BR} = \frac{wL^{۳}}{۲۴EI} + \frac{pL^{۲}}{۱۶EI} = \frac{۱۵(۱۰)^{۳}}{۲۴E(۲I)} + \frac{۶۰(۱۰)^{۲}}{۱۶E(۲I)} = \frac{۵۰۰\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_{BBL} = \frac{(۱)L}{۳EI} = \frac{(۱)(۱۰)}{۳E(I)} = \frac{۳/۳۳\ m}{EI} \quad , \quad \theta_{BBR} = \frac{(۱)L}{۳EI} = \frac{(۱)(۱۰)}{۳E(۲I)} = \frac{۱/۶۷\ m}{EI}$$

$$\theta_{B\,Orel.} = \theta_{BL} + \theta_{BR} = \frac{۶۲۵}{EI} + \frac{۵۰۰}{EI} = \frac{۱۱۲۵\ kN.m^{۲}}{EI} \quad , \quad \theta_{B\,Brel.} = \theta_{BBL} + \theta_{BBR} = \frac{۳/۳۳}{EI} + \frac{۱/۶۷}{EI} = \frac{۵\ m}{EI}$$

$$\theta_{B\,Orel.} + M_B\,\theta_{B\,Brel.} = ۰ \Rightarrow \frac{۱۱۲۵}{EI} + M_B\left(\frac{۵}{EI}\right) = ۰ \Rightarrow M_B = -۲۲۵\ kN.m$$



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروهای انتهایی اعضا در تیر نامعین اصلی

$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = ۰ \ : \ ۱۵(۱۰)(۵) - A_y(۱۰) - ۲۲۵ = ۰$$

$$A_y = ۵۲/۵\ \ kN \qquad \blacktriangleright \overrightarrow{A_y} = ۵۲/۵\ \ kN \uparrow$$

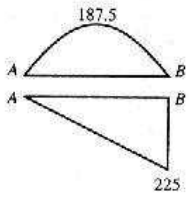
$$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \ : \ D_y(۱۰) - ۵۲/۵(۱۰) - ۶۰(۵) = ۰$$

$$D_y = ۸۲/۵\ \ kN \qquad \blacktriangleright \overrightarrow{D_y} = ۸۲/۵\ \ kN \uparrow$$

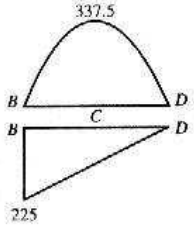
$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ :$$

$$۸۲/۵ + B_y + ۵۲/۵ - ۶۰ - ۱۵(۲۰) = ۰$$

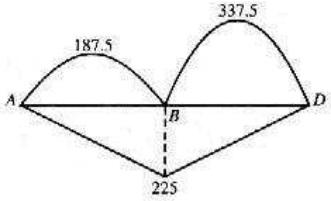
$$B_y = ۲۲۵\ \ kN \qquad \blacktriangleright B_y = ۲۲۵\ \ kN \uparrow$$



نمودار لنگر خمشی عضو AB ، kN.m



نمودار لنگر خمشی عضو BD ، kN.m



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

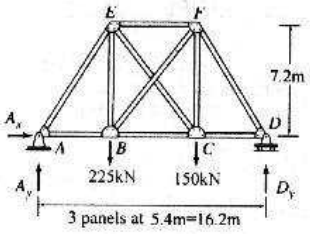
۸-۸ واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی هر یک از اعضای خرپای نشان داده شده در شکل را با استفاده از روش نیرو محاسبه کنید.

این خرپا یک درجه نامعین داخلی است. برای تعیین خرپای اولیه، نیروی داخلی (F_{CE}) عضو CE را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. به طور دلخواه نیروی داخلی F_{CE} را به صورت کششی فرض می‌کنیم. تغییر مکانهای Δ_{CEO} و $\delta_{CE,CE}$ را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

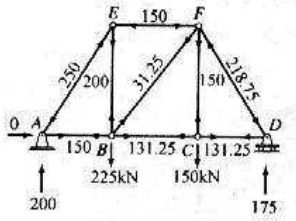
$$\Delta_{CEO} + F_{CE}\,\delta_{CE,CE} = 0$$

عضو	L (m)	F_o (kN)	u_{CE} (kN/kN)	$F_o u_{CE} L$ (kN.m)	$u_{CE}^2 L$ (m)	$F = F_o + u_{CE} F_{CE}$ (kN)
AB	۵/۴	۱۵۰	۰	۰	۰	۱۵۰
BC	۵/۴	۱۳۱/۲۵	-۰/۶	-۴۲۵/۲۵	۱/۹۴۴	۹۸/۹۶
CD	۵/۴	۱۳۱/۲۵	۰	۰	۰	۱۳۱/۲۵
EF	۵/۴	-۱۵۰	-۰/۶	۴۸۶	۱/۹۴۴	-۱۸۲/۳
BE	۷/۲	۲۰۰	-۰/۸	-۱۱۵۲	۴/۶۰۸	۱۵۶/۹۴
CF	۷/۲	۱۵۰	-۰/۸	-۸۶۴	۴/۶۰۸	۱۰۶/۹۴
AE	۹	-۲۵۰	۰	۰	۰	-۲۵۰
BF	۹	۳۱/۲۵	۱	۲۸۱/۲۵	۹	۸۵/۰۷
CE	۹	۰	۱	۰	۹	۵۳/۸۲
DF	۹	-۲۱۸/۷۵	۰	۰	۰	-۲۱۸/۷۵
			Σ	-۱۶۷۴	۳۱/۱۰۴	



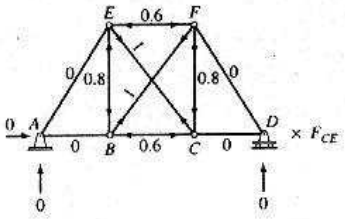
EA = ثابت
تیر نامعین اصلی

شکل ۸-۸

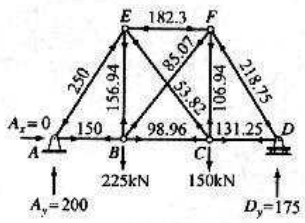


خرپای اولیه تحت اثر بارهای خارجی (F_O)

$$\Delta_{CEO} = \frac{1}{AE}\sum F_o u_{CE} L \quad , \quad \delta_{CE,CE} = \frac{1}{AE}\sum u_{CE}^2 L$$



خرپای اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی
واحد در عضو CE، (u_{CE})



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی خرپای نامعین

$$\delta_{CE,CE} = \frac{1}{AE}(۳۱/۱۰۴) = \frac{۳۱/۱۰۴\,m}{AE}$$

$$\Delta_{CEO} = \frac{1}{AE}(-۱۶۷۴) = -\frac{۱۶۷۴\,kN.m}{AE}$$

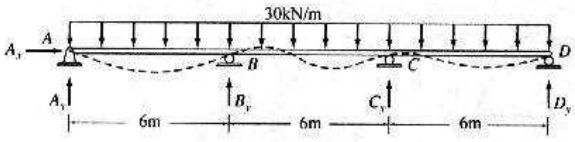
$$\Delta_{CE} + F_{CE}\,\delta_{CE,CE} = 0$$

$$-\frac{۱۶۷۴}{AE} + F_{CE}\left[\frac{۳۱/۱۰۴}{AE}\right] = 0$$

$$F_{CE} = ۵۳/۸۲ \quad kN$$

$$\blacktriangleright F_{CE} = ۵۳/۸۲ \quad kN \quad (T)$$

۸-۹ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر یکسرهٔ سه دهانهٔ نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش نیرو محاسبه کنید. نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کنید.



E = ۲۰۰ GPa ، I = ۳/۰۵×۱۰^۹ mm^۴
تیر نامعین اصلی

شکل ۸-۹

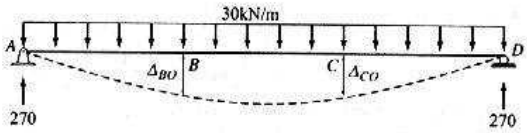
تیر مورد نظر دو درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، واکنشهای تکیه‌گاهی B_y و C_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

تغییر مکانهای Δ_{BO} ، Δ_{CO} ، δ_{BB} ، δ_{CB} (δ_{BC}) و δ_{CC} را با استفاده از روابط ارائه شده در پیوست (ب) محاسبه می‌کنیم.

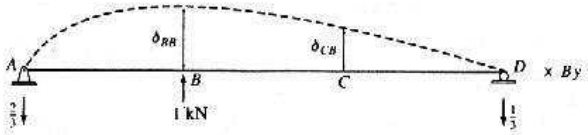
$$\Delta_{BO} = \Delta_{CO} = -\frac{۲۲wL^4}{۱۹۴۴EI} = -\frac{۲۲(۳۰)(۱۸)^4}{۱۹۴۴EI}$$

$$\Delta_{BO} = \Delta_{CO} = -\frac{۳۵۶۴۰\,kN.m^3}{EI}$$

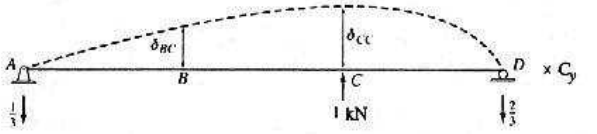
$$\delta_{BB} = \delta_{CC} = \frac{(۱)a^2(L-a)^2}{۳EIL} = \frac{(۶)^2(۱۸-۶)^2}{۳EI(۱۸)} = \frac{۹۶\,m^3}{EI}$$



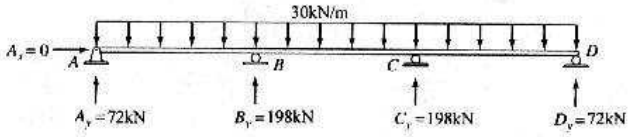
تیر اولیه تحت اثر بار خارجی



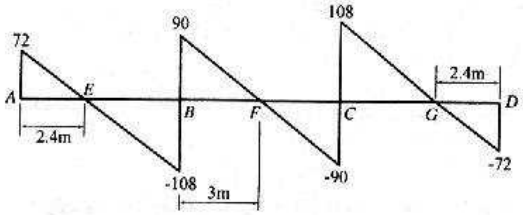
تیر اولیه تحت اثر بار واحد مؤثر در نقطهٔ B



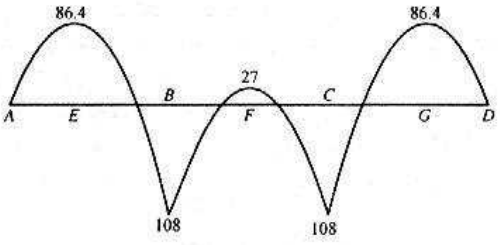
تیر اولیه تحت اثر بار واحد مؤثر در نقطهٔ C



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی



نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

$$\delta_{BC} = \delta_{CB} = \frac{(1)b\,(-2b^2 + bL^2)}{6EIL}$$

$$\delta_{BC} = \delta_{CB} = \frac{(6)\left[-2(6)^2 + (6)(18)^2\right]}{6EI(18)}$$

$$\delta_{BC} = \delta_{CB} = \frac{84\ m^2}{EI}$$

روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases} \Delta_{BO} + B_y\delta_{BB} + C_y\delta_{BC} = 0 \\ \Delta_{CO} + B_y\delta_{CB} + C_y\delta_{CC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -35640 + 96B_y + 84C_y = 0 \\ -35640 + 84B_y + 96C_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 96B_y + 84C_y = 35640 \\ 84B_y + 96C_y = 35640 \end{cases}$$

$$B_y = C_y = 198\ \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{B_y} = C_y = 198\ \ kN \uparrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \ : \ A_x = 0 \ \blacktriangleright \vec{A_x} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \ :$$

$$30(18)(9) - 198(12+6) - A_y(18) = 0$$

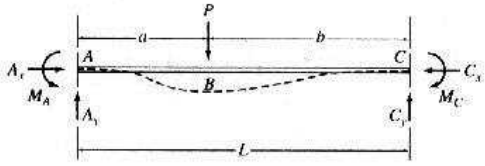
$$A_y = 72\ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A_y} = 72\ \ kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \ :$$

$$72 - 30(18) + 198 + 198 + D_y = 0$$

$$D_y = 72\ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{D_y} = 72\ \ kN \uparrow$$

۸-۱۰ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه کرده، سپس نمودار لنگر خمشی این تیر را ترسیم کنید.



تیر نامعین اصلی

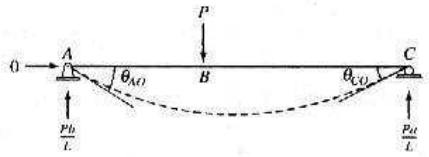
شکل ۸-۱۰

تیر مزبور دو درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، لنگرهای گیرداری تکیه‌گاههای A و C را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

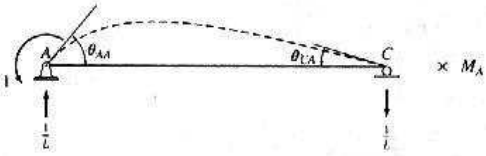
دورانهای θ_{AO}، θ_{CO}، θ_{AA}، θ_{CA} (θ_{AC}) و θ_{CC} را با استفاده از روابط ارائه شده در پیوست (ب) محاسبه می‌کنیم.

$$\theta_{AO}=-\frac{Pb\left[L^2-b^2\right]}{6EIL} \quad , \quad \theta_{CO}=-\frac{Pa\left[L^2-a^2\right]}{6EIL}$$

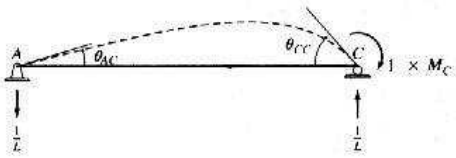
$$\theta_{AA}=\theta_{CC}=\frac{L}{3EI} \quad , \quad \theta_{AC}=\theta_{CA}=\frac{L}{6EI}$$



تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی



تیر اولیه تحت اثر لنگر واحد مؤثر در نقطهٔ A



تیر اولیه تحت اثر لنگر واحد مؤثر در نقطهٔ C

روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases}\theta_{AO}+M_A\theta_{AA}+M_C\theta_{AC}=0\\ \theta_{CO}+M_A\theta_{CA}+M_C\theta_{CC}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{Pb\left[L^2-b^2\right]}{6EIL}+M_A\left(\dfrac{L}{3EI}\right)+M_C\left(\dfrac{L}{6EI}\right)=0\\ -\dfrac{Pa\left[L^2-a^2\right]}{6EIL}+M_A\left(\dfrac{L}{6EI}\right)+M_C\left(\dfrac{L}{3EI}\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2M_A+M_C=\dfrac{Pb\left[L^2-b^2\right]}{L^2}\\ M_A+2M_C=\dfrac{Pa\left[L^2-a^2\right]}{L^2}\end{cases}$$

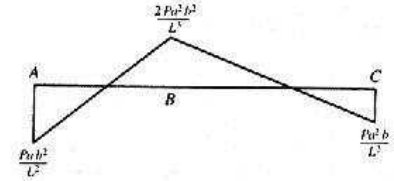
$$\blacktriangleright \vec{M}_A=\frac{Pab^2}{L^2}\circlearrowleft \qquad \blacktriangleright \vec{M}_C=\frac{Pa^2b}{L^2}\circlearrowright$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C=0 \;:\; -A_y(L)+Pb+\frac{Pab^2}{L^2}-\frac{Pa^2b}{L^2}=0$$

$$A_y=\frac{Pb^2(3a+b)}{L^3} \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=\frac{Pb^2(3a+b)}{L^3}\uparrow$$

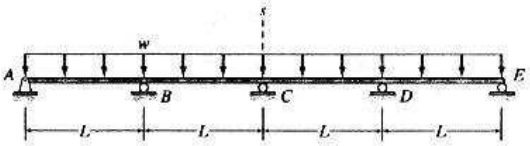
$$+\uparrow \sum F_y=0 \;:\; \frac{Pb^2(3a+b)}{L^3}+C_y-P=0$$

$$C_y=\frac{Pa^2(a+3b)}{L^3} \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y=\frac{Pa^2(a+3b)}{L^3}\uparrow$$



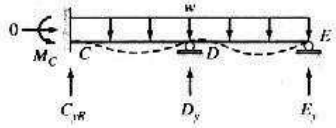
نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی

۸-۱۱ با استفاده از روش نیرو، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر یکسرهٔ چهار دهانهٔ نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کرده، سپس نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مزبور را ترسیم کنید.



ثابت = EI
تیر نامعین اصلی

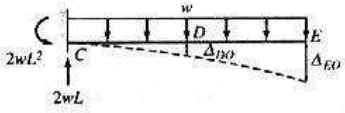
شکل ۸-۱۱



تیر معادل با تیر نامعین اصلی

این تیر دو درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، واکنشهای تکیه‌گاهی D_y و E_y را به عنوان مجهولات اضافی در نظر می‌گیریم.

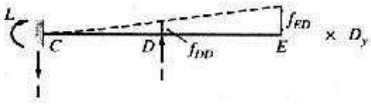
تغییر مکانهای Δ_{DO} ، Δ_{EO} ، δ_{DD} ، δ_{DE} (δ_{ED}) و δ_{EE} را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.



تیر اولیه تحت اثر بار خارجی

$$\Delta_{DO} = -\frac{17wL^4}{24EI} \quad , \quad \Delta_{EO} = -\frac{2wL^4}{EI} \quad , \quad \delta_{DD} = \frac{L^3}{3EI}$$

$$\delta_{ED} = \delta_{DE} = \frac{5L^3}{6EI} \quad ; \quad \delta_{EE} = \frac{8L^3}{3EI}$$



تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در نقطهٔ D

روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases} \Delta_{DO} + D_y\,\delta_{DD} + E_y\,\delta_{DE} = 0 \\ \Delta_{EO} + D_y\,\delta_{ED} + E_y\,\delta_{EE} = 0 \end{cases}$$

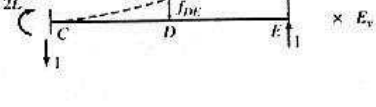
$$\begin{cases} -\frac{17wL^4}{24EI} + D_y\left(\frac{L^3}{3EI}\right) + E_y\left(\frac{5L^3}{6EI}\right) = 0 \\ -\frac{2wL^4}{EI} + D_y\left(\frac{5L^3}{6EI}\right) + E_y\left(\frac{8L^3}{3EI}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8D_y + 20E_y = 17wL \\ 5D_y + 16E_y = 12wL \end{cases}$$

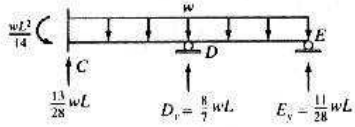
$$\blacktriangleright \vec{D}_y = \frac{8}{7}wL\uparrow \qquad \blacktriangleright \vec{E}_y = \frac{11}{28}wL\uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; C_y + 2\left(\frac{8}{7}wL + \frac{11}{28}wL\right) - 4wL = 0$$

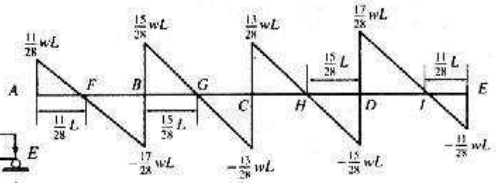
$$C_y = \frac{26}{28}wL \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = \frac{26}{28}wL\uparrow$$



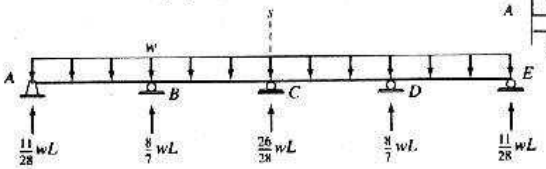
تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در نقطهٔ E



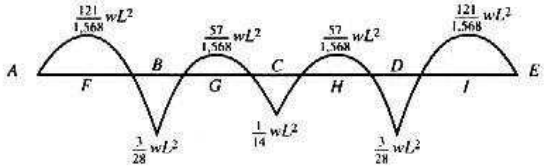
واکنشهای تکیه‌گاهی تیر معادل



نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی



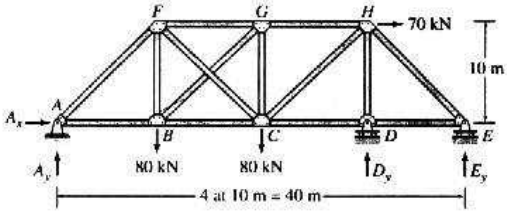
واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی

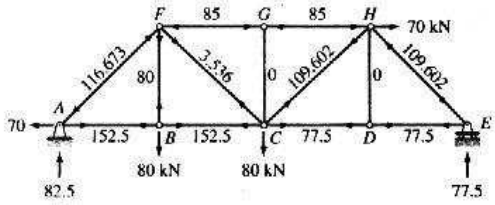
۸-۱۲ با استفاده از روش تیرو، واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضای خرپای نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.

خرپای نشان داده شده یک درجه نامعین خارجی و یک درجه نامعین داخلی است. برای تعیین خرپای اولیه، نیروی داخلی (F_{BG}) عضو BG و واکنش تکیه‌گاهی D_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. تغییر مکانهای Δ_{DO} ، Δ_{BGO} ، δ_{DD} ، $\delta_{BG,D}$ ($\delta_{D,BG}$) و $\delta_{BG,BG}$ را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.

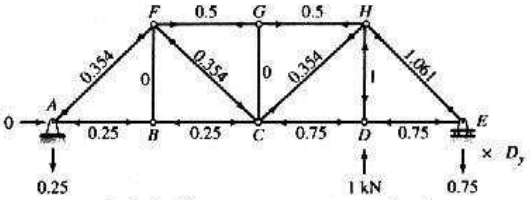


BA = نابت، E = ۲۰۰ GPa ، A = ۲۰۰۰ mm^۲
خرپای نامعین اصلی

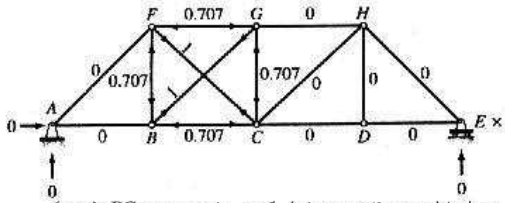
شکل ۸-۱۲



خرپای اولیه تحت اثر بارهای خارجی ، (F_o)



خرپای اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در گره D ، (u_D)



خرپای اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو BG ، (u_{BG})

روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases}\Delta_{DO}+D_y\delta_{DD}+F_{BG}\delta_{D,BG}=0\\ \Delta_{BGO}+D_y\delta_{BG,D}+F_{BG}\delta_{BG,BG}=0\end{cases}$$

$$\Delta_{DO}=\sum\frac{F_o u_D L}{AE}\quad,\quad \Delta_{BGO}=\sum\frac{F_o u_{BG} L}{AE}$$

$$\delta_{DD}=\sum\frac{u_D^2 L}{AE}\quad,\quad \delta_{BG,BG}=\sum\frac{u_{BG}^2 L}{AE}$$

$$\delta_{BG,D}=\delta_{D,BG}=\sum\frac{u_D u_{BG} L}{AE}$$

با توجه به محاسبات جدول صفحهٔ بعد داریم:

$$\Delta_{DO}=-\frac{۴۴۷۲/۶۴۲\ kN.m}{AE}\quad,\quad \Delta_{BGO}=-\frac{۹۹۲/۸۱۹\ kN.m}{AE}\quad,\quad \delta_{DD}=\frac{۴۸/۷۳۶\ m}{AE}$$

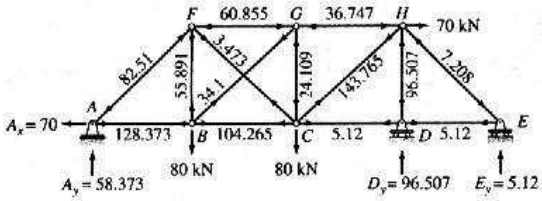
$$\delta_{BG,BG}=\frac{۴۸/۲۸۴\ m}{AE}\quad,\quad \delta_{BG,D}=\delta_{D,BG}=-\frac{۶/۷۷۳\ m}{AE}$$

$$\begin{cases}-۴۴۷۲/۶۴۲+۴۸/۷۳۶D_y-۶/۷۷۳F_{BG}=0\\ -۹۹۲/۸۱۹-۶/۷۷۳D_y+۴۸/۲۸۴F_{BG}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴۸/۷۳۶D_y-۶/۷۷۳F_{BG}=۴۴۷۲/۶۴۲\\ -۶/۷۷۳D_y+۴۸/۲۸۴F_{BG}=۹۹۲/۸۱۹\end{cases}$$

$$D_y=۹۶/۵۰۷\ \ kN\quad,\quad F_{BG}=۳۴/۱\ \ kN\qquad\blacktriangleright\ \vec{D}_y=۹۶/۵۰۷\ \ kN\uparrow\quad,\quad\blacktriangleright F_{BG}=۳۴/۱\ \ kN\ \ (T)$$

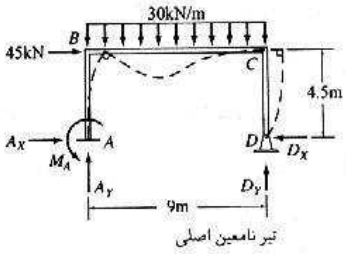
عضو	L (m)	F_o (kN)	u_D (kN/kN)	u_{BG} (kN/kN)	$F_o u_D L$ (kN.m)	$F_o u_{BG} L$ (kN.m)	$u_D^2 L$ (m)	$u_{BG}^2 L$ (m)	$u_D u_{BG} L$ (m)	$F=F_o+u_D D_y+u_{BG}F_{BG}$ (kN)
AB	۱۰	۱۵۲/۵	-۰/۲۵	۰	-۳۸۱/۲۵	۰	۰/۶۲۵	۰	۰	۱۲۸/۳۷۳
BC	۱۰	۱۵۲/۵	-۰/۲۵	-۰/۷۰۷	-۳۸۱/۲۵	-۱۰۷۸/۱۷۵	۰/۶۲۵	۵	۱/۷۶۸	۱۰۴/۲۶۵
CD	۱۰	۷۷/۵	-۰/۷۵	۰	-۵۸۱/۲۵	۰	۵/۶۲۵	۰	۰	۵/۱۲
DE	۱۰	۷۷/۵	-۰/۷۵	۰	-۵۸۱/۲۵	۰	۵/۶۲۵	۰	۰	۵/۱۲
FG	۱۰	-۸۵	۰/۵	-۰/۷۰۷	-۴۲۵	۶۰۰/۹۵	۲/۵	۵	-۳/۵۳۵	-۶۰/۸۵۵
GH	۱۰	-۸۵	۰/۵	۰	-۴۲۵	۰	۲/۵	۰	۰	-۳۶/۷۴۷
BF	۱۰	۸۰	۰	-۰/۷۰۷	۰	-۵۶۵/۶۰	۰	۵	۰	۵۵/۸۹۱
CG	۱۰	۰	۰	-۰/۷۰۷	۰	۰	۰	۵	۰	-۲۴/۱۰۹
DH	۱۰	۰	-۱	۰	۰	۰	۱۰	۰	۰	-۹۶/۵۰۷
AF	۱۲/۱۴۲	-۱۱۶/۶۷۳	۰/۳۵۴	۰	-۵۸۲/۰۹۶	۰	۱/۷۷۲	۰	۰	-۸۲/۵۱
BG	۱۴/۱۴۲	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱۴/۱۴۲	۰	۳۴/۱
CF	۱۴/۱۴۲	۳/۵۳۶	-۰/۳۵۴	۱	-۱۷/۷۰۲	۵۰/۰۰۶	۱/۷۷۲	۱۴/۱۴۲	-۵/۰۰۶	۳/۴۷۳
CH	۱۴/۱۴۲	۱۰۹/۶۰۲	۰/۳۵۴	۰	۵۴۸/۶۹۷	۰	۱/۷۷۲	۰	۰	۱۴۳/۷۶
EH	۱۴/۱۴۲	-۱۰۹/۶۰۲	۱/۰۶۱	۰	-۱۶۴۴/۵۴۱	۰	۱۵/۹۲	۰	۰	-۷/۲۰۸
				Σ	-۴۴۷۲/۶۴۲	-۹۹۲/۸۱۹	۴۸/۷۳۶	۴۸/۲۸۴	-۶/۷۷۳	

با استفاده از رابطهٔ: $F=F_o+u_D D_y+u_{BG}F_{BG}$ ، نیروی داخلی کلیهٔ اعضای خرپای نامعین به دست خواهد آمد.



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضای خرپای نامعین اصلی

۸-۱۳ بااستفاده از روش نیرو، واکنشهای تکیه‌گاهی قاب نشان داده شده در شکل را محاسبه کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی قاب را ترسیم کنید.

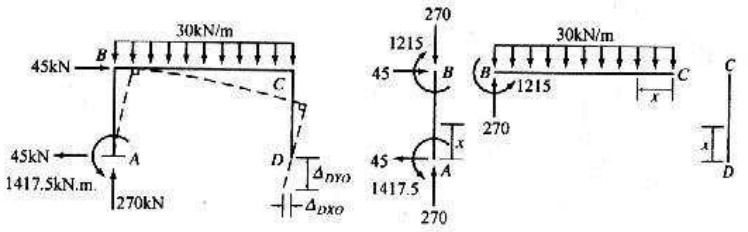


تیر نامعین اصلی

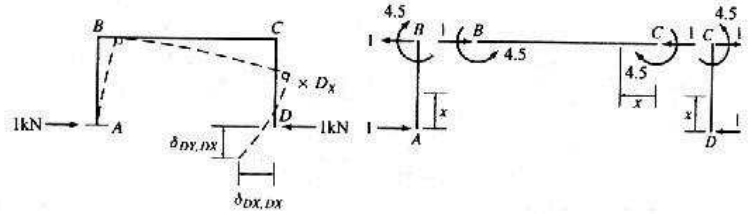
شکل ۸-۱۳

قاب مورد نظر دو درجه نامعین است. تغییر مکانهای Δ_{Dxo} ، Δ_{Dyo} ، $\delta_{Dx,Dx}$ ، $\delta_{Dy,Dy}$ و $\delta_{Dx,Dy}$ ($\delta_{Dy,Dx}$) را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.

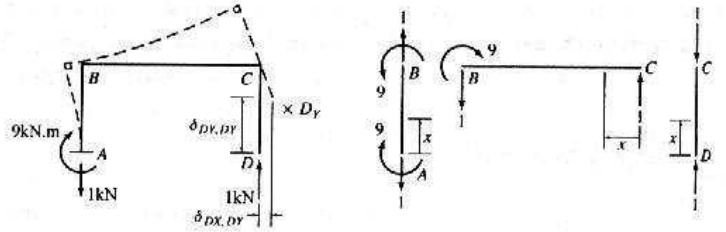
عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M_o (kN.m)	m_{Dx} ($\frac{kN.m}{kN}$)	m_{Dy} ($\frac{kN.m}{kN}$)
AB	A	۰-۴/۵	$-۱۴۱۷/۵+۴۵x$	-x	۹
CB	C	۰-۹	$-۱۵x^{۲}$	-۴/۵	x
DC	D	۰-۴/۵	۰	-x	۰



قاب اولیه تحت اثر بارهای خارجی ، (M_O)



قاب اولیه تحت اثر نیروی واحد افقی مؤثر در نقطهٔ D ، (m_{Dx})



قاب اولیه تحت اثر نیروی واحد قائم مؤثر در نقطهٔ D ، (m_{Dy})

روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases} \Delta_{Dxo} + D_x \delta_{Dx,Dx} + D_y \delta_{Dx,Dy} = 0 \\ \Delta_{Dyo} + D_x \delta_{Dy,Dx} + D_y \delta_{Dy,Dy} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_{Dxo} = \sum \int \frac{M_o m_{Dx}}{EI} dx = \frac{۲۹۳۸۷/۸۱۲\ kN.m^۳}{EI} \quad , \quad \Delta_{Dyo} = \sum \int \frac{M_o m_{Dy}}{EI} dx = -\frac{۷۷۹۱۱/۸۷۵\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\delta_{Dx,Dx} = \sum \int \frac{m_{Dx}^۲}{EI} dx = \frac{۲۴۳\ m^۳}{EI} \quad , \quad \delta_{Dy,Dy} = \sum \int \frac{m_{Dy}^۲}{EI} dx = \frac{۶۰۷/۵\ m^۳}{EI}$$

$$\delta_{Dx,Dy} = \delta_{Dy,Dx} = \sum \int \frac{m_{Dx} m_{Dy}}{EI} dx = -\frac{۲۷۳/۳۷۵\ m^۳}{E}$$

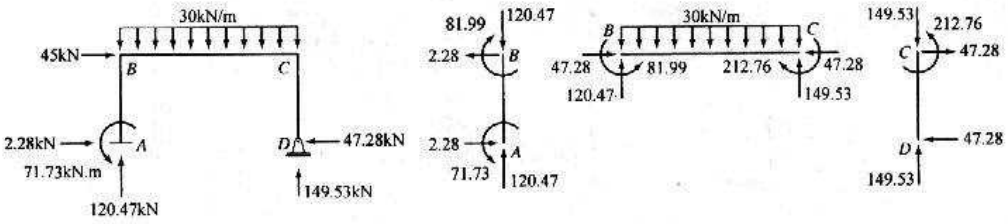
$$\begin{cases} ۲۹۳۸۷/۸۱۲ + ۲۴۳ D_x - ۲۷۳/۳۷۵ D_y = 0 \\ -۷۷۹۱۱/۸۷۵ - ۲۷۳/۳۷۵ D_x + ۶۰۷/۵ D_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۴۳ D_x - ۲۷۳/۳۷۵ D_y = -۲۹۳۸۷/۸۱۲ \\ -۲۷۳/۳۷۵ D_x + ۶۰۷/۵ D_y = ۷۷۹۱۱/۸۷۵ \end{cases}$$

$\blacktriangleright \vec{D_x} = ۴۷/۲۸\ \ kN \leftarrow$, $\blacktriangleright \vec{D_y} = ۱۴۹/۵۳\ \ kN \uparrow$

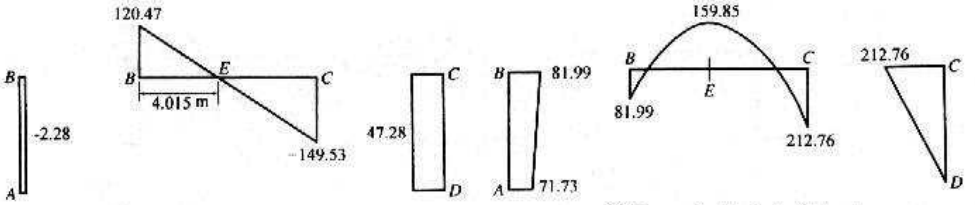
$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \ : \ A_x + ۴۵ - ۴۷/۲۸ = 0 \Rightarrow A_x = ۲/۲۸\ kN \quad \blacktriangleright \vec{A_x} = ۲/۲۸\ \ kN \rightarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \ : \ A_y - ۳۰(۹) + ۱۴۹/۵۳ = 0 \Rightarrow A_y = ۱۲۰/۴۷\ kN \quad \blacktriangleright \vec{A_y} = ۱۲۰/۴۷\ \ kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \ : \ ۱۴۹/۵۳(۹) - ۳۰(۹)(۴/۵) - ۴۵(۴/۵) + M_A = 0 \Rightarrow M_A = ۷۱/۷۳\ kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M_A} = ۷۱/۷۳\ \ kN.m \circlearrowleft$



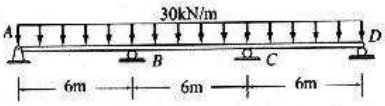
واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی انتهای اعضا در قاب نامعین اصلی



نمودار نیروی برشی قاب نامعین ، kN

نمودار لنگر خمشی قاب نامعین ، kN.m

۸-۱۴ واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کرده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی این تیر را ترسیم کنید. فرض کنید که علاوه بر بار گستردهٔ اعمال شده، تکیه‌گاههای B ، C و D به ترتیب به اندازهٔ ۱۵ mm ، ۳۷ mm و ۱۸ mm نشست کنند. برای حل این مسئله از روش تیرو (سازگاری تغییر شکلها) استفاده کنید.



E = ۲۰۰ GPa ، I = ۳/۰۵×۱۰^{۹} mm^{۴}
تیر نامعین اصلی

شکل ۸-۱۴

در مسئلهٔ ۸-۹ تحلیل این تیر تحت اثر بار گستردهٔ ۳۰ kN/m به طور کامل آورده شده است. روش حل این مسئله نیز مشابه حل مسئلهٔ ۸-۹ است، با این تفاوت که در این جا روابط سازگاری به صورت زیر اصلاح می‌شوند.

روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases} \Delta_{BO} + \Delta_{BS} + B_y \delta_{BB} + C_y \delta_{BC} = 0 \\ \Delta_{CO} + \Delta_{CS} + B_y \delta_{CB} + C_y \delta_{CC} = 0 \end{cases}$$

با توجه به حل مسئلهٔ ۸-۹، مقادیر Δ_{BO} ، Δ_{CO} ، δ_{BB} ، δ_{BC} (δ_{CB}) و δ_{CC} در دست است.

$$E = ۲۰۰۰۰۰\ N/mm^{۲} = ۲۰۰\ kN/mm^{۲}$$

$$\Delta_{BO} = \Delta_{CO} = -\frac{۳۵۶۴۰\ kN.m^{۳}}{EI} = -\frac{۳۵۶۴۰(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰۰۰۰)(۳/۰۵\times ۱۰^{۹})}$$

$$\Delta_{BO} = \Delta_{CO} = -۵۸/۴۲۶\ mm$$

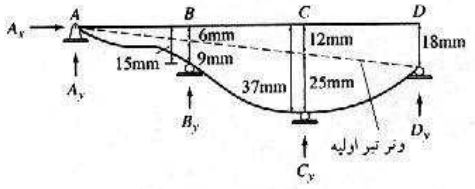
$$\delta_{BB} = \delta_{CC} = \frac{۹۶\ m^{۳}}{EI} = \frac{۹۶(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰)(۳/۰۵\times ۱۰^{۹})} = ۰/۱۵۷۴\ mm/kN$$

$$\delta_{CB} = \delta_{BC} = \frac{۸۴\ m^{۳}}{EI} = \frac{۸۴(۱۰۰۰)^{۳}}{(۲۰۰)(۳/۰۵\times ۱۰^{۹})} = ۰/۱۳۷۷\ mm/kN$$

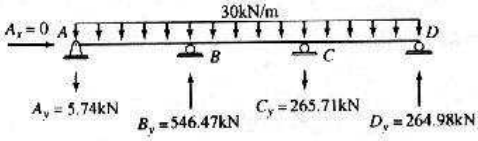
$$\begin{cases} -۵۸/۴۲۶ + ۹ + ۰/۱۵۷۴ B_y + ۰/۱۳۷۷ C_y = 0 \\ -۵۸/۴۲۶ + ۲۵ + ۰/۱۳۷۷ B_y + ۰/۱۵۷۴ C_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۰/۱۵۷۴ B_y + ۰/۱۳۷۷ C_y = ۴۹/۴۲۶ \\ ۰/۱۳۷۷ B_y + ۰/۱۵۷۴ C_y = ۳۳/۴۲۶ \end{cases}$$

$$B_y = ۵۴۶/۴۷\ \ kN\ \ ,\ \ C_y = -۲۶۵/۷۱\ \ kN$$



نشستها و واکنشهای تکیه‌گاهی در تیر نامعین اصلی



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

$\blacktriangleright \vec{B_y} = ۵۴۶/۴۷\ \ kN \uparrow$, $\blacktriangleright \vec{C_y} = ۲۶۵/۷۱\ \ kN \downarrow$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; D_y(18) + 546/47(6) - 265/71(12) - 30(18)(9) = 0 \Rightarrow D_y = 264/98 \;\; kN \;\; \blacktriangleright \vec{D}_y = 264/98 \;\; kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; 264/98 - 265/71 + 546/47 + A_y - 30(18) = 0 \Rightarrow A_y = -5/74 \;\; kN \quad \blacktriangleright \vec{A}_y = 5/74 \;\; kN \downarrow$$

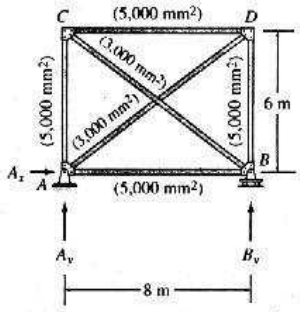
۸-۱۵ واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضای خرپای نشان داده شده در شکل را با استفاده از روش نیرو تعیین کنید. فرض کنید، دمای عضو AB به اندازهٔ ۴۵°C افزایش و دمای عضو CD به اندازهٔ ۲۰°C کاهش یابد.

خرپای مزبور یک درجه نامعین داخلی است. برای تعیین خرپای اولیه، نیروی داخلی (F_{AD}) عضو AD را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

تغییر مکانهای Δ_{ADO} و $\delta_{AD,AD}$ را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

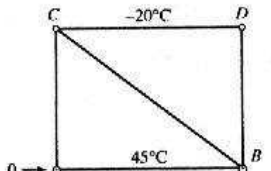
$$\Delta_{ADO} + F_{AD}\delta_{AD,AD} = 0$$



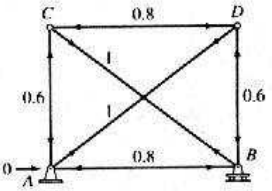
E = ۲۰۰ GPa ، $\alpha = 1/2\times10^{-5}$/°C
خرپای نامعین اصلی

شکل ۸-۱۵

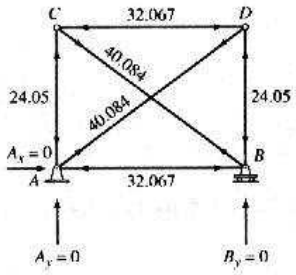
عضو	L (m)	A (m^2)	ΔT (°C)	u_{AD} (kN/kN)	ΔT.L.u_{AD} (°C.m)	$u_{AD}^2\frac{L}{A}$ ($\frac{1}{m}$)	F=u_{AD}.F_{AD} (kN)
AB	۸	۰/۰۰۵	۴۵	-۰/۸	-۲۸۸	۱۰۲۴	-۳۲/۰۶۷
CD	۸	۰/۰۰۵	-۲۰	-۰/۸	۱۲۸	۱۰۲۴	-۳۲/۰۶۷
AC	۶	۰/۰۰۵	۰	-۰/۶	۰	۴۳۲	-۲۴/۰۵
BD	۶	۰/۰۰۵	۰	-۰/۶	۰	۴۳۲	-۲۴/۰۵
AD	۱۰	۰/۰۰۳	۰	۱/۰	۰	۳۳۳۳/۳۳۳	۴۰/۰۸۴
BC	۱۰	۰/۰۰۳	۰	۱/۰	۰	۳۳۳۳/۳۳۳	۴۰/۰۸۴
				Σ	-۱۶۰	۹۵۷۸/۶۶۷	



خرپای اولیه تحت اثر تغییرات درجه حرارت



خرپای اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو AD، (u_{AD})



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضا در خرپای نامعین اصلی

$$\Delta_{ADO} = \alpha\sum(\Delta T)Lu_{AD}$$

$$\delta_{AD,AD} = \frac{1}{E}\sum\frac{u_{AD}^2 L}{A}$$

$$\Delta_{ADO} = 1/2(10^{-5})(-160) = -0/00192\,m$$

$$\Delta_{ADO} = -1/92\,mm$$

$$\delta_{AD,AD} = \frac{9578/667}{200(10^6)} = 47/893(10^{-6})\,m/k$$

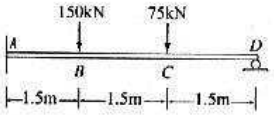
$$\delta_{AD,AD} = 0/0479\,mm/kN$$

$$\Delta_{ADO} + F_{AD}\delta_{AD,AD} = 0$$

$$-1/92 + 0/0479F_{AD} = 0$$

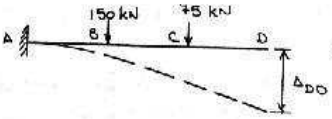
$$F_{AD} = 40/084 \;\; kN \qquad \blacktriangleright F_{AD} = 40/084 \;\; kN \;\; (T)$$

۸-۱۶ با استفاده از روش کار مجازی، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کرده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی این تیر را ترسیم کنید. واکنش تکیه‌گاهی D_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر بگیرید.



$E = ۲۴۰۰۰\ MPa$ ، $I = ۳/۹\times۱۰^{۹}\ mm^{۴}$

شکل ۸-۱۶



تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی



تیر اولیه تحت اثر بار واحد مؤثر در نقطهٔ D

برای محاسبهٔ δ_{DD} و Δ_{DO} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.

$$\Delta_{DO} = -\left[\frac{۱۵۰(۱/۵)^{۲}}{۳EI}+\frac{۱۵۰(۱/۵)^{۲}}{۲EI}(۳)+\frac{۷۵(۳)^{۲}}{۳EI}+\frac{۷۵(۳)^{۲}}{۲EI}(۱/۵)\right]$$

$$\Delta_{DO} = -\frac{۱۸۵۶/۲۵\ kN.m^{۳}}{EI}$$

$$\delta_{DD} = \frac{(۱)(۴/۵)^{۳}}{۳EI} = \frac{۳۰/۳۷۵\ m^{۳}}{EI}$$

$$\Delta_{DO} + D_y \delta_{DD} = ۰ \Rightarrow -\frac{۱۸۵۶/۲۵}{EI} + D_y\left[\frac{۳۰/۳۷۵}{EI}\right] = ۰$$

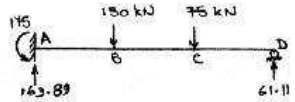
$$D_y = ۶۱/۱۱\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{D}_y = ۶۱/۱۱\ kN\uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ ۶۱/۱۱ + A_y - ۱۵۰ - ۷۵ = ۰ \Rightarrow A_y = ۱۶۳/۸۹\ kN$$

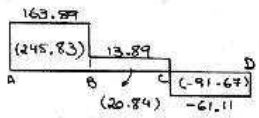
$$\blacktriangleright \vec{A}_y = ۱۶۳/۸۹\ kN\uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \ : \ ۶۱/۱۱(۴/۵) + M_A - ۱۵۰(۱/۵) - ۷۵(۳) = ۰$$

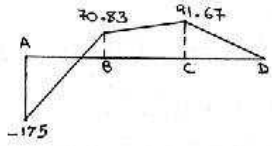
$$M_A = ۱۷۵\ kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = ۱۷۵\ kN.m \ \circlearrowleft$$



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی



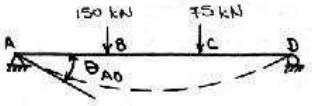
نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN



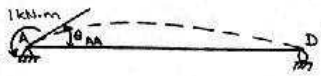
نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۸-۱۷ مسئلهٔ ۸-۱۶ را با این فرض حل کنید که لنگر گیرداری تکیه‌گاه A به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته شود.

برای محاسبهٔ θ_{AO} و θ_{AA} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) کتاب استفاده می‌کنیم.



تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی



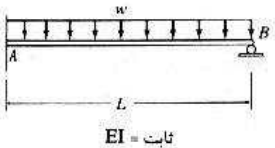
تیر اولیه تحت اثر لنگر واحد مؤثر در نقطهٔ A

$$\theta_{AA} = \frac{(۱)(۴/۵)}{۳EI} = \frac{۱/۵\ m}{EI}$$

$$\theta_{AO} = -\frac{۲۶۲/۵\ kN.m^{۲}}{EI}$$

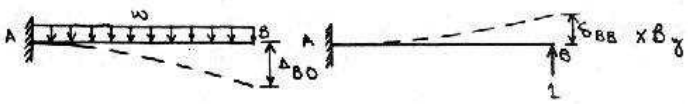
$$\theta_{AO} + M_A \theta_{AA} = ۰ \Rightarrow -\frac{۲۶۲/۵}{EI} + M_A\left[\frac{۱/۵}{EI}\right] = ۰ \Rightarrow M_A = ۱۷۵\ kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = ۱۷۵\ kN.m \ \circlearrowleft$$

۸-۱۸ با استفاده از روش نیرو، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نشان داده شده در شکل را محاسبه کرده و سپس نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی این تیر را ترسیم کنید. واکنش تکیه‌گاهی B_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر بگیرید.



EI = ثابت

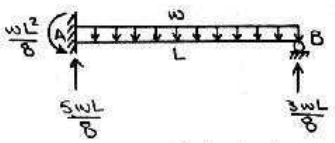
شکل ۸-۱۸



تیر اولیه تحت اثر بار خارجی

تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در نقطهٔ B

برای محاسبهٔ Δ_{BO} و δ_{BB} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

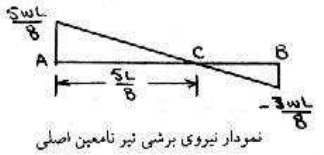
$$\Delta_{BO}=-\frac{wL^4}{8EI}\quad,\quad \delta_{BB}=\frac{L^3}{3EI}$$

$$\Delta_{BO}+B_y\delta_{BB}=0\ \Rightarrow\ -\frac{wL^4}{8EI}+B_y\left[\frac{L^3}{3EI}\right]=0\ \Rightarrow\ B_y=\frac{3wL}{8}$$

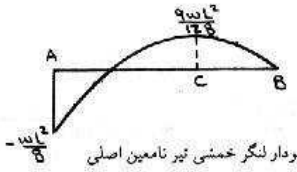
$$\blacktriangleright \vec{B}_y=\frac{3wL}{8}\uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_y=0\ :\ \frac{3wL}{8}+A_y-wL=0\ \Rightarrow\ A_y=\frac{5wL}{8}\qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=\frac{5wL}{8}\uparrow$$

$$+\circlearrowleft\sum M_A=0\ :\ M_A-wL\left[\frac{L}{2}\right]+\frac{3wL}{8}(L)=0\ \Rightarrow\ M_A=\frac{wL^2}{8}\qquad \blacktriangleright \vec{M}_A=\frac{wL^2}{8}\circlearrowleft$$



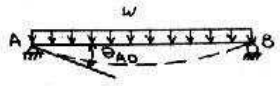
نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی

۸-۱۹ مسئلهٔ ۸-۱۸ را با این فرض حل کنید که لنگر گیرداری تکیه‌گاه A به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته شود.

برای محاسبهٔ θ_{AO} و θ_{AA} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) کتاب استفاده می‌کنیم.



تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی



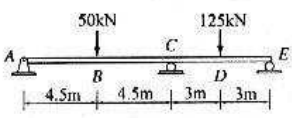
تیر اولیه تحت اثر لنگر واحد مؤثر در A

$$\theta_{AO}=-\frac{wL^3}{24EI}\quad,\quad \theta_{AA}=\frac{L}{3EI}$$

$$\theta_{AO}+M_A\theta_{AA}=0\ \Rightarrow\ \frac{wL^3}{24EI}+M_A\left[\frac{L}{3EI}\right]=0\ \Rightarrow\ M_A=\frac{wL^2}{8}\qquad \blacktriangleright \vec{M}_A=\frac{wL^2}{8}\circlearrowleft$$

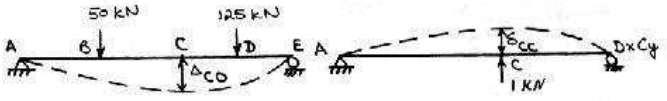
در مسایل ۸-۲۰ تا ۸-۲۲ ، تیرهای نامعین نشان داده شده را با استفاده از روش نیرو تحلیل کنید. واکنش تکیه‌گاه میانی را به عنوان مجهول اضافی فرض کنید.

۸-۲۰



$E = 200\ GPa$ ، $I = 136\times10^6\ mm^4$

شکل ۸-۲۰



تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی

تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در نقطهٔ C

برای محاسبهٔ تغییر مکانهای Δ_{CO} و δ_{CC} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.

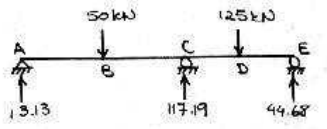
$$\Delta_{CO}=-\frac{7593/75\ kN.m^3}{EI}\quad,\quad \delta_{CC}=\frac{64/8\ m^3}{EI}$$

$$\Delta_{CO}+C_y\delta_{CC}=0\ \Rightarrow\ -\frac{7593/75}{EI}+C_y\left[\frac{64/8}{EI}\right]=0\ \Rightarrow\ C_y=117/19\ \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{C}_y=117/19\ \ kN\uparrow$$

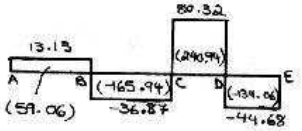
$$+\circlearrowleft\sum M_A=0\ :\ 117/19(9)+E_y(15)-50(4/5)-125(12)=0$$

$$E_y=44/68\ \ kN\qquad \blacktriangleright \vec{E}_y=44/68\ \ kN\uparrow$$

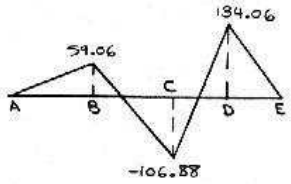


واکنش تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; A_y + 117/19 + 44/68 - 125 - 50 = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 13/13 \;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = 13/13 \;\; kN \uparrow$$

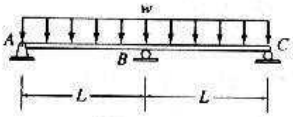


نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی، kN



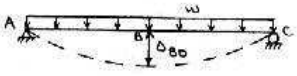
نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی، kN.m

۲۱-۸

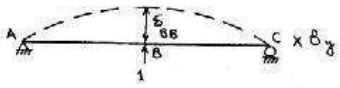


ثابت = EI

شکل ۸-۲۱

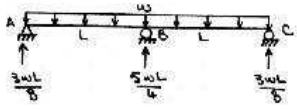


تیر اولیه تحت اثر بار خارجی



تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در نقطهٔ B

برای محاسبهٔ تغییر مکانهای Δ_{BO} و δ_{BB} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

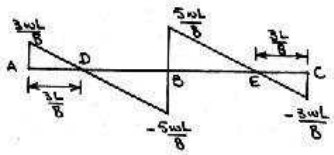
$$\Delta_{BO} = -\frac{5wL^4}{24EI} \;,\; \delta_{BB} = \frac{L^3}{6EI}$$

$$\Delta_{BO} + B_y \delta_{BB} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{5wL^4}{24EI} + B_y\left[\frac{L^3}{6EI}\right] = 0 \;\Rightarrow\; B_y = \frac{5wL}{4}$$

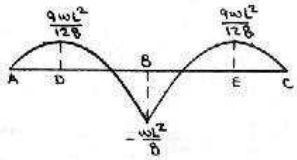
$$\blacktriangleright \vec{B}_y = \frac{5wL}{4} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; C_y(2L) + \frac{5wL}{4}(L) - 2wL(L) = 0 \;\Rightarrow\; C_y = \frac{3wL}{8} \qquad \blacktriangleright \vec{C}_y = \frac{3wL}{8} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; \frac{3wL}{8} + A_y + \frac{5wL}{4} - 2wL = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \frac{3wL}{8} \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = \frac{3wL}{8} \uparrow$$

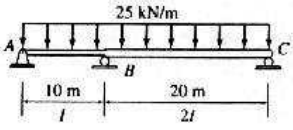


نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی



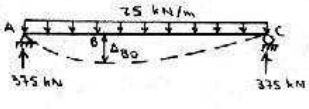
نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی

۲۲-۸

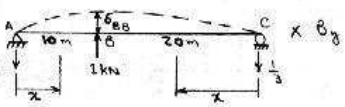


$E = 200\ GPa$ ، $I = 500 \times 10^6\ mm^4$

شکل ۸-۲۲

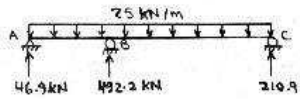


تیر اولیه تحت اثر بار خارجی



تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در نقطهٔ B

برای محاسبهٔ تغییر مکانهای Δ_{BO} و δ_{BB} از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.



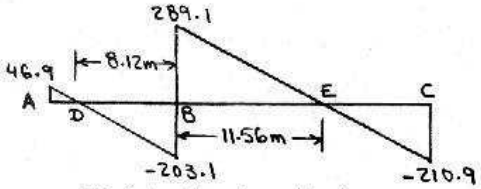
واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

$$\Delta_{BO}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{10}\left(۳۷۵x-\frac{۲۵x^۲}{۲}\right)\left(-\frac{۲}{۳}x\right)dx+\frac{1}{۲}\int_0^{۲۰}\left(۳۷۵x-\frac{۲۵x^۲}{۲}\right)\left(-\frac{1}{۳}x\right)dx\right]$$

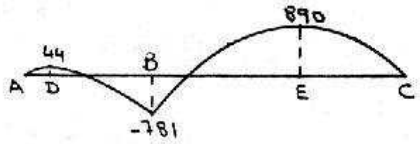
$$\Delta_{BO}=-\frac{۱۴۵۸۳۳/۳۳\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\delta_{BB}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{10}\left(-\frac{۲}{۳}x\right)^۲dx+\frac{1}{۲}\int_0^{۲۰}\left(-\frac{1}{۳}x\right)^۲dx\right]=\frac{۲۹۶/۳\ m^۳}{EI}$$

$$\Delta_{BO}+B_y\delta_{BB}=۰\ \Rightarrow\ -\frac{۱۴۵۸۳۳/۳۳}{EI}+B_y\left[\frac{۲۹۶/۳}{EI}\right]=۰\ \Rightarrow\ B_y=۴۹۲/۲\ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B_y}=۴۹۲/۲\ \ kN\uparrow$$



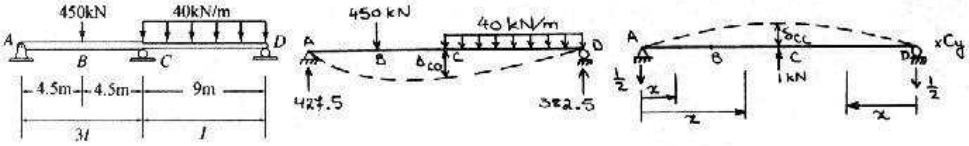
نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

در مسایل ۸-۲۳ تا ۸-۳۱ با استفاده از روش نیرو (سازگاری تغییر شکلها)، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین نشان داده شده را محاسبه کرده، سپس نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مزبور را ترسیم کنید.

۸-۲۳



E = ثابت — تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی — تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در نقطهٔ C

شکل ۸-۲۳

برای محاسبهٔ تغییر مکانهای Δ_{CO} و δ_{CC} از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.

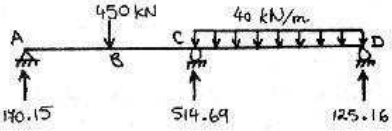
$$\Delta_{CO}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{۳}\int_0^{۴/۵}(۴۲۷/۵x)\left(-\frac{x}{۲}\right)dx+\frac{1}{۳}\int_{۴/۵}^{۹}\{۴۲۷/۵x-۴۵۰(x-۴/۵)\}\left(-\frac{x}{۲}\right)dx+\int_0^{۹}(۳۸۲/۵x-۲۰x^۲)\left(-\frac{x}{۲}\right)dx\right]$$

$$\Delta_{CO}=-\frac{۴۱۶۸۹/۶۸\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\delta_{CC}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{۳}\int_0^{۹}\left(-\frac{x}{۲}\right)^۲dx+\int_0^{۹}\left(-\frac{x}{۲}\right)^۲dx\right]=\frac{۸۱\ m^۳}{EI}$$

$$\Delta_{CO}+C_y\delta_{CC}=۰\ \Rightarrow\ -\frac{۴۱۶۸۹/۶۸}{EI}+C_y\left[\frac{۸۱}{EI}\right]=۰$$

$$C_y=۵۱۴/۶۹\ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_y}=۵۱۴/۶۹\ \ kN\uparrow$$

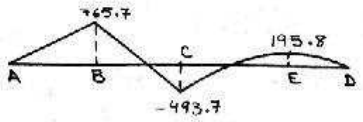


واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

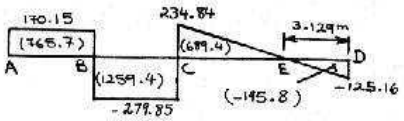
$$+\circlearrowleft\sum M_A=۰\ :\ ۵۱۴/۶۹(۹)+D_y(۱۸)-۴۵۰(۴/۵)-۴۰(۹)(۱۳/۵)=۰$$

$$D_y=۱۲۵/۱۶\ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{D_y}=۱۲۵/۱۶\ \ kN\uparrow$$

$$+\uparrow\sum F_y=۰\ :\ ۵۱۴/۶۹+۱۲۵/۱۶+A_y-۴۵۰-۴۰(۹)=۰\ \Rightarrow\ A_y=۱۷۰/۱۵\ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{A_y}=۱۷۰/۱۵\ \ kN\uparrow$$



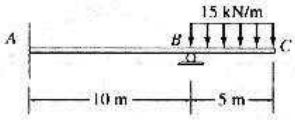
نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m



نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN

۲۴-۸

واکنش تکیه‌گاهی B_y را به عنوان مجهول اضافی فرض کرده و برای محاسبهٔ Δ_{BO} و δ_{BB} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



EI = ثابت

شکل ۸-۲۴

$$\Delta_{BO} = -\frac{۳۴۳۷۵\ kN.m^۳}{EI} \quad , \quad \delta_{BB} = \frac{۳۳۳/۳۳\ m^۳}{EI}$$

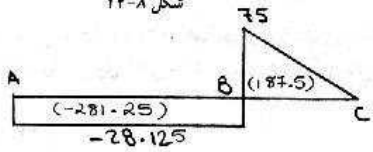
$$\Delta_{BO} + B_y \delta_{BB} = ۰ \ \Rightarrow \ -\frac{۳۴۳۷۵}{EI} + B_y \left[\frac{۳۳۳/۳۳}{EI}\right] = ۰ \ \Rightarrow \ B_y = ۱۰۳/۱۲۵ \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{B_y} = ۱۰۳/۱۲۵ \ kN \uparrow$$

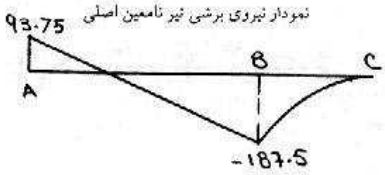
$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ : \ A_y - ۱۵(۵) + ۱۰۳/۱۲۵ = ۰ \ \Rightarrow \ A_y = -۲۸/۱۲۵ \ kN$$

$$+) \sum M_A = ۰ \ : \ ۱۰۳/۱۲۵(۱۰) - ۱۵(۵)(۱۲/۵) + M_A = ۰$$

$$M_A = -۹۳/۷۵ \ kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M_A} = ۹۳/۷۵ \ kN.m \ )$$

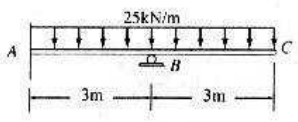


نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی



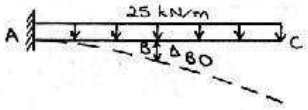
نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی

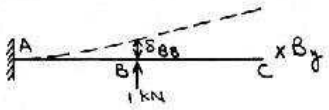
۲۵-۸



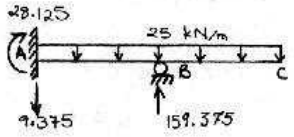
EI = ثابت

شکل ۸-۲۵





برای محاسبهٔ تغییر مکانهای Δ_{BO} و δ_{BB} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.

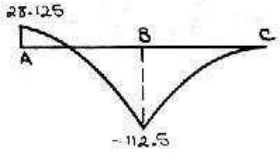


واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

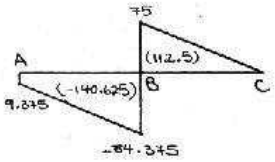
$$\Delta_{BO} = -\frac{۱۴۳۴/۳۷۵\ kN.m^۳}{EI} \quad , \quad \delta_{BB} = \frac{۹\ m^۳}{EI}$$

$$\Delta_{BO} + B_y \delta_{BB} = ۰ \ \Rightarrow \ -\frac{۱۴۳۴/۳۷۵}{EI} + B_y \left[\frac{۹}{EI}\right] = ۰ \ \Rightarrow \ B_y = ۱۵۹/۳۷۵ \ kN$$

$$\blacktriangleright B_y = ۱۵۹/۳۷۵ \ kN \uparrow$$

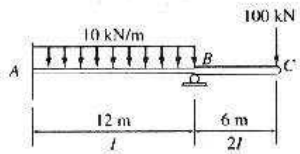


نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m



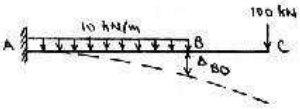
نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN

۲۶-۸

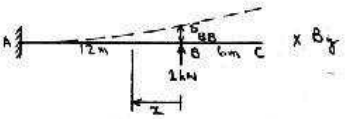


E = ثابت

شکل ۸-۲۶

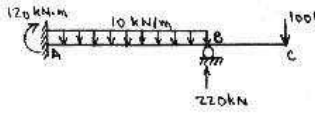


تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی



تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در نقطهٔ B

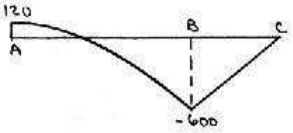
واکنش تکیه‌گاهی B_y را به عنوان مجهول در نظر گرفته و با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکانهای Δ_{BO} و δ_{BB} را محاسبه می‌کنیم.



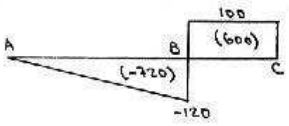
$$\Delta_{BO}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{12}\left\{-100(6+x)-5x^2\right\}(x)dx\right]=-\frac{12672\circ\ kN.m^3}{EI}$$

$$\delta_{BB}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{12}(x^2)dx\right]=\frac{576\ m^3}{EI}$$

$$\Delta_{BO}+B_y\delta_{BB}=0\ \Rightarrow\ -\frac{12672\circ}{EI}+B_y\left[\frac{576}{EI}\right]=0\ \Rightarrow\ B_y=22\circ\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B_y}=22\circ\ kN\uparrow$$



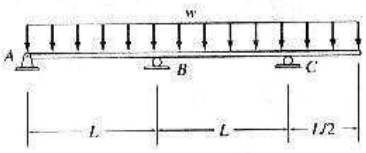
نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m



نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN

۲۷-۸

واکنش تکیه‌گاهی B_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و برای محاسبهٔ تغییر مکانهای Δ_{BO} و δ_{BB} از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.

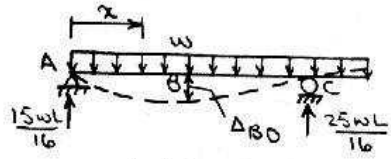


EI = ثابت

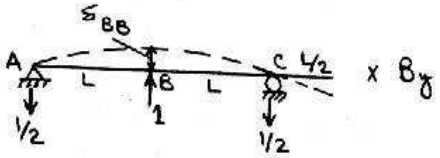
شکل ۸-۲۷

$$\Delta_{BO}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{L}\left[\frac{15}{16}wLx-\frac{wx^2}{2}\right]\left[-\frac{x}{2}\right]dx+\int_L^{2L}\left[\frac{15}{16}wLx-\frac{wx^2}{2}\right]\left\{-\frac{x}{2}+1(x-L)\right\}dx\right]=-\frac{17wL^4}{96EI}$$

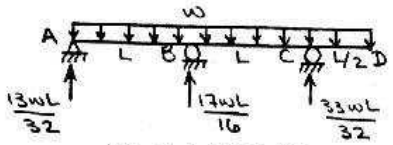
$$\delta_{BB}=\frac{2}{EI}\int_0^{L}\left[-\frac{x}{2}\right]^2dx=\frac{L^3}{6EI}$$



تیر اولیه تحت اثر بار خارجی



تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در نقطهٔ B



واکنش تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

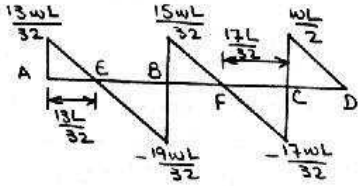
$$\Delta_{BO} + B_y \delta_{BB} = 0 \Rightarrow -\frac{17wL^4}{96EI} + B_y\left(\frac{L^3}{6EI}\right) = 0$$

$$B_y = \frac{17wL}{16} \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y = \frac{17wL}{16}\uparrow$$

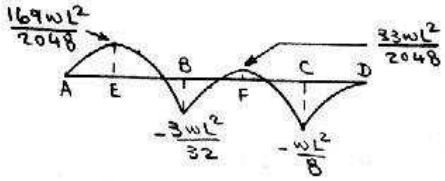
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;:\; -2/5wL\left[\frac{2/5L}{2}\right] + \frac{17wL}{16}(L) + C_y(2L) = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{C}_y = \frac{33wL}{32}\uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; \frac{33wL}{32} + \frac{17wL}{16} + A_y - 2/5wL = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y = \frac{13wL}{32}\uparrow$$



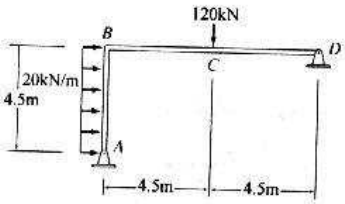
نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۲۸-۸

واکنش تکیه‌گاهی D_x را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و برای محاسبهٔ Δ_{DO} و δ_{DD} از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.

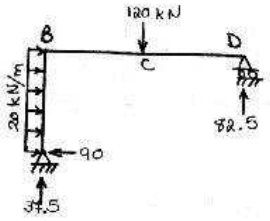


EI = ثابت

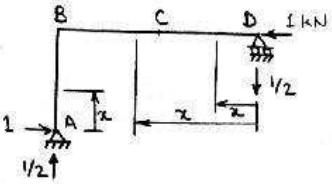
شکل ۲۸-۸

$$\Delta_{DO} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{4/5}(90x - 10x^2)(-x)dx + \int_0^{4/5}(82/5x)\left[-\frac{x}{2}\right]dx + \int_{4/5}^{9}(540 - 37/5x)\left[-\frac{x}{2}\right]dx\right] = -\frac{7176/9\ kN.m^3}{EI}$$

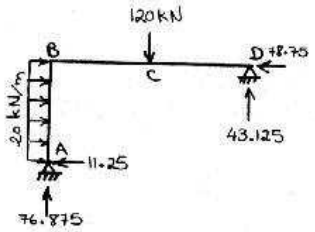
$$\delta_{DD} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{4/5}(-x)^2dx + \int_0^{9}\left[-\frac{x}{2}\right]^2dx\right] = \frac{91/125\ m^3}{EI}$$



قاب اولیه تحت اثر بارهای خارجی



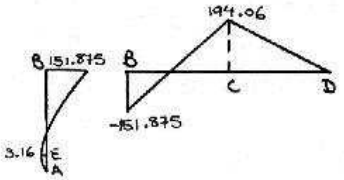
قاب اولیه تحت اثر بار واحد افقی مؤثر در نقطهٔ D



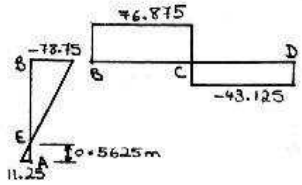
واکنشهای تکیه‌گاهی قاب نامعین اصلی

$$\Delta_{DO} + D_x \delta_{DD} = 0 \Rightarrow -\frac{7176/9}{EI} + D_x\left[\frac{91/125}{EI}\right] = 0 \Rightarrow D_x = 78/75\ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{D}_x = 78/75\ kN \leftarrow$$



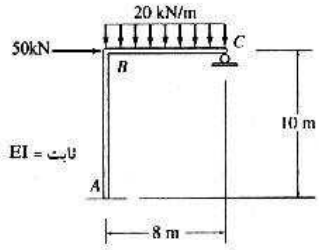
نمودار لنگر خمشی قاب نامعین اصلی ، kN.m



نمودار نیروی برشی قاب نامعین اصلی ، kN

۲۹-۸

واکنش تکیه‌گاهی C_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و تغییر مکانهای Δ_{CO} و δ_{CC} را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.



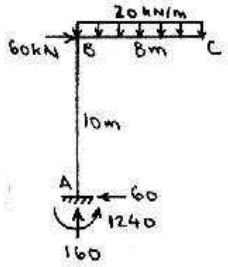
$$\Delta_{CO}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{10}(-1240+60x)(8)\,dx+\int_0^{8}(-10x^2)(x)\,dx\right]=-\frac{8540\ kN.m^3}{EI}$$

$$\delta_{CC}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{10}(8)^2\,dx+\int_0^{8}x^2\,dx\right]=\frac{810/667\ m^3}{EI}$$

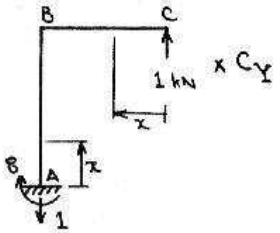
$$\Delta_{CO}+C_y\,\delta_{CC}=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{8540}{EI}+C_y\left[\frac{810/667}{EI}\right]=0$$

$$C_y=105/39\ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_y}=105/39\ \ kN\uparrow$$

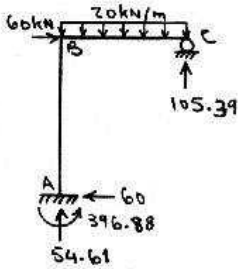
شکل ۸-۲۹



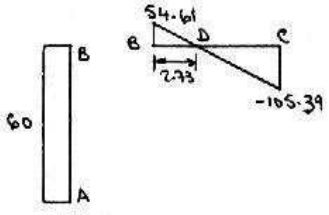
قاب اولیه تحت اثر بارهای خارجی



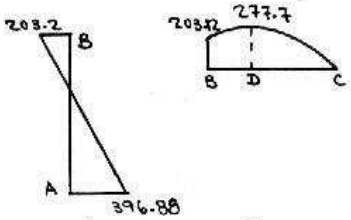
قاب اولیه تحت اثر نیروی واحد قائم مؤثر در نقطهٔ C



واکنشهای تکیه‌گاهی قاب نامعین اصلی

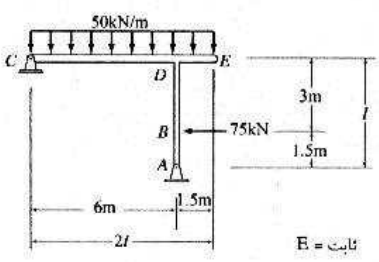


نمودار نیروی برشی قاب اصلی ، kN

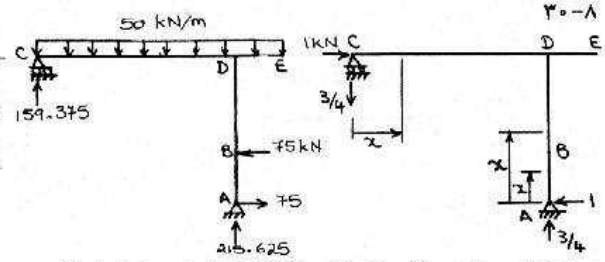


نمودار لنگر خمشی قاب نامعین اصلی

۳۰-۸



شکل ۸-۳۰



تیر اولیه تحت اثر نیروی افقی واحد مؤثر در نقطهٔ C تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی

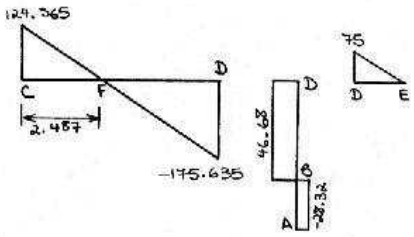
واکنش تکیه‌گاهی C_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و تغییر مکانهای Δ_{CO} و δ_{CC} را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta_{CO}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\int_0^6 (۱۵۹/۳۷۵x - ۲۵x^۲)\left[-\frac{۳}{۴}x\right]dx + \int_0^{۱/۵}(-۷۵x)dx + \int_{۱/۵}^{۴/۵}\{-۷۵x + ۷۵(x-۱/۵)\}(x)dx\right]$$

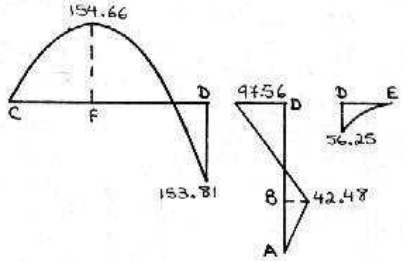
$$\Delta_{CO}=-\frac{۲۳۶۳/۱۷۵\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\delta_{CC}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\int_0^6\left[-\frac{۳}{۴}x\right]^۲dx+\int_0^{۴/۵}(x)^۲dx\right]=\frac{۵۰/۶۲۵\ m^۳}{EI}$$

$$\Delta_{CO}+C_x\delta_{CC}=۰ \Rightarrow -\frac{۲۳۶۳/۱۷۵}{EI}+C_x\left[\frac{۵۰/۶۲۵}{EI}\right]=۰ \Rightarrow C_x=۴۶/۶۸\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_x}=۴۶/۶۸\ kN\rightarrow$$

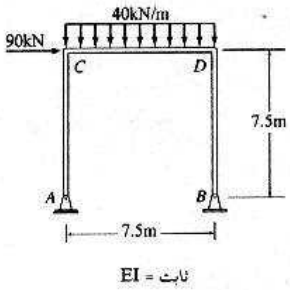


نمودار نیروی برشی قاب نامعین اصلی ، kN

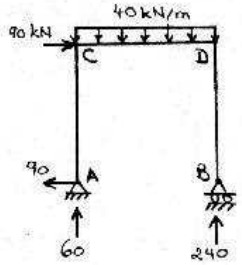


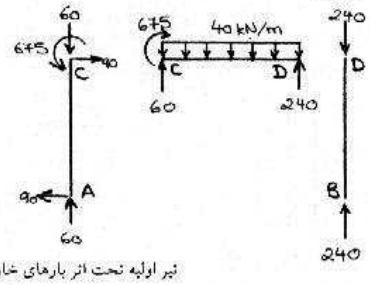
نمودار لنگر خمشی قاب نامعین اصلی ، kN.m

۳۱-۸

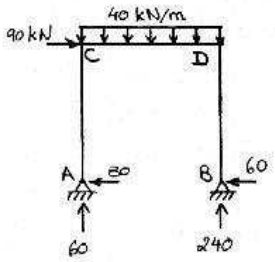


شکل ۸-۳۱

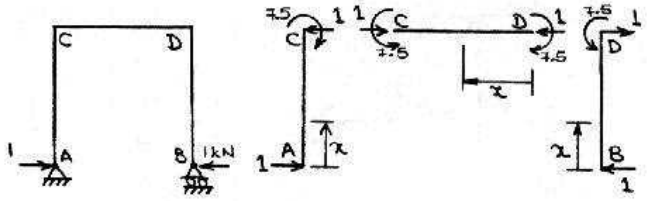




تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی



واکنشهای تکیه‌گاهی قاب نامعین اصلی



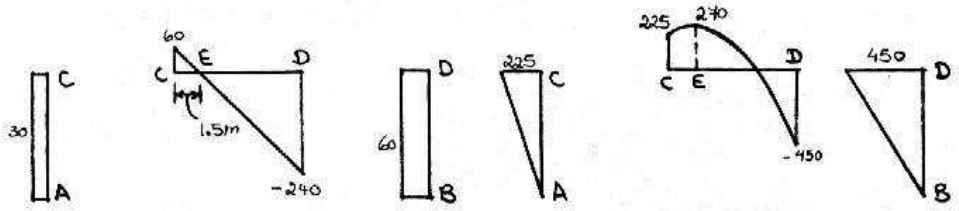
تیر اولیه تحت اثر بار افقی واحد مؤثر در نقطهٔ B

واکنش تکیه‌گاهی B_x را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و برای محاسبهٔ تغییر مکانهای Δ_{BO} و δ_{BB} از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.

$$\Delta_{BO}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{7/5}(90x)(-x)dx+\int_0^{7/5}(240x-20x^2)(-7/5)dx\right]=-\frac{42187/5\ kN.m^3}{EI}$$

$$\delta_{BB}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{7/5}(-x)^2dx+\int_0^{7/5}(-7/5)^2dx+\int_0^{7/5}x^2dx\right]=\frac{703/125\ m^3}{EI}$$

$$\Delta_{BO}+B_x\delta_{BB}=0 \Rightarrow -\frac{42187/5}{EI}+B_x\left[\frac{703/125}{EI}\right]=0 \Rightarrow B_x=60\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B_x}=60\ kN\leftarrow$$

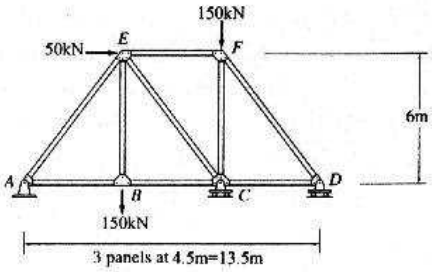


نمودار نیروی برشی قاب نامعین اصلی ، kN

نمودار لنگر خمشی قاب نامعین اصلی ، kN.m

در مسایل ۸-۳۲ تا ۸-۳۴ واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضای خرپای نشان داده شده را با استفاده از روش نیرو محاسبه کنید.

۸-۳۲



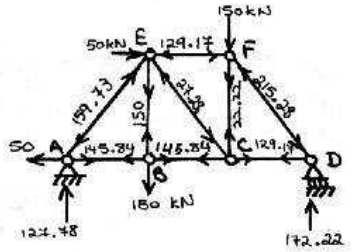
EA = ثابت ، E = ۲۰۰ GPa ، A = ۲۷۵۰ mm^2

شکل ۸-۳۲

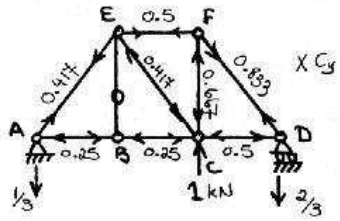
این خرپا یک درجه نامعین خارجی است. برای تعیین خرپای اولیه، واکنش تکیه‌گاهی C_y را به عنوان مجهول اضافی فرض کرده و برای محاسبهٔ Δ_{CO} و δ_{CC} از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها: $\Delta_{CO}+C_y\delta_{CC}=0$

$$\Delta_{CO}=\frac{1}{EA}\sum F_o u_C L \quad , \quad \delta_{CC}=\frac{1}{EA}\sum u_C^2 L$$



خرپای اولیه، تحت اثر بارهای خارجی، (F_o)



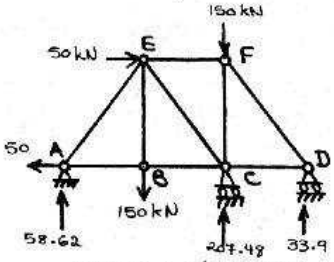
خرپای اولیه تحت اثر نیروی قائم واحد مؤثر در نقطهٔ C، (u_C)

عضو	L (m)	F_o (kN)	u_C (kN/kN)	$F_o u_C L$ (kN.m)	$u_C^2 L$ (m)	$F=F_o+u_C C_y$ (kN)
AB	۴/۵	۱۴۵/۸۴	-۰/۲۵	-۱۶۴/۰۷	۰/۲۸۱۲۵	۹۳/۹۷
BC	۴/۵	۱۴۵/۸۴	-۰/۲۵	-۱۶۴/۰۷	۰/۲۸۱۲۵	۹۳/۹۷
CD	۴/۵	۱۲۹/۱۷	-۰/۵	-۲۹۰/۶۳	۱/۱۲۵	۲۵/۴۳
EF	۴/۵	-۱۲۹/۱۷	۰/۵	-۲۹۰/۶۳	۱/۱۲۵	-۲۵/۴۳
AE	۷/۵	-۱۵۹/۷۳	۰/۴۱۷	-۴۹۹/۵۶	۱/۳۰۴	-۷۳/۲۱
CE	۷/۵	-۲۷/۲۸	-۰/۴۱۷	۸۵/۳۲	۱/۳۰۴	-۱۱۳/۸
DF	۷/۵	-۲۱۵/۲۸	۰/۸۳۳	-۱۳۴۴/۹۶	۵/۲۰۴	-۴۲/۴۵
BE	۶/۰	۱۵۰	۰	۰	۰	۱۵۰
CF	۶/۰	۲۲/۲۲	-۰/۶۶۷	-۸۸/۹۲	۲/۶۷	-۱۱۶/۱۷
			Σ	-۲۷۵۷/۵۲	۱۳/۲۹	

$$\Delta_{CO} = -\frac{۲۷۵۷/۵۲\ kN.m}{EA} \quad , \quad \delta_{CC} = \frac{۱۳/۲۹\ m}{EA}$$

$$-\frac{۲۷۵۷/۵۲}{EA} + C_y\left[\frac{۱۳/۲۹}{EA}\right] = ۰ \ \Rightarrow \ C_y = ۲۰۷/۴۸\ \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{C_y} = ۲۰۷/۴۸\ \ kN\uparrow$$



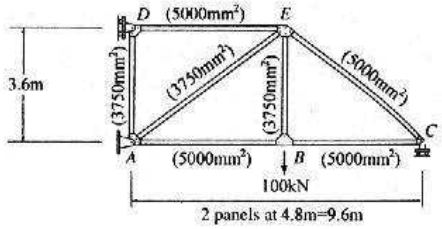
واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

۳۳-۸

خرپای مزبور یک درجه نامعین خارجی است. برای تعیین خرپای اولیه، واکنش تکیه‌گاهی D_x را به عنوان مجهول اضافی فرض کرده و برای محاسبهٔ Δ_{DO} و δ_{DD} از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.

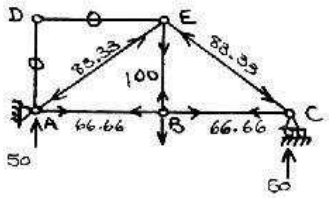
رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

$$\Delta_{DO} + D_x \delta_{DD} = ۰$$

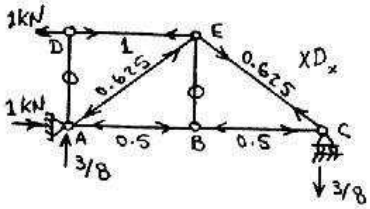


E = ۲۰۰ GPa

شکل ۸-۳۳



خرپای اولیه، تحت اثر بارهای خارجی ، (F_o)



خرپای اولیه تحت اثر بار افقی واحد مؤثر در نقطهٔ D ، (u_D)

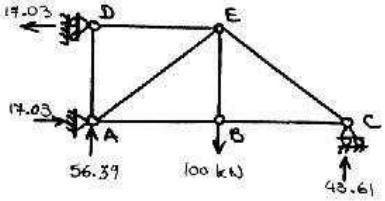
عضو	L (m)	A (m^2)	F_o (kN)	u_D (kN/kN)	$F_o u_D \frac{L}{A}$ (kN/m)	$u_D^2 \frac{L}{A}$ $(\frac{1}{m})$	$F=F_o+u_D D_x$ (kN)
AB	۴/۸	۰/۰۰۵	۶۶/۶۶	-۰/۵	-۳۱۹۹۶/۸	۲۴۰	۵۸/۱۵
BC	۴/۸	۰/۰۰۵	۶۶/۶۶	-۰/۵	-۳۱۹۹۶/۸	۲۴۰	۵۸/۱۵
DE	۴/۸	۰/۰۰۵	۰	۱	۰	۹۶۰	۱۷/۰۳
AE	۶/۰	۰/۰۰۳۷۵	-۸۳/۳۳	-۰/۶۲۵	۸۳۳۳۰	۶۲۵	-۹۳/۹۷
CE	۶/۰	۰/۰۰۵	-۸۳/۳۳	۰/۶۲۵	-۶۲۴۹۷/۵	۴۶۸/۷۵	-۷۲/۶۸
AD	۳/۶	۰/۰۰۳۷۵	۰	۰	۰	۰	۰
BE	۳/۶	۰/۰۰۳۷۵	۱۰۰	۰	۰	۰	۱۰۰
				Σ	-۴۳۱۶۱/۱	۲۵۳۳/۷۵	

$$\Delta_{CO}=\frac{1}{E}\sum\frac{F_o u_D L}{A}=-\frac{۴۳۱۶۱/۱\ kN/m}{E}$$

$$\delta_{CC}=\frac{1}{E}\sum\frac{u_D^2 L}{A}=\frac{۲۵۳۳/۷۵\ \left[\frac{1}{m}\right]}{E}$$

$$-\frac{۴۳۱۶۱/۱}{E}+D_x\left[\frac{۲۵۳۳/۷۵}{E}\right]=0 \Rightarrow D_x=۱۷/۰۳\ kN$$

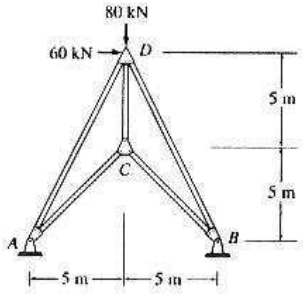
$$\blacktriangleright \vec{D_x}=۱۷/۰۳\ kN \leftarrow$$



واکنشهای تکیه‌گاهی خرپای نامعین اصلی

۳۴-۸

واکنشهای تکیه‌گاهی B_x را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و برای محاسبهٔ Δ_{BO} و δ_{BB} از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.



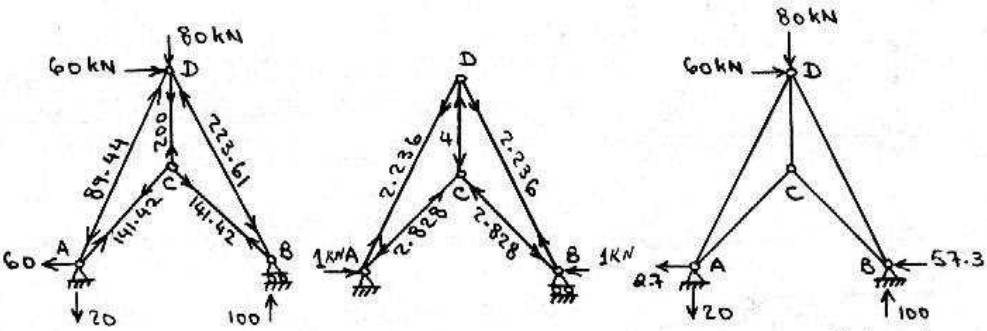
EA = ثابت

شکل ۸-۳۴

عضو	L (m)	F_o (kN)	u_B (kN/kN)	$F_o u_B L$ (kN.m)	$u_B^2 L$ (m)	$F=F_o+u_B B_x$ (kN)
AD	۱۱/۱۸	-۸۹/۴۴	۲/۲۳۶	-۲۲۳۵/۸۶	۵۵/۹	۳۸/۷
BD	۱۱/۱۸	-۲۲۳/۶۱	۲/۲۳۶	-۵۵۸۹/۹۱	۵۵/۹	-۹۵/۵
AC	۷/۰۷	۱۴۱/۴۲	-۲/۸۲۸	-۲۸۲۷/۵۵	۵۶/۵۴	-۲۰/۶
BC	۷/۰۷	۱۴۱/۴۲	-۲/۸۲۸	-۲۸۲۷/۵۵	۵۶/۵۴	-۲۰/۶
CD	۵	۲۰۰	-۴	-۴۰۰۰	۸۰	-۲۹/۲
			Σ	-۱۷۴۸۰/۸۷	۳۰۴/۸۸	

$$\Delta_{BO}=\frac{1}{EA}\sum F_o u_B L=-\frac{۱۷۴۸۰/۸۷\ kN.m}{EA}\ ,\ \delta_{BB}=\frac{1}{EA}\sum u_B^2 L=\frac{۳۰۴/۸۸\ m}{EA}$$

$$\Delta_{BO}+B_x\delta_{BB}=0 \Rightarrow -\frac{۱۷۴۸۰/۸۷}{EA}+B_x\left[\frac{۳۰۴/۸۸}{EA}\right]=0 \Rightarrow B_x=۵۷/۳\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{B_x}=۵۷/۳\ kN \leftarrow$$

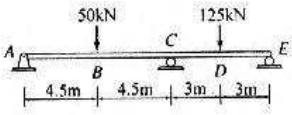


خرپای اولیه تحت اثر بارهای خارجی، (F_0) خرپای اولیه تحت اثر نیروی افقی واحد مؤثر در نقطهٔ B، (u_B) واکنشهای تکیه‌گاهی خرپای نامعین اصلی

در مسایل ۸-۳۵ تا ۸-۳۷، تیر نامعین نشان داده شده را با استفاده از روش نیرو تحلیل کنید. لنگر خمشی تکیه‌گاه میانی را به عنوان مجهول اضافی در نظر بگیرید.

۸-۳۵

برای حل مسئله، ابتدا باید $\theta_{COrel.}$ و $\theta_{CCrel.}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



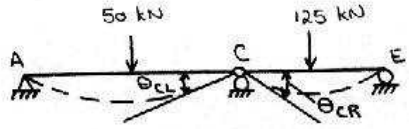
$E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۱/۳۶\times۱۰^{۹}\ mm^{۴}$

شکل ۸-۳۵

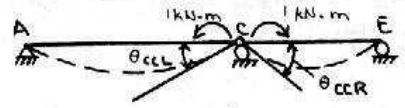
$$\theta_{CL}=\frac{۲۵۳/۱۲۵\,kN.m^{۲}}{EI} \quad , \quad \theta_{CR}=\frac{۲۸۱/۲۵\,kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_{COrel.}=\theta_{CL}+\theta_{CR}=\frac{۲۵۳/۱۲۵+۲۸۱/۲۵}{EI}=\frac{۵۳۴/۳۷۵\,kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_{CCL}=\frac{۳\,m}{EI} \quad , \quad \theta_{CCR}=\frac{۲\,m}{EI}$$



تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی



تیر اولیه تحت اثر لنگر خمشی واحد مؤثر در B

$$\theta_{CCrel.}=\theta_{CCL}+\theta_{CCR}=\frac{۳+۲}{EI}=\frac{۵}{EI}$$

$$\theta_{COrel.}+M_C\theta_{CCrel.}=۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{۵۳۴/۳۷۵}{EI}+M_C\left[\frac{۵}{EI}\right]=۰$$

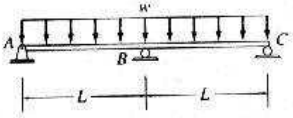
$$M_C=-۱۰۶/۸۸\ \ kN.m$$

● واکنشهای تکیه‌گاهی و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی این تیر در حل مسئلهٔ ۶-۲۰ ارائه شده‌اند.

$\times M_C$

۸-۳۶

ابتدا باید $\theta_{BOrel.}$ و $\theta_{BBrel.}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



EI = ثابت

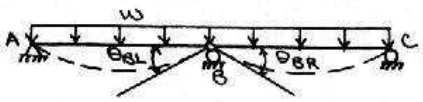
شکل ۸-۳۶

$$\theta_{BL}=\theta_{BR}=\frac{wL^{۳}}{۲۴EI} \quad \Rightarrow \quad \theta_{BOrel.}=\theta_{BL}+\theta_{BR}=\frac{wL^{۳}}{۲۴EI}+\frac{wL^{۳}}{۲۴EI}=\frac{wL^{۳}}{۱۲EI}$$

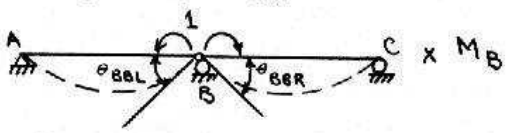
$$\theta_{BBL}=\theta_{BBR}=\frac{L}{۳EI} \quad \Rightarrow \quad \theta_{BBrel.}=\theta_{BBL}+\theta_{BBR}=\frac{L}{۳EI}+\frac{L}{۳EI}=\frac{۲L}{۳EI}$$

$$\theta_{BOrel.}+M_B\theta_{BBrel.}=۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{wL^{۳}}{۱۲EI}+M_B\left[\frac{۲L}{۳EI}\right]=۰ \quad \Rightarrow \quad M_B=-\frac{wL^{۲}}{۸}$$

واکنشهای تکیه‌گاهی و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی این تیر در حل مسئلهٔ ۶-۲۱ ارائه شده‌اند.



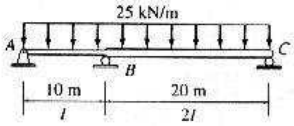
تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی



تیر اولیه تحت اثر لنگر خمشی واحد مؤثر در B

۳۷-۸

ابتدا باید $\theta_{BOrel.}$ و $\theta_{BBrel.}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



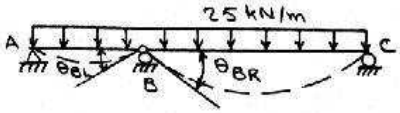
E = ۲۰۰ GPa ، I = ۵۰۰×۱۰⁶ mm⁴

شکل ۸-۳۷

$$\theta_{BL}=\frac{wL^3}{24EI}=\frac{25(10)^3}{24EI}=\frac{1041/67\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_{BR}=\frac{wL^3}{24EI}=\frac{25(20)^3}{24E(2I)}=\frac{4166/67\ kN.m^2}{EI}$$

$$\theta_{BOrel.}=\theta_{BL}+\theta_{BR}=\frac{1041/67+4166/67}{EI}=\frac{5208/33\ kN.m^2}{EI}$$

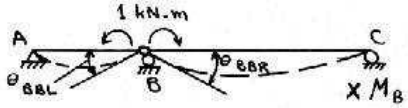


تیر اولیه تحت اثر بار خارجی

$$\theta_{BBL}=\frac{L}{3EI}=\frac{10}{3EI}=\frac{3/333\ m}{EI}$$

$$\theta_{BBR}=\frac{L}{3EI}=\frac{20}{3E(2I)}=\frac{3/333\ m}{EI}$$

$$\theta_{BBrel.}=\theta_{BBL}+\theta_{BBR}=\frac{3/333+3/333}{EI}=\frac{6/666\ m}{EI}$$



تیر اولیه تحت اثر لنگر واحد در نقطهٔ B

$$\theta_{BOrel.}+M_B\,\theta_{BBrel.}=0 \Rightarrow \frac{5208/33}{EI}+M_B\left[\frac{6/666}{EI}\right]=0$$

$$M_B=-781/3\ \ kN.m$$

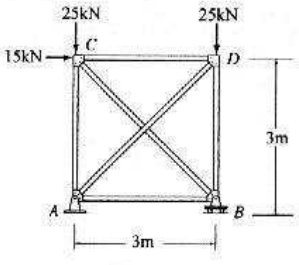
● واکنشهای تکیه‌گاهی و نمودارهای لنگر خمشی و نیروی برشی این تیر در حل مسئلهٔ ۸-۲۲ ارائه شده‌اند.

در مسایل ۸-۳۸ تا ۸-۴۰ واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضای خرپای نشان داده شده را با استفاده از روش نیرو محاسبه کنید.

۳۸-۸

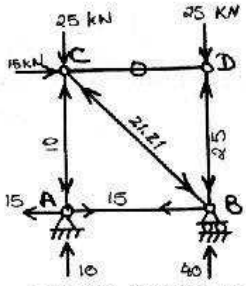
این خرپا یک درجه نامعین داخلی است. برای تعیین خرپای اولیه، نیروی داخلی (F_{AD}) عضو AD را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها: $\Delta_{ADO}+F_{AD}\delta_{AD,AD}=0$

تغییر مکانهای Δ_{ADO} و $\delta_{AD,AD}$ را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.

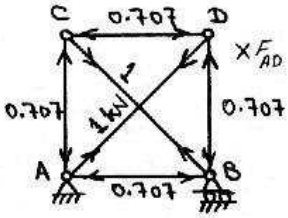


شکل ۸-۳۸

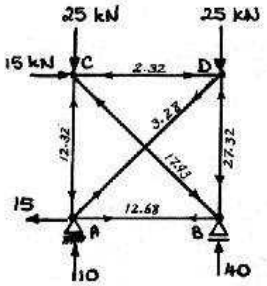
EA = ثابت



خرپای اولیه تحت اثر بارهای خارجی



خرپای اولیه تحت اثر نیروی کششی واحد در عضو AD، (u_{AD})



واکنشهای تکیه‌گاهی خرپای نامعین اصلی

عضو	L (m)	F_o (kN)	u_{AD} (kN/kN)	$F_o u_{AD} L$ (kN.m)	$u_{AD}^2 L$ (m)	$F=F_o+u_{AD}F_{AD}$ (kN)
AB	۳/۰	۱۵	-۰/۷۰۷	-۳۱/۸۲	۱/۵	۱۲/۶۸
CD	۳/۰	۰	-۰/۷۰۷	۰	۱/۵	-۲/۳۲
AC	۳/۰	-۱۰	-۰/۷۰۷	۲۱/۲۱	۱/۵	-۱۲/۳۲
BD	۳/۰	-۲۵	-۰/۷۰۷	۵۳/۰۲	۱/۵	-۲۷/۳۲
BC	۴/۲۴۳	-۲۱/۲۱	۱	-۹۰	۴/۲۴۳	-۱۷/۹۳
AD	۴/۲۴۳	۰	۱	۰	۴/۲۴۳	۳/۲۸
			Σ	-۴۷/۵۹	۱۴/۴۸۶	

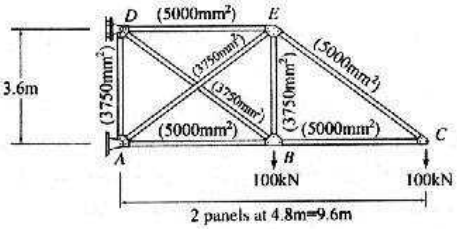
$$\Delta_{ADO}=\frac{1}{AE}\sum F_o u_{AD} L=-\frac{۴۷/۵۹\ kN.m}{AE}$$

$$\delta_{AD,AD}=\frac{1}{AE}\sum u_{AD}^2 L=\frac{۱۴/۴۸۶\ m}{AE}$$

$$\Delta_{ADO}+F_{AD}\delta_{AD,AD}=۰ \Rightarrow -\frac{۴۷/۵۹}{AE}+F_{AD}\left[\frac{۱۴/۴۸۶}{AE}\right]=۰$$

$$F_{AD}=۳/۲۸\ kN \qquad \blacktriangleright F_{AD}=۳/۲۸\ kN\ \ (T)$$

۳۹-۸



E = ۲۰۰ GPa

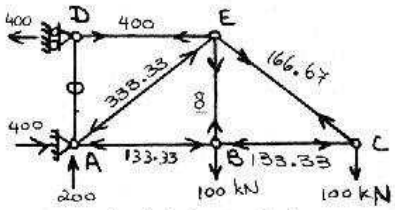
شکل ۸-۳۹

این خرپا یک درجه نامعین داخلی است. برای تعیین خرپای اولیه، نیروی داخلی (F_{BD}) عضو BD را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

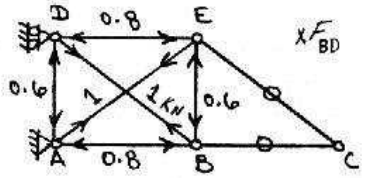
تغییر مکانهای Δ_{BDO} و $\delta_{BD,BD}$ را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

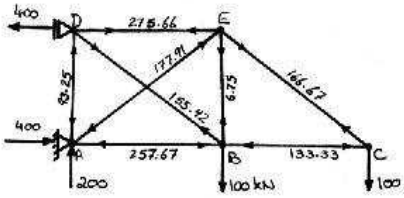
$$\Delta_{BDO}+F_{BD}\delta_{BD,BD}=۰$$



خرپای اولیه تحت اثر بارهای خارجی



خرپای اولیه تحت اثر نیروی کششی واحد در عضو BD ، (u_{BD})



واکنشهای تکیه‌گاهی خرپای نامعین اصلی

عضو	L (mm)	A (mm^2)	F_o (kN)	u_{BD} (kN/kN)	$F_o u_{BD} \frac{L}{A}$ (kN/mm)	$u_{BD}^2 \frac{L}{A}$ $(\frac{1}{mm})$	$F=F_o+u_{BD}F_{BD}$ (kN)
AB	۴۸۰۰	۵۰۰۰	-۱۳۳/۳۳	-۰/۸	۱۰۲/۴	۰/۶۱۴۴	-۲۵۷/۶۷
BC	۴۸۰۰	۵۰۰۰	-۱۳۳/۳۳	۰	۰	۰	-۱۳۳/۳۳
DE	۴۸۰۰	۵۰۰۰	۴۰۰	-۰/۸	-۳۰۷/۲	۰/۶۱۴۴	۲۷۵/۶۶
AD	۳۶۰۰	۳۷۵۰	۰	-۰/۶	۰	۰/۳۴۵۶	-۹۳/۲۵
BE	۳۶۰۰	۳۷۵۰	۱۰۰	-۰/۶	-۵۷/۶	۰/۳۴۵۶	۶/۷۵
AB	۶۰۰۰	۳۷۵۰	-۳۳۳/۳۳	۱	-۵۳۳/۳۳	۱/۶	-۱۷۷/۹۱
CE	۶۰۰۰	۵۰۰۰	۱۶۶/۶۷	۰	۰	۰	۱۶۶/۶۷
BD	۶۰۰۰	۳۷۵۰	۰	۱	۰	۱/۶	۱۵۵/۴۲
					-۷۹۵/۷۳	۵/۱۲	

$$\Delta_{BDO}=\frac{1}{E}\sum\frac{F_o u_{BD} L}{A}=-\frac{۷۹۵/۷۳\ kN/mm}{E}$$

$$\delta_{BD,BD}=\frac{1}{E}\sum\frac{u_{BD}^2 L}{A}=\frac{۵/۱۲\ mm^{-1}}{E}$$

$$\Delta_{BDO}+F_{BD}\delta_{BD,BD}=۰ \Rightarrow -\frac{۷۹۵/۷۳}{E}+F_{BD}\left[\frac{۵/۱۲}{E}\right]=۰$$

$$F_{BD}=۱۵۵/۴۲\ kN \qquad \blacktriangleright F_{BD}=۱۵۵/۴۲\ kN\ \ (T)$$

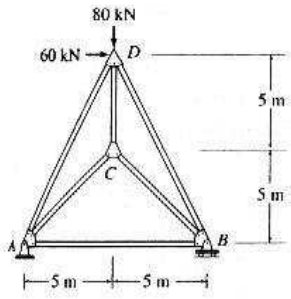
۴۰-۸

این خرپا یک درجه نامعین داخلی است. برای تعیین خرپای اولیه، نیروی داخلی (F_{AB}) عضو AB را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

تغییر مکانهای Δ_{ABO} و $\delta_{AB,AB}$ را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم.

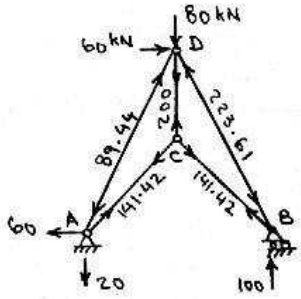
رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

$$\Delta_{ABO}+F_{AB}\delta_{AB,AB}=۰$$



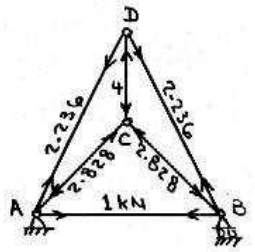
EA = ثابت

شکل ۸-۴۰



خرپای اولیه تحت اثر بارهای خارجی ، (F_o)

عضو	L (m)	F_o (kN)	u_{AB} (kN/kN)	$F_o u_{AB} L$ (kN.m)	$u_{AB}^2 L$ (m)	$F=F_o+u_{AB}F_{AB}$ (kN)
AD	۱۱/۱۸	-۸۹/۴۴	۲/۲۳۶	-۲۲۳۵/۸۶	۵۵/۹	۳۴/۷
BD	۱۱/۱۸	-۲۲۳/۶۱	۲/۲۳۶	-۵۵۸۹/۹۱	۵۵/۹	-۹۹/۵
AC	۷/۰۷	۱۴۱/۴۲	-۲/۸۲۸	-۲۸۲۷/۵۵	۵۶/۵۴	-۱۵/۶
BC	۷/۰۷	۱۴۱/۴۲	-۲/۸۲۸	-۲۸۲۷/۵۵	۵۶/۵۴	-۱۵/۶
CD	۵	۲۰۰	-۴	-۴۰۰۰	۸۰	-۲۲
AB	۱۰	۰	۱	۰	۱۰	۵۵/۵
				-۱۷۴۸۰/۸۷	۳۱۴/۸۸	



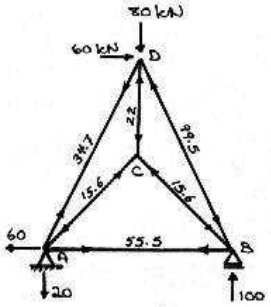
خرپای اولیه تحت اثر نیروی کششی واحد در عضو AB، (u_{AB})

$$\Delta_{ABO}=\frac{1}{EA}\sum F_o u_{AB} L=-\frac{۱۷۴۸۰/۸۷\ kN.m}{EA}$$

$$\delta_{AB,AB}=\frac{1}{EA}\sum u_{AB}^2 L=\frac{۳۱۴/۸۸\ m}{EA}$$

$$\Delta_{ABO}+F_{AB}\delta_{AB,AB}=۰ \Rightarrow -\frac{۱۷۴۸۰/۸۷}{EA}+F_{AB}\left[\frac{۳۱۴/۸۸}{EA}\right]=۰$$

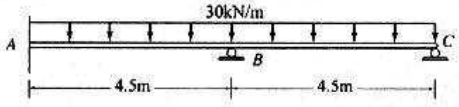
$$F_{AB}=۵۵/۵\quad kN \qquad \blacktriangleright F_{AB}=۵۵/۵\quad kN\quad (T)$$



واکنشهای تکیه‌گاهی خرپای نامعین اصلی

در مسایل ۸-۴۱ تا ۸-۴۷ واکنشهای تکیه‌گاهی سازهٔ نشان داده شده را با استفاده از روش تیرو تعیین کرده، سپس نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی سازهٔ مزبور را ترسیم کنید.

۸-۴۱



$E = ۷۰\ GPa$ ، $I = ۱/۱۷\times۱۰^{۹}\ mm^4$

شکل ۸-۴۱

تیر مزبور دو درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه واکنشهای تکیه‌گاهی B_y و C_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

برای محاسبهٔ Δ_{BO} ، Δ_{CO} ، δ_{BB} ، δ_{CB} (δ_{BC}) و δ_{CC} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.

$$\Delta_{BO}=-\frac{۱۷wL^4}{۳۸۴EI}=-\frac{۱۷(۳۰)(۹)^4}{۳۸۴EI}=-\frac{۸۷۱۳/۸۳\ kN.m^3}{EI}$$

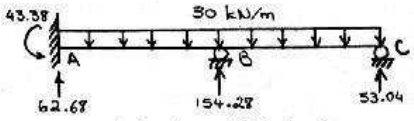
$$\Delta_{CO}=-\frac{wL^4}{۸EI}=-\frac{۳۰(۹)^4}{۸EI}=-\frac{۲۴۶۰۳/۷۵ kN.m^3}{EI},\quad \delta_{BB}=\frac{L^3}{۲۴EI}=\frac{(۹)^3}{۲۴EI}=\frac{۳۰/۳۷۵\ m^3}{EI}$$

$$\delta_{CC}=\frac{L^3}{۳EI}=\frac{(۹)^3}{۳EI}=\frac{۲۴۳\ m^3}{EI},\quad \delta_{CB}=\delta_{BC}=\frac{۵L^3}{۴۸EI}=\frac{۵(۹)^3}{۴۸EI}=\frac{۷۵/۹۳۷۵\ m^3}{EI}$$

روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases}\Delta_{BO}+B_y\delta_{BB}+C_y\delta_{BC}=۰\\ \Delta_{CO}+B_y\delta_{CB}+C_y\delta_{CC}=۰\end{cases}$$

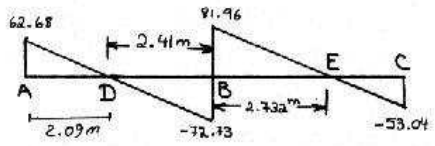
$$\begin{cases}-۸۷۱۳/۸۳+۳۰/۳۷۵B_y+۷۵/۹۳۷۵C_y=۰\\ -۲۴۶۰۳/۷۵+۷۵/۹۳۷۵B_y+۲۴۳C_y=۰\end{cases}$$



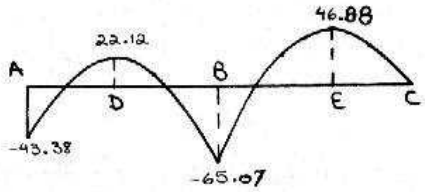
واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

$$\begin{cases} ۳۰/۳۷۵B_y + ۷۵/۹۳۷۵C_y = ۸۷۱۳/۸۳ \\ ۷۵/۹۳۷۵B_y + ۲۴۳C_y = ۲۴۶۰۳/۷۵ \end{cases} \Rightarrow B_y = ۱۵۴/۲۸ \ kN \quad , \quad C_y = ۵۳/۰۴ \ kN$$

$$\blacktriangleright B_y = ۱۵۴/۲۸ \ kN \uparrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{C_y} = ۵۳/۰۴ \ kN \uparrow$$



نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN

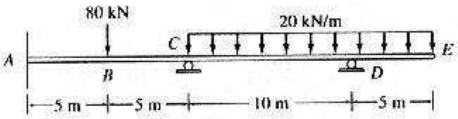


نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۴۲-۸

تیر نشان داده شده دو درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه واکنشهای تکیه‌گاهی C_y و D_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

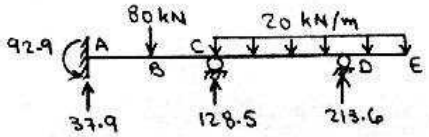
برای محاسبهٔ Δ_{CO} ، Δ_{DO} ، δ_{CC} ، δ_{CD} (δ_{DC}) و δ_{DD} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



شکل ۸-۴۲

$$\Delta_{CO} = -\frac{۲۲۰۸۳۳/۳۳ \ kN.m^3}{EI} \quad , \quad \Delta_{DO} = -\frac{۶۷۶۶۶۶/۶۷ \ kN.m^3}{EI} \quad , \quad \delta_{CC} = \frac{۳۳۳/۳۳ \ m^3}{EI}$$

$$\delta_{CD} = \delta_{DC} = \frac{۸۳۳/۳۳ \ m^3}{EI} \quad , \quad \delta_{DD} = \frac{۲۶۶۶/۶۷ \ m^3}{EI}$$



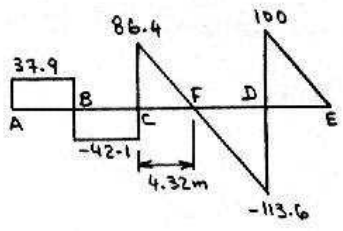
واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

روابط سازگاری تغییر شکلها:

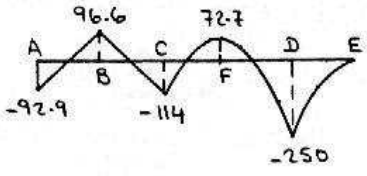
$$\begin{cases} \Delta_{CO} + C_y \delta_{CC} + D_y \delta_{CD} = ۰ \\ \Delta_{DO} + C_y \delta_{DC} + D_y \delta_{DD} = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۲۲۰۸۳۳/۳۳ + ۳۳۳/۳۳C_y + ۸۳۳/۳۳D_y = ۰ \\ -۶۷۶۶۶۶/۶۷ + ۸۳۳/۳۳C_y + ۲۶۶۶/۶۷D_y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳۳۳/۳۳C_y + ۸۳۳/۳۳D_y = ۲۲۰۸۳۳/۳۳ \\ ۸۳۳/۳۳C_y + ۲۶۶۶/۶۷D_y = ۶۷۶۶۶۶/۶۷ \end{cases}$$

$$C_y = ۱۲۸/۵ \ kN \quad , \quad D_y = ۲۱۳/۶ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_y} = ۱۲۸/۵ \ kN \uparrow \qquad \blacktriangleright \vec{D_y} = ۲۱۳/۶ \ kN \uparrow$$



نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN

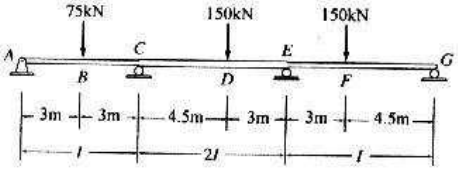


نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۴۳-۸

تیر مزبور دو درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، لنگرهای موجود در محل تکیه‌گاههای C و E را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

برای محاسبهٔ $\theta_{COrel.}$ ، $\theta_{EOrel.}$ ، $\theta_{CCrel.}$ ، θ_{CE} θ_{EC} و $\theta_{EErel.}$ از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



E = ۲۰۰ GPa ، I = ۲×۱۰^{۶} mm^{۴}

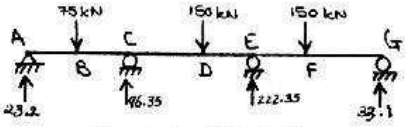
شکل ۸-۴۳

$$\theta_{COrel.}=\theta_{CL}+\theta_{CR}=\frac{۱}{EI}(۱۶۸/۷۵+۲۳۶/۲۵)=\frac{۴۰۵\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_{EOrel.}=\theta_{EL}+\theta_{ER}=\frac{۱}{EI}(۲۷۰+۵۴۰)=\frac{۸۱۰\ kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_{CCrel.}=\theta_{CCL}+\theta_{CCR}=\frac{۱}{EI}(۲+۱/۲۵)=\frac{۳/۲۵\ m}{EI}\quad ,\quad \theta_{EErel.}=\theta_{EEL}+\theta_{EER}=\frac{۱}{EI}(۱/۲۵+۲/۵)=\frac{۳/۷۵\ m}{EI}$$

$$\theta_{EC}=\theta_{CE}=\frac{L}{۶EI}=\frac{۷/۵}{۶E(۲I)}=\frac{۰/۶۲۵\ m}{EI}$$



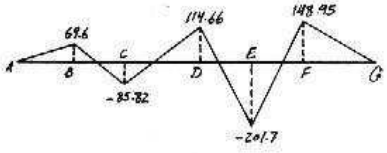
واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

روابط سازگاری تغییر شکلها:

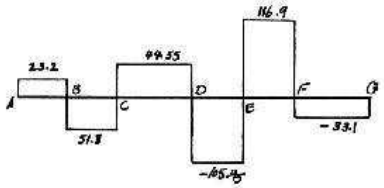
$$\begin{cases}\theta_{COrel.}+M_C\theta_{CCrel.}+M_E\theta_{CE}=۰\\ \theta_{EOrel.}+M_C\theta_{EC}+M_E\theta_{EErel.}=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}۴۰۵+۳/۲۵M_C+۰/۶۲۵M_E=۰\\ ۸۱۰+۰/۶۲۵M_C+۳/۷۵M_E=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}۳/۲۵M_C+۰/۶۲۵M_E=-۴۰۵\\ ۰/۶۲۵M_C+۳/۷۵M_E=-۸۱۰\end{cases}\Rightarrow M_C=-۸۵/۸۲\ kN.m\quad ,\quad M_E=-۲۰۱/۷\ kN.m$$



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

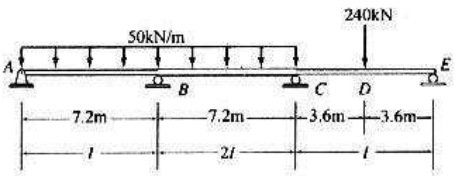


نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN

۴۴-۸

این تیر دو درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، لنگرهای موجود در محل تکیه‌گاههای B و C را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

برای محاسبهٔ $\theta_{BOrel.}$ ، $\theta_{COrel.}$ ، $\theta_{BBrel.}$ ، θ_{BC} θ_{CB} و $\theta_{CCrel.}$ از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



E = ثابت

شکل ۸-۴۴

$$\theta_{BOrel.}=\theta_{BL}+\theta_{BR}=\frac{۱}{EI}(۷۷۷/۶+۳۸۸/۸)=\frac{۱۱۶۶/۴\ kN.m^{۲}}{EI}$$

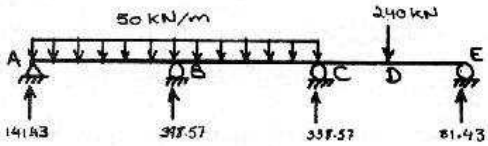
$$\theta_{COrel.}=\theta_{CL}+\theta_{CR}=\frac{۱}{EI}(۳۸۸/۸+۷۷۷/۶)=\frac{۱۱۶۶/۴kN.m^{۲}}{EI}$$

$$\theta_{BBrel.}=\theta_{BBL}+\theta_{BBR}=\frac{۱}{EI}(۲/۴+۱/۲)=\frac{۳/۶\ m}{EI}\quad ,\quad \theta_{CCrel.}=\theta_{CCL}+\theta_{CCR}=\frac{۱}{EI}(۱/۲+۲/۴)=\frac{۳/۶\ m}{EI}$$

$$\theta_{CB}=\theta_{BC}=\frac{L}{۶EI}=\frac{۷/۲}{۶E(۲I)}=\frac{۰/۶\ m}{EI}$$

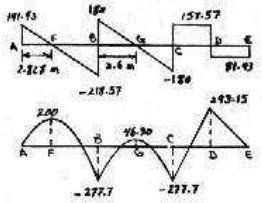
روابط سازگای تغییر شکلها:

$$\begin{cases}\theta_{BOrel.}+M_B\theta_{BBrel.}+M_C\theta_{BC}=۰\\ \theta_{COrel.}+M_B\theta_{CB}+M_C\theta_{CCrel.}=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۱۶۶/۴۴+۳/۶M_B+۰/۶M_C=۰\\ ۱۱۶۶/۴+۰/۶M_B+۳/۶M_C=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳/۶M_B+۰/۶M_C=-۱۱۶۶/۴\\ ۰/۶M_B+۳/۶M_C=-۱۱۶۶/۴\end{cases}$$



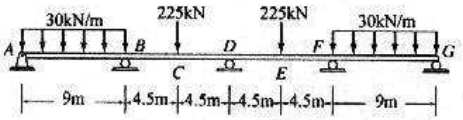
واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

$M_B = -۲۷۷/۷۱ \ kN.m$ ، $M_C = -۲۷۷/۷۱ \ kN.m$



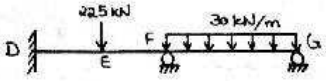
۸-۴۵

به جای تیر اصلی، تیر معادل را تحلیل می‌کنیم.



ثابت = EI

شکل ۸-۴۵

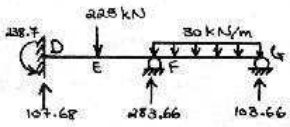


تیر معادل با تیر اصلی، به علت نقارن

تیر معادل دو درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، واکنشهای تکیه‌گاهی F_y و G_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. برای محاسبهٔ Δ_{FO} ، Δ_{GO} ، δ_{FF} ، δ_{GF} (δ_{FG}) و δ_{GG} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.

$$\Delta_{FO} = -\frac{۱۳۱۹۰۳/۴۴ \ kN.m^۳}{EI} \quad , \quad \Delta_{GO} = -\frac{۳۷۳۸۴۰/۳۱ \ kN.m^۳}{EI} \quad , \quad \delta_{FF} = \frac{۲۴۳ \ m^۳}{EI}$$

$$\delta_{GG} = \frac{۱۹۴۴ \ m^۳}{EI} \quad , \quad \delta_{FG} = \delta_{GF} = \frac{۶۰۷/۵ \ m^۳}{EI}$$



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر معادل

روابط سازگاری تغییر شکلها:

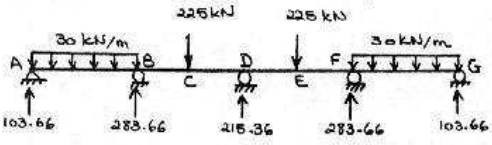
$$\begin{cases} \Delta_{FO} + F_y \delta_{FF} + G_y \delta_{FG} = ۰ \\ \Delta_{GO} + F_y \delta_{GF} + G_y \delta_{GG} = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۱۳۱۹۰۳/۴۴ + ۲۴۳F_y + ۶۰۷/۵G_y = ۰ \\ -۳۷۳۸۴۰/۳۱ + ۶۰۷/۵F_y + ۱۹۴۴G_y = ۰ \end{cases}$$

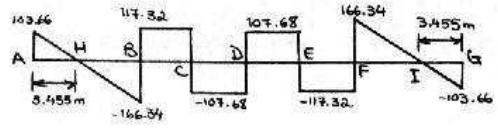
$$\begin{cases} ۲۴۳F_y + ۶۰۷/۵G_y = ۱۳۱۹۰۳/۴۴ \\ ۶۰۷/۵F_y + ۱۹۴۴G_y = ۳۷۳۸۴۰/۳۱ \end{cases}$$

$$F_y = ۲۸۳/۶۶ \ kN \quad , \quad G_y = ۱۰۳/۶۶ \ kN$$

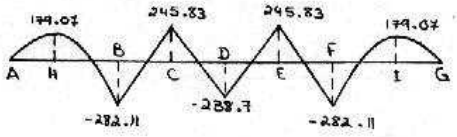
$$\blacktriangleright \vec{F_y} = ۲۸۳/۶۶ \ kN \uparrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{G_y} = ۱۰۳/۶۶ \ kN \uparrow$$



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی



نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN

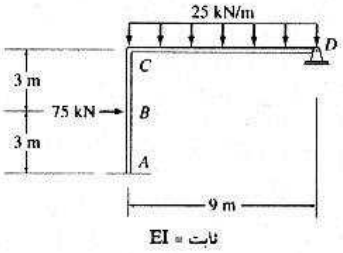


نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۸-۴۶

واکنشهای تکیه‌گاهی D_x و D_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و برای محاسبهٔ Δ_{Dxo}، Δ_{Dyo}، $\delta_{Dx,Dx}$، $\delta_{Dy,Dy}$ ($\delta_{Dy,Dx}$) و $\delta_{Dx,Dy}$ از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M_o (kN.m)	m_{Dx} (kN.m/kN)	m_{Dy} (kN.m/kN)
AB	A	۰-۳	$-۱۲۳۷/۵+۷۵x$	۶-x	۹
BC	A	۳-۶	$-۱۰۱۲/۵$	۶-x	۹
DC	D	۰-۹	$۱۲/۵x^۲$	۰	x



EI = ثابت

شکل ۸-۴۶

$$\Delta_{Dxo}=\sum\int\frac{M_o m_{Dx}}{EI}dx=-\frac{۱۹۹۱۲/۵\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\Delta_{Dyo}=\sum\int\frac{M_o m_{Dy}}{EI}dx=-\frac{۷۸۲۱۵/۶۲۵\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\delta_{Dx,Dx}=\sum\int\frac{m_{Dx}^۲}{EI}dx=\frac{۷۲\ m^۳}{EI}\quad,\quad \delta_{Dy,Dy}=\sum\int\frac{m_{Dy}^۲}{EI}dx=\frac{۷۲۹\ m^۳}{EI}$$

$$\delta_{Dx,Dy}=\delta_{Dy,Dx}=\sum\int\frac{m_{Dx}m_{Dy}}{EI}dx=\frac{۱۶۲\ m^۳}{EI}$$

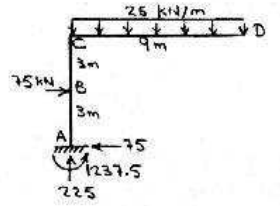
روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases}\Delta_{Dxo}+D_x\delta_{Dx,Dx}+D_y\delta_{Dx,Dy}=۰\\ \Delta_{Dyo}+D_x\delta_{Dy,Dx}+D_y\delta_{Dy,Dy}=۰\end{cases}$$

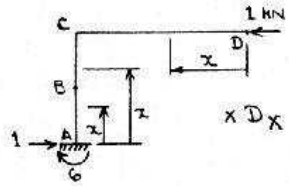
$$\begin{cases}-۱۹۹۱۲/۵+۷۲D_x+۱۶۲D_y=۰\\ -۷۸۲۱۵/۶۲۵+۱۶۲D_x+۷۲۹D_y=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۷۲D_x+۱۶۲D_y=۱۹۹۱۲/۵\\ ۱۶۲D_x+۷۲۹D_y=۷۸۲۱۵/۶۲۵\end{cases}$$

$$D_x=۷۰/۳\ \ kN\quad,\quad D_y=۹۱/۷\ \ kN$$

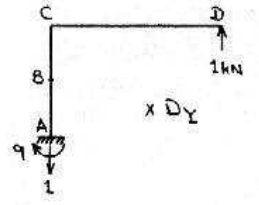
$$\blacktriangleright\ \vec{D_x}=۷۰/۳۱\ \ kN\leftarrow\quad,\quad \blacktriangleright\ \vec{D_y}=۹۱/۶۷\ \ kN\uparrow$$



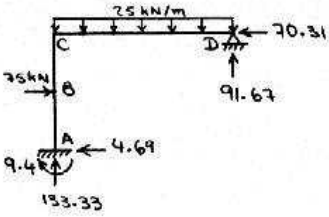
قاب اولیه تحت اثر بارهای خارجی، (M_o)



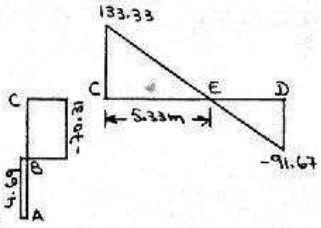
قاب اولیه تحت اثر نیروی واحد افقی مؤثر در D، (m_{Dx})



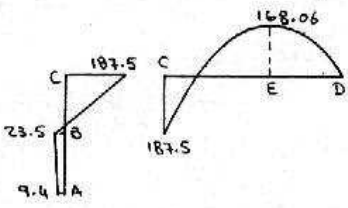
قاب اولیه تحت اثر نیروی واحد قائم مؤثر در D، (m_{Dy})



واکنشهای تکیه‌گاهی قاب نامعین اصلی



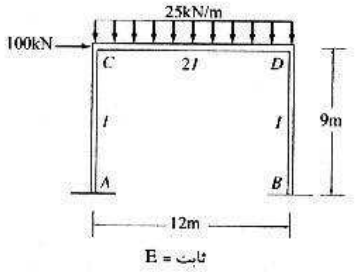
نمودار نیروی برشی قاب نامعین اصلی، kN



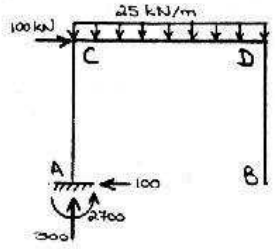
نمودار لنگر خمشی قاب نامعین اصلی، kN.m

۸-۴۷

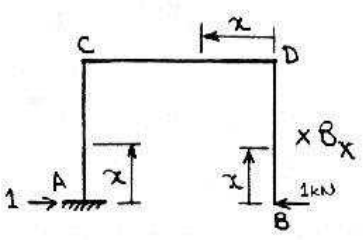
واکنشهای تکیه‌گاهی B_x ، B_y و M_B را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. برای محاسبهٔ Δ_{Bxo} ، Δ_{Byo} ، θ_{BO} ، $\delta_{Bx,Bx}$ ، $\delta_{By,By}$ ، $\delta_{Bx,MB}$ ، $\delta_{MB,MB}$ ، $\delta_{By,MB}$ و $\delta_{Bx,By}$ از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.



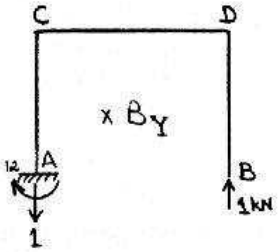
شکل ۸-۴۷



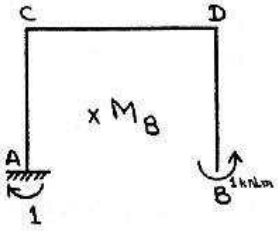
قاب اولیه تحت اثر بارهای خارجی ، (M_o)



قاب اولیه تحت اثر نیروی واحد افقی مؤثر در B ، (m_{Bx})



قاب اولیه تحت اثر نیروی واحد قائم مؤثر در B ، (m_{By})



قاب اولیه تحت اثر لنگر واحد مؤثر در B ، (m_{MB})

عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	ممان اینرسی عضو	M_o (kN.m)	M_{Bx}	m_{By}	m_{MB}
AC	A	۰-۹	I	$-۲۷۰۰+۱۰۰x$	-x	۱۲	۱
DC	D	۰-۱۲	۲I	$-۱۲/۵x^۲$	-۹	x	۱
BD	B	۰-۹	I	۰	x	۰	-۱

$$\Delta_{Bxo}=\sum\int\frac{M_o m_{Bx}}{EI}dx=\frac{۱۱۷۴۵۰\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\Delta_{Byo}=\sum\int\frac{M_o m_{By}}{EI}dx=-\frac{۲۷۵۴۰۰\ kN.m^۳}{EI}$$

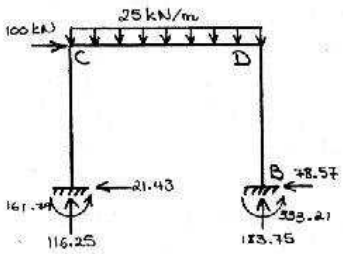
$$\theta_{BO}=\sum\int\frac{M_o m_{MB}}{EI}dx=-\frac{۲۳۸۵۰\ kN.m^۲}{EI}$$

$$\delta_{Bx,Bx}=\sum\int\frac{m_{Bx}^۲}{EI}dx=\frac{۹۷۲\ m^۳}{EI}$$

$$\delta_{By,By}=\sum\int\frac{m_{By}^۲}{EI}dx=\frac{۱۵۸۴\ m^۳}{EI}\quad,\quad\delta_{MB,MB}=\sum\int\frac{m_{MB}^۲}{EI}dx=\frac{۲۴\ m}{EI}$$

$$\delta_{Bx,By}=\delta_{By,Bx}=\sum\int\frac{m_{Bx}m_{By}}{EI}dx=-\frac{۸۱۰\ m^۳}{EI}\quad,\quad\delta_{Bx,MB}=\delta_{MB,Bx}=\sum\int\frac{m_{Bx}m_{MB}}{EI}dx=-\frac{۱۳۵\ m^۲}{EI}$$

$$\delta_{By,MB}=\delta_{MB,By}=\sum\int\frac{m_{By}m_{MB}}{EI}dx=\frac{۱۴۴\ m^۲}{EI}$$



واکنشهای تکیه‌گاهی قاب نامعین اصلی

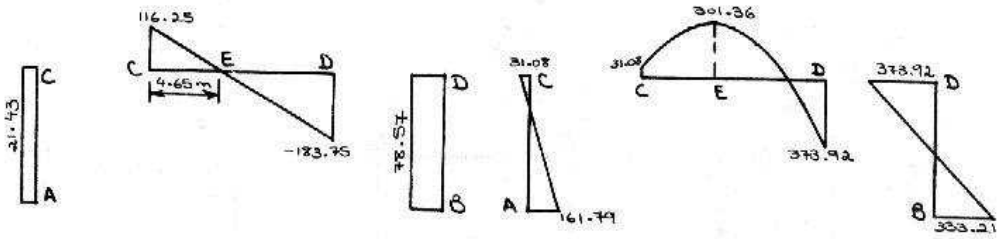
روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases}\Delta_{Bxo}+B_x\delta_{Bx,Bx}+B_y\delta_{Bx,By}+M_B\delta_{Bx,MB}=۰\\ \Delta_{Byo}+B_x\delta_{By,Bx}+B_y\delta_{By,By}+M_B\delta_{By,MB}=۰\\ \theta_{BO}+B_x\delta_{MB,Bx}+B_y\delta_{MB,By}+M_B\delta_{MB,MB}=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}۱۱۷۴۵۰+۹۷۲B_x-۸۱۰B_y-۱۳۵M_B=۰\\ -۲۷۵۴۰۰-۸۱۰B_x+۱۵۸۴B_y+۱۴۴M_B=۰\\ -۲۳۸۵۰-۱۳۵B_x+۱۴۴B_y+۲۴M_B=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases} ۹۷۲B_x - ۸۱۰B_y - ۱۳۵M_B = -۱۱۷۴۵۰ \\ -۸۱۰B_x + ۱۵۸۴B_y + ۱۴۴M_B = ۲۷۵۴۰۰ \\ -۱۳۵B_x + ۱۴۴B_y + ۲۴M_B = ۲۳۸۵۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = ۷۸/۵۷ \ kN \\ B_y = ۱۸۳/۷۵ \ kN \\ M_B = ۳۳۳/۲۱ \ kN.m \end{cases}$$

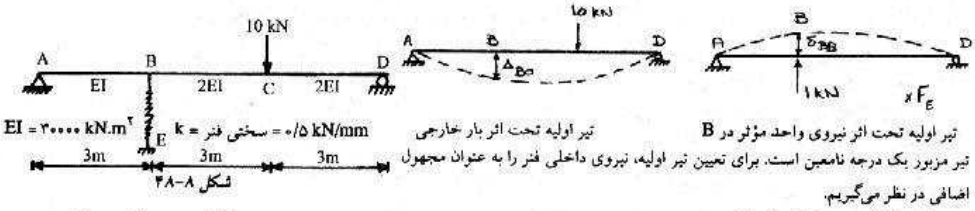
$$\blacktriangleright \vec{B_x} = ۷۸/۵۷ \ kN \leftarrow \ , \ \vec{B_y} = ۱۸۳/۷۵ \ kN \uparrow \ , \ \blacktriangleright \vec{M_B} = ۳۳۳/۲۱ \ kN.m \ \circlearrowleft$$



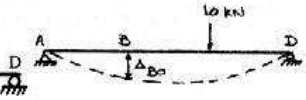
نمودار لنگر خمشی قاب نامعین اصلی ، kN.m

نمودار نیروی برشی قاب نامعین اصلی ، kN

۸-۴۸ تیر نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش نیرو تحلیل کرده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



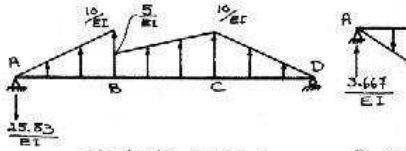
شکل ۸-۴۸



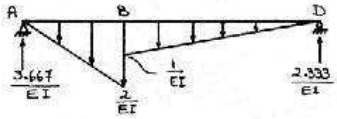
تیر اولیه تحت اثر بار خارجی

تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد مؤثر در B

تیر مزبور یک درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، نیروی داخلی فنر را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.



تیر مزدوج، تیر اولیه، بار خارجی



تیر مزدوج، تیر اولیه، تحت بار واحد در B

$$\Delta_{BO} = \left[\frac{۱۰}{EI}\right]\left[\frac{۳}{۲}\right](۱) - \left[\frac{۲۵/۸۳}{EI}\right](۳)$$

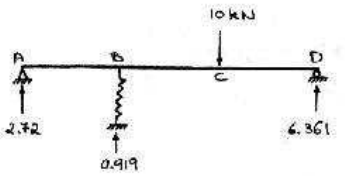
$$\Delta_{BO} = -\frac{۶۲/۵}{EI}$$

$$\delta_{BB} = -\left[\frac{۲}{EI}\right]\left[\frac{۳}{۲}\right](۱) + \left[\frac{۳/۶۶۷}{EI}\right](۳)$$

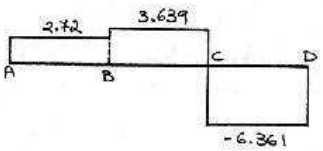
$$\delta_{BB} = \frac{۸}{EI}$$

$$\Delta_{BO} + F_E \delta_{BB} = \Delta_B = \frac{F_E}{k} \Rightarrow -\frac{۶۲/۵}{EI} + F_E\left[\frac{۸}{EI}\right] = -\frac{F_E}{۰/۵ \times ۱۰^۳} \Rightarrow -\frac{۶۲/۵}{۳۰۰۰۰} + F_E\left[\frac{۸}{۳۰۰۰۰}\right] = -\frac{F_E}{۵۰۰}$$

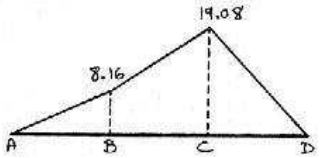
$$F_E = ۰/۹۱۹ \ kN \qquad \blacktriangleright \vec{F_E} = ۰/۹۱۹ \ kN \uparrow$$



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی



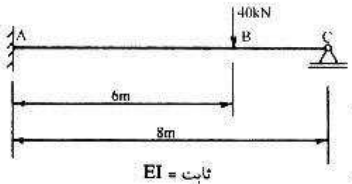
نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

تیرهای نشان داده شده در مسایل ۸-۴۹ تا ۸-۵۲ را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکلها، تحلیل کرده و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را رسم کنید.

۸-۴۹



EI = ثابت

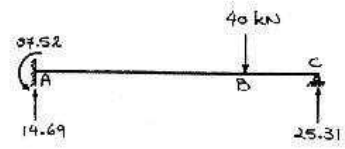
شکل ۸-۴۹

واکنش تکیه‌گاهی C_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و برای محاسبهٔ Δ_{CO} و δ_{CC} از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.

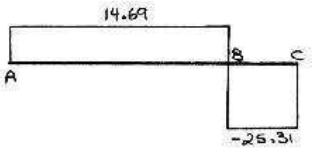
$$\Delta_{CO} = -\left[\frac{۴۰(۶)^۳}{۳EI} + \frac{۴۰(۶)^۲}{۲EI}(۸-۶)\right] = -\frac{۴۳۲۰\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\delta_{CC} = \frac{(۱)(۸)^۳}{۳EI} = \frac{۱۷۰/۶۶۷\ m^۳}{EI}$$

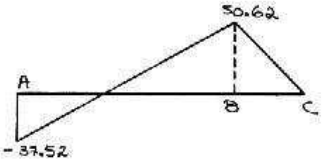
$$\Delta_{CO} + C_y \delta_{CC} = ۰ \Rightarrow -\frac{۴۳۲۰}{EI} + \left[\frac{۱۷۰/۶۶۷}{EI}\right] C_y = ۰ \Rightarrow C_y = ۲۵/۳۱\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_y} = ۲۵/۳۱\ kN \uparrow$$



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

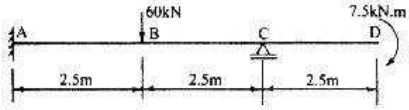


نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

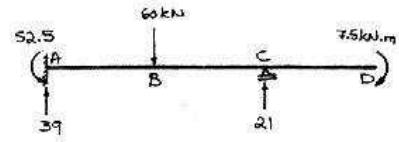
۸-۵۰



EI = ثابت

شکل ۸-۵۰

تیر نشان داده شده یک درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، واکنش تکیه‌گاهی C_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و برای محاسبهٔ Δ_{CO} و δ_{CC} از روابط پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.

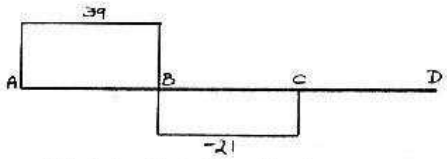


واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

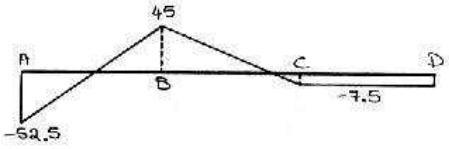
$$\Delta_{CO} = -\left[\frac{۶۰(۲/۵)^۳}{۳EI} + \frac{۶۰(۲/۵)^۲}{۲EI}(۲/۵) + \frac{۷/۵(۵)^۲}{۲EI}\right] = -\frac{۸۷۵\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\delta_{CC} = \frac{(۱)(۵)^۳}{۳EI} = \frac{۴۱/۶۶۷\ m^۳}{EI} \quad , \quad \Delta_{CO} + C_y \delta_{CC} = ۰$$

$$-\frac{۸۷۵}{EI} + C_y\left[\frac{۴۱/۶۶۷}{EI}\right] = ۰ \Rightarrow C_y = ۲۱\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_y} = ۲۱\ kN \uparrow$$



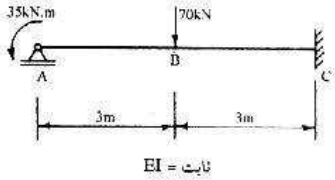
نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۵۱-۸

تیر نشان داده شده یک درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، واکنش تکیه‌گاهی A_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و برای محاسبهٔ Δ_{AO} و δ_{AA} از روابط پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.



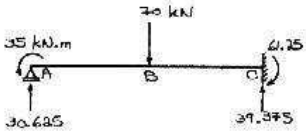
ثابت = EI

شکل ۸-۵۱

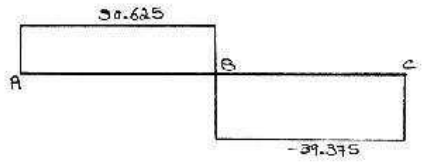
$$\Delta_{AO} = -\left[\frac{۷۰(۳)^۳}{۳EI} + \frac{۷۰(۳)^۲}{۲EI}(۳) + \frac{۳۵(۶)^۲}{۲EI}\right] = -\frac{۲۲۰۵\,m^۳}{EI}$$

$$\delta_{AA} = \frac{(۱)(۶)^۳}{۳EI} = \frac{۷۲\,kN.m^۲}{EI} \quad , \quad \Delta_{AO} + A_y\,\delta_{AA} = ۰$$

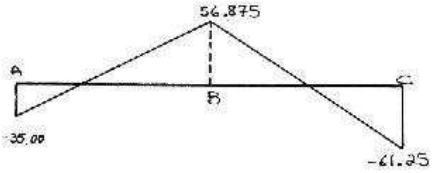
$$-\frac{۲۲۰۵}{EI} + A_y\left[\frac{۷۲}{EI}\right] = ۰ \;\Rightarrow\; A_y = ۳۰/۶۲۵\;\; kN \qquad \blacktriangleright \vec{A_y} = ۳۰/۶۲۵\;\; kN\uparrow$$



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی



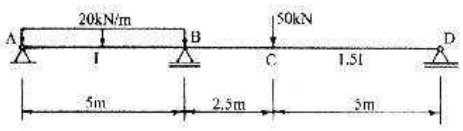
نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN



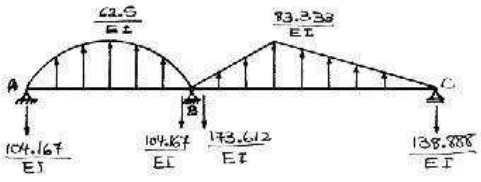
نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۵۲-۸

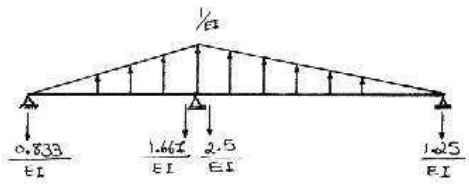
تیر مزبور یک درجه نامعین است. برای تعیین تیر اولیه، لنگر خمشی تیر در محل تکیه‌گاه داخلی B را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. برای محاسبهٔ $\theta_{BOrel.}$ و $\theta_{BBrel.}$ از روش تیر فرضی (مزدوج) استفاده می‌کنیم.



شکل ۸-۵۲



تیر مزدوج تیر اولیه تحت اثر بارهای خارجی

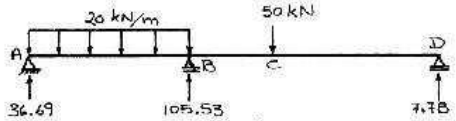


تیر مزدوج تیر اولیه تحت اثر لنگر خمشی واحد در گره B

$$\theta_{BL} = \frac{۱۰۴/۱۶۷\,kN.m^۲}{EI}\;\searrow \quad , \quad \theta_{BR} = \frac{۱۷۳/۱۶۲\,kN.m^۲}{EI}\;\searrow$$

$$\theta_{BOrel.} = \theta_{BL} + \theta_{BR} = \frac{۱۰۴/۱۶۷ + ۱۷۳/۱۶۲}{EI} = \frac{۲۷۷/۳۳\,kN.m^۲}{EI}$$

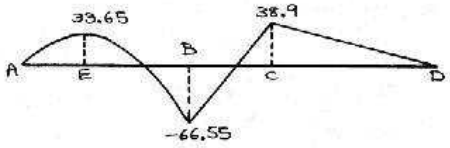
$$\theta_{BBL} = \frac{۱/۶۶۷\,m}{EI}\;\searrow \quad , \quad \theta_{BBR} = \frac{۲/۵\,m}{EI}\;\swarrow \;\Rightarrow\; \theta_{BBrel.} = \theta_{BBL} + \theta_{BBR} = \frac{۱/۶۶۷ + ۲/۵}{EI} = \frac{۴/۱۶۷\,m}{EI}$$



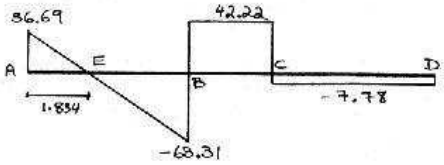
واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

$$\theta_{BOrel.} + M_B\,\theta_{BBrel.} = ۰ \;\Rightarrow\; \frac{۲۷۷/۳۳}{EI} + M_B\left[\frac{۴/۱۶۷}{EI}\right] = ۰$$

$$M_B = -۶۶/۵۵\;\; kN.m$$



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

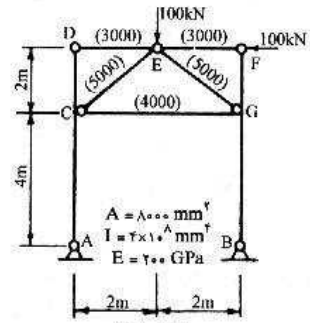


نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN

سازه‌های نشان داده شده در مسایل ۸-۵۳ تا ۸-۵۶ را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکلها تحلیل کرده، نیروهای محوری را محاسبه نموده و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را رسم کنید.

۸-۵۳

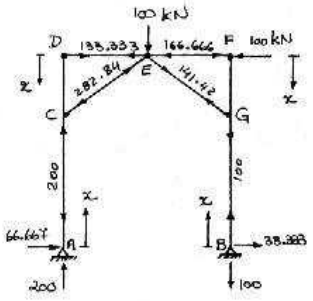
سازهٔ مزبور یک درجه نامعین است. برای تعیین سازهٔ اولیه، نیروی داخلی (F_{CG}) عضو CG را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.



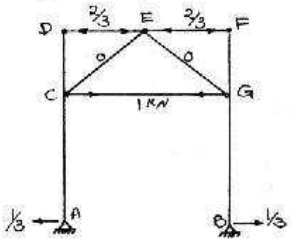
شکل ۸-۵۳

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M_o (kN.m)	m_{CG}
AC	A	۰-۴	۶۶/۶۶۷x	$\frac{x}{۳}$
DC	D	۰-۲	۱۳۳/۳۳۳x	$-\frac{۱}{۳}x$
BG	B	۰-۴	۳۳/۳۳۳x	$\frac{x}{۳}$
FG	F	۰-۲	۶۶/۶۶۶x	$\frac{۲}{۳}x$

عضو / قطعه	L (mm)	A (mm²)	F_o (kN)	u_{CG}	$\frac{F_o u_{CG} L}{A}$ (kN/mm)	$\frac{u_{CG}^2 L}{A}$ ($\frac{۱}{mm}$)
AC	۴۰۰۰	۸۰۰۰	-۲۰۰	۰	۰	۰
DC	۲۰۰۰	۸۰۰۰	۰	۰	۰	۰
BG	۴۰۰۰	۸۰۰۰	۱۰۰	۰	۰	۰
FG	۲۰۰۰	۸۰۰۰	۰	۰	۰	۰
CE	۲۸۲۸/۴	۵۰۰۰	-۲۸۲/۸۴	۰	۰	۰
CG	۴۰۰۰	۴۰۰۰	۰	۱	۰	۱
EG	۲۸۲۸/۴	۵۰۰۰	۱۴۱/۴۲	۰	۰	۰
EF	۲۰۰۰	۳۰۰۰	-۱۶۶/۶۶۶	$-\frac{۲}{۳}$	۷۴/۰۷	۰/۲۹۶
DE	۲۰۰۰	۳۰۰۰	۱۳۳/۳۳۳	$-\frac{۲}{۳}$	-۵۹/۲۶	۰/۲۹۶
				Σ	۱۴/۸۱	۱/۵۹۲



سازهٔ اولیه تحت اثر بارهای خارجی



سازهٔ اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو CG ، (u_{CG})

$$\Delta_{CGO} = \sum \int \frac{M_o m_{CG}}{EI} dx + \frac{۱}{E} \sum \frac{F_o u_{CG} L}{A}$$

$$\delta_{CG,CG} = \sum \int \frac{m_{CG}^2}{EI} dx + \frac{۱}{E} \sum \frac{u_{CG}^2 L}{A}$$

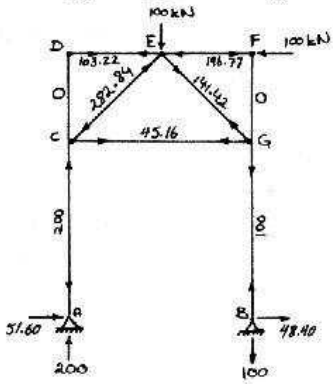
$$\Delta_{CGO}=\int_0^4\frac{(۶۶/۶۶۷x)\left[-\frac{x}{۴}\right]}{EI}dx+\int_0^۲\frac{(۱۳۳/۳۳۳x)\left[-\frac{۲}{۳}x\right]}{EI}dx+\int_0^4\frac{(۳۳/۳۳۳x)\left[\frac{x}{۴}\right]}{EI}dx+\int_0^۲\frac{(۶۶/۶۶۶x)\left[\frac{۲}{۳}x\right]}{EI}dx+\frac{۱۴/۸۱\ kN/mm}{E}$$

$$\delta_{CG,CG}=\int_0^4\frac{\left[-\frac{x}{۴}\right]^۲}{EI}dx+\int_0^۲\frac{\left[-\frac{۲}{۳}x\right]^۲}{EI}dx+\int_0^4\frac{\left[\frac{x}{۴}\right]^۲}{EI}dx+\int_0^۲\frac{\left[-\frac{۲}{۳}x\right]^۲}{EI}dx+\frac{۱/۵۹۲}{E}$$

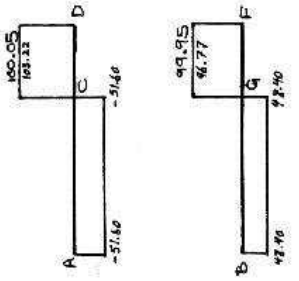
$\Delta_{CGO}=-۴/۳۷۰۴\ mm$ ، $\delta_{CG,CG}=۰/۰۹۶۷۶\ mm$

$\Delta_{CGO}+F_{CG}\delta_{CG,CG}=۰ \Rightarrow -۳۵۵/۴۸+۷/۱۱۹F_{CG}=۰$

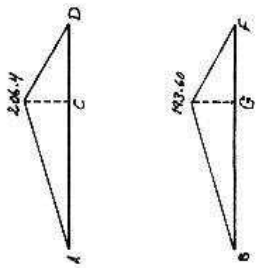
$F_{CG}=۴۵/۱۶\ kN$ ▶ $F_{CG}=۴۵/۱۶\ kN\ (T)$



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی محوری اعضا



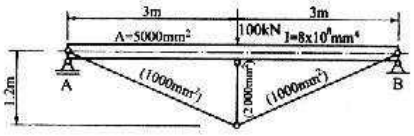
نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۸-۵۴

سازه یک درجه نامعین داخلی است. برای تعیین سازهٔ اولیه، نیروی داخلی (F_{BC}) عضو BC را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.



$E=۲۰۰\ GPa$ ، $A=۵۰۰۰\ mm^۲$ ، $I=۸\times۱۰^۶\ mm^۴$

شکل ۸-۵۴

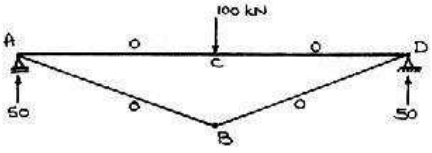
$$\Delta_{BCO}=\sum\int\frac{M_o m_{BC}}{EI}dx+\frac{۱}{E}\sum\frac{F_o u_{BC}L}{A} \Rightarrow \Delta_{BCO}=۰$$

$$\delta_{BC,BC}=\sum\int\frac{m_{BC}^۲}{EI}dx+\frac{۱}{E}\sum\frac{u_{BC}^۲L}{A}$$

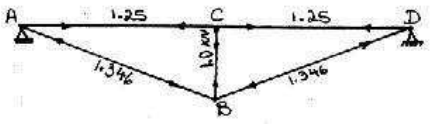
$$\delta_{BC,BC}=\frac{۱}{E}\left[۲\times\frac{(۱/۲۵)^۲(۳۰۰۰)}{۵۰۰۰}+۲\times\frac{(۱/۳۴۶)^۲(۳۳۳۱/۱)}{۱۰۰۰}+\frac{(۱)(۱۲۰۰)}{۲۰۰۰}\right]=\frac{۱۴/۱۸}{E}$$

$\Delta_{BCO}+F_{BC}\delta_{BC,BC}=۰ \Rightarrow ۰+\left[\frac{۱۴/۱۸}{E}\right]F_{BC}=۰$

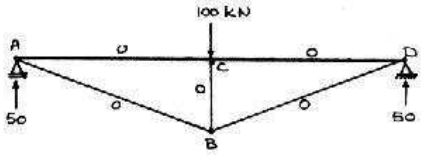
$F_{BC}=۰$



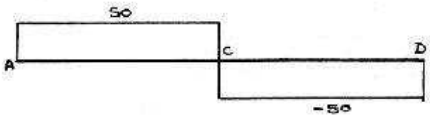
نیر اولیه تحت اثر بار خارجی



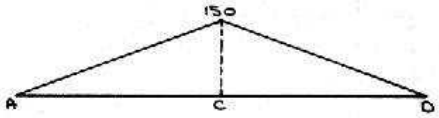
نیر اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو BC



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی محوری اعضا



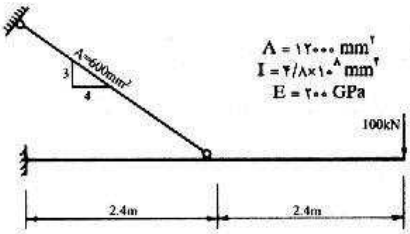
نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۵۵-۸

این سازه یک درجه نامعین است. نیروی داخلی (F_{BD}) عضو BD را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.



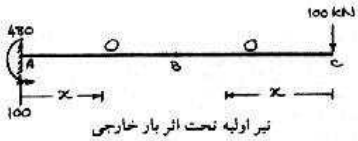
شکل ۸-۵۵

$A = ۱۲۰۰۰\ mm^۲$
$I = ۴/۸\times۱۰^۸\ mm^۴$
$E = ۲۰۰\ GPa$

$$\Delta_{BDO} = \sum\int \frac{M_o m_{BD}}{EI}dx + \frac{۱}{E}\sum\frac{F_o u_{BD} L}{A}$$

$$\delta_{BD,BD} = \sum\int \frac{m_{BD}^۲}{EI}dx + \frac{۱}{E}\sum\frac{u_{BD}^۲ L}{A}$$

$$\Delta_{BDO} = \int_۰^{۲/۴} \frac{(۱۰۰x - ۴۸۰)(-۰/۶x + ۱/۴۴)}{EI}dx = -\frac{۶۹۱/۲\ kN.m^۳}{EI}$$



تیر اولیه تحت اثر بار خارجی

$$\Delta_{BDO} = -\frac{۶۹۱/۲(۱۰^{۱۲})}{(۲۰۰۰۰۰)(۴/۸\times۱۰^۸)} = -۷/۲\ mm$$

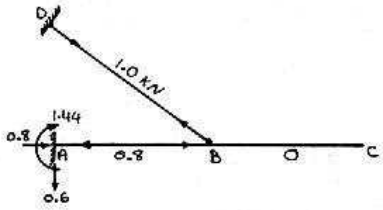
$$\delta_{BD,BD} = \int_۰^{۲/۴}\frac{(۱/۴۴ - ۰/۶x)^۲}{EI}dx + \frac{۱}{E}\left[\frac{(۰/۸)^۲(۲/۴)}{۰/۰۱۲} + \frac{(۱)^۲(۳)}{۶\times۱۰^{-۴}}\right]$$

$$\delta_{BD,BD} = \frac{۱/۶۵۸\ kN.m^۳}{EI} + \frac{۵۱۲۸}{E}$$

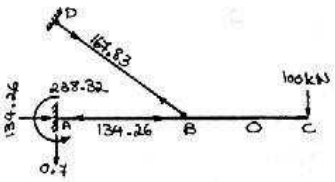
$$\delta_{BD,BD} = \frac{۱/۶۵۸(۱۰^{۱۲})}{(۲۰۰۰۰۰)(۴/۸\times۱۰^۸)} + \frac{۵۱۲۸\left[\frac{۱}{۱۰۰۰}\right]}{۲۰۰} = ۰/۰۴۲۹\ mm$$

$$\Delta_{BDO} + F_{BD}\delta_{BD,BD} = ۰ \Rightarrow -۷/۲ + ۰/۰۴۲۹F_{BD} = ۰$$

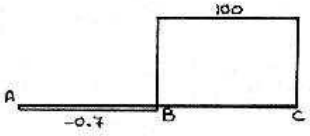
$$F_{BD} = ۱۶۷/۸۳\ kN \qquad \blacktriangleright F_{BD} = ۱۶۷/۸۳\ kN\ \ (T)$$



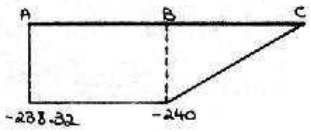
تیر اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو DB



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی محوری اعضا

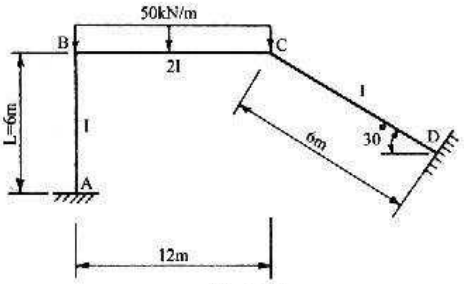


نمودار نیروی برشی ، kN

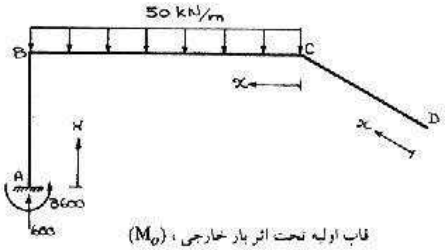


نمودار لنگر خمشی ، kN.m

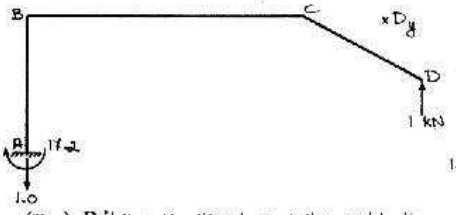
۵۶-۸



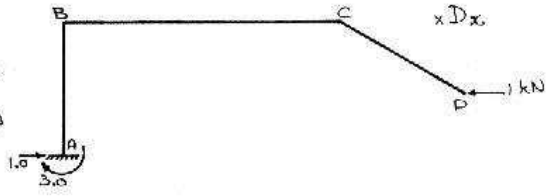
شکل ۸-۵۶



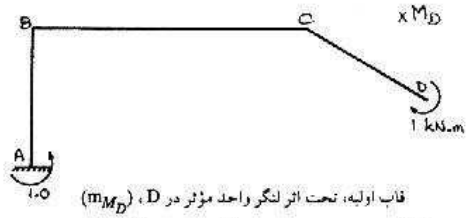
قاب اولیه تحت اثر بار خارجی ، (M_o)



قاب اولیه تحت اثر نیروی واحد قائم مؤثر در نقطهٔ D ، (m_{Dy})



قاب اولیه تحت اثر نیروی واحد افقی مؤثر در D ، (m_{Dx})



قاب اولیه، تحت اثر لنگر واحد مؤثر در D ، (m_{M_D})

عضو	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	ممان اینرسی عضو	M_o (kN.m)	M_{Dx}	m_{Dy}	m_{M_D}
AB	A	۰-۶	I	-۳۶۰۰	۳۰x	۱۷/۲	-۱
CB	C	۰-۱۲	۲I	$-۲۵x^2$	-۳	x+۵/۲	-۱
DC	D	۰-۶	I	۰	-۰/۵x	۰/۸۶۶x	-۱

$$\Delta_{Dxo}=\sum\int\frac{M_o m_{Dx}}{EI}dx=\int_0^6\frac{(-۳۶۰۰)(۳-x)}{EI}dx+\int_0^{۱۲}\frac{(-۲۵x^۲)(-۳)}{۲EI}dx=\frac{۲۱۶۰۰\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\Delta_{Dyo}=\sum\int\frac{M_o m_{Dy}}{EI}dx=\int_0^6\frac{(-۳۶۰۰)(۱۷/۲)}{EI}dx+\int_0^{۱۲}\frac{(-۲۵x^۲)(x+۵/۲)}{۲EI}dx=-\frac{۲۷۳۷۶۰\ kN.m^۳}{EI}$$

$$\theta_{DO}=\sum\int\frac{M_o m_{M_D}}{EI}dx=\int_0^6\frac{(-۳۶۰۰)(-۱)}{EI}dx+\int_0^{۱۲}\frac{(-۲۵x^۲)(-۱)}{۲EI}dx=\frac{۲۸۸۰۰\ kN.m^۲}{EI}$$

$$\delta_{Dx,Dx}=\sum\int\frac{m_{Dx}^۲}{EI}dx=\int_0^6\frac{(۳-x)^۲}{EI}dx+\int_0^{۱۲}\frac{(-۳)^۲}{۲EI}dx+\int_0^6\frac{(-۰/۵x)^۲}{EI}dx=\frac{۹۰\ m^۳}{EI}$$

$$\delta_{Dy,Dy}=\sum\int\frac{m_{Dy}^۲}{EI}dx=\int_0^6\frac{(۱۷/۲)^۲}{EI}dx+\int_0^{۱۲}\frac{(x+۵/۲)^۲}{۲EI}dx+\int_0^6\frac{(۰/۸۶۶x)^۲}{EI}dx=\frac{۲۶۵۳/۶۸\ m^۳}{EI}$$

$$\delta_{M_D,M_D}=\sum\int\frac{m_{M_D}^۲}{EI}dx=۲\int_0^6\frac{(-۱)^۲}{EI}dx+\int_0^{۱۲}\frac{(-۱)^۲}{۲EI}dx=\frac{۱۸\ m}{EI}$$

$$\delta_{Dx,Dy}=\delta_{Dy,Dx}=\sum\int\frac{m_{Dx}m_{Dy}}{EI}dx=\int_0^6\frac{(۳-x)(۱۷/۲)}{EI}dx+\int_0^{۱۲}\frac{(-۳)(x+۵/۲)}{۲EI}dx+\int_0^6\frac{(-۰/۵x)(۰/۸۶۶x)}{EI}dx$$

$$\delta_{Dx,Dy}=\delta_{Dy,Dx}=-\frac{۲۳۲/۷۷۶\ m^۳}{EI}$$

$$\delta_{Dx,M_D}=\delta_{M_D,Dx}=\sum\int\frac{m_{Dx}m_{M_D}}{EI}dx=\int_0^6\frac{(۳-x)(-۱)}{EI}dx+\int_0^{۱۲}\frac{(-۳)(-۱)}{۲EI}dx+\int_0^6\frac{(-۰/۵x)(-۱)}{EI}dx=\frac{۲۷\ m^۲}{EI}$$

$$\delta_{Dy,M_D} = \delta_{M_D,Dy} = \sum \int \frac{m_{Dy}\, m_{M_D}}{EI} dx = \int_0^6 \frac{(۱۷/۲)(-۱)}{EI} dx + \int_0^{۱۲} \frac{(x+۵/۲)(-۱)}{۲EI} dx + \int_0^6 \frac{(-/۸۶۶x)(-۱)}{EI} dx = -\frac{۱۸۵/۹۸۸\, m^۲}{EI}$$

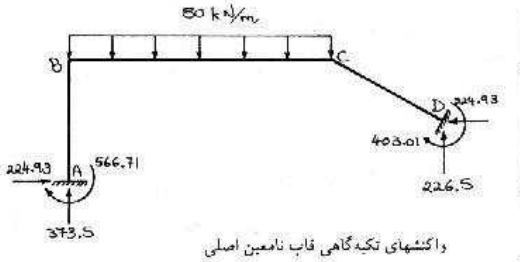
روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases} \Delta_{Dx0} + D_x \delta_{DX,Dx} + D_y \delta_{Dx,Dy} + M_D \delta_{Dx,M_D} = 0 \\ \Delta_{Dy0} + D_x \delta_{Dy,Dx} + D_y \delta_{Dy,Dy} + M_D \delta_{Dy,M_D} = 0 \\ \theta_{D0} + D_x \delta_{M_D,Dx} + D_y \delta_{M_D,Dy} + M_D \delta_{M_D,M_D} = 0 \end{cases}$$

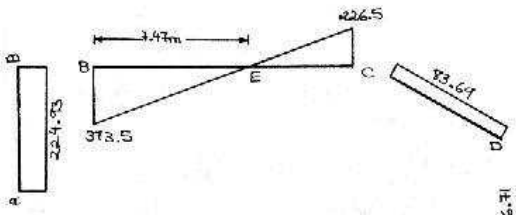
$$\begin{cases} ۹۰D_x - ۲۳۲/۷۷۶ D_y + ۲۷M_D = ۲۱۶۰۰ \\ -۲۳۲/۷۷۶ D_x + ۲۶۵۳/۶۸ D_y - ۱۸۵/۹۸۸ M_D = ۴۷۳۷۶۰ \\ ۲۷D_x - ۱۸۵/۹۸۸ D_y + ۱۸M_D = -۲۸۸۰۰ \end{cases}$$

$\blacktriangleright \vec{D_x} = ۲۲۴/۹۳ \ kN \leftarrow$ ، $\blacktriangleright \vec{D_y} = ۲۲۶/۵۰ \ kN \uparrow$

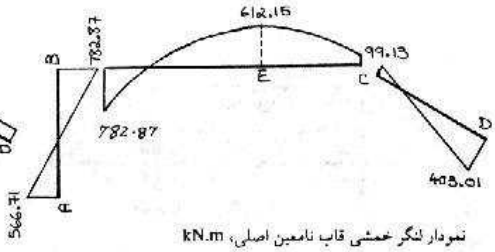
$\blacktriangleright \vec{M_D} = ۴۰۳/۰۱ \ kN.m$)



واکنشهای تکیه‌گاهی قاب نامعین اصلی



نمودار نیروی برشی قاب نامعین اصلی، kN

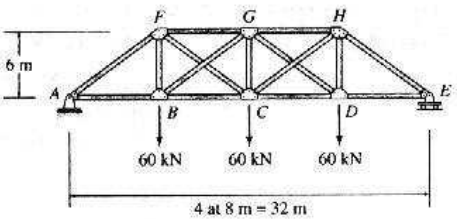


نمودار لنگر خمشی قاب نامعین اصلی، kN.m

در مسایل ۸-۵۷ و ۸-۵۸ با استفاده از روش نیرو، واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضای خرپای نشان داده شده را تعیین کنید.

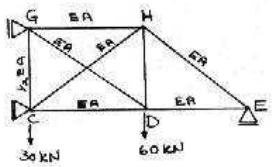
۸-۵۷

با توجه به تقارن بارگذاری و هندسهٔ خرپا، به جای سازهٔ نامعین اصلی، خرپای معادل را تحلیل می‌کنیم.



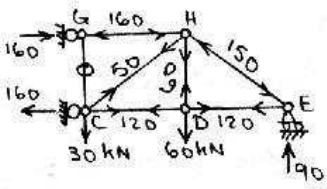
ثابت = EA

شکل ۸-۵۷

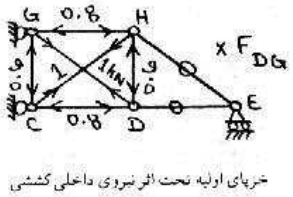


خرپای معادل با خرپای نامعین اصلی به علت تقارن

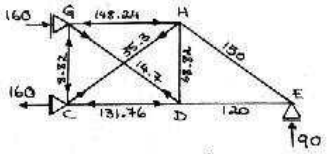
خرپای معادل یک درجه نامعین داخلی است. برای تعیین خرپای اولیه، نیروی داخلی (F_{GD}) عضو GD را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.



خرپای اولیه تحت اثر بارهای خارجی، (F_0)

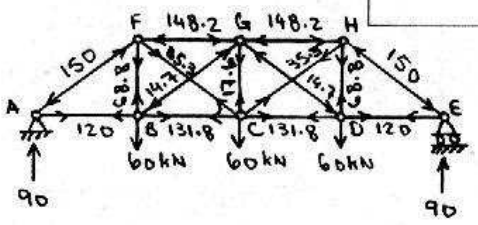


خرپای اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو GD، (u_{GD})



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی در اعضای خرپای معادل

عضو	L (m)	A نسبی	F_o (kN)	u_{DG} (kN/kN)	$\frac{F_o u_{DG} L}{A}$ (kN/m)	$\frac{u_{DG}^2 L}{A}$ $(\frac{1}{m})$	$F=F_o+u_{DG}F_{DG}$ (kN)
CD	۸	۱	۱۲۰	-۰/۸	-۷۶۸	۵/۱۲	۱۳۱/۸
DE	۸	۱	۱۲۰	۰	۰	۰	۱۲۰
GH	۸	۱	-۱۶۰	-۰/۸	۱۰۲۴	۵/۱۲	-۱۴۸/۲
CG	۶	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۰/۶	۰	۴/۳۲	۸/۸
DH	۶	۱	۶۰	-۰/۶	-۲۱۶	۲/۱۶	۶۸/۸
CH	۱۰	۱	۵۰	۱	۵۰۰	۱۰	۳۵/۳
EH	۱۰	۱	-۱۵۰	۰	۰	۰	-۱۵۰
DG	۱۰	۱	۰	۱	۰	۱۰	-۱۴/۷
				Σ	۵۴۰	۳۶/۷۲	



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی در اعضای خرپای نامعین اصلی

$$\Delta_{GDO}=\frac{1}{E}\sum\frac{F_o u_{DG} L}{A} \quad , \quad \delta_{GD,GD}=\frac{1}{E}\sum\frac{u_{DG}^2 L}{A}$$

$$\Delta_{GDO}=\frac{۵۴۰}{EA} \quad , \quad \delta_{GD,GD}=\frac{۳۶/۷۲}{EA}$$

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها: $\Delta_{GDO}+F_{DG}\delta_{DG,DG}=۰$

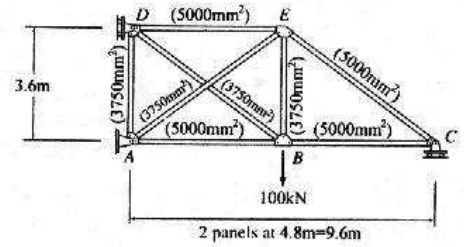
$$\frac{۵۴۰}{EA}+F_{DG}\left[\frac{۳۶/۷۲}{EA}\right]=۰ \Rightarrow F_{DG}=-۱۴/۷ \ kN$$

$$\blacktriangleright F_{DG}=۱۴/۷ \ kN \quad (C)$$

۵۸-۸

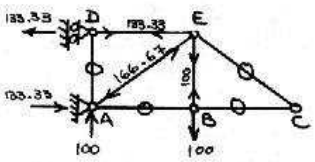
خرپای مزبور یک درجه نامعین خارجی و یک درجه نامعین داخلی است. برای تعیین خرپای اولیه، واکنش تکیه‌گاهی C_y و نیروی داخلی (F_{BD}) عضو BD را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

برای محاسبهٔ Δ_{CO} ، Δ_{BDO} ، δ_{CC} ، $\delta_{C,BD}$ ، $\delta_{BD,C}$ و $\delta_{BD,BD}$ از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم.

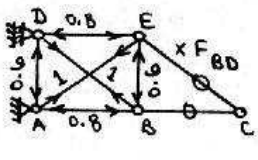


E = ۲۰۰ GPa

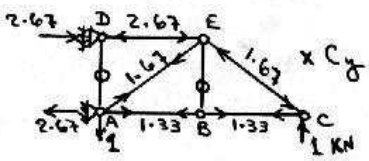
شکل ۸-۵۸



خرپای اولیه تحت اثر بارهای خارجی (F_o)



خرپای اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو BD، (u_{BD})

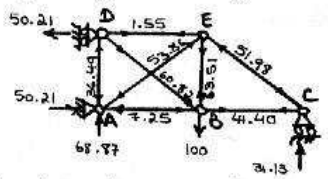


خرپای اولیه تحت اثر نیروی قائم واحد مؤثر در C، (u_C)

عضو	L (mm)	A (mm^2)	F_o (kN)	u_{BD} (kN/kN)	u_C (kN/kN)	$\frac{F_o u_{BD} L}{A}$ (kN/m)	$\frac{F_o u_C L}{A}$ (kN/m)	$\frac{u_{BD}^2 L}{A}$ $(\frac{1}{m})$	$\frac{u_C^2 L}{A}$ $(\frac{1}{m})$	$\frac{u_{BD} u_C L}{A}$ $(\frac{1}{m})$	$F=F_o+u_{BD}F_{BD}+u_C C_y$ (kN)
AB	۴۸۰۰	۵۰۰۰	۰	-۰/۸	۱/۳۳	۰	۰	۰/۶۱۴۴	۱/۶۹۸	-۱/۰۲۱	-۷/۲۵
BC	۴۸۰۰	۵۰۰۰	۰	۰	۱/۳۳	۰	۰	۰	۱/۶۹۸	۰	۴۱/۴۰
DE	۴۸۰۰	۵۰۰۰	۱۳۳/۳۳	-۰/۸	-۲/۶۷	-۱۰۲/۴	-۳۴۱/۷۵	۰/۶۱۴۴	۶/۸۴۴	۲/۰۵۱	۱/۵۵
AD	۳۶۰۰	۳۷۵۰	۰	-۰/۶	۰	۰	۰	۰/۳۴۵۶	۰	۰	-۳۶/۴۹
BE	۳۶۰۰	۳۷۵۰	۱۰۰	-۰/۶	۰	-۵۷/۶	۰	۰/۳۴۵۶	۰	۰	۶۳/۵۱
AE	۶۰۰۰	۳۷۵۰	-۱۶۶/۶۷	۱	۱/۶۷	-۲۶۶/۶۶	-۴۴۵/۳۴	۱/۶	۴/۴۶۲	۲/۶۷۲	-۵۳/۸۶
CE	۶۰۰۰	۵۰۰۰	۰	۰	-۱/۶۷	۰	۰	۰	۳/۳۴۷	۰	-۵۱/۹۸
BD	۶۰۰۰	۳۷۵۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱/۶	۰	۰	۶۰/۸۲
					Σ	-۴۲۶/۶۶	-۷۸۷/۰۹	۵/۱۲	۱۸/۰۴۹	۳/۷۰۲	

$$\Delta_{BDO}=\frac{1}{E}\sum\frac{F_o u_{BD} L}{A}=-\frac{۴۲۶/۶۶\ kN/m}{E}\quad,\quad \Delta_{CO}=\frac{1}{E}\sum\frac{F_o u_C L}{A}=-\frac{۷۸۷/۰۹\ kN/m}{E}\quad,\quad \Delta_{CC}=\frac{1}{E}\sum\frac{u_C^2 L}{A}=\frac{۱۸/۰۴۹\ \frac{1}{m}}{E}$$

$$\delta_{BD,C}=\delta_{C,BD}=\frac{۳/۷۰۲\ \left[\frac{1}{m}\right]}{E}\quad,\quad \delta_{BD,BD}=\frac{1}{E}\sum\frac{u_{BD}^2 L}{A}=\frac{۵/۱۲\ \left[\frac{1}{m}\right]}{E}$$



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی در اعضای خرپای نامعین اصلی

روابط سازگاری تغییر شکلها:

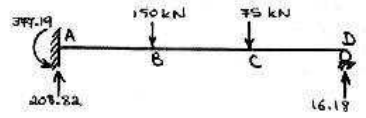
$$\begin{cases}\Delta_{BDO}+F_{BD}\delta_{BD,BD}+C_y\delta_{BD,C}=0\\ \Delta_{CO}+F_{BD}\delta_{C,BD}+C_y\delta_{CC}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-۴۲۶/۶۶+۵/۱۲F_{BD}+۳/۷۰۲C_y=0\\ -۷۸۷/۰۹+۳/۷۰۲F_{BD}+۱۸/۰۴۹C_y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}۵/۱۲F_{BD}+۳/۷۰۲C_y=۴۲۶/۶۶\\ ۳/۷۰۲F_{BD}+۱۸/۰۴۹C_y=۷۸۷/۰۹\end{cases}\Rightarrow F_{BD}=۶۰/۸۲\ kN\ ,\ C_y=۳۱/۱۳\ kN$$

$$\blacktriangleright F_{BD}=۶۰/۸۲\ kN\ (T)\quad,\quad \blacktriangleright \vec{C_y}=۳۱/۱۳\ kN\uparrow$$

۸-۵۹ در مسئلهٔ ۸-۱۶ اگر علاوه بر بارهای اعمال شده بر تیر، تکیه‌گاه D به اندازهٔ ۲۵ mm نشست کند، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر را به دست آورده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کنید.



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

$$\Delta_{DO}=-\frac{۱۸۵۶/۲۵\ kN.m^3}{EI}=-\frac{۱۸۵۶/۲۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^3}{(۱۴۰۰۰)(۳/۹\times۱۰^9)}=-۳۴\ mm$$

$$\delta_{DD}=\frac{۳۰/۳۷۵\ m^3}{EI}=\frac{۳۰/۳۷۵(۱۰۰۰)^3}{(۱۴۰۰۰)(۳/۹\times۱۰^9)}=۵/۵۶۳\times۱۰^{-۴}\ mm/N$$

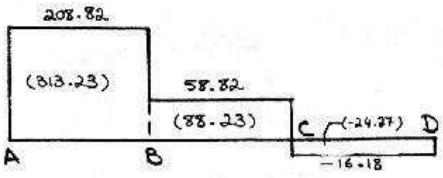
$$\delta_{DD}=۰/۵۵۶۳\ mm/kN$$

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

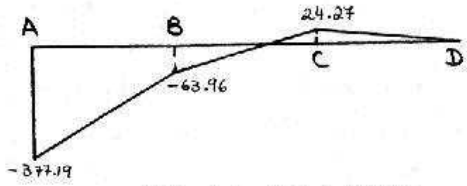
$$\Delta_{DO}+D_y\delta_{DD}=\Delta_D$$

$$-۳۴+۰/۵۵۶۳D_y=-۲۵\ \Rightarrow\ D_y=۱۶/۱۸\ kN$$

$$\blacktriangleright D_y=۱۶/۱۸\ kN\uparrow$$

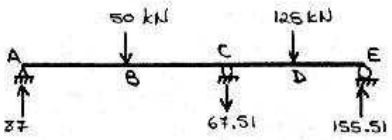


نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۸-۶۰ در مسئلهٔ ۸-۲۰ اگر علاوه بر بارهای اعمال شده بر تیر، تکیه‌گاه C به اندازهٔ ۴۴ mm نشست کند، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر را به دست آورده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کنید.



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

$$\Delta_{CO} = -\frac{۷۵۹۳/۷۵\ kN.m^3}{EI} = -\frac{۷۵۹۳/۷۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^3}{(۲۰۰۰۰۰)(۱/۳۶\times۱۰^9)} = -۲۷/۹۲\ mm$$

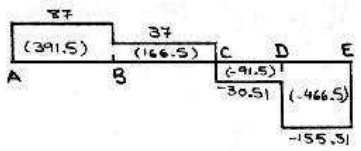
$$\delta_{CC} = \frac{۶۴/۸\ m^3}{EI} = \frac{۶۴/۸(۱۰۰۰)^3}{(۲۰۰۰۰۰)(۱/۳۶\times۱۰^9)} = ۲/۳۸۲\times۱۰^{-۴}\ mm/N$$

$$\delta_{CC} = ۰/۲۳۸۲\ mm/kN$$

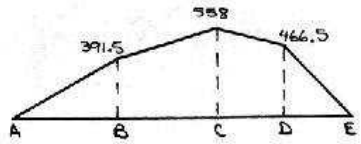
رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

$$\Delta_{CO} + C_y\,\delta_{CC} = \Delta_C$$

$$-۲۷/۹۲ + ۰/۲۳۸۲C_y = -۴۴ \Rightarrow C_y = -۶۷/۵۱\ kN \qquad \blacktriangleright \vec{C_y} = ۶۷/۵۱\ kN\downarrow$$

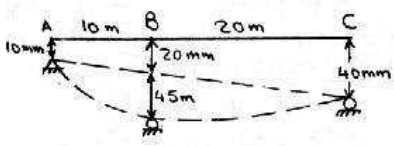


نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۸-۶۱ در مسئلهٔ ۸-۲۲ اگر علاوه بر بار یکنواخت اعمال شده بر تیر، تکیه‌گاههای A ، B و C به ترتیب به اندازهٔ ۱۰ mm ، ۶۵ mm و ۴۰ mm نشست کنند، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر را محاسبه کرده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کنید.



$$\Delta_{BO} = -\frac{۱۴۵۸۳۳/۳۳\ kN.m^3}{EI} = -\frac{۱۴۵۸۳۳/۳۳(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^3}{(۲۰۰۰۰۰)(۵۰۰\times۱۰^6)}$$

$$\Delta_{BO} = -۱۴۵۸/۳۳\ mm$$

$$\delta_{BB} = \frac{۲۹۶/۳\ m^3}{EI} = \frac{۲۹۶/۳(۱۰۰۰)^3}{(۲۰۰۰۰۰)(۵۰۰\times۱۰^6)} = ۲/۹۶۳\times۱۰^{-۳}\ mm/N$$

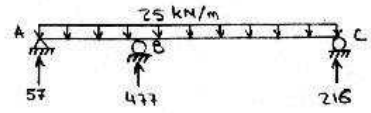
$$\delta_{BB} = ۲/۹۶۳\ \frac{mm}{kN}$$

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

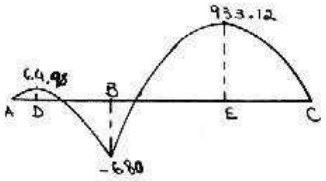
$$\Delta_{BO} + B_y\,\delta_{BB} = \Delta_B$$

$$-۱۴۵۸/۳۳ + ۲/۹۶۳B_y = -۴۵ \Rightarrow B_y = ۴۷۷\ kN$$

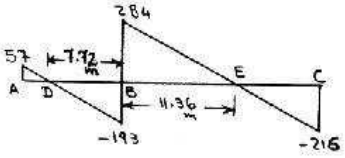
$$\blacktriangleright \vec{B_y} = ۴۷۷\ kN\uparrow$$



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

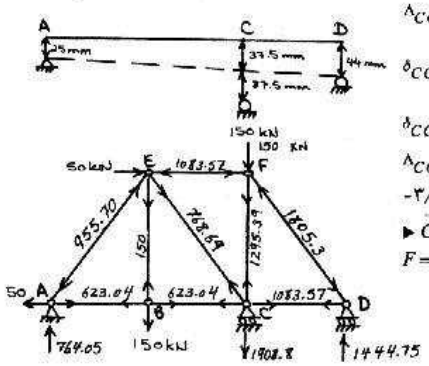


نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m



نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN

۸-۶۲ در مسئلهٔ ۸-۳۲ ، اگر علاوه بر بار یکنواخت اعمال شده بر خرپا، تکیه‌گاههای A ، C و D به ترتیب به اندازهٔ ۲۵ mm ، ۷۵ mm و ۴۴ mm نشست کنند، واکنشهای تکیه‌گاهی خرپا را محاسبه کرده و نیروی داخلی اعضای خرپا را به دست آورید.



واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی اعضا در خرپای نامعین اصلی

$$\Delta_{CO} = -\frac{۲۷۵۷/۵۲\ kN.m}{EA} = -\frac{۲۷۵۷/۵۲(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)}{(۲۰۰۰۰۰)(۳۷۵۰)} = -۳/۶۷۶\ mm$$

$$\delta_{CC} = \frac{۱۳/۲۹\ m}{EA} = \frac{۱۳/۲۹(۱۰۰۰)}{(۲۰۰۰۰۰)(۳۷۵۰)} = ۱/۷۷۲ \times ۱۰^{-۵}\ mm/N$$

$$\delta_{CC} = ۱/۷۷۲ \times ۱۰^{-۲}\ mm/kN$$

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

$$\Delta_{CO} + C_y \delta_{CC} = \Delta_C$$

$$-۳/۶۷۶ + ۱/۷۷۲ \times ۱۰^{-۲} C_y = -۳۷/۵ \quad \Rightarrow \quad C_y = -۱۹۰۸/۸\ \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{C_y} = ۱۹۰۸/۸\ \ kN \downarrow$$

با توجه به حل مسئلهٔ ۸-۳۲، نیروی داخلی اعضای خرپا را از رابطهٔ : $F = F_o + C_y u_C$ محاسبه می‌کنیم.

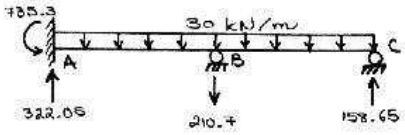
۸-۶۳ در مسئلهٔ ۸-۴۱ اگر علاوه بر بار گستردهٔ اعمال شده بر تیر، تکیه‌گاههای B و C به اندازهٔ ۳۷/۵ mm و ۲۵ mm نشست کنند، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر مزبور و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کنید.

$$\Delta_{BO} = -\frac{۸۷۱۳/۸۳\ kN.m^۳}{EI} = -\frac{۸۷۱۳/۸۳(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۳}{(۷۰۰۰۰)(۱/۱۷ \times ۱۰^۹)} = -۱۰۶/۴\ mm$$

$$\Delta_{CO} = -\frac{۲۴۶۰۳/۷۵}{EI} = -\frac{۲۴۶۰۳/۷۵(۱۰۰۰)^۳}{(۷۰)(۱/۱۷ \times ۱۰^۹)} = -۳۰۰/۴\ mm$$

$$\delta_{BB} = \frac{۳۰/۳۷۵\ m^۳}{EI} = \frac{۳۰/۳۷۵(۱۰۰۰)^۳}{(۷۰)(۱/۱۷ \times ۱۰^۹)} = ۰/۳۷۱\ mm/kN \quad , \quad \delta_{CC} = \frac{۲۴۳\ m^۳}{EI} = \frac{۲۴۳(۱۰۰۰)^۳}{(۷۰)(۱/۱۷ \times ۱۰^۹)} = ۲/۹۶۷\ mm/kN$$

$$\delta_{BC} = \delta_{CB} = \frac{۷۵/۹۳۷۵\ m^۳}{EI} = \frac{۷۵/۹۳۷۵(۱۰۰۰)^۳}{(۷۰)(۱/۱۷ \times ۱۰^۹)} = ۰/۹۲۷\ mm/kN$$



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

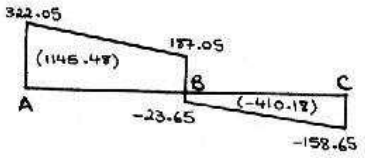
روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases} \Delta_{BO} + B_y \delta_{BB} + C_y \delta_{BC} = \Delta_B \\ \Delta_{CO} + B_y \delta_{CB} + C_y \delta_{CC} = \Delta_C \end{cases}$$

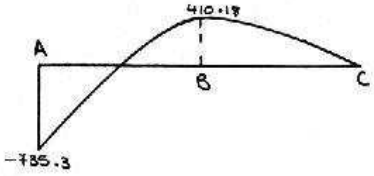
$$\begin{cases} -۱۰۶/۴ + ۰/۳۷۱ B_y + ۰/۹۲۷ C_y = -۳۷/۵ \\ -۳۰۰/۴ + ۰/۹۲۷ B_y + ۲/۹۶۷ C_y = -۲۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۰/۳۷۱B_y + ۰/۹۲۷C_y = ۶۸/۹ \\ ۰/۹۲۷B_y + ۲/۹۶۷C_y = ۲۷۵/۴ \end{cases} \Rightarrow B_y = -۲۱۰/۷ \ kN \ , \ C_y = ۱۵۸/۶۵ \ kN$$

$$\blacktriangleright \vec{B_y} = ۲۱۰/۷ \ kN \downarrow \quad , \quad \blacktriangleright \vec{C_y} = ۱۵۸/۶۵ \ kN \uparrow$$

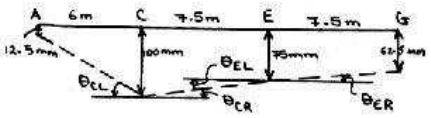


نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN



نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۸-۶۴ اگر در مسئلهٔ ۸-۴۳ علاوه بر بارهای اعمال شده بر تیر، تکیه‌گاههای A ، C ، E و G به ترتیب به اندازهٔ ۱۲/۵ mm ، ۱۰۰ mm ، ۷۵ و ۶۲/۵ mm نشست کنند، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر مزبور و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی این تیر را ترسیم کنید.



$$\theta_{COrel.} = \frac{۴۰۵ \ kN.m^۲}{EI} = \frac{۴۰۵(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۲۰۰۰۰۰)(۲\times ۱۰^۹)} = ۰/۰۰۱۰۱ \ rad$$

$$\theta_{EOrel.} = \frac{۸۱۰ \ kN.m^۲}{EI} = \frac{۸۱۰(۱۰۰۰)(۱۰۰۰)^۲}{(۲۰۰۰۰۰)(۲\times ۱۰^۹)} = ۰/۰۰۲۰۲ \ rad$$

$$\theta_{CCrel.} = \frac{۳/۲۵ \ m}{EI} = \frac{۳/۲۵(۱۰۰۰)}{(۲۰۰۰۰۰)(۲\times ۱۰^۹)} = ۸/۱۲۵\times ۱۰^{-۱۲} \ \frac{rad}{N.mm}$$

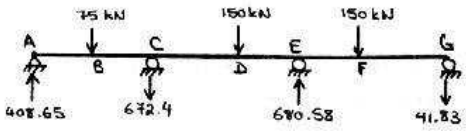
$$\theta_{CCrel.} = ۸/۱۲۵\times ۱۰^{-۶} \ rad/kN.m$$

$$\theta_{EC} = \theta_{CE} = \frac{۰/۶۲۵ \ m}{EI} = \frac{۰/۶۲۵(۱۰۰۰)}{(۲۰۰۰۰۰)(۲\times ۱۰^۹)} = ۱/۵۶۲۵\times ۱۰^{-۶} \ rad/kN.m$$

$$\theta_{EErel.} = \frac{۳/۷۵ \ m}{EI} = \frac{۳/۷۵(۱۰۰۰)}{(۲۰۰۰۰۰)(۲\times ۱۰^۹)} = ۹/۳۷۵\times ۱۰^{-۶} \ rad/kN.m$$

روابط سازگاری تغییر شکلها:

$$\begin{cases} \theta_{COrel.} + M_C\theta_{CCrel.} + M_E\theta_{CE} = \theta_C \\ \theta_{EOrel.} + M_C\theta_{EC} + M_E\theta_{EErel.} = \theta_E \end{cases}$$



واکنشهای تکیه‌گاهی تیر نامعین اصلی

$$\theta_{CL} = \frac{۱۰۰ - ۱۲/۵}{۶۰۰۰} = ۰/۰۱۴۵۸ \ rad$$

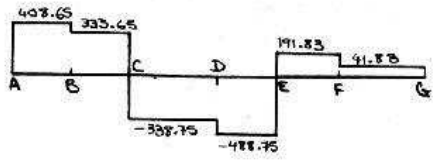
$$\theta_{CR} = \frac{۱۰۰ - ۷۵}{۷۵۰۰} = ۰/۰۰۳۳۳ \ rad$$

$$\theta_{EL} = \frac{۷۵ - ۱۰۰}{۷۵۰۰} = -۰/۰۰۳۳۳ \ rad$$

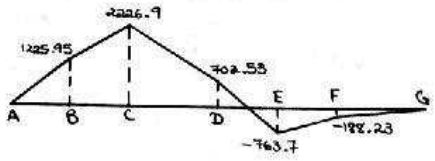
$$\theta_{ER} = \frac{۷۵ - ۶۲/۵}{۷۵۰۰} = ۰/۰۰۱۶۷ \ rad \ , \ \theta_E = \theta_{EL} + \theta_{ER} = -۰/۰۰۱۶۶ \ rad \ , \ \theta_C = \theta_{CL} + \theta_{CR} = ۰/۰۱۷۹۱ \ rad$$

$$\begin{cases} ۰/۰۰۱۰۱ + ۸/۱۲۵\times ۱۰^{-۶}M_C + ۱/۵۶۲۵\times ۱۰^{-۶}M_E = ۰/۰۱۷۹۱ \\ ۰/۰۰۲۰۲ + ۱/۵۶۲۵\times ۱۰^{-۶}M_C + ۹/۳۷۵\times ۱۰^{-۶}M_E = -۰/۰۰۱۶۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸/۱۲۵M_C + ۱/۵۶۲۵M_E = ۱۶۹۰۰ \\ ۱/۵۶۲۵M_C + ۹/۳۷۵M_E = -۳۶۸۰ \end{cases}$$

$$M_C = ۲۲۲۶/۹ \ kN.m \quad , \quad M_E = -۷۶۳/۷ \ kN.m$$

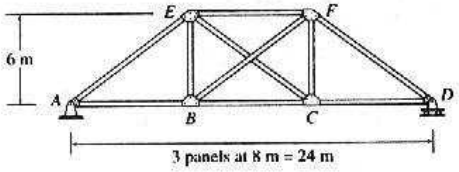


نمودار نیروی برشی تیر نامعین اصلی ، kN

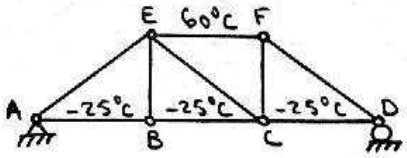


نمودار لنگر خمشی تیر نامعین اصلی ، kN.m

۸-۶۵ خرپای نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش نیرو تحلیل کرده، نیروی داخلی اعضای آن را به دست آورید. فرض کنید دمای اعضای AB ، BC و CD به اندازهٔ ۲۵°C کاهش یافته و دمای عضو EF به اندازهٔ ۶۰°C افزایش یابد.



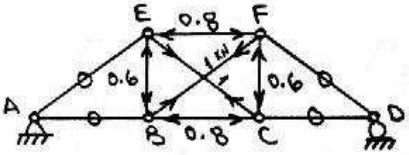
$E = ۲۰۰\ GPa$ ، $A = ۳۰۰۰\ mm^۲$ ، $\alpha = ۱/۲\times۱۰^{-۵}/°C$



خرپای اولیه تحت اثر تغییرات دما در اعضای مختلف

شکل ۸-۶۵

خرپای مزبور یک درجه نامعین داخلی است. برای تعیین خرپای اولیه، نیروی داخلی (F_{BF}) عضو BF را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.



خرپای اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو BF ، (u_{BF})

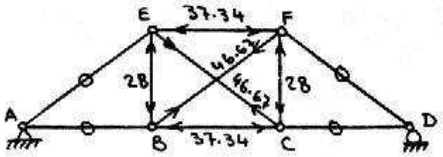
$$\Delta_{BFO} = \alpha \sum (\Delta T) L u_{BF} \quad , \quad \delta_{BF,BF} = \frac{۱}{EA} \sum u_{BF}^{۲} L$$

$$\Delta_{BFO} = ۱/۲\times۱۰^{-۵}(۸)\left[(-۲۵)(-۰/۸)+(۶)(-۰/۸)\right] = -۰/۰۰۲۶۸۸m$$

$$\delta_{BF,BF} = \frac{۱}{(۲۰۰\times۱۰^{۶})(۰/۰۰۳)}\left[۲(۱)^{۲}(۱۰)+۲(-۰/۸)^{۲}(۸)+ ۲(-۰/۶)^{۲}(۶)\right] = ۵۷/۶\times۱۰^{-۶}\ m/kN$$

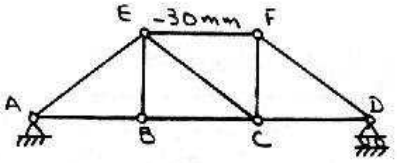
$$\Delta_{BFO} + F_{BF}\delta_{BF,BF} = ۰ \Rightarrow -۰/۰۰۲۶۸۸ + (۵۷/۶\times۱۰^{-۶})F_{BF} = ۰$$

$$F_{BF} = ۴۶/۶۷\ kN \qquad \blacktriangleright F_{BF} = ۴۶/۶۷\ kN\ \ (T)$$

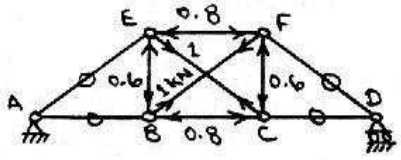


نیروهای داخلی خرپای نامعین اصلی

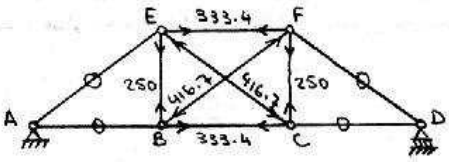
۸-۶۶ اگر در خرپای نشان داده شده در شکل مسئلهٔ ۸-۶۵ ، عضو EF به اندازهٔ ۳۰ mm کوچکتر از اندازهٔ دقیق باشد، با استفاده از روش نیرو، خرپای مزبور را مجدداً تحلیل کنید.



خرپای اولیه و خطاهای حین ساخت موجود در اعضا



خرپای اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو BF ، (u_{BF})



نیروهای داخلی خرپای نامعین اصلی

$$\Delta_{BFO}=\sum \delta u_{BF} \quad , \quad \delta_{BF,BF}=\frac{1}{EA}\sum u_{BF}^2 L$$

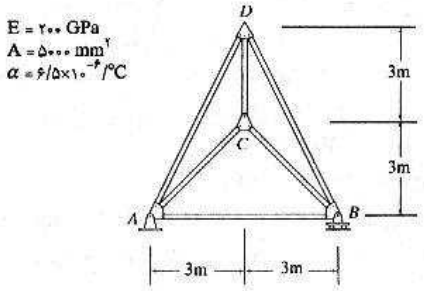
$$\Delta_{BFO}=(-۰/۰۳)(-۰/۸)=۰/۰۲۴\ m$$

$$\delta_{BF,BF}=\frac{1}{(۲۰۰\times ۱۰^{۶})(۰/۰۰۳)}\Big[۲(۱)^2(۱۰)+۲(-۰/۸)^2(۸)+ ۲(-۰/۶)^2(۶)\Big]=۵۷/۶\times ۱۰^{-۶}\ m/kN$$

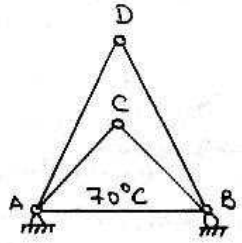
$$\Delta_{BFO}+F_{BF}\delta_{BF,BF}=۰ \quad \Rightarrow \quad ۰/۰۲۴+(۵۷/۶\times ۱۰^{-۶})F_{BF}=۰$$

$$F_{BF}=-۴۱۶/۷\ kN \qquad \blacktriangleright F_{BF}=۴۱۶/۷\ kN\ \ (C)$$

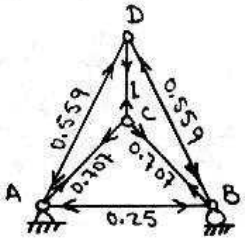
۸-۶۷ در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، اگر دمای عضو AB به اندازهٔ ۷۰°C افزایش یابد، نیروهای داخلی کلیهٔ اعضای خرپا را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکلها (روش نیرو) تعیین کنید.



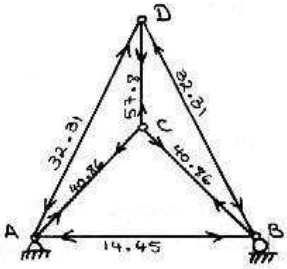
شکل ۸-۶۷



خرپای اولیه تحت اثر تغییر دما در عضو AB



خرپای اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو DC، (u_{DC})



نیروهای داخلی خرپای نامعین اصلی

$$\Delta_{CDO}=\sum \alpha(\Delta T)L u_{CD} \quad , \quad \delta_{CD,CD}=\frac{1}{EA}\sum u_{CD}^2 L$$

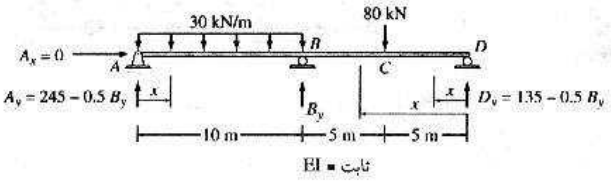
$$\Delta_{CDO}=(۶/۵\times ۱۰^{-۶})(۷۰)(۶)(-۰/۲۵)=-۶/۸۲۵\times ۱۰^{-۴}\ m=-۰/۶۸۲۵\ mm$$

$$\delta_{CD,CD}=\frac{1}{(۲۰۰\times ۱۰^{۶})(۰/۰۰۵)}\Big[(۱)^2(۳)+(-۰/۲۵)^2(۶)+۲(-۰/۵۵۹)^2(۶/۷۰۸)+ ۲(-۰/۷۰۷)^2(۴/۲۴۳)\Big]=۱/۱۸۱\times ۱۰^{-۵}\ m/kN=۰/۰۱۱۸۱\ mm/kN$$

$$\Delta_{CDO}+F_{CD}\delta_{CD,CD}=۰ \quad \Rightarrow \quad -۰/۶۸۲۵+۰/۰۱۱۸۱F_{CD}=۰$$

$$F_{CD}=۵۷/۸\ kN \qquad \blacktriangleright F_{CD}=۵۷/۸\ kN\ \ (T)$$

۸-۶۸ با استفاده از قضیهٔ حداقل انرژی کرنشی، واکنشهای تکیه‌گاهی تیر دو دهانهٔ نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



شکل ۸-۶۸

تیر مزبور یک درجه نامعین است. برای حل مسئله، واکنش تکیه‌گاهی B_y را به عنوان مجهول در نظر گرفته و به صورت بار خارجی آن را بر تیر اعمال می‌کنیم.

مقدار B_y را با پایا کردن تابع انرژی کرنشی تیر، نسبت به B_y محاسبه می‌کنیم.

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x=۰ \qquad \blacktriangleright A_x=۰$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \;:\; -A_y(۲۰)+۳۰(۱۰)(۵)-B_y(۱۰)+۸۰(۵)=0 \;\Rightarrow\; A_y = ۲۴۵-۰/۵B_y \qquad (I)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;:\; (۲۴۵-۰/۵B_y)-۳۰(۱۰)+B_y-۸۰+D_y=0 \;\Rightarrow\; D_y = ۱۳۵-۰/۵B_y \qquad (II)$$

برای تعیین معادلهٔ لنگر خمشی، تیر را به سه قسمت AB ، BC و CD تقسیم کرده و معادلهٔ لنگر خمشی مربوط به آن قسمت را به دست می‌آوریم.

قطعه	محور مختصات x		M	$\frac{\partial M}{\partial B_y}$
	مبدأ	بازهٔ قطعه (m)		
AB	A	۰-۱۰	$(۲۴۵-۰/۵B_y)x-۱۵x^۲$	$-۰/۵x$
DC	D	۰-۵	$(۱۳۵-۰/۵B_y)x$	$-۰/۵x$
CB	D	۵-۱۰	$(۱۳۵-۰/۵B_y)x-۸۰(x-۵)$	$-۰/۵x$

$$U=\int_0^L \frac{M^۲}{۲EI}dx \;,\; \frac{\partial U}{\partial B_y}=0 \;\Rightarrow\; \int_0^L \left[\frac{\partial M}{\partial B_y}\right]\frac{M}{EI}=0$$

$$\int_0^L \left[\frac{\partial M}{\partial B_y}\right]\left[\frac{M}{EI}\right]dx =$$

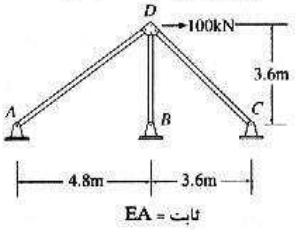
$$\frac{۱}{EI}\left[\int_0^{۱۰}(-۰/۵x)(۲۴۵x-۰/۵B_yx-۱۵x^۲)dx\right.$$

$$+\int_0^{۵}(-۰/۵x)(۱۳۵x-۰/۵B_yx)dx$$

$$\left.+\int_۵^{۱۰}(-۰/۵x)(۵۵x-۰/۵B_yx+۴۰۰)dx\right]=0 \;\Rightarrow\; -۴۰۴۱۶/۶۶۷+۱۶۶/۶۶۷B_y=0 \qquad \blacktriangleright B_y = ۲۴۲/۵ \;\; kN\uparrow$$

با جایگزینی مقدار B_y در روابط (I) و (II) واکنشهای تکیه‌گاهی A_y و D_y محاسبه می‌شوند. $\blacktriangleright A_y = ۱۲۳/۷۵ \;\; kN\uparrow$ ، $\blacktriangleright D_y = ۱۳/۷۵ \;\; kN\uparrow$

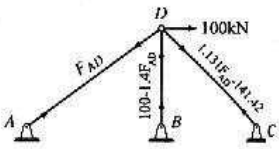
۸-۶۹ نیروی داخلی هر یک از اعضای خرپای نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از قضیهٔ حداقل انرژی کرنشی محاسبه کنید.



شکل ۸-۶۹

خرپای مزبور یک درجه نامعین است. برای تحلیل خرپا، نیروی داخلی عضو AD را به عنوان مجهول در نظر گرفته و نیروی داخلی سایر اعضا را بر حسب F_{AD} و بار خارجی اعمال شده به دست می‌آوریم.

مقدار F_{AD} را با پایا کردن تابع انرژی کرنشی خرپا، نسبت به F_{AD} محاسبه می‌کنیم.



عضو	L (m)	F	$\frac{\partial F}{\partial F_{AD}}$	$(\frac{\partial F}{\partial F_{AD}})$ FL	F (kN)
AD	۶	F_{AD}	۱	$۶F_{AD}$	۶۷/۳۷
BD	۳/۶	$۱۰۰-۱/۴F_{AD}$	-۱/۴	$-۵۰۴+۷/۰۵۶F_{AD}$	۵/۶۸
CD	۵/۰۹۱	$-۱۴۱/۴۲+۱/۱۳۱F_{AD}$	۱/۱۳۱	$-۸۱۴/۲۸+۶/۵۱۲F_{AD}$	-۶۵/۲۲
			Σ	$-۱۳۱۸/۲۸+۱۹/۵۶۸F_{AD}$	

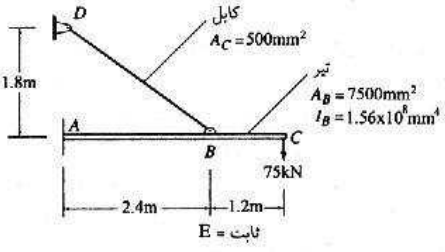
$$U=\sum \frac{F^۲L}{۲AE}$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_{AD}}=0 \;\Rightarrow\; \frac{۱}{AE}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial F_{AD}}\right]FL=0$$

$$-۱۳۱۸/۲۸+۱۹/۵۶۸F_{AD}=0$$

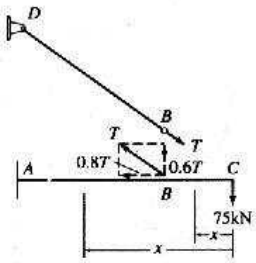
$$\blacktriangleright F_{AD}=۶۷/۳۷ \;\; kN \;\; (T)$$

۸-۷۰ با استفاده از قضیهٔ حداقل انرژی کرنشی، سازهٔ نشان داده شده در شکل زیر را تحلیل کنید.



شکل ۸-۷۰

سازهٔ نشان داده شده یک درجه نامعین است. نیروی کششی (T) کابل را به عنوان مجهول و به صورت بار خارجی بر تیر اعمال کرده و انرژی کرنشی کل سازه (U) را به دست می‌آوریم. با پایا کردن U نسبت به T، مقدار نیروی کششی (T) کابل به دست می‌آید.



$$U=\sum\frac{F^2L}{2AE}+\sum\int\frac{M^2}{2EI}dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial T}=0 \Rightarrow \sum\left[\frac{\partial F}{\partial T}\right]\frac{FL}{AE}+\sum\int\left[\frac{\partial M}{\partial T}\right]\frac{M}{EI}dx=0$$

$$\frac{1}{E}\left[\frac{(-0/8)(-0/8T)(2/4)}{(7/5\times10^{-3})}+\frac{(1)(T)(3)}{(5\times10^{-4})}+\int_{1/2}^{3/6}\frac{0/6(x-1/2)(-7.5x+0/6Tx-0/72T)dx}{1/56\times10^{-4}}\right]=0$$

قطعه (عضو)	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M	F	$\frac{\partial M}{\partial T}$	$\frac{\partial F}{\partial T}$
CB	C	۰-۱/۲	$-7.5x$	۰	۰	۰
BA	C	۱/۲-۳/۶	$-7.5x+0/6T(x-1/2)$	$-0/8T$	$0/6(x-1/2)$	$-0/8$
BD	-	-	۰	T	۰	۱

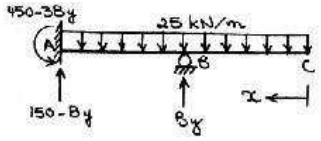
$$\blacktriangleright T=138/14 \quad kN$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \;:\; A_y+0/6(138/14)-75=0 \Rightarrow A_y=-7/88 \quad kN \qquad \blacktriangleright \vec{A}_y=7/88 \quad kN\downarrow$$

$$+\circlearrowleft\sum M_A=0 \;:\; M_A+0/6(138/14)(2/4)-75(3/6)=0 \Rightarrow M_A=71/08 \quad kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A=71/08 \quad kN.m\circlearrowleft$$

۸-۷۱ مسئلهٔ ۸-۲۵ را با استفاده از قضیهٔ انرژی کرنشی حداقل مجدداً حل کنید.

واکنش تکیه‌گاهی B_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و آن را به صورت بار خارجی بر تیر اعمال می‌کنیم.



$$\frac{\partial U}{\partial B_y}=0 \Rightarrow \sum\int\left[\frac{\partial M}{\partial B_y}\right]\frac{M}{EI}dx=0$$

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M	$\frac{\partial M}{\partial B_y}$
CB	C	۰-۳	$-12/5x^2$	۰
BA	C	۳-۶	$-12/5x^2+B_y(x-3)$	x-۳

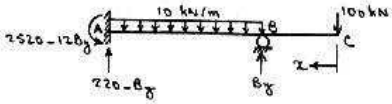
$$\frac{1}{EI}\int_3^6(x-3)\left[-12/5x^2+B_y(x-3)\right]dx=0$$

$$-1147/375+9B_y=0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y=159/375 \quad kN\uparrow$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A=28/125 \quad kN.m\circlearrowleft \;,\; \blacktriangleright \vec{A}_y=9/375 \quad kN\downarrow$$

۸-۷۲ مسئلهٔ ۸-۲۶ را با استفاده از قضیهٔ انرژی کرنشی حداقل مجدداً حل کنید.

واکنش تکیه‌گاهی B_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و آن را به صورت بار خارجی بر تیر اعمال می‌کنیم.



$$\frac{\partial U}{\partial B_y}=0 \Rightarrow \sum\int\left[\frac{\partial M}{\partial B_y}\right]\frac{M}{EI}dx=0$$

قطعه	محور مختصات x: مبدأ	محور مختصات x: بازهٔ قطعه (m)	M	$\frac{\partial M}{\partial B_y}$
CB	C	۰-۶	$-100x$	۰
BA	C	۶-۱۸	$-100x-5(x-6)^2+B_y(x-6)$	x-۶

$$\frac{1}{EI}\int_6^{18}(x-6)\left[-100x-5(x-6)^2+B_y(x-6)\right]dx=0$$

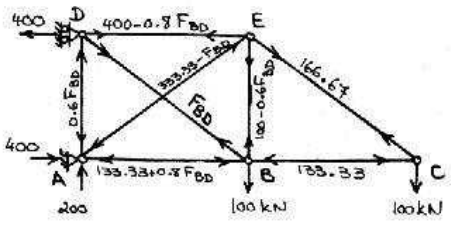
$$-126720+576B_y=0 \qquad \blacktriangleright \vec{B}_y=220 \quad kN\uparrow$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A=120 \quad kN.m\circlearrowleft \;,\; \blacktriangleright \vec{A}_y=0$$

۸-۷۳ مسئلهٔ ۸-۳۹ را با استفاده از قضیهٔ انرژی کرنشی حداقل مجدداً حل کنید.

خرپای مورد نظر یک درجه نامعین داخلی است. نیروی داخلی عضو BD را به عنوان مجهول در نظر گرفته و نیروی داخلی سایر اعضای خرپا را بر حسب F_{BD} و بارهای خارجی اعمال شده به دست می‌آوریم.

مقدار F_{BD} را با پایا کردن تابع انرژی کرنشی خرپا، نسبت به F_{BD} محاسبه می‌کنیم.



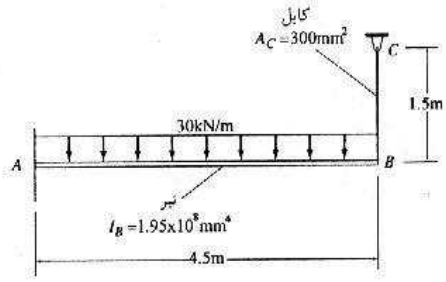
$$U=\sum\frac{F^2L}{2AE} \;,\; \frac{\partial U}{\partial F_{BD}}=0 \Rightarrow \frac{1}{E}\sum\left[\frac{\partial F}{\partial F_{BD}}\right]\frac{FL}{A}=0$$

$$-۷۹۵/۷۳ + ۵/۱۲F_{BD} = ۰$$

$$\blacktriangleright F_{BD} = ۱۵۵/۴۲ \quad kN \quad (T)$$

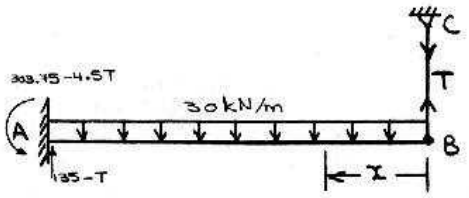
عضو	L (mm)	A (mm^2)	F	$\frac{\partial F}{\partial F_{BD}}$	$\frac{\partial F}{\partial F_{BD}}(\frac{FL}{A})$	F (kN)
AB	۴۸۰۰	۵۰۰۰	$-۱۳۳/۳۳ - ۰/۸F_{BD}$	$-۰/۸$	$۱۰۲/۴ + ۰/۶۱۴۴F_{BD}$	-۲۵۷/۶۷
BC	۴۸۰۰	۵۰۰۰	$-۱۳۳/۳۳$	۰	۰	-۱۳۳/۳۳
DE	۴۸۰۰	۵۰۰۰	$۴۰۰ - ۰/۸F_{BD}$	$-۰/۸$	$-۳۰۷/۲ + ۰/۶۱۴۴F_{BD}$	۲۷۵/۶۶
AD	۳۶۰۰	۳۷۵۰	$-۰/۶F_{BD}$	$-۰/۶$	$۰/۳۴۵۶F_{BD}$	-۹۳/۲۵
BE	۳۶۰۰	۳۷۵۰	$۱۰۰ - ۰/۶F_{BD}$	$-۰/۶$	$-۵۷/۶ + ۰/۳۴۵۶F_{BD}$	۶/۷۵
AE	۶۰۰۰	۳۷۵۰	$-۳۳۳/۳۳ + F_{BD}$	۱	$-۵۳۳/۳۳ + ۱/۶F_{BD}$	-۱۷۷/۹۱
CE	۶۰۰۰	۵۰۰۰	۱۶۶/۶۷	۰	۰	۱۶۶/۶۷
BD	۶۰۰۰	۳۷۵۰	F_{BD}	۱	$۱/۶F_{BD}$	۱۵۵/۴۲
				Σ	$-۷۹۵/۷۳ + ۵/۱۲F_{BD}$	

۸-۷۴ سازهٔ نشان داده شده در شکل را با استفاده از قضیهٔ حداقل انرژی کرنشی تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



E = ثابت

شکل ۸-۷۴



نیروی کششی (T) کابل را به عنوان مجهول در نظر گرفته، آن را به صورت بار خارجی بر تیر اعمال می‌کنیم. با پایا کردن تابع انرژی کرنشی کل (U) نسبت به (T)، مقدار نیروی کششی (T) کابل محاسبه خواهد شد.

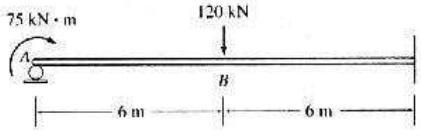
$$U = \sum \frac{F^2 L}{2AE} + \sum \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial T} = \sum \left[\frac{\partial F}{\partial T}\right] \frac{FL}{AE} + \sum \int \left[\frac{\partial M}{\partial T}\right] \frac{M}{EI} dx = ۰$$

کابل BC: $F = T \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial T} = ۱$ ، تیر AB: $M = Tx - ۱۵x^2 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial T} = x$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{E}\left[\frac{(T)(۱/۵)}{۳\times ۱۰^{-۴}} + \frac{۱}{۱/۹۵\times ۱۰^{-۲}} \int_۰^{۴/۵} (x)(Tx - ۱۵x^2) dx\right] = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۱۶/۰۷۷T - ۷۸۸/۵۸ = ۰$$

$$\blacktriangleright T = ۴۹/۰۵ \quad kN \quad (T)$$

۸-۷۵ تیر نشان داده شده را با روش سازگاری تغییر شکلها تحلیل کنید. (واکنش تکیه‌گاهی R_A را به عنوان مجهول در نظر بگیرید.)



EI = ثابت

برای محاسبهٔ تغییر شکلها از روابط ارائه شده در پیوست (ب) کتاب استفاده می‌کنیم.

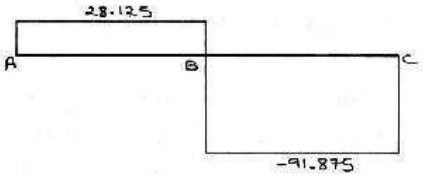
$$\Delta_{AO} = -\left[\frac{۱۲۰(۶)^3}{۳EI} + \frac{۱۲۰(۶)^2}{۲EI}(۶) - \frac{۷۵(۱۲)^2}{۲EI}\right] = -\frac{۱۶۲۰۰}{EI}$$

$$\delta_{AA} = \frac{۱(۱۲)^3}{۳EI} = \frac{۵۷۶}{EI}$$

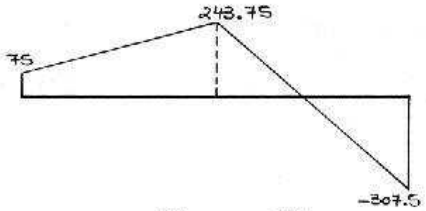
شکل ۸-۷۵

$$\Delta_{AO}+\delta_{AA}R_A=0 \Rightarrow -\frac{۱۶۲۰۰}{EI}+R_A\left[\frac{۵۷۶}{EI}\right]=0 \quad \blacktriangleright \vec{R}_A=۲۸/۱۲۵\ kN\uparrow\ ,\ \blacktriangleright \vec{R}_C=۹۱/۸۷۵\ kN\uparrow$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A=۳۰۷/۵\ kNm\ )$$



نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

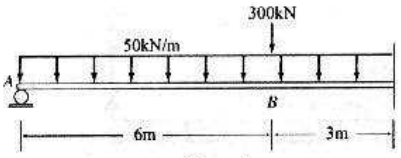
۸-۷۶ تیر مسئلهٔ قبل را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکلها مجدداً حل کنید. (واکنش تکیه‌گاهی M_C را به عنوان مجهول در نظر بگیرید.)

برای محاسبهٔ تغییر شکلها از روابط ارائه شده در پیوست (ب) استفاده می‌کنیم.

$$\theta_{CO}=\frac{۷۲(۱۲)}{۶EI}+\frac{۱۲۰(۱۲)^۲}{۱۶EI}=\frac{۱۲۳۰}{EI}$$

$$\theta_{CC}=-\frac{۱(۱۲)}{۳EI}=-\frac{۴}{EI}\ ,\ \theta_{CO}+M_C\theta_{CC}=0 \Rightarrow \frac{۱۲۳۰}{EI}+M_C\left[-\frac{۴}{EI}\right]=0 \quad \blacktriangleright \vec{M}_C=۳۰۷/۵\ kNm\ )$$

۸-۷۷ تیر نشان داده شده را با روش سازگاری تغییر شکلها تحلیل کنید. (واکنش تکیه‌گاهی R_A را به عنوان مجهول اضافی در نظر بگیرید.)



EI = ثابت

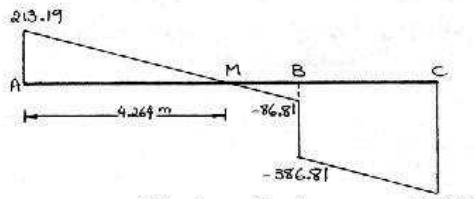
شکل ۸-۷۷

$$\Delta_{AO}=-\left[\frac{۵۰(۹)^۴}{۸EI}+\frac{۳۰۰(۳)^۳(۲۷-۳)}{۶EI}\right]=-\frac{۵۱۸۰۶/۲۵}{EI}$$

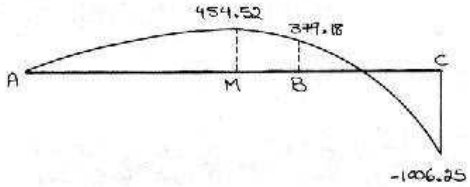
$$\delta_{AA}=\frac{۱(۹)^۳}{۳EI}=\frac{۲۴۳}{EI}\ ,\ \Delta_{AO}+\delta_{AA}R_A=0$$

$$-\frac{۵۱۸۰۶/۲۵}{EI}+R_A\left[\frac{۲۴۳}{EI}\right]=0 \quad \blacktriangleright \vec{R}_A=۲۱۳/۱۹\ kN\uparrow$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_B=۱۰۰۶/۲۵\ kNm\ )$$



نمودار نیروی برشی ، kN



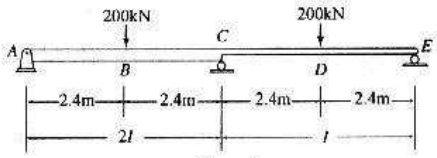
نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۸-۷۸ تیر نشان داده شده در مسئلهٔ قبل را مجدداً با روش سازگاری تغییر شکلها تحلیل کنید. (واکنش تکیه‌گاهی M_C را به عنوان مجهول در نظر بگیرید.)

$$\theta_{CO}=\frac{۳۰۰(۶)}{۶EI(۹)}\left[۹^۲-۶^۲\right]+\frac{۵۰(۹)^۴}{۲۴EI}=\frac{۳۰۱۸/۷۵}{EI}\ ,\ \theta_{CC}=-\frac{۱(۹)}{۳EI}=-\frac{۳}{EI}$$

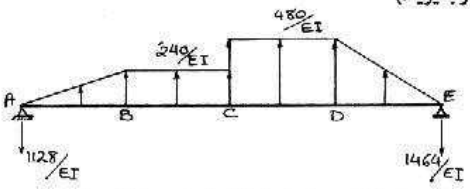
$$\theta_{CO}+M_C\theta_{CC}=0 \Rightarrow \frac{۳۰۱۸/۷۵}{EI}+M_C\left[-\frac{۳}{EI}\right]=0 \quad \blacktriangleright \vec{M}_C=۱۰۰۶/۲۵\ kNm\ )$$

۸-۷۹ تیر نشان داده شده در شکل را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکلها تحلیل کنید. (واکنش تکیه‌گاهی R_C را به عنوان مجهول اضافی در نظر بگیرید.)



E = ثابت

شکل ۸-۷۹

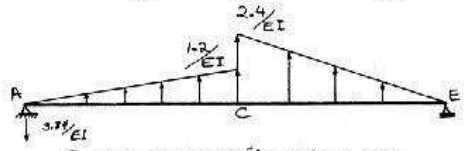


تیر فرضی متناظر با سازهٔ آزاد شده تحت بارگذاری اصلی

در تیر فرضی: $+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \quad : \quad A_y(9/6) - \frac{1}{EI}\left[\frac{(240)(2/4)}{2}(8) + \frac{(480)(2/4)}{2}(1/6) + (240)(4/8)^2 + (240)(2/4)(3/6)\right] = 0$

$$\vec{A}_y = \frac{112.8}{EI} \downarrow$$

$$\Delta_{CO} = M_C = -\frac{112.8}{EI}(4/8) + \frac{240}{EI}(1/2)(3/2) + \frac{240}{EI}(2/4)(1/2) = -\frac{3801/6}{EI} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{CO} = -\frac{3801/6}{EI}$$



تیر فرضی متناظر با سازهٔ آزاد شده تحت بار واحد در C

در تیر فرضی: $+ \sum M_E = 0 \quad :$

$$A_y(9/6) - \frac{1}{EI}\left[\frac{(2/4)(4/8)}{2}(3/2) + \frac{(1/2)(4/8)}{2}(6/4)\right] = 0$$

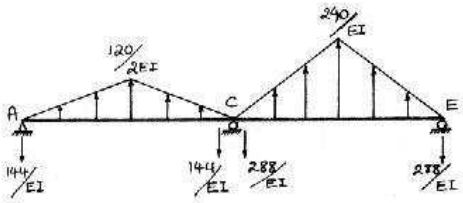
$$\vec{A}_y = \frac{3/84}{EI} \downarrow$$

$$\delta_{CC} = M_C = -\frac{3/84}{EI}(4/8) + \frac{1/2}{EI}(2/4)(1/6) = -\frac{13/824}{EI}$$

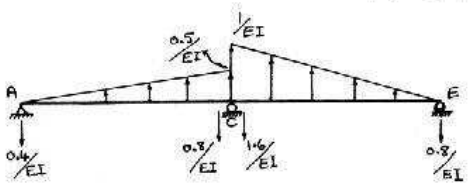
$$\delta_{CC} = -\frac{13/824}{EI}$$

$$\Delta_{CO} + \delta_{CC} R_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3801/6}{EI} + R_C\left[-\frac{13/825}{EI}\right] = 0 \quad \blacktriangleright \vec{R}_C = 275 \ kN \uparrow \ , \ \blacktriangleright \vec{R}_A = \vec{R}_E = 62/5 \ kN \uparrow$$

۸-۸۰ تیر نشان داده شده در مسئلهٔ قبل را با روش سازگاری تغییر شکلها مجدداً حل کنید. (لنگر خمشی در تکیه‌گاه میانی را به عنوان مجهول در نظر بگیرید.)



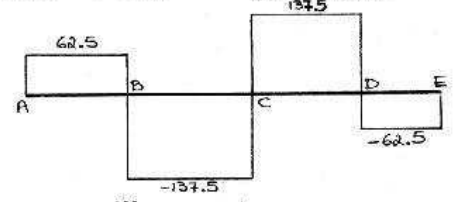
تیر فرضی متناظر با سازهٔ آزاد شده تحت بارگذاری اصلی



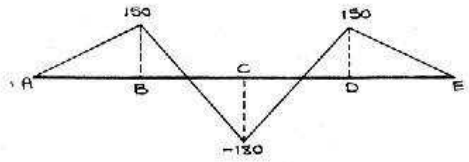
تیر فرضی متناظر با سازهٔ آزاد شده تحت لنگر واحد در C

$$\theta_{CO\,rel.} = \theta_{CL} + \theta_{CR} = \frac{144}{EI} + \frac{288}{EI} = \frac{432}{EI} \quad , \quad \theta_{CC\,rel.} = \theta_{CCL} + \theta_{CCR} = \frac{0/8}{EI} + \frac{1/6}{EI} = \frac{2/4}{EI}$$

$$\theta_{CO\,rel.} + M_C \theta_{CC\,rel.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{432}{EI} + M_C\left[\frac{2/4}{EI}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_C = -180 \ \circlearrowright \quad \blacktriangleright \vec{R}_A = \vec{R}_E = 62/5 \ \ kN \uparrow$$



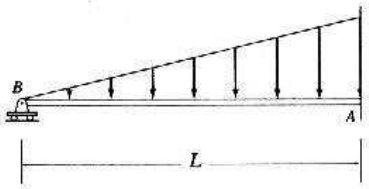
نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی، kN.m

برای سازه‌های نشان داده شده در مسایل ۸-۸۱ تا ۸-۸۴ نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید. (از روش سازگاری تغییر شکلها برای تحلیل سازه استفاده کنید.)

۸-۸۱



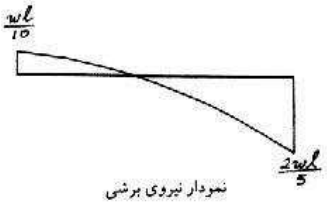
ثابت = EI

شکل ۸-۸۱

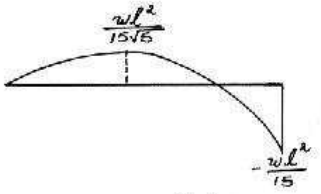
واکنش تکیه‌گاهی R_B را به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته و از روابط ارائه شده در پیوست (ب) برای محاسبهٔ تغییر شکلها استفاده می‌کنیم.

$$\Delta_{BO} = -\frac{wL^4}{30EI} \quad , \quad \delta_{BB} = \frac{1(L)^3}{3EI} = \frac{L^3}{3EI}$$

$$\Delta_{BO} + \delta_{BB} R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{wl^4}{30EI} + R_B\left[\frac{L^3}{3EI}\right] = 0 \qquad \blacktriangleright \vec{R}_B = \frac{wL}{10}\uparrow$$

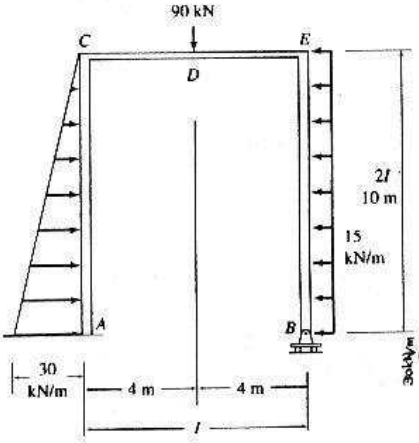


نمودار نیروی برشی



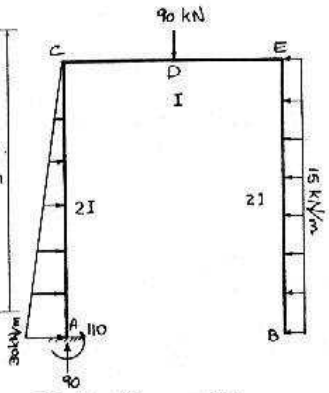
نمودار لنگر خمشی

۸-۸۲

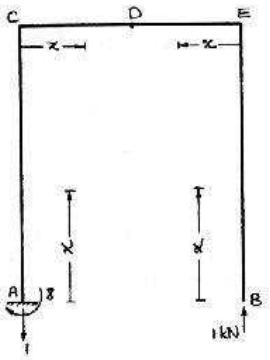


ثابت = E

شکل ۸-۸۲



سازهٔ آزاد شده تحت بارگذاری اصلی، M



سازهٔ آزاد شده تحت بار واحد در B، (M_{v1})

قطعه	بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_{v1} (kN.m)
AC	۰-۱۰	$۳۹۰-۱۵۰x-\frac{(۱۰-x)^۲}{۲}$	۸
CD	۰-۴	$۹۰x-۱۱۱۰$	۸-x
ED	۰-۴	-۷۵۰	x
BE	۰-۱۰	$۷/۵x^۲$	۰

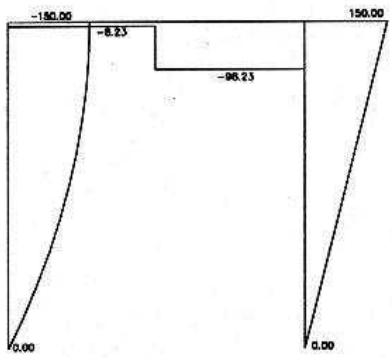
$$\Delta_{BO} = \sum\int \frac{M M_{v1}}{EI} dx = -\frac{۴۸۲۰۰}{EI}$$

$$\delta_{BB} = \sum\int \frac{M_{v1}^2}{EI} dx = \frac{۴۹۰/۶۶۶}{EI}$$

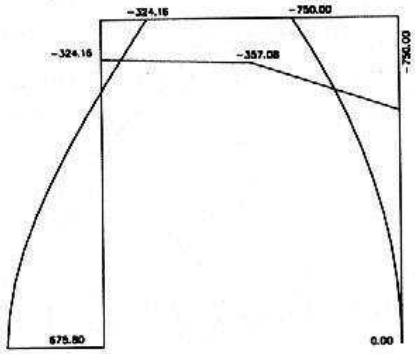
$$\Delta_{BO} + \delta_{BB} R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{۴۸۲۰۰}{EI} + R_B\left[\frac{۴۹۰/۶۶۶}{EI}\right] = 0$$

$$\blacktriangleright \vec{R}_B = ۹۸/۲۳ \ \ kN\uparrow$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_A = ۶۷۵/۸ \ \ kN.m\circlearrowright, \quad \blacktriangleright \vec{R}_A = ۸/۲۳ \ \ kN\downarrow$$

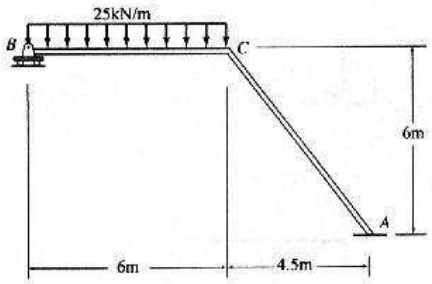


نمودار نیروی برشی ، kN



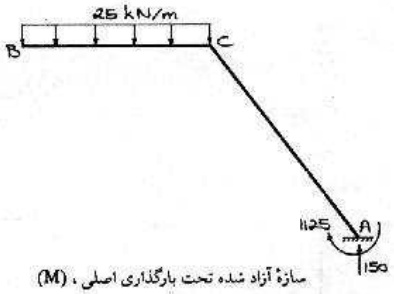
نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۸۳-۸



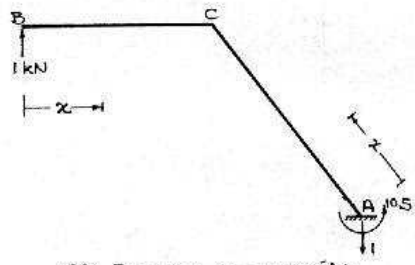
ثابت = EI

شکل ۸-۸۳



سازهٔ آزاد شده تحت بارگذاری اصلی ، (M)

عضو	بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_v (kN.m)
AC	۰-۷/۵	$-۱۱۲۵+۹۰x$	$۱۰/۵-۰/۶x$
BC	۰-۶	$-۱۲/۵x^۲$	x



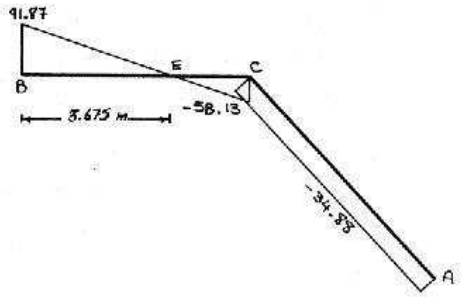
سازهٔ آزاد شده، تحت اثر بار واحد در B ، (M_v)

$$\Delta_{BO}=\sum\int\frac{MM_v}{EI}dx=-\frac{۵۴۶۷۴}{EI}\quad,\quad \delta_{BB}=\sum\int\frac{M_v^۲}{EI}dx=\frac{۵۹۵/۱۲۲}{EI}$$

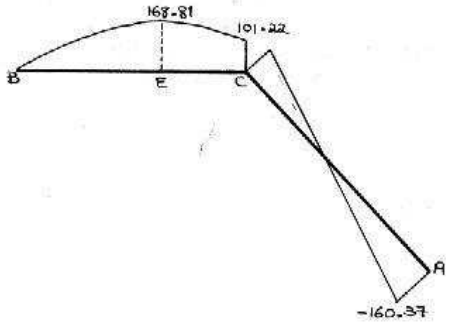
$$\Delta_{BO}+\delta_{BB}R_B=۰\ \Rightarrow\ -\frac{۵۴۶۷۴}{EI}+R_B\left[\frac{۵۹۵/۱۲۲}{EI}\right]=۰$$

$$\blacktriangleright \vec{R_B}=۹۱/۸۷\ \ kN\uparrow\ ,\ \ R_A=۵۸/۱۳\ \ kN\uparrow$$

$$\blacktriangleright \vec{M_A}=۱۶۰/۳۷\ \ kN.m\ \ )$$

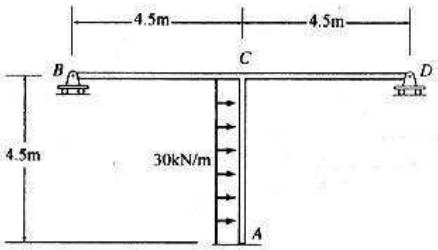


نمودار نیروی برشی ، kN

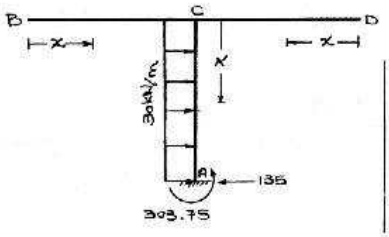


نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۸۴-۸

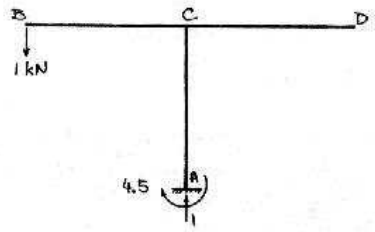


ثابت = EI

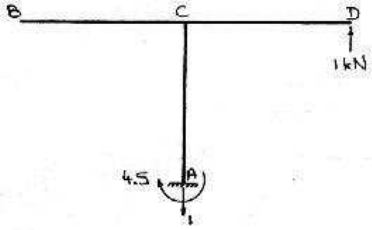


سازهٔ آزاد شده تحت بارگذاری اصلی

شکل ۸۴-۸



سازهٔ آزاد شده تحت اثر بار واحد در B ، (M_{v1})



سازهٔ آزاد شده تحت اثر بار واحد در D ، (M_{v2})

عضو	بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_{v1} (kN.m)	M_{v2} (kN.m)
BC	۰-۴/۵	۰	-x	۰
DC	۰-۴/۵	۰	۰	x
CA	۰-۴/۵	$-۱۵x^{۲}$	۴/۵	۴/۵

$$\Delta_{BO}=\sum\int\frac{MM_{v1}}{EI}dx=-\frac{۲۰۵۰/۳۱}{EI}$$

$$\delta_{BB}=\sum\int\frac{M_{v1}^{۲}}{EI}dx=\frac{۱۲۱/۵}{EI}$$

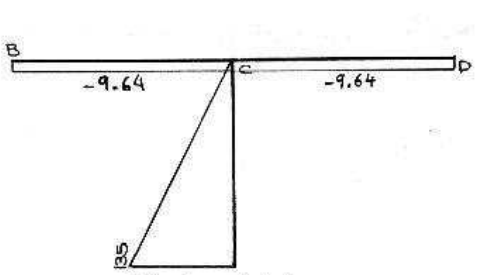
$$\Delta_{DO}=\sum\int\frac{MM_{v2}}{EI}dx=-\frac{۲۰۵۰/۳۱}{EI}$$

$$\delta_{DD}=\sum\int\frac{M_{v2}^{۲}}{EI}dx=\frac{۱۲۱/۵}{EI}\quad,\quad\delta_{DB}=\delta_{BD}=\sum\int\frac{M_{v1}M_{v2}}{EI}dx=\frac{۹۱/۱۲۵}{EI}$$

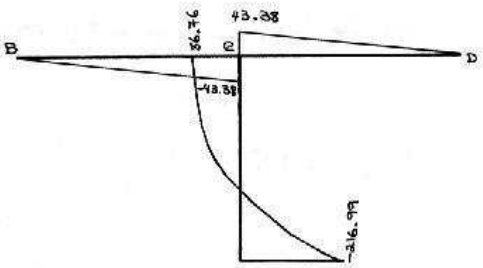
$$\Delta_{BO}+\delta_{BB}R_B+\delta_{BD}R_D=۰\ \Rightarrow\ ۱۲۱/۵R_B+۹۱/۱۲۵R_D=۲۰۵۰/۳۱$$

$$\Delta_{DO}+\delta_{DB}R_B+\delta_{DD}R_D=۰\ \Rightarrow\ ۹۱/۱۲۵R_B+۱۲۱/۵R_D=۲۰۵۰/۳۱$$

$$\blacktriangleright\vec{R_B}=۹/۶۴\ \ kN\downarrow\ ,\ \blacktriangleright\vec{R_D}=۹/۶۴\ \ kN\uparrow$$

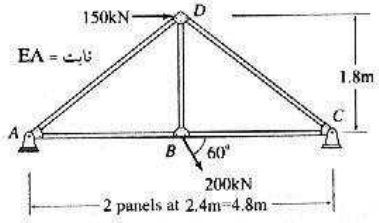


نمودار نیروی برشی ، kN

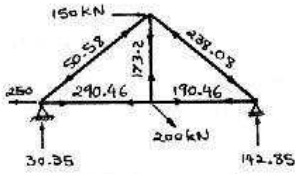


نمودار لنگر خمشی ، kN.m

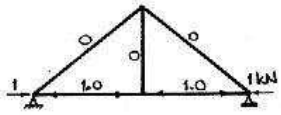
۸-۸۵ خرپای نشان داده شده را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکلها تحلیل کرده و نیروی داخلی کلیهٔ اعضای آن را به دست آورید.



شکل ۸-۸۵

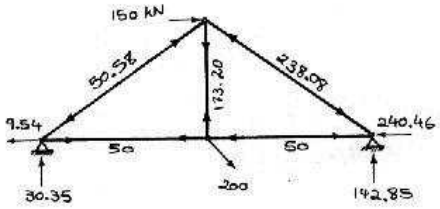


خرپای آزاد شده تحت بارگذاری اصلی ، (F)



خرپای آزاد شده تحت بار واحد در C ، (F_v)

$$\Delta_{CO}=\sum\frac{F_v FL}{AE}=\frac{1}{EA}\left[(-1)(190/46)+(-1)(290/46)\right]=-\frac{480/92}{EA}\quad,\quad \delta_{CC}=\sum\frac{F_v^2 L}{AE}=\frac{1}{EA}\left[(-1)^2+(-1)^2\right]=\frac{2}{EA}$$



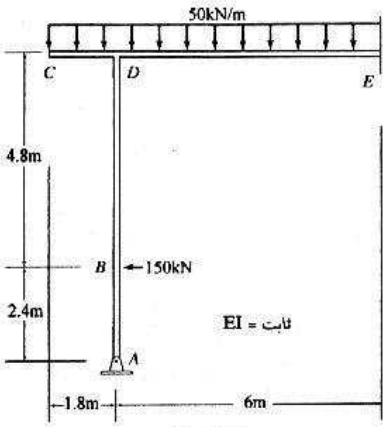
$$\Delta_{CO}+\delta_{CC}C_x=0 \Rightarrow -\frac{480/92}{EA}+C_x\left(\frac{2}{EA}\right)=0$$

$$\blacktriangleright \vec{C_y}=142/85\ kN\uparrow\ ,\ \blacktriangleright \vec{C_x}=240/46\ kN\leftarrow$$

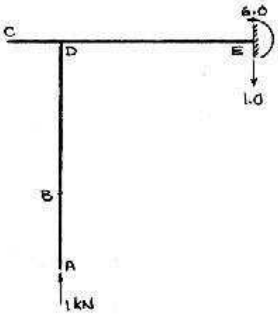
$$\blacktriangleright \vec{A_y}=30/35\ kN\uparrow\ ,\ \blacktriangleright \vec{A_x}=9/54\ kN\leftarrow$$

واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضا

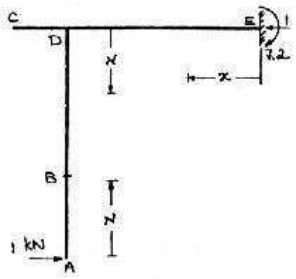
۸-۸۶ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با روش سازگاری تغییر شکلها تحلیل کرده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی قاب را ترسیم کنید.



شکل ۸-۸۶

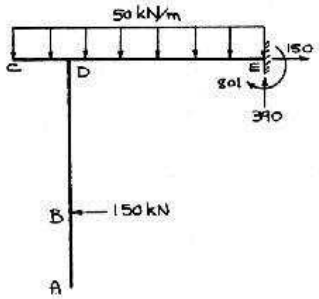


سازهٔ آزاد شده تحت اثر بار واحد قائم در A



سازهٔ آزاد شده تحت اثر بار واحد افقی در A

عضو	بازهٔ قطعه (m)	M (kN.m)	M_{v1} (kN.m)	M_{v2} (kN.m)
AB	۰-۲/۴	۰	۰	-x
DB	۰-۴/۸	۷۲۰-۱۵۰x	۰	x-۷/۲
ED	۰-۶	$-۲۵x^۲+۳۹۰x-۸۰۱$	۶-x	-۷/۲



سازهٔ آزاد شده تحت بارگذاری اصلی

$$\Delta_{AV}=\sum\int\frac{MM_{v1}}{EI}dx=-\frac{۳۰۷۸}{EI}\quad,\quad \Delta_{AH}=\sum\int\frac{MM_{v2}}{EI}dx=-\frac{۱۲۶۵۷/۶}{EI}$$

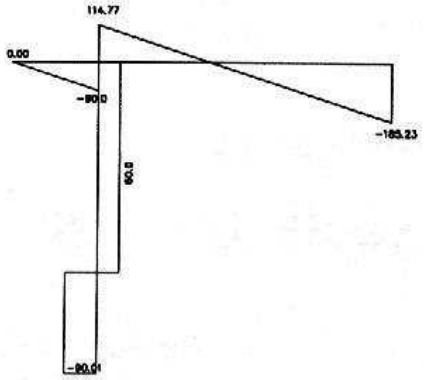
$$\delta_{AHAH}=\sum\int\frac{M_{v2}^۲}{EI}dx=\frac{۴۳۵/۴۵۶}{EI}\quad,\quad \delta_{AVAV}=\sum\int\frac{M_{v1}^۲}{EI}dx=\frac{۷۲}{EI}$$

$$\delta_{AHAH}=\delta_{AVAH}=\sum\int\frac{M_{v1}M_{v2}}{EI}dx=-\frac{۱۲۹/۶}{EI}$$

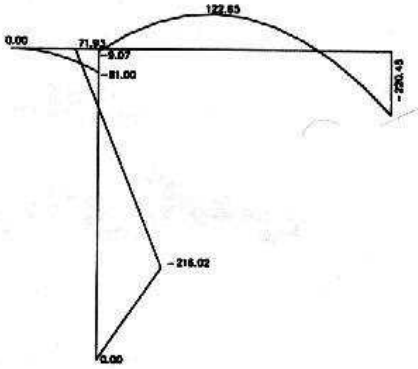
$$\Delta_{AH}+\delta_{AHAH}A_x+\delta_{AHAV}A_y=۰\ \Rightarrow\quad \Delta_{AV}+\delta_{AVAH}A_x+\delta_{AVAV}A_y=۰\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}۴۳۵/۴۵۶A_x-۱۲۹/۶A_y=۱۲۶۵۷/۶\\ -۱۲۹/۶A_x+۷۲A_y=۳۰۷۸\end{cases}$$

$$\blacktriangleright\vec{A}_x=۹۰/۰۱\ \ kN\rightarrow\ ,\ \blacktriangleright\vec{A}_y=۲۰۴/۷۷\ \ kN\uparrow\ ,\ \blacktriangleright\vec{E}_y=۱۸۵/۲۳\ \ kN\uparrow\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_E=۲۲۰/۴۵\ \ kN.m\ \curvearrowright$$

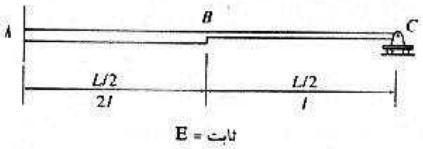


نمودار نیروی برشی ، kN



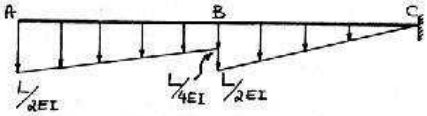
نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۸-۸۷ در تیر نشان داده شده واکنشهای تکیه‌گاهی را در حالتی به دست آورید که تکیه‌گاه C به اندازهٔ Δ نشست کرده است.



E = ثابت

شکل ۸-۸۷



تیر فرضی متناظر با تیر آزاد شده تحت اثر بار واحد در C

$$\delta_{CC} = M_C = \left[\left(\frac{L}{2EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{L}{3}\right) + \left(\frac{L}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{3L}{4}\right) + \left(\frac{L}{4EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{5L}{6}\right)\right] = \frac{3L^3}{16EI}$$

$$\delta_{CC} R_C = \Delta \;\Rightarrow\; R_C\left(\frac{3L^3}{16EI}\right) = \Delta \qquad \blacktriangleright \vec{R}_C = \frac{16EI\Delta}{L^3}\downarrow \;,\; \blacktriangleright \vec{R}_A = \frac{16EI\Delta}{L^3}\uparrow \;,\; \blacktriangleright \vec{M}_A = \frac{16EI\Delta}{L^2}\circlearrowleft$$

● توجه داریم که F.E.M ها با توجه به قرارداد علامت مورد استفاده می‌توانند «+» یا «−» باشند.

حالت کلی روابط: $M_{ab}=\frac{2EI}{l}\left(2\theta_a+\theta_b-3\psi_{ab}\right)+F.E.M_{ab}$ ، $M_{ba}=\frac{2EI}{l}\left(2\theta_b+\theta_a-3\psi_{ab}\right)+F.E.M_{ba}$

$$M_{ab}=\frac{3EI}{l}\theta_a-\frac{3EI}{l}\psi_{ab}+F.E.M_{ab}-\frac{1}{2}F.E.M_{ba}+\frac{M_{ba}}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{مفصلی باشد}]{\text{اگر انتهای b}} M_{ab}=\frac{3EI}{l}\theta_a-\frac{3EI}{l}\psi_{ab}+F.E.M_{ab}-\frac{1}{2}F.E.M_{ba}$$

در همین مرحله تغییر مکانهای پیش فرض $\theta_i=0$ و $\psi_{ij}=0$ را در معادلات شیب - افت اعضای مختلف جایگزین می‌کنیم.

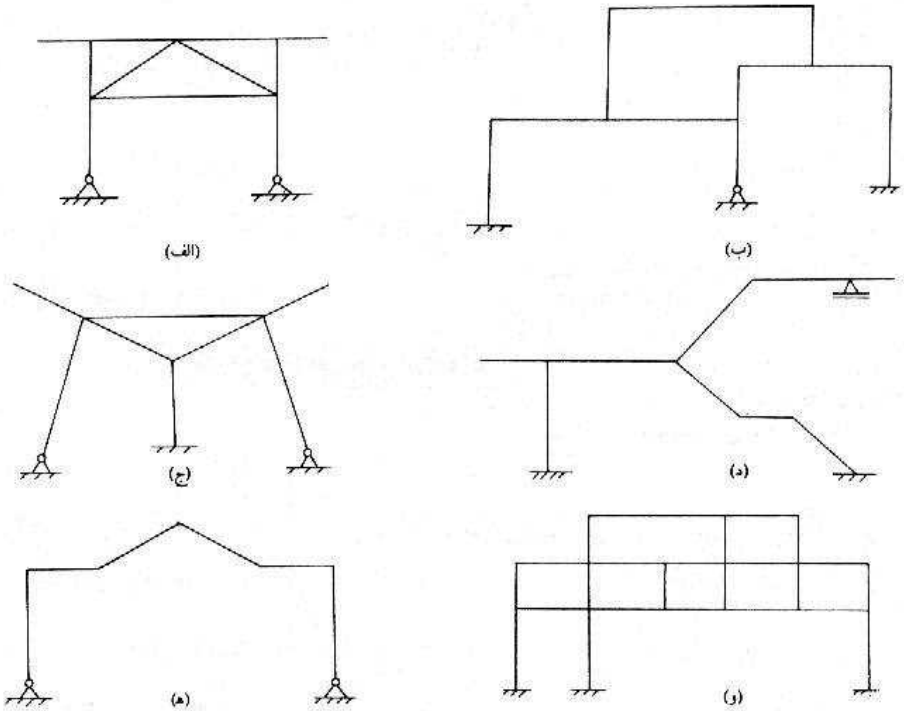
۵- در محل درجات آزادی دورانی سازه (گره‌ها) معادلهٔ تعادل لنگر را می‌نویسیم. (رابطهٔ تعادل لنگر خمشی در گره i ام $\Sigma M_{ij}=0$.)

۶- اگر در سازه درجهٔ آزادی انتقالی (ψ_{ij}) نیز وجود داشته باشد، به کمک روابط تعادل برش و لنگر خمشی در اعضای مختلف سازه، به تعداد درجات آزادی به معادلات تعادل جدید بر حسب لنگرهای خمشی می‌رسیم.

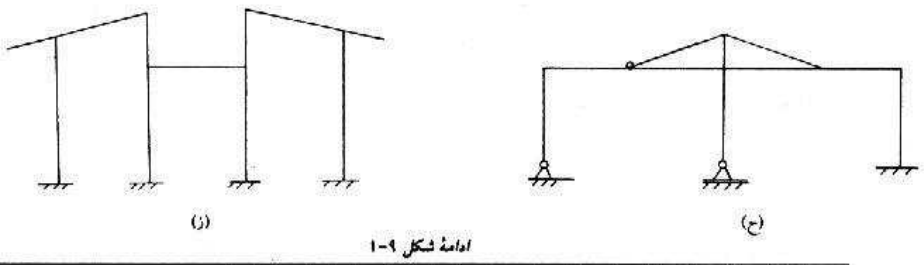
۷- دستگاه معادلات حاصل از مراحل (۵) و (۶) را حل کرده و دورانهای θ_i و تغییر مکانهای نسبی Δ_{ij} (ψ_{ij}) را به دست می‌آوریم. به این ترتیب با جایگزینی مقادیر θ_iها و ψ_{ij}ها در روابط شیب - افت اعضا، مقادیر لنگرهای خمشی در انتهای اعضا و به دنبال آن نیروهای برشی و محوری در گره‌های انتهایی تمامی اعضا به دست خواهد آمد.

● در نهایت برای کنترل نتایج حاصل می‌توان از معادلات تعادل برای کل سازه استفاده کرد.

۹-۱ درجات آزادی دورانی (θ_i) و درجات آزادی انتقالی (ψ_{ij}) را در سازه‌های نشان داده شده تعیین کنید.



شکل ۹-۱



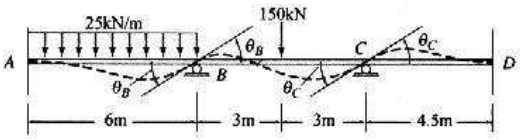
(ز) (ح)

ادامهٔ شکل ۹-۱

	(الف)	(ب)	(ج)	(د)	(ه)	(و)	(ز)	(ح)
درجات آزادی دورانی (θ_i)	۷	۹	۵	۶	۷	۱۵	۶	۹
درجات آزادی انتقالی (ψ_{ij})	۱	۵	۱	۴	۴	۶	۳	۳

۹-۲ تیر نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کرده نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.

ثابت = EI
E = ۲۰۰ GPa
I = ۱/۹۵×۱۰^{۸} mm^{۴}



شکل ۹-۲

تیر مزبور تنها دارای دو درجه آزادی دورانی (θ_B و θ_C) است.

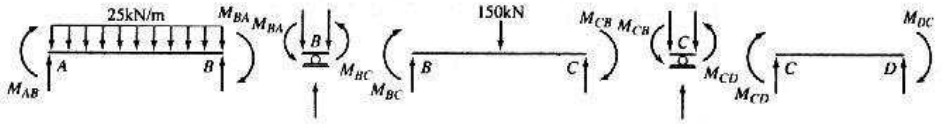
$$F.E.M_{AB} = -F.E.M_{BA} = -\frac{۲۵(۶)^{۲}}{۱۲}$$

$$F.E.M_{AB} = -۷۵ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{BC} = -F.E.M_{CB} = -\frac{۱۵۰(۶)}{۸}$$

$$F.E.M_{AB} = -۱۱۲/۵ \quad kN.m$$

$$\theta_A = \theta_D = ۰ \quad , \quad \psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = ۰$$



$$M_{AB} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_A + \theta_B - ۳\psi_{AB}\right] - ۷۵ = \frac{EI\theta_B}{۳} - ۷۵ \quad , \quad M_{BA} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{AB}\right] + F.E.M_{BA} = \frac{۲EI\theta_B}{۳} + ۷۵$$

$$M_{BC} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}\right] - ۱۱۲/۵ = \frac{۲EI}{۳}\theta_B + \frac{EI}{۳}\theta_C - ۱۱۲/۵$$

$$M_{CB} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_C + \theta_B - ۳\psi_{BC}\right] + ۱۱۲/۵ = \frac{۲EI}{۳}\theta_C + \frac{EI}{۳}\theta_B + ۱۱۲/۵$$

$$M_{CD} = \frac{۲EI}{۴/۵}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] + ۰ = \frac{۴EI}{۴/۵}\theta_C \quad , \quad M_{DC} = \frac{۲EI}{۴/۵}\left[۲\theta_D + \theta_C - ۳\psi_{CD}\right] + ۰ = \frac{۲EI}{۴/۵}\theta_C$$

$$+\circlearrowright \sum M^B = ۰ \; : \; M_{BA} + M_{BC} = ۰ \Rightarrow \frac{۲EI}{۳}\theta_B + ۷۵ + \frac{۲EI}{۳}\theta_B + \frac{EI}{۳}\theta_C - ۱۱۲/۵ = ۰ \Rightarrow ۴EI\theta_B + EI\theta_C = ۱۱۲/۵ \quad (I)$$

$$+\circlearrowright \sum M^C = ۰ \; : \; M_{CB} + M_{CD} = ۰ \Rightarrow \frac{۲EI}{۳}\theta_C + \frac{EI}{۳}\theta_B + ۱۱۲/۵ + \frac{۴EI}{۴/۵}\theta_C = ۰$$

$$۱/۵EI\theta_B + ۷EI\theta_C = -۵۰۶/۲۵ \quad (II)$$

از حل همزمان دستگاه معادلات (I) و (II) خواهیم داشت:

$$\theta_B = \frac{۴۸/۸۲}{EI} \quad , \quad \theta_C = -\frac{۸۲/۷۸}{EI}$$

$$M_{AB} = \frac{۴۸/۸۲}{۳} - ۷۵ = -۵۸/۷۲ \quad kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{AB} = ۵۸/۷۲ \quad kN.m \; \circlearrowright$$

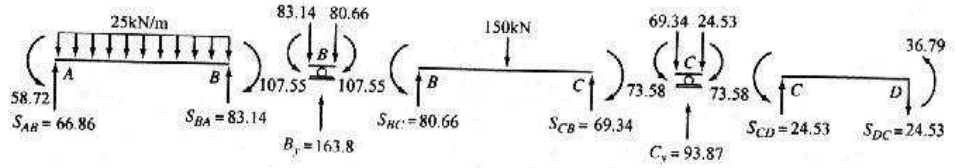
$$M_{BA} = \frac{۲(۴۸/۸۲)}{۳} + ۷۵ = ۱۰۷/۵۵ \quad kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۱۰۷/۵۵ \quad kN.m \; \circlearrowright$$

$$M_{BC}=\frac{۲(۴۸/۸۲)}{۳}+\frac{(-۸۲/۷۸)}{۳}-۱۱۲/۵=-۱۰۷/۵۵\ \ kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{BC}=۱۰۷/۵۵\ \ kN.m\ \big)$$

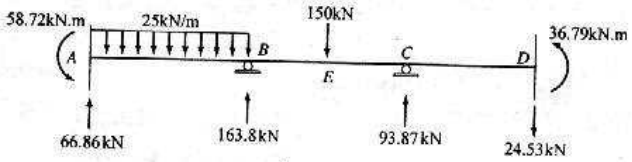
$$M_{CB}=\frac{۲(-۸۲/۷۸)}{۳}+\frac{۴۸/۸۲}{۳}+۱۱۲/۵=۷۳/۵۸\ \ kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{CB}=۷۳/۵۸\ \ kN.m\ \big)$$

$$M_{CD}=\frac{۴۰(-۸۲/۷۸)}{۴/۵}=-۷۳/۵۸\ \ kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{CD}=۷۳/۵۸\ \ kN.m\ \big)$$

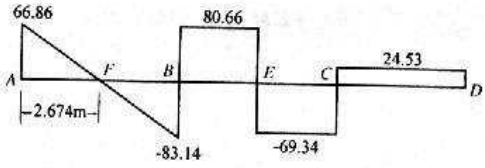
$$M_{DC}=\frac{۲(-۸۲/۷۸)}{۴/۵}=-۳۶/۷۹\ \ kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{DC}=۳۶/۷۹\ \ kN.m\ \big)$$



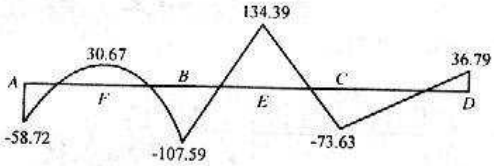
برشها و لنگرهای انتهایی اعضا



واکنشهای تکیه‌گاهی



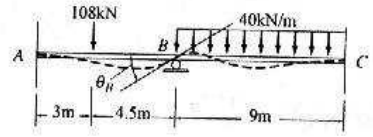
نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۹-۳ برای تیر دو دهانهٔ شکل زیر، واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کرده و نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی آن را ترسیم کنید.

تیر مورد نظر تنها دارای یک درجه آزادی دورانی (θ_B) است.



EI = ثابت

شکل ۹-۳

$$F.E.M_{AB}=-\frac{۱۰۸(۳)(۴/۵)^{۲}}{۷/۵^{۲}}=-۱۱۶/۶۴\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{BA}=\frac{۱۰۸(۳)^{۲}(۴/۵)}{۷/۵^{۲}}=۷۷/۷۶\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{BC}=-F.E.M_{CB}=-\frac{۴۰(۹)^{۲}}{۱۲}=-۲۷۰\ \ kN.m$$

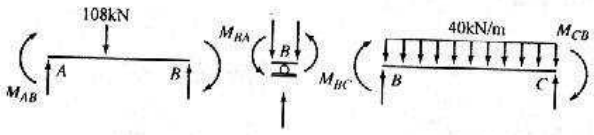
$$\theta_A=\theta_C=۰\ ,\ \psi_{AB}=\psi_{BC}=۰$$

$$M_{AB}=\frac{۲EI}{۷/۵}\left[۲\theta_A+\theta_B-۳\psi_{AB}\right]-۱۱۶/۶۴$$

$$M_{AB}=\frac{۲EI}{۷/۵}\theta_B-۱۱۶/۶۴$$

$$M_{BA}=\frac{۲EI}{۷/۵}\left[۲\theta_B+\theta_A-۳\psi_{AB}\right]+۷۷/۷۶$$

$$M_{BA}=\frac{۴EI}{۷/۵}\theta_B+۷۷/۷۶$$



$$M_{BC}=\frac{2EI}{9}\left[2\theta_B+\theta_C-3\psi_{BC}\right]-270=\frac{4EI}{9}\theta_B-270\quad,\quad M_{CB}=\frac{2EI}{9}\left[2\theta_C+\theta_B-3\psi_{BC}\right]+270=\frac{2EI}{9}\theta_B+270$$

$$+\circlearrowleft\sum M^B=0\ :\ M_{BA}+M_{BC}=0\ \Rightarrow\ \frac{4EI}{7/5}\theta_B+77/76+\frac{4EI}{9}\theta_B-270=0\ \Rightarrow\ 22EI\theta_B-4325/4=0$$

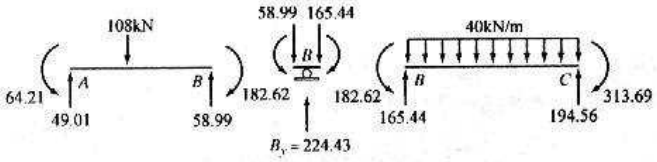
$$\theta_B=\frac{196/61}{EI}$$

$$M_{AB}=\frac{2(196/61)}{7/5}-116/64=-64/21\ \ kN.m\qquad \blacktriangleright\vec{M}_{AB}=64/21\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

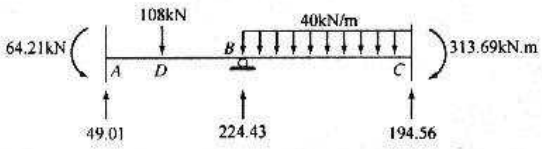
$$M_{BA}=\frac{4(196/61)}{7/5}+77/76=182/62\ \ kN.m\qquad \blacktriangleright\vec{M}_{BA}=182/62\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$

$$M_{BC}=\frac{4(196/61)}{9}-270=-182/62\ \ kN.m\qquad \blacktriangleright\vec{M}_{BC}=182/62\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

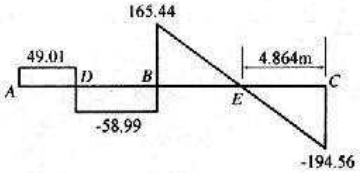
$$M_{CB}=\frac{4(196/61)}{9}+270=313/69\ \ kN.m\qquad \blacktriangleright\vec{M}_{CB}=313/69\ \ kN.m\ \circlearrowright$$



برشها و لنگرهای انتهایی اعضا



واکنشهای تکیه‌گاهی

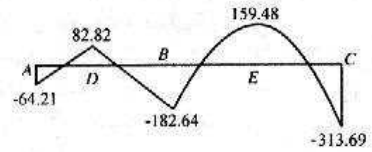


نمودار نیروی برشی ، kN

کنترل تعادل کل سازه:

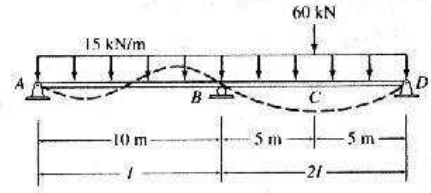
$$+\uparrow\sum F_y=49/01+224/43+194/56-108-40(9)=0\qquad O.K.$$

$$+\circlearrowleft\sum M_C=64/21-49/01(16/5)+108(13/5)-224/43(9)+40(9)(4/5)-313/69=-0/01\approx 0\qquad O.K.$$



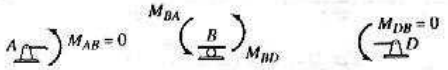
نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۹-۴ در تیر پیوستهٔ نشان داده شده، واکنشهای تکیه‌گاهی را با استفاده از روش شیب - افت محاسبه کنید.



E = ۲۰۰ GPa ، I = ۷۰۰×۱۰^6 mm^4

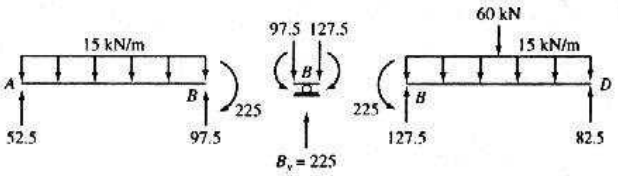
شکل ۹-۴



تیر مزبور سه درجه آزادی دورانی (θ_A ، θ_B و θ_C) دارد. اما اگر از روابط مربوط به اعضای با یک انتهای مفصلی استفاده کنیم، تنها درجهٔ آزادی دورانی (θ_B) در معادلات ظاهر می‌شود.

$$\psi_{AB}=\psi_{BD}=0$$

$$F.E.M_{AB}=-F.E.M_{BA}=-\frac{15(10)^2}{12}=-125\ \ kN.m$$



برشها و لنگرهای انتهایی اعضا

$$F.E.M_{BD} = -F.E.M_{DB} = -\frac{15(10)^2}{12} - \frac{60(10)}{8} = -200 \quad kN.m$$

از روابط شیب - افت مربوط به اعضای با یک انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم.

$$M_{BA} = \frac{3EI}{10}\theta_B - \frac{3EI}{10}\psi_{BA} + 125 - \frac{1}{2}(-125)$$

$$M_{BD} = \frac{3E(2I)}{10}\theta_B - \frac{3E(2I)}{10}\psi_{BD} - 200 - \frac{1}{2}(200)$$

$$M_{BA} = 0/3EI\theta_B - 187/5 \quad , \quad M_{BD} = 0/6EI\theta_B + 300$$

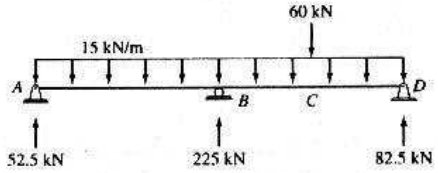
$$+\circlearrowleft \sum M^B = 0 \; : \; M_{BA} + M_{BD} = 0 \Rightarrow 0/3EI\theta_B - 187/5 + 0/6EI\theta_B + 300 = 0 \Rightarrow 0/9EI\theta_B + 112/5 = 0$$

$$\theta_B = -\frac{125}{EI}$$

$$M_{BA} = 0/3(-125) - 187/5 = -225 \quad kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{BA} = 225 \quad kN.m \;)$$

$$M_{BD} = 0/6(-125) + 300 = 225 \quad kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{BD} = 225 \quad kN.m \;)$$

کنترل تعادل کل سازه:



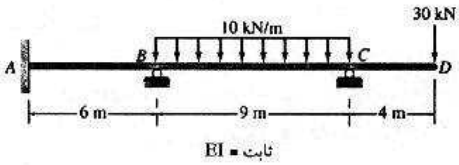
واکنشهای تکیه‌گاهی

$$+\uparrow \sum F_y = 52/5 + 225 + 82/5 - 15(20) - 60 = 0 \qquad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = -52/5(20) + 15(20)(10) - 225(10) + 60(5)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \qquad O.K.$$

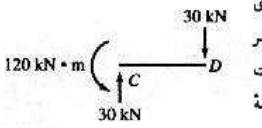
۹-۵ برای تیر پیوستهٔ نشان داده شده در شکل زیر واکنشهای تکیه‌گاهی را با استفاده از روش شیب - افت محاسبه کنید.



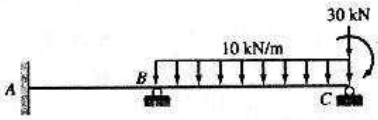
EI = ثابت

شکل ۹-۵

تیر مزبور تنها دو درجه آزادی دورانی (θ_B و θ_C) دارد. ولی اگر برای عضو BC از رابطهٔ شیب - افت ساده شده استفاده کنیم، تنها درجهٔ آزادی (θ_B) به صورت مجهول در معادلات وارد می‌شود.



طرهٔ معین



قسمت نامعین که باید تحلیل شود.

$$\psi_{AB} = \psi_{BC} = 0 \quad , \quad \theta_A = 0$$

$$F.E.M_{BC} = -F.E.M_{CB} = -\frac{10(9)^2}{12} = -67/5 \quad kN.m$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{6}\left[2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}\right] = \frac{EI}{3}\theta_B$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{6}\left[2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{AB}\right] = \frac{2EI}{3}\theta_B$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{9}\left[2\theta_B + \theta_C - 3\psi_{BC}\right] - 67/5 = \frac{4EI}{9}\theta_B + \frac{2EI}{9}\theta_C - 67/5$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{9}\left[2\theta_C + \theta_B - 3\psi_{BC}\right] + 67/5 = \frac{4EI}{9}\theta_C + \frac{2EI}{9}\theta_B + 67/5$$

$$+\circlearrowleft \sum M^B = 0 \; : \; M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{3}\theta_B + \frac{4EI}{9}\theta_B + \frac{2EI}{9}\theta_C - 67/5 = 0 \Rightarrow 10EI\theta_B + 2EI\theta_C = 607/5 \quad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M^C = 0 \; : \; M_{CB} - 120 = 0 \Rightarrow \frac{4EI}{9}\theta_C + \frac{2EI}{9}\theta_B + 67/5 - 120 = 0 \Rightarrow 2EI\theta_B + 4EI\theta_C = 427/5 \quad (II)$$

$$\theta_B = \frac{۴۱/۲۵}{EI} \quad , \quad \theta_C = \frac{۹۷/۵}{EI}$$

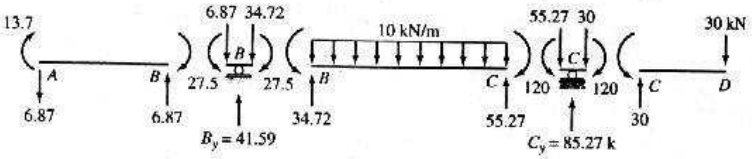
از حل همزمان دستگاه معادلات (I) و (II) خواهیم داشت:

$$M_{AB} = \left[\frac{۱}{۳}\right](۴۱/۲۵) = ۱۳/۷۵ \ \ kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{AB} = ۱۳/۷۵ \ \ kN.m \ )$$

$$M_{BA} = \left[\frac{۲}{۳}\right](۴۱/۲۵) = ۲۷/۵ \ \ kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۲۷/۵ \ \ kN.m \ )$$

$$M_{BC} = \frac{۴(۴۱/۲۵)}{۹} + \frac{۲(۹۷/۵)}{۹} - ۶۷/۵ = -۲۷/۵ \ \ kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{BC} = ۲۷/۵ \ \ kN.m \ )$$

$$M_{CB} = \frac{۴(۹۷/۵)}{۹} + \frac{۲(۴۱/۲۵)}{۹} + ۶۷/۵ = ۱۲۰ \ \ kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CB} = ۱۲۰ \ \ kN.m \ )$$



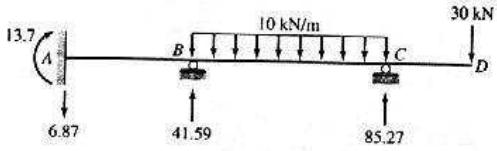
برشها و لنگرهای انتهایی اعضا

کنترل تعادل کل سازه:

$$+\uparrow \sum F_y = -۶/۸۷ + ۴۱/۵۹ + ۸۵/۲۷ - ۳۰ - ۱۰(۹)$$

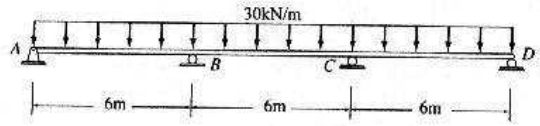
$$+\uparrow \sum F_y = -۰/۰۱ \approx ۰ \quad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = -۳۰(۱۹) + ۸۵/۲۷(۱۵) + ۴۱/۵۹(۶) - ۱۰(۹)(۱۰/۵) - ۱۳/۷ = -۰/۱۱ \approx ۰ \quad O.K.$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

۹-۶ در تیر سه دهانهٔ شکل زیر، واکنشهای تکیه‌گاهی را با استفاده از روش شیب - افت به دست آورید. فرض کنید که علاوه بر بار گستردهٔ اعمال شده بر تیر، تکیه‌گاههای B ، C و D به ترتیب به اندازهٔ ۱۵ mm ، ۳۹ mm و ۲۱ mm نشست کنند.



$E = ۲۰۰ \ GPa \ , I = ۳ \times ۱۰^{۶} \ mm^{۴}$

شکل ۹-۶

$$F.E.M_{AB} = F.E.M_{BC} = F.E.M_{CD} = -\frac{۳۰(۶)^{۲}}{۱۲}$$

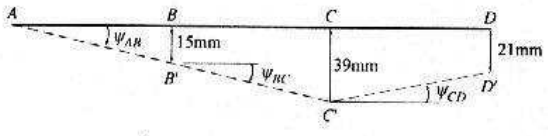
$$F.E.M_{AB} = -۹۰ \ \ kN.m$$

$$F.E.M_{BA} = F.E.M_{CB} = F.E.M_{DC} = \frac{۳۰(۶)^{۲}}{۱۲}$$

$$F.E.M_{AB} = ۹۰ \ \ kN.m$$

$$\psi_{AB} = \frac{۱۵}{۶۰۰۰} = ۰/۰۰۲۵ \ , \ \psi_{BC} = \frac{۳۹ - ۱۵}{۶۰۰۰} = ۰/۰۰۴$$

$$\psi_{CD} = \frac{۲۱ - ۳۹}{۶۰۰۰} = -۰/۰۰۳ \ , \ EI = ۶۰۰۰۰۰ \ \ kN.m^{۲}$$



دوران میان تار اعضا به علت نشستهای تکیه‌گاهی

برای اعضای AB و DC از روابط شیب - افت اعضای با یک انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم.

$$M_{AB} = M_{DC} = ۰$$

$$M_{BA} = \frac{۳EI}{۶}\theta_B - \frac{۳EI}{۶}\psi_{AB} + ۹۰ - \frac{۱}{۲}(-۹۰)$$

$$M_{BA} = \frac{۳(۶۰۰۰۰۰)}{۶}\theta_B - \frac{۳(۶۰۰۰۰۰)}{۶}(۰/۰۰۲۵) + ۱۳۵$$

$$M_{BA} = ۳۰۰۰۰۰\theta_B - ۶۱۵$$

$$M_{BC} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}\right] - ۹۰ = \frac{۲(۶۰۰۰۰۰)}{۶}\left[۲\theta_B + \theta_C - ۳(۰/۰۰۴)\right] - ۹۰ = ۴۰۰۰۰۰\theta_B + ۲۰۰۰۰۰\theta_C - ۲۴۹۰$$

$$M_{CB} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_C + \theta_B - ۳\psi_{BC}\right] + ۹۰ = \frac{۲(۶۰۰۰۰۰)}{۶}\left[۲\theta_C + \theta_B - ۳(۰/۰۰۴)\right] + ۹۰ = ۲۰۰۰۰۰\theta_B + ۴۰۰۰۰۰\theta_C - ۲۳۱۰$$

$$M_{CD} = \frac{۳EI}{۶}\theta_C - \frac{۳EI}{۶}\psi_{CD} - ۹۰ - \frac{۱}{۲}(۹۰) = \frac{۳(۶۰۰۰۰۰)}{۶}\theta_C - \frac{۳(۶۰۰۰۰۰)}{۶}(-۰/۰۰۳) - ۱۳۵ = ۳۰۰۰۰۰\theta_C + ۷۶۵$$

$$+\circlearrowleft \sum M^B = 0 \;:\; M_{BA} + M_{BC} = 0 \;\Rightarrow\; ۳۰۰۰۰۰\theta_B - ۶۱۵ + ۴۰۰۰۰۰\theta_B + ۲۰۰۰۰۰\theta_C - ۲۴۹۰ = 0$$

$$۷۰۰۰\theta_B + ۲۰۰۰\theta_C = ۳۱/۰۵ \quad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M^C = 0 \;:\; M_{CB} + M_{CA} = 0 \;\Rightarrow\; ۲۰۰۰۰۰\theta_B + ۴۰۰۰۰۰\theta_C - ۲۳۱۰ + ۳۰۰۰۰۰\theta_C + ۷۶۵ = 0$$

$$۲۰۰۰\theta_B + ۷۰۰۰\theta_C = ۱۵/۴۵ \quad (II)$$

از حل همزمان دستگاه معادلات (I) و (II) خواهیم داشت:

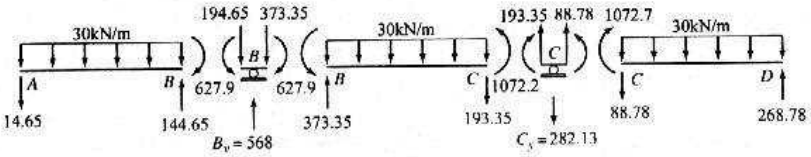
$$\theta_B = ۰/۰۰۴۱۴۳ \; rad \;,\; \theta_C = ۰/۰۰۱۰۲۳ \; rad$$

$$M_{BA} = ۳۰۰۰۰۰(۰/۰۰۴۱۴۳) - ۶۱۵ = ۶۲۷/۹ kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۶۲۷/۹ kN.m \;)$$

$$M_{CD} = ۳۰۰۰۰۰(۰/۰۰۱۰۲۳) + ۷۶۵ = ۱۰۷۱/۹ kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۱۰۷۱/۹ kN.m \;)$$

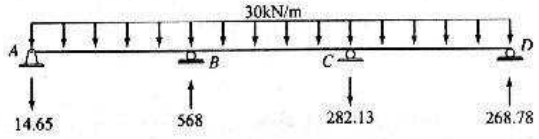
$$M_{BC} = ۴۰۰۰۰۰(۰/۰۰۴۱۴۳) + ۲۰۰۰۰۰(۰/۰۰۱۰۲۳) - ۲۴۹۰ = -۶۲۸/۲ kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{BC} = ۶۲۸/۲ kN.m \;)$$

$$M_{CB} = ۲۰۰۰۰۰(۰/۰۰۴۱۴۳) + ۴۰۰۰۰۰(۰/۰۰۱۰۲۳) - ۲۳۱۰ = -۱۰۷۲/۲ kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CB} = ۱۰۷۲/۲ kN.m \;)$$



برشها و لنگرهای انتهایی اعضا

کنترل تعادل تیر:



$$+\uparrow \sum F_y = -۳۰(۱۸) + ۲۶۸/۷۸ - ۲۸۲/۱۳ + ۵۶۸ - ۱۴/۶۵$$

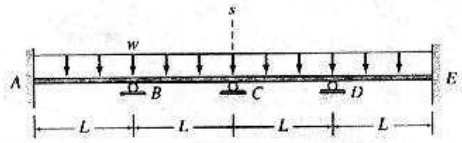
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۲۶۸/۷۸(۱۸) - ۲۸۲/۱۳(۱۲) + ۵۶۸(۶) -$$

$$۳۰(۱۸)(۹) = 0 \quad O.K.$$

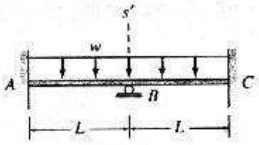
واکنشهای تکیه‌گاهی

۷-۹ برای تیر چهار دهانهٔ یکسرهٔ نشان داده شده در شکل زیر، واکنشهای تکیه‌گاهی را به کمک روش شیب - افت محاسبه کرده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم کنید.

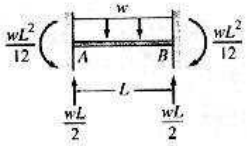


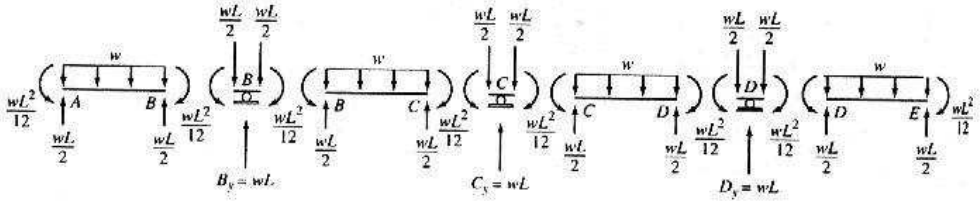
EI = ثابت

شکل ۹-۷

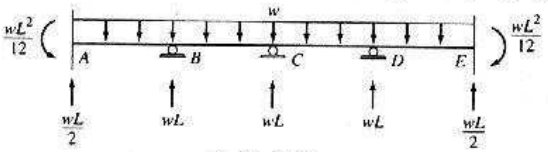


با توجه به ویژگیهای تحلیل سازه‌های منقارن که در فصل (۱۱) به آن اشاره خواهد شد، تیر اصلی را پس از دو بار به کارگیری ویژگی نقارن، می‌توان به یک تیر دو سر گیردار تحت اثر بار گستردهٔ w تبدیل کرد.

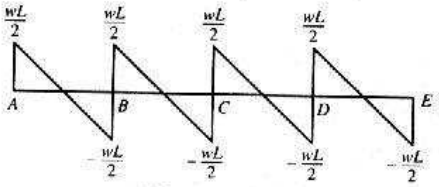




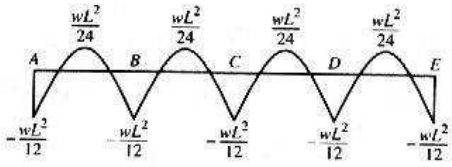
برشها و لنگرهای انتهایی اعضا



واکنشهای تکیه‌گاهی



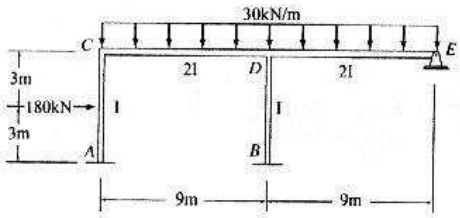
نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی، kN.m

۹-۸ برای قاب نشان داده شده در شکل زیر واکنشهای تکیه‌گاهی را با استفاده از روش شیب - افت به دست آورید.

این قاب دارای سه درجه آزادی دورانی (θ_C، θ_D و θ_E) است. البته با استفاده از روابط شیب - افت مربوط به اعضای با یک انتهای مفصلی برای عضو DE، درجهٔ آزادی دورانی θ_E را از دستگاه معادلات نهایی حذف می‌کنیم.



E = ۲۰۰ GPa

شکل ۹-۸

● در اعضای قائم تار تحتانی در سمت راست عضو فرض شده است.

$$F.E.M_{AC} = -F.E.M_{CA} = -\frac{۱۸۰(۶)}{۸} = -۱۳۵ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{CD} = -F.E.M_{DC} = -\frac{۳۰(۹)^۲}{۱۲} = -۲۰۲/۵ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{DE} = -F.E.M_{ED} = -\frac{۳۰(۹)^۲}{۱۲} = -۲۰۲/۵ \quad kN.m$$

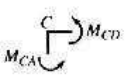
$$M_{AC} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_A + \theta_C - ۳\psi_{AC}\right] - ۱۳۵ = \frac{EI}{۳}\theta_C - ۱۳۵ \quad , \quad M_{CA} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_C + \theta_A - ۳\psi_{AC}\right] + ۱۳۵ = \frac{۲EI}{۳}\theta_C + ۱۳۵$$

$$M_{BD} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_B + \theta_D - ۳\psi_{BD}\right] = \frac{EI}{۳}\theta_D \quad , \quad M_{DB} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_D + \theta_B - ۳\psi_{BD}\right] = \frac{۲EI}{۳}\theta_D$$

$$M_{CD} = \frac{۲E(۲I)}{۹}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] - ۲۰۲/۵ = \frac{۸EI}{۹}\theta_C + \frac{۴EI}{۹}\theta_D - ۲۰۲/۵$$

$$M_{DC} = \frac{۲E(۲I)}{۹}\left[۲\theta_D + \theta_C - ۳\psi_{CD}\right] + ۲۰۲/۵ = \frac{۸EI}{۹}\theta_D + \frac{۴EI}{۹}\theta_C + ۲۰۲/۵$$

برای عضو DE از رابطهٔ شیب - افت اصلاح شدهٔ اعضای با یک انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم.



$$M_{DE} = \frac{۳E(۲I)}{۹}\theta_D - \frac{۳E(۲I)}{۹}\psi_{DE} - ۲۰۲/۵ - \frac{۱}{۲}(۲۰۲/۵) = \frac{۲EI}{۳}\theta_D - ۳۰۳/۷۵$$

$$+\circlearrowleft \sum M^C = 0 \;:\; M_{CA} + M_{CD} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2EI}{3}\theta_C + 135 + \frac{8EI}{9}\theta_C + \frac{4EI}{9}\theta_D - 202/5 = 0$$

$$14EI\theta_C + 4EI\theta_D = 607/5 \qquad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M^D = 0 \;:\; M_{DC} + M_{DB} + M_{DE} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{8EI}{3}\theta_D + \frac{4EI}{9}\theta_C + 202/5 + \frac{2EI}{3}\theta_D + \frac{2EI}{3}\theta_D - 303/75 = 0$$

$$4EI\theta_C + 20EI\theta_D = 911/25 \qquad (II)$$

از حل همزمان دستگاه معادلات (I) و (II) خواهیم داشت:

$$\theta_C = \frac{32/22}{EI} \quad , \quad \theta_D = \frac{39/12}{EI}$$

$$M_{AC} = \frac{32/22}{3} - 135 = -124/26 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_A = 124/26 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$$

$$M_{CA} = \frac{2(32/22)}{3} + 135 = 156/48 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{CA} = 156/48 \;\; kN.m \;\circlearrowright$$

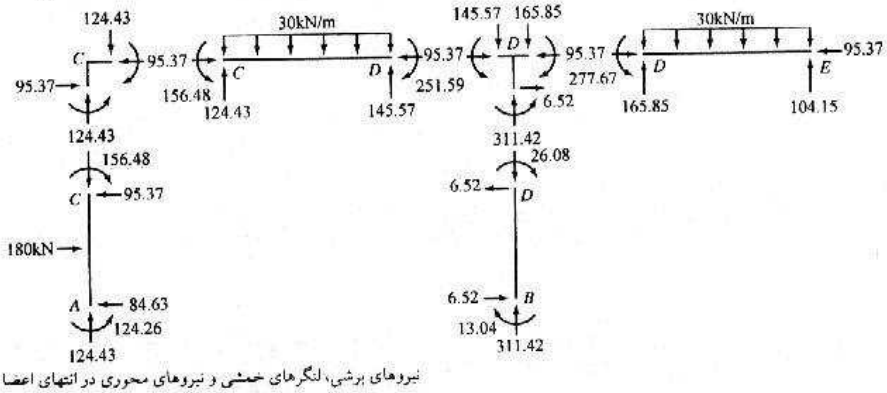
$$M_{BD} = \frac{39/12}{3} = 13/04 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{BD} = 13/04 \;\; kN.m \;\circlearrowright$$

$$M_{CD} = \frac{8(32/22)}{9} + \frac{4(39/12)}{9} - 202/5 = -156/48 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{CD} = 156/48 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$$

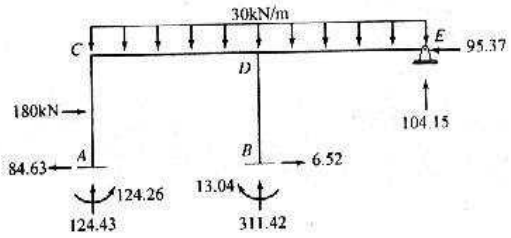
$$M_{DB} = \frac{2(39/12)}{3} = 26/08 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{DB} = 26/08 \;\; kN.m \;\circlearrowright$$

$$M_{DC} = \frac{8(39/12)}{9} + \frac{4(32/22)}{9} + 202/5 = 251/59 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{DC} = 251/59 \;\; kN.m \;\circlearrowright$$

$$M_{DE} = \frac{2(39/12)}{9} - 303/75 = -277/67 \;\; kN.m \qquad \blacktriangleright \vec{M}_{DE} = 277/67 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$$

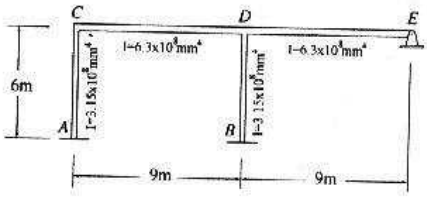


نیروهای برشی، لنگرهای خمشی و نیروهای محوری در انتهای اعضا

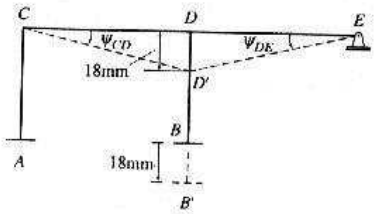


واکنشهای تکیه‌گاهی

۹-۹ در قاب شکل زیر اگر تکیه‌گاه B به اندازهٔ ۱۸ mm نشست کند، قاب را مجدداً با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورید.



E = ۲۰۰ GPa



دوران میان تار اعضا به علت نشست تکیه‌گاه B

شکل ۹-۹

ψ_{CD} و ψ_{DE} را به علت نشست تکیه‌گاه B محاسبه می‌کنیم.

$$\psi_{CD}=\frac{۱۸-۰}{۹۰۰۰}=۰/۰۰۲ \quad , \quad \psi_{DE}=\frac{۰-۱۸}{۹۰۰۰}=-۰/۰۰۲$$

$$M_{AC}=\frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_A+\theta_C-۳\psi_{AC}\right]=\frac{۲(۲۰۰)(۳/۱۵\times ۱۰^{۸})(۱۰^{-۶})}{۶}(\theta_C)=۲۱۰۰۰\theta_C$$

$$M_{CA}=\frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_C+\theta_A-۳\psi_{AC}\right]=۴۲۰۰۰\theta_C$$

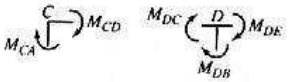
$$M_{BD}=\frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_B+\theta_D-۳\psi_{BD}\right]=\frac{۲(۲۰۰)(۳/۱۵\times ۱۰^{۸})(۱۰^{-۶})}{۶}(\theta_D)=۲۱۰۰۰\theta_D$$

$$M_{DB}=\frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_D+\theta_B-۳\psi_{BD}\right]=۴۲۰۰۰\theta_D$$

$$M_{CD}=\frac{۲EI}{۹}\left[۲\theta_C+\theta_D-۳\psi_{CD}\right]=\frac{۲(۲۰۰)(۶/۳\times ۱۰^{۸})(۱۰^{-۶})}{۹}\left[۲\theta_C+\theta_D-۳(۰/۰۰۲)\right]=۵۶۰۰۰\theta_C+۲۸۰۰۰\theta_D-۱۶۸$$

$$M_{DC}=\frac{۲EI}{۹}\left[۲\theta_D+\theta_C-۳\psi_{CD}\right]=\frac{۲(۲۰۰)(۶/۳\times ۱۰^{۸})(۱۰^{-۶})}{۹}\left[۲\theta_D+\theta_C-۳(۰/۰۰۲)\right]=۲۸۰۰۰\theta_C+۵۶۰۰۰\theta_D-۱۶۸$$

برای عضو DB از رابطهٔ شیب - افت اصلاح شدهٔ اعضای با یک انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم.



$$M_{DE}=\frac{۳EI}{۹}\theta_D-\frac{۳EI}{۹}\psi_{BD}=\frac{۳(۲۰۰)(۶/۳\times ۱۰^{۸})(۱۰^{-۶})}{۹}\left[\theta_D-(-۰/۰۰۲)\right]$$

$$M_{DE}=۴۲۰۰۰\theta_D+۸۴$$

$$+\circlearrowright \sum M_C=۰ \;:\; M_{CA}+M_{CD}=۰ \Rightarrow ۴۲۰۰۰\theta_C+۵۶۰۰۰\theta_C+۲۸۰۰۰\theta_D-۱۶۸=۰$$

$$۹۸۰۰۰\theta_C+۲۸۰۰۰\theta_D=۱۶۸ \quad (I)$$

$$+\circlearrowright \sum M_D=۰ \;:\; M_{DC}+M_{DB}+M_{DE}=۰ \Rightarrow ۲۸۰۰۰\theta_C+۵۶۰۰۰\theta_D-۱۶۸+۴۲۰۰۰\theta_D+۴۲۰۰۰\theta_D+۸۴=۰$$

$$۲۸۰۰۰\theta_C+۱۴۰۰۰۰\theta_D=۸۴ \quad (II)$$

از حل همزمان دستگاه معادلات (I) و (II) نتیجه خواهد شد:

$$\theta_C=۰/۰۰۱۶۳۶ \quad , \quad \theta_D=۰/۰۰۰۲۷۲۷$$

$$M_{AC}=۲۱۰۰۰(۰/۰۰۱۶۳۶)=۳۴/۴ \;\; kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{AC}=۳۴/۴ \;\; kN.m \;\curvearrowright$$

$$M_{CA}=۴۲۰۰۰(۰/۰۰۱۶۳۶)=۶۸/۷ \;\; kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CA}=۶۸/۷ \;\; kN.m \;\curvearrowright$$

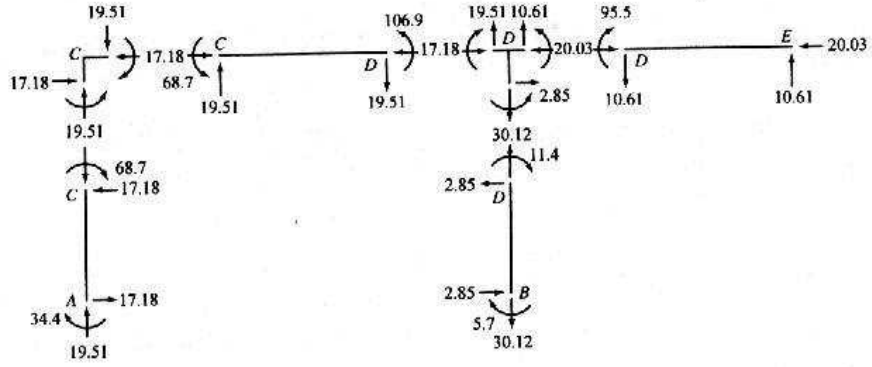
$$M_{BD}=۲۱۰۰۰(۰/۰۰۰۲۷۲۷)=۵/۷ \;\; kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{BD}=۵/۷ \;\; kN.m \;\curvearrowright$$

$$M_{DB}=۴۲۰۰۰(۰/۰۰۰۲۷۲۷)=۱۱/۴ \;\; kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{DB}=۱۱/۴ \;\; kN.m \;\curvearrowright$$

$$M_{CD}=۵۶۰۰۰(۰/۰۰۱۶۳۶)+۲۸۰۰۰(۰/۰۰۰۲۷۲۷)-۱۶۸=-۶۸/۷ \;\; kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CD}=۶۸/۷ \;\; kN.m \;\curvearrowleft$$

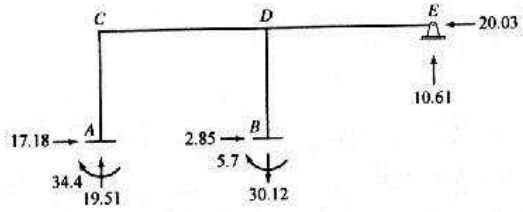
$$M_{DC}=۲۸۰۰۰(۰/۰۰۱۶۳۶)+۵۶۰۰۰(۰/۰۰۰۲۷۲۷)-۱۶۸=-۱۰۶/۹ \;\; kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{DC}=۱۰۶/۹ \;\; kN.m \;\curvearrowleft$$

$$M_{DE}=۴۲۰۰۰(۰/۰۰۰۲۷۲۷)+۸۴=۹۵/۵ \;\; kN.m \quad \blacktriangleright \vec{M}_{DE}=۹۵/۵ \;\; kN.m \;\curvearrowright$$



نیروهای برشی، لنگرهای خمشی و نیروهای محوری در انتهای اعضا

کنترل تعادل کل سازه:

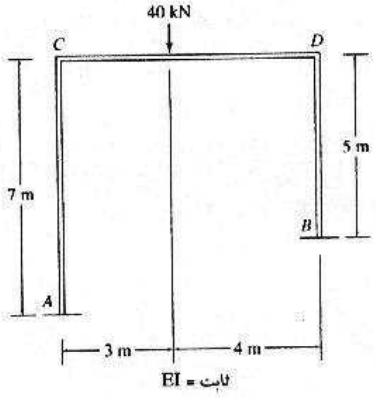


$$+\uparrow \sum F_y = ۱۹/۵۱ - ۳۰/۱۲ + ۱۰/۶۱ = ۰ \quad O.K.$$

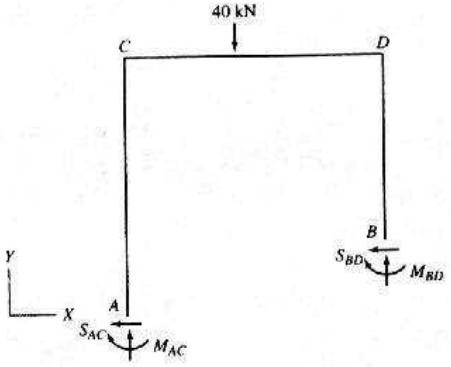
$$\pm \sum F_x = ۱۷/۱۸ + ۲/۸۵ - ۲۰/۰۳ = ۰ \quad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E = (۱۷/۱۸ + ۲/۸۵)(۶) + ۳۰/۱۲(۹) - ۱۹/۵۱(۱۸) - ۳۴/۴ - ۵/۷ \simeq ۰ \quad O.K.$$

۹-۱۰ قاب نشان داده شده را با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورید.



شکل ۹-۱۰



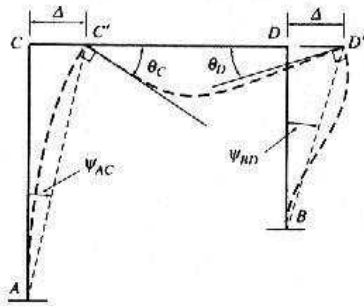
نمودار جسم آزاد کل قاب

قاب نشان داده شده دارای دو درجه آزادی دورانی (θ_C و θ_D) و یک درجه آزادی انتقالی (Δ) است.

$$F.E.M_{CD} = -\frac{۴۰(۳)(۴)^۲}{(۷)^۲} = -۳۹/۲ \quad kN.m \quad , \quad F.E.M_{DC} = \frac{۴۰(۳)^۲(۴)}{(۷)^۲} = ۲۹/۴ \quad kN.m$$

با استفاده از هر دو روش ذکر شده، رابطهٔ بین ψ_{ij} های اعضای مختلف را به دست می‌آوریم.

روش اول: مسیر حرکت را از تکیه‌گاه A تا تکیه‌گاه B در نظر می‌گیریم.

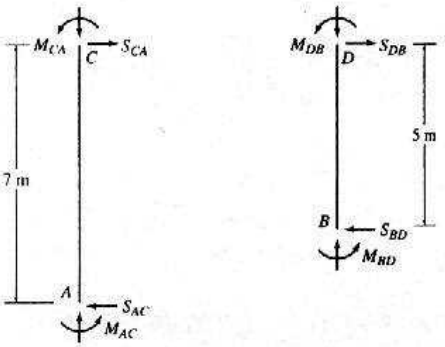


تغییر شکل کیفی قاب

$$(۰-۰)\psi_{AC}+(۰-۷)\psi_{CD}+(۷-۷)\psi_{DB}=(۲-۲)-(۰-۰)$$
$$\psi_{CD}=۰ \qquad (I)$$
$$(۷-۰)\psi_{AC}+(۷-۷)\psi_{CD}+(۲-۷)\psi_{DB}=(۷-۷)-(۰-۰)$$
$$۷\psi_{AC}-۵\psi_{DB}=۰ \qquad (II)$$

روش دوم: با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:

$$\psi_{AC}=\frac{\Delta}{۷}\ ,\ \psi_{BD}=\frac{\Delta}{۵} \Rightarrow ۷\psi_{AC}=۵\psi_{BD}\ ,\ \psi_{CD}=۰$$
$$M_{AC}=\frac{۲EI}{۷}\left[۲\theta_A+\theta_C-۳\psi_{AC}\right]=\frac{۲EI}{۷}\left[\theta_C-۳\left[\frac{\Delta}{۷}\right]\right]$$
$$M_{AC}=۰/۲۸۶EI\theta_C-۰/۱۲۲EI\Delta$$
$$M_{CA}=۰/۵۷۱EI\theta_C-۰/۱۲۲EI\Delta$$
$$M_{BD}=\frac{۲EI}{۵}\left[۲\theta_B+\theta_D-۳\psi_{BD}\right]=\frac{۲EI}{۵}\left[\theta_D-۳\left[\frac{\Delta}{۵}\right]\right]$$
$$M_{BD}=۰/۴EI\theta_D-۰/۲۴EI\Delta\ ,\ M_{DB}=۰/۸EI\theta_D-۰/۲۴EI\Delta$$
$$M_{CD}=\frac{۲EI}{۷}\left[۲\theta_C+\theta_D-۳\psi_{CD}\right]-۳۹/۲=\frac{۲EI}{۷}\left[۲\theta_C+\theta_D-۳(۰)\right]-۳۹/۲=۰/۵۷۱EI\theta_C+۰/۲۸۶EI\theta_D-۳۹/۲$$
$$M_{DC}=\frac{۲EI}{۷}\left[۲\theta_D+\theta_C-۳\psi_{CD}\right]+۲۹/۴=\frac{۲EI}{۷}\left[۲\theta_D+\theta_C-۳(۰)\right]+۲۹/۴=۰/۲۸۶EI\theta_C+۰/۵۷۱EI\theta_D+۲۹/۴$$



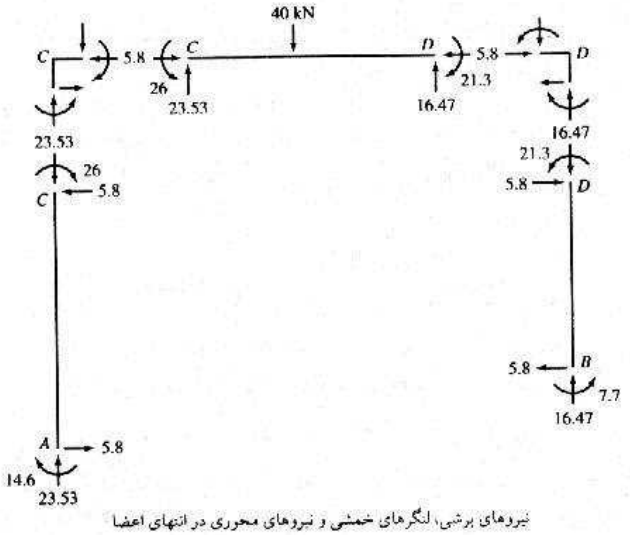
نمودار جسم آزاد ستونهای AC و BD

در این مسئله علاوه بر معادلات تعادل $\sum M^C=۰$ و $\sum M^D=۰$ از معادلهٔ تعادل $\sum F_x=۰$ برای کل قاب نیز استفاده می‌کنیم. (تار تحتانی ستونها در سمت راست آنها در نظر گرفته شده است.)

با توجه به شکل مقابل:

$$+\circlearrowright \sum M_C^{AC}=۰ \ :\ -M_{AC}-M_{CA}-۷S_{AC}=۰$$
$$S_{AC}=-\frac{M_{AC}+M_{CA}}{۷}$$
$$+\circlearrowright \sum M_D^{BD}=۰ \ :\ -M_{BD}-M_{DB}-۵S_{BD}=۰$$
$$S_{BD}=-\frac{M_{BD}+M_{DB}}{۵}$$
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\sum F_x=۰ \ :\ -S_{AC}-S_{BD}=۰$$
$$۵\left[M_{AC}+M_{CA}\right]+۷\left[M_{BD}+M_{DB}\right]=۰ \qquad (I)$$
$$+\circlearrowright \sum M^C=۰ \ :\ M_{CA}+M_{CD}=۰ \qquad (II)$$
$$+\circlearrowright \sum M^D=۰ \ :\ M_{DB}+M_{DC}=۰ \qquad (III)$$

با جایگزینی مقادیر متناظر با لنگرها از معادلات شیب - افت در روابط (I)، (II) و (III) به دستگاه معادلات زیر خواهیم رسید.



نیروهای برشی، لنگرهای خمشی و نیروهای محوری در انتهای اعضا

$$\begin{cases} ۴/۲۸۵EI\theta_C + ۸/۴EI\theta_D - ۴/۵۸۸ = ۰ \\ ۱/۱۴۲EI\theta_C + ۰/۲۸۶EI\theta_D - ۰/۱۲۲EI\Delta = ۳۹/۲ \\ ۰/۲۸۶EI\theta_C + ۱/۳۷۱EI\theta_D - ۰/۲۴EI\Delta = -۲۹/۴ \end{cases}$$

از حل دستگاه معادلات فوق به دست می‌آید:

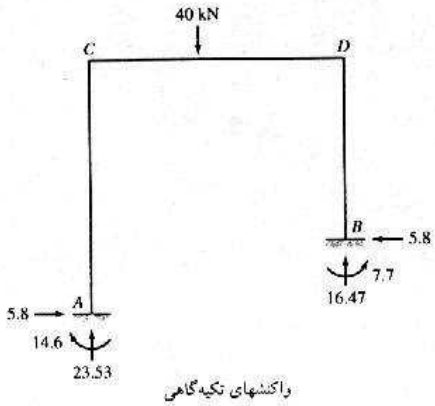
$$\theta_D = -\frac{۳۴/۲۴}{EI} \quad , \quad \theta_C = \frac{۴۰/۲۱۱}{EI} \quad , \quad \Delta = -\frac{۲۵/۱۷۷}{EI}$$

با جایگزینی مقادیر Δ ، θ_C و θ_D در معادلات شیب - افت اعضا، مقادیر لنگرهای خمشی در انتهای اعضای قاب به دست خواهد آمد.

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AC} = ۱۴/۶ \quad kN.m \circlearrowright \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CA} = ۲۶ \quad kN.m \circlearrowright$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{BD} = ۷/۷ \quad kN.m \circlearrowleft \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{DB} = ۲۱/۳ \quad kN.m \circlearrowleft$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۲۶ \quad kN.m \circlearrowleft \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{DC} = ۲۱/۳ \quad kN.m \circlearrowright$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

کنترل تعادل کل قاب:

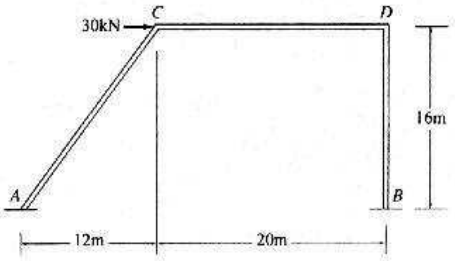
$$+\uparrow \sum F_y = ۲۳/۵۳ + ۱۶/۴۷ - ۴۰ = ۰ \qquad O.K.$$

$$\pm \sum F_x = ۵/۸ - ۵/۸ = ۰ \qquad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۷/۷ - ۱۴/۶ - ۴۰(۳) + ۵/۸(۲) + ۱۶/۴۷(۷)$$

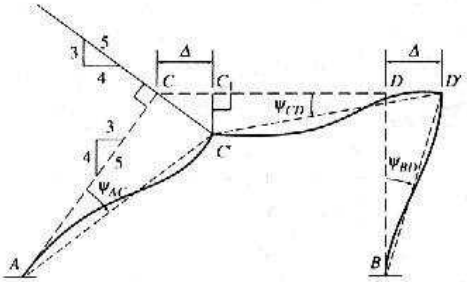
$$+\circlearrowleft \sum M_A = -۰/۰۱ \approx ۰ \qquad O.K.$$

۹-۱۱ با استفاده از روش شیب - افت قاب نشان داده شده را تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورید.

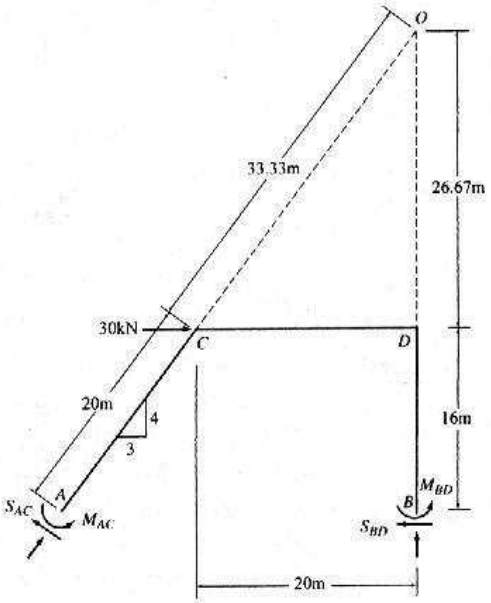


EI = ثابت

شکل ۹-۱۱



تغییر شکل کپفی قاب



نمودار جسم آزاد کل قاب

قاب مزبور دارای دو درجه آزادی دورانی (θ_C و θ_D) و یک درجه آزادی انتقالی (Δ) است.

با توجه به شکلهای بالا و هندسهٔ قاب، روابط زیر بین Δ و ψ_{ij} اعضای مختلف قاب برقرار است.

$$\psi_{AC}=\frac{CC'}{20}=\frac{\left(\frac{5}{4}\right)\Delta}{20}=0.0625\Delta \quad , \quad \psi_{BD}=\frac{DD'}{16}=\frac{\Delta}{16}=0.0625\Delta \quad , \quad \psi_{CD}=-\frac{C'C_1}{20}=-\frac{\left(\frac{3}{4}\right)\Delta}{20}=-0.0375\Delta$$

در نوشتن روابط شیب - افت که در زیر آمده‌اند، تار تحتانی اعضای AC و BD در سمت چپ آنها در نظر گرفته شده است.

$$M_{AC}=\frac{2EI}{20}\left[2\theta_A+\theta_C-3\psi_{AC}\right]=\frac{2EI}{20}\left[\theta_C-3(0.0625\Delta)\right]=0.1EI\theta_C-0.1875EI\Delta$$

$$M_{CA}=0.2EI\theta_C-0.1875EI\Delta$$

$$M_{BD}=\frac{2EI}{16}\left[2\theta_B+\theta_D-3\psi_{BD}\right]=\frac{2EI}{16}\left[\theta_D-3(0.0625\Delta)\right]=0.125EI\theta_D-0.2344EI\Delta$$

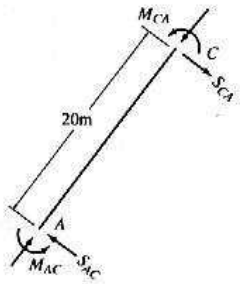
$$M_{DB}=0.25EI\theta_D-0.2344EI\Delta$$

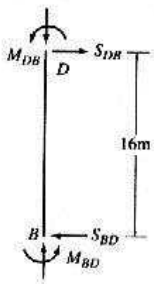
$$M_{CD}=\frac{2EI}{20}\left[2\theta_C+\theta_D-3\psi_{CD}\right]=\frac{2EI}{20}\left[2\theta_C+\theta_D-3(0.0375\Delta)\right]=0.2EI\theta_C+0.1EI\theta_D+0.1125EI\Delta$$

$$M_{DC}=\frac{2EI}{20}\left[2\theta_D+\theta_C-3\psi_{CD}\right]=\frac{2EI}{20}\left[2\theta_D+\theta_C-3(-0.0375\Delta)\right]=0.1EI\theta_C+0.2EI\theta_D+0.1125EI\Delta$$

در این مسئله علاوه بر معادلات تعادل $\sum M^C=0$ و $\sum M^D=0$ از معادلهٔ تعادل $\sum M_O=0$ نیز استفاده می‌کنیم.

با توجه به شکل مقابل:





$$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \;:\; M_{AC} + M_{CA} - 20 S_{AC} = 0$$

$$S_{AC} = \frac{M_{AC} + M_{CA}}{20}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{BD} = 0 \;:\; M_{BD} + M_{DB} - 16 S_{BD} = 0$$

$$S_{BD} = \frac{M_{BD} + M_{DB}}{16}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_O = 0 \;:\; M_{AC} - S_{AC}(53/33) + M_{BD} - S_{BD}(42/67) + 30(26/67) = 0$$

نمودار جسم آزاد ستونهای AC و BD

از سه رابطهٔ اخیر داریم:

$$1/67 M_{AC} + 2/67 M_{CA} + 1/67 M_{BD} + 2/67 M_{DB} = 800 \qquad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M^D = 0 \;:\; M_{DC} + M_{DB} = 0 \qquad (II) \qquad , \qquad +\circlearrowleft \sum M^C = 0 \;:\; M_{CA} + M_{CD} = 0 \qquad (III)$$

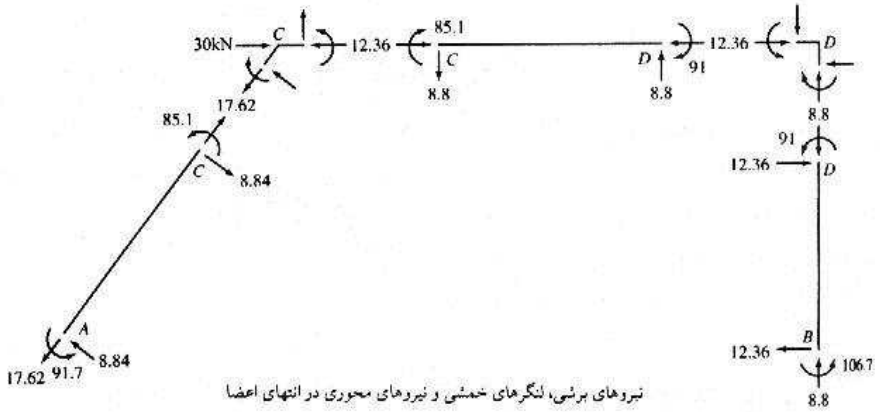
با جایگزینی مقادیر متناظر با لنگرها از معادلات شیب - افت در روابط (I)، (II) و (III) به دستگاه معادلات زیر خواهیم رسید.

$$\begin{cases} 0/71 EI\theta_C + 0/877 EI\theta_D - 0/183 EI\Delta = +800 \\ 0/1 EI\theta_C + 0/45 EI\theta_D - 0/0121 EI\Delta = 0 \\ 0/4 EI\theta_C + 0/1 EI\theta_D - 0/0075 EI\Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta_C = -\frac{66/648}{EI} \;,\; \theta_D = -\frac{125/912}{EI} \;,\; \Delta = -\frac{5233/6}{EI}$$

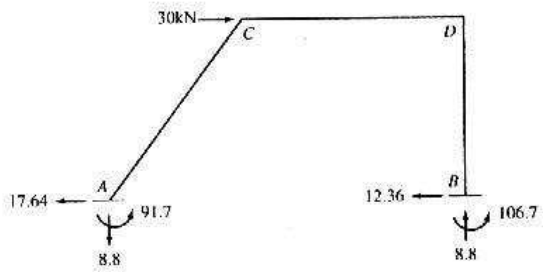
با جایگزینی مقادیر Δ ، θ_C و θ_D در معادلات شیب - افت اعضا، مقادیر لنگرهای خمشی در انتهای اعضای قاب به دست خواهد آمد.

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AC} = 91/7 \;\; kN.m \;\circlearrowleft \;,\quad \blacktriangleright \vec{M}_{CA} = 85/1 \;\; kN.m \;\circlearrowleft \;,\quad \blacktriangleright \vec{M}_{BD} = 106/7 \;\; kN.m \;\circlearrowleft$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{DB} = 91 \;\; kN.m \;\circlearrowleft \;,\quad \blacktriangleright \vec{M}_{CD} = 85/1 \;\; kN.m \;\circlearrowright \;,\quad \blacktriangleright \vec{M}_{DC} = 91 \;\; kN.m \;\circlearrowright$$



نیروهای برشی، لنگرهای خمشی و نیروهای محوری در انتهای اعضا



واکنشهای تکیه‌گاهی

کنترل تعادل کل قاب:

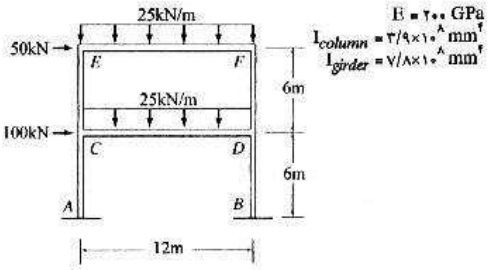
$+\uparrow \sum F_y = ۸/۸ - ۸/۸ = ۰$ O.K.

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۳۰ - ۱۷/۶۴ - ۱۲/۳۶ = ۰$ O.K.

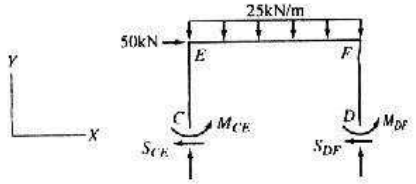
$+\circlearrowleft \sum M_A = ۸/۸(۳۲) - ۳۰(۱۶) + ۱۰۶/۷ + ۹۱/۷$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰$ O.K.

۹-۱۲ با استفاده از روش شیب - افت قاب نشان داده شده در شکل زیر را تحلیل کرده، واکنشهای تکیه‌گاهی و تغییر مکان افقی گره F را محاسبه کنید.



شکل ۹-۱۲



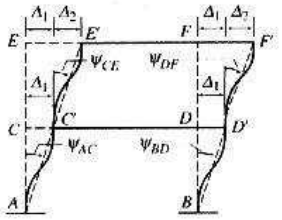
نمودار جسم آزاد طبقهٔ فوقانی

این قاب دارای سه درجه آزادی دورانی θ_C ، θ_D ، θ_E ، θ_F و دو درجه آزادی انتقالی Δ_1 و Δ_2 است.

با توجه به شکل روبرو و هندسهٔ قاب روابط زیر را می‌توان به دست آورد.

$$\psi_{CD} = \psi_{EF} = ۰ \quad , \quad \psi_{CE} = \psi_{DF} = -\frac{\Delta_2}{۶} \quad , \quad \psi_{AC} = \psi_{BD} = -\frac{\Delta_1}{۶}$$

با فرض این که $I_{column} = I$ و $I_{girder} = ۲I$ روابط شیب - افت را به صورت زیر می‌نویسیم. (برای ستونها تار تحتانی در سمت چپ و برای تیرها در بالای عضو فرض شده است.)



تغییر شکل کیفی قاب

$$M_{AC} = \frac{۲EI}{۶}\left(۲\theta_A + \theta_C - ۳\psi_{AC}\right) = \frac{EI}{۳}\left[\theta_C - ۳\left[-\frac{\Delta_1}{۶}\right]\right] = \frac{EI}{۳}\theta_C + \frac{EI}{۶}\Delta_1$$

$$M_{CA} = \frac{۲EI}{۶}\left(۲\theta_C + \theta_A - ۳\psi_{AC}\right) = \frac{EI}{۳}\left[۲\theta_C - ۳\left[-\frac{\Delta_1}{۶}\right]\right] = \frac{۲EI}{۳}\theta_C + \frac{EI}{۶}\Delta_1$$

$$M_{BD} = \frac{۲EI}{۶}\left(۲\theta_B + \theta_D - ۳\psi_{BD}\right) = \frac{EI}{۳}\left[\theta_D - ۳\left[-\frac{\Delta_1}{۶}\right]\right] = \frac{EI}{۳}\theta_D + \frac{EI}{۶}\Delta_1$$

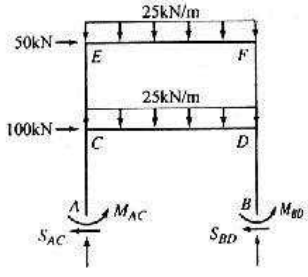
$$M_{DB} = \frac{۲EI}{۶}\left(۲\theta_D + \theta_B - ۳\psi_{BD}\right) = \frac{EI}{۳}\left[۲\theta_D - ۳\left[-\frac{\Delta_1}{۶}\right]\right] = \frac{۲EI}{۳}\theta_D + \frac{EI}{۶}\Delta_1$$

$$M_{CE} = \frac{۲EI}{۶}\left(۲\theta_C + \theta_E - ۳\psi_{CE}\right) = \frac{EI}{۳}\left[۲\theta_C + \theta_E - ۳\left[-\frac{\Delta_2}{۶}\right]\right]$$

$$M_{CE} = \frac{۲EI}{۳}\theta_C + \frac{EI}{۳}\theta_E + \frac{EI}{۶}\Delta_2$$

$$M_{EC} = \frac{۲EI}{۶}\left(۲\theta_E + \theta_C - ۳\psi_{CE}\right) = \frac{EI}{۳}\left[۲\theta_E + \theta_C - ۳\left[-\frac{\Delta_2}{۶}\right]\right]$$

$$M_{EC} = \frac{EI}{۳}\theta_C + \frac{۲EI}{۳}\theta_E + \frac{EI}{۶}\Delta_2$$



نمودار جسم آزاد کل قاب

$$M_{DF}=\frac{2EI}{6}\left[2\theta_D+\theta_F-3\psi_{DF}\right]=\frac{EI}{3}\left[2\theta_D+\theta_F-3\left[-\frac{\Delta_2}{6}\right]\right]=\frac{2EI}{3}\theta_D+\frac{EI}{3}\theta_F+\frac{EI}{6}\Delta_2$$

$$M_{FD}=\frac{2EI}{6}\left[2\theta_F+\theta_D-3\psi_{DF}\right]=\frac{EI}{3}\left[2\theta_F+\theta_D-3\left[-\frac{\Delta_2}{6}\right]\right]=\frac{2EI}{3}\theta_F+\frac{EI}{3}\theta_D+\frac{EI}{6}\Delta_2$$

$$M_{CD}=\frac{2E(2I)}{12}\left[2\theta_C+\theta_D-3\psi_{CD}\right]+\frac{25(12)^2}{12}=\frac{EI}{3}\left[2\theta_C+\theta_D-3(0)\right]+300=\frac{2EI}{3}\theta_C+\frac{EI}{3}\theta_D+300$$

$$M_{DC}=\frac{2E(2I)}{12}\left[2\theta_D+\theta_C-3\psi_{CD}\right]-\frac{25(12)^2}{12}=\frac{EI}{3}\left[2\theta_D+\theta_C-3(0)\right]-300=\frac{EI}{3}\theta_C+\frac{2EI}{3}\theta_D-300$$

$$M_{EF}=\frac{2E(2I)}{12}\left[2\theta_E+\theta_F-3\psi_{EF}\right]+\frac{25(12)^2}{12}=\frac{EI}{3}\left[2\theta_E+\theta_F-3(0)\right]+300=\frac{2EI}{3}\theta_E+\frac{EI}{3}\theta_F+300$$

$$M_{FE}=\frac{2E(2I)}{12}\left[2\theta_F+\theta_E-3\psi_{EF}\right]-\frac{25(12)^2}{12}=\frac{EI}{3}\left[2\theta_F+\theta_E-3(0)\right]-300=\frac{EI}{3}\theta_E+\frac{2EI}{3}\theta_F-300$$

با نوشتن معادلهٔ تعادل لنگر خمشی برای ستونهای AC ، CE ، BD و DF روابط زیر به دست می‌آید:

$$S_{AC}=\frac{M_{AC}+M_{CA}}{6}\quad,\quad S_{BD}=\frac{M_{BD}+M_{DB}}{6}\quad,\quad S_{CE}=\frac{M_{CE}+M_{EC}}{6}\quad,\quad S_{DF}=\frac{M_{DF}+M_{FD}}{6}$$

تعادل افقی طبقهٔ دوم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0\ :\ -S_{CE}-S_{DF}+50=0\ \Rightarrow\ S_{CE}+S_{DF}=50\ \Rightarrow\ M_{CE}+M_{EC}+M_{DF}+M_{FD}=300\qquad (I)$$

تعادل افقی کل قاب:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0\ :\ -S_{AC}-S_{BD}+50+100=0\ \Rightarrow\ S_{AC}+S_{BD}=150\ \Rightarrow\ M_{AC}+M_{CA}+M_{BD}+M_{DB}=900\qquad (II)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^C=0\ :\ M_{CA}+M_{CD}+M_{CE}=0\qquad (III)\quad,\quad +\circlearrowleft\sum M^D=0\ :\ M_{DB}+M_{DC}+M_{DF}=0\qquad (IV)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^E=0\ :\ M_{EC}+M_{EF}=0\qquad (IV)\quad,\quad +\circlearrowleft\sum M^F=0\ :\ M_{FD}+M_{FE}=0\qquad (VI)$$

با جایگزینی مقادیر متناظر با لنگرها از معادلات شیب - افت در روابط (I) تا (VI) به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases}EI\theta_C+EI\theta_D+EI\theta_E+EI\theta_F+\frac{2EI}{3}\Delta_2=300\\ EI\theta_C+EI\theta_D+\frac{2EI}{3}\Delta_1=900\\ 2EI\theta_C+\frac{EI}{3}\theta_D+\frac{EI}{3}\theta_E+\frac{EI}{6}\Delta_1+\frac{EI}{6}\Delta_2=-300\\ \frac{EI}{3}\theta_C+2EI\theta_D+\frac{EI}{3}\theta_F+\frac{EI}{6}\Delta_1+\frac{EI}{6}\Delta_2=300\\ \frac{EI}{3}\theta_C+\frac{4EI}{3}\theta_E+\frac{EI}{3}\theta_F+\frac{EI}{6}\Delta_2=-300\\ \frac{EI}{3}\theta_D+\frac{EI}{3}\theta_E+\frac{4EI}{3}\theta_F+\frac{EI}{6}\Delta_2=300\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_C=-\frac{365/84}{EI}\quad,\quad\theta_D=-\frac{108/70}{EI}\quad,\quad\theta_E=-\frac{355/32}{EI}\\ \theta_F=\frac{158/96}{EI}\quad,\quad\Delta_1=\frac{2061/82}{EI}\quad,\quad\Delta_2=\frac{1456/36}{EI}\end{cases}$$

با جایگزینی مقادیر θ_C ، θ_D ، θ_E ، θ_F ، Δ_1 و Δ_2 در معادلات شیب - افت اعضا، مقادیر لنگرهای خمشی در انتهای اعضای قاب به دست می‌آید.

$$\blacktriangleright\vec{M}_{AC}=221/7\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{CA}=99/75\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{BD}=307/4\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{DB}=271/2\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$

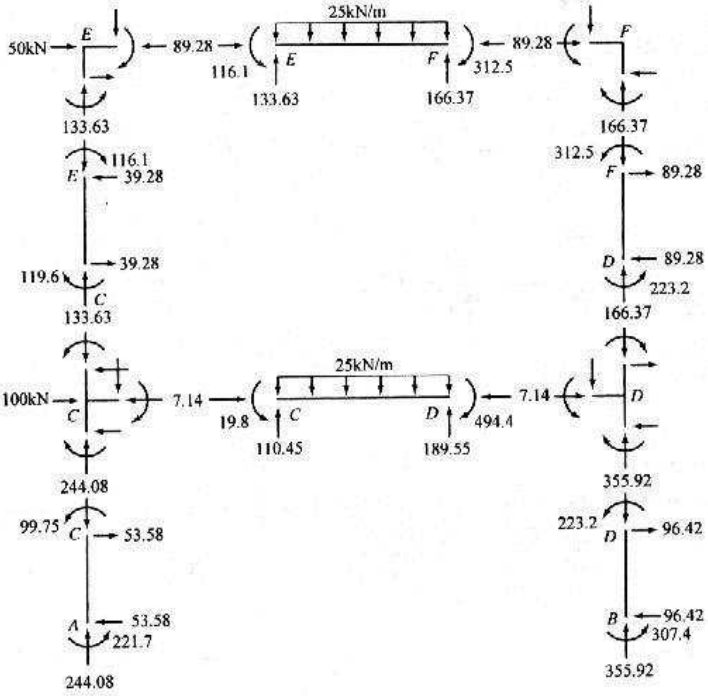
$$\blacktriangleright\vec{M}_{FD}=312/5\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{DF}=223/2\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{EC}=116/1\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{CE}=119/6\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

$$\blacktriangleright\vec{M}_{CD}=19/8\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{DC}=494/4\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{EF}=116/1\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{FE}=312/5\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

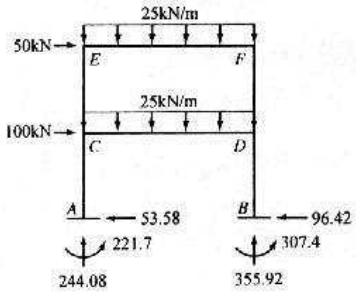
$$\Delta_1=\frac{2061/82}{(200\times10^{+6})(3/9\times10^{-4})}=26/43\ mm\quad,\quad\Delta_2=\frac{1456/36}{(200\times10^{6})(3/9\times10^{-2})}=18/67\ mm$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Delta_F=\Delta_1+\Delta_2=26/43+18/67=45/1\ mm\qquad\blacktriangleright\Delta_F=45/1\ mm\rightarrow$$

تغییر مکان افقی گره F:



نیروهای برشی، لنگرهای خمشی و نیروهای محوری در انتهای اعضا



واکنشهای تکیه‌گاهی

کنترل تعادل کل قاب:

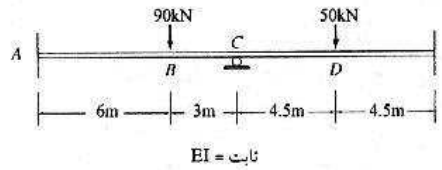
$$\pm \sum F_x = ۱۰۰ + ۵۰ - ۵۳/۵۸ - ۹۶/۴۲ = ۰ \qquad O.K.$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۳۵۵/۹۲ + ۲۴۴/۰۸ - ۲۵(۱۲) - ۲۵(۱۲) = ۰ \qquad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۳۵۵/۹۲(۱۲) + ۳۰۷/۴ + ۲۲۱/۷ - ۱۰۰(۶) - ۵۰(۱۲) - ۲۵(۱۲)(۶)(۲) = ۰/۱۴ \simeq ۰ \qquad O.K.$$

تیرهای نشان داده شده در مسایل ۹-۱۳ تا ۹-۱۵ را با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کرده، پس از به دست آوردن واکنشهای تکیه‌گاهی نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کنید.

۹-۱۳



EI = ثابت

$$FEM_{AC} = -۶۰ \ kN.m \ , \ FEM_{CA} = ۱۲۰ \ kN.m$$

$$FEM_{CE} = -۵۶/۲۵ \ kN.m \ , \ FEM_{EC} = ۵۶/۲۵ \ kN.m$$

$$M_{AC} = \frac{۲EI}{۹}\left[۲\theta_A + \theta_C - ۳\psi_{AC}\right] - ۶۰ = \frac{۲EI}{۹}\theta_C - ۶۰$$

شکل ۹-۱۳

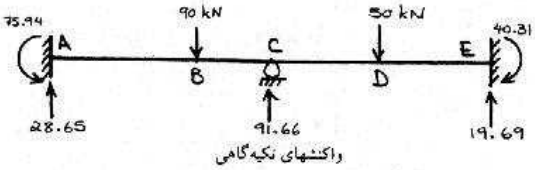
$$M_{CA}=\frac{2EI}{9}\left(2\theta_C+\theta_A-3\psi_{AC}\right)+120=\frac{4EI}{9}\theta_C+120$$

$$M_{CE}=\frac{2EI}{9}\left(2\theta_C+\theta_E-3\psi_{CE}\right)-56/25=\frac{4EI}{9}\theta_C-56/25$$

$$M_{EC}=\frac{2EI}{9}\left(2\theta_E+\theta_C-3\psi_{CE}\right)+56/25=\frac{2EI}{9}\theta_C+56/25$$

$$+\circlearrowleft\sum M^C=0\ :\ M_{CE}+M_{CD}=0\ \Rightarrow\ \frac{4EI}{9}\theta_C+120+\frac{4EI}{9}\theta_C-56/25=0\ \Rightarrow\ \frac{8EI}{9}\theta_C+63/75=0$$

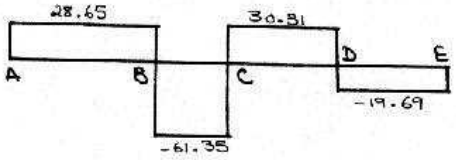
$$\theta_C=-\frac{71/72}{EI}$$



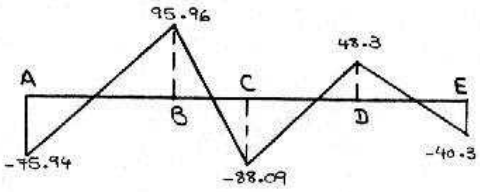
واکنشهای تکیه‌گاهی

$$\blacktriangleright\vec{M}_{AC}=75/94\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{CA}=88/13\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

$$\blacktriangleright\vec{M}_{CE}=88/13\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{EC}=40/31\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

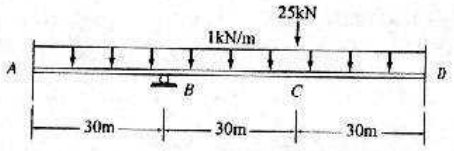


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۱۴-۹



$E = 200\ GPa\ ,\ I = 1\times10^{11}\ mm^4$

شکل ۱۴-۹

$$F.E.M_{AB}=-\frac{1(30)^2}{12}=-75\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{BA}=\frac{1(30)^2}{12}=75\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{BD}=-\frac{1(60)^2}{12}-\frac{25(60)}{8}=-487/5\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{DB}=\frac{1(60)^2}{12}+\frac{25(60)}{8}=487/5\ \ kN.m$$

$$M_{AB}=\frac{2EI}{30}\left(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB}\right)-75=0/0667EI\theta_B-75$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{30}\left(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{AB}\right)+75=0/1333EI\theta_B+75$$

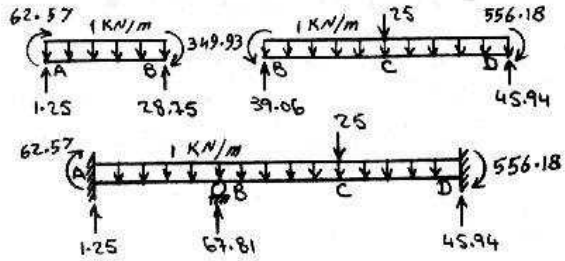
$$M_{BD}=\frac{2EI}{60}\left(2\theta_B+\theta_D-3\psi_{BD}\right)-487/5=0/0667EI\theta_B-487/5$$

$$M_{DB}=\frac{2EI}{60}\left(2\theta_D+\theta_B-3\psi_{BD}\right)+487/5=0/0333EI\theta_B+487/5$$

$$+\circlearrowleft\sum M^B=0\ :\ M_{BA}+M_{BD}=0\ \Rightarrow\ 0/1333EI\theta_B+75+0/0667EI\theta_B-487/5=0$$

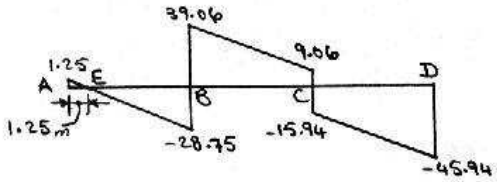
$$0/2EI\theta_B-412/5=0\ \Rightarrow\ \theta_B=\frac{2062/5}{EI}$$

$$\blacktriangleright\vec{M}_{AB}=62/57\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{BA}=349/93\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{BD}=349/93\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\ \blacktriangleright\vec{M}_{DB}=556/18\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

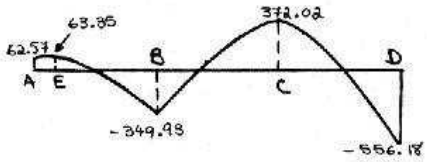


تیروهای برشی و لنگرهای خمشی در انتهای دهانه‌ها

واکنشهای تکیه‌گاهی



نمودار نیروی برشی ، kN



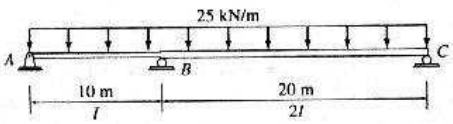
نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۱۵-۹

$$F.E.M_{AB} = -F.E.M_{BA} = -\frac{۲۵(۱۰)^۲}{۱۲} = ۲۰۸/۳۳ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{BC} = -F.E.M_{CB} = -\frac{۲۵(۲۰)^۲}{۱۲} = -۸۳۳/۳۳ \quad kN.m$$

برای اعضای AB و BC از روابط شیب - افت اصلاح شده برای عضو با یک انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم.

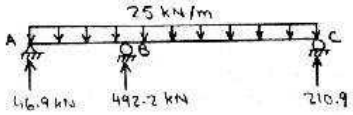


$E = ۲۰۰ \text{ GPa}$ ، $I = ۵۰۰ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^۴$

شکل ۱۵-۹

$$M_{BA} = \frac{۳EI}{۱۰}\theta_B - \frac{۳EI}{۱۰}\psi_{AB} + ۲۰۸/۳۳ - \frac{۱}{۲}(-۲۰۸/۳۳) = ۰/۳EI\theta_B + ۳۱۲/۵$$

$$M_{BC} = \frac{۳E(۲I)}{۲۰}\theta_B - \frac{۳E(۲I)}{۲۰}\psi_{BC} - ۸۳۳/۳۳ - \frac{۱}{۲}(۸۳۳/۳۳) = ۰/۳EI\theta_B - ۱۲۵۰$$

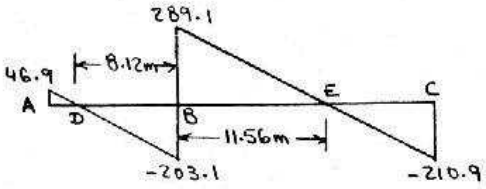


$$+\circlearrowright \sum M^B = ۰ \;:\; M_{BA} + M_{BC} = ۰$$

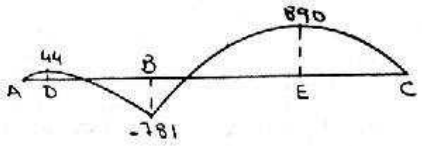
$$۰/۳EI\theta_B + ۳۱۲/۵ + ۰/۳EI\theta_B - ۱۲۵۰ = ۰$$

$$۰/۶EI\theta_B - ۹۳۷/۵ = ۰ \Rightarrow \theta_B = \frac{۱۵۶۲/۵}{EI}$$

واکنشهای تکیه‌گاهی

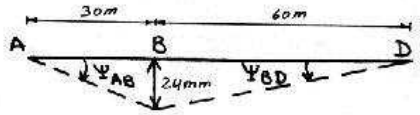


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

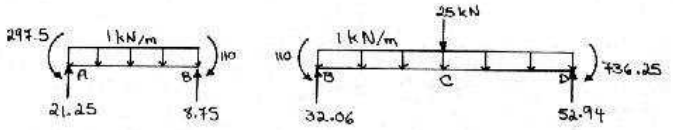
۹-۱۶ اگر در مسئلهٔ ۹-۱۴ علاوه بر بارهای وارده، تکیه‌گاه B به اندازهٔ ۲۴ mm نشست کند، مجدداً مسئله را با استفاده از روش شیب - افت حل کنید.



دوران میان تار اعضا به علت نشست تکیه‌گاه B

$$F.E.M_{AB} = -۷۵ \ kN.m \ , \ F.E.M_{BA} = ۷۵ \ kN.m$$
$$F.E.M_{BD} = -۴۸۷/۵ \ kN.m \ , \ F.E.M_{DB} = ۴۸۷/۵ \ kN.m$$
$$\psi_{AB} = \frac{۲۴ - ۰}{۳۰۰۰۰} = ۰/۰۰۰۸ \ , \ \psi_{BD} = \frac{۰ - ۲۴}{۶۰۰۰۰} = -۰/۰۰۰۴$$
$$M_{AB} = \frac{۲EI}{۳۰}\left[۲\theta_A + \theta_B - ۳\psi_{AB}\right] - ۷۵$$

$$M_{AB} = \frac{۲(۳۰۰\times۱۰^{۶})(۱/۰\times۱۰^{-۲})}{۳۰}\left[\theta_B - ۳(۰/۰۰۰۸)\right] - ۷۵ = ۲۰۰۰۰۰\theta_B - ۵۵۵$$
$$M_{BA} = \frac{۲EI}{۳۰}\left[۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{AB}\right] + ۷۵ = \frac{۲(۳۰۰\times۱۰^{۶})(۱/۰\times۱۰^{-۲})}{۳۰}\left[۲\theta_B - ۳(۰/۰۰۰۸)\right] + ۷۵ = ۴۰۰۰۰۰\theta_B - ۴۰۵$$
$$M_{BD} = \frac{۲EI}{۶۰}\left[۲\theta_B + \theta_D - ۳\psi_{BD}\right] - ۴۸۷/۵ = \frac{۲(۳۰۰\times۱۰^{۶})(۱/۰\times۱۰^{-۲})}{۶۰}\left[۲\theta_B - ۳(-۰/۰۰۰۴)\right] - ۴۸۷/۵ = ۲۰۰۰۰۰\theta_B - ۳۶۷/۵$$
$$M_{DB} = \frac{۲EI}{۶۰}\left[۲\theta_D + \theta_B - ۳\psi_{BD}\right] + ۴۸۷/۵ = \frac{۲(۳۰۰\times۱۰^{۶})(۱/۰\times۱۰^{-۲})}{۶۰}\left[\theta_B - ۳(-۰/۰۰۰۴)\right] + ۴۸۷/۵ = ۱۰۰۰۰۰\theta_B + ۶۰۷/۵$$
$$+\circlearrowleft \sum M^B = ۰ \ : \ M_{BD} + M_{BA} = ۰ \ \Rightarrow \ ۲۰۰۰۰۰\theta_B - ۳۶۷/۵ + ۴۰۰۰۰۰\theta_B - ۴۰۵ = ۰$$
$$۶۰۰۰۰۰\theta_B - ۷۷۲/۵ = ۰ \ \Rightarrow \ \theta_B = ۰/۰۰۱۲۸۷۵$$

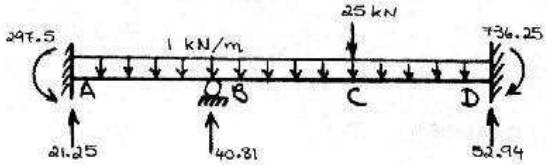


نیروهای برشی و لنگرهای خمشی در انتهای دهانه‌ها

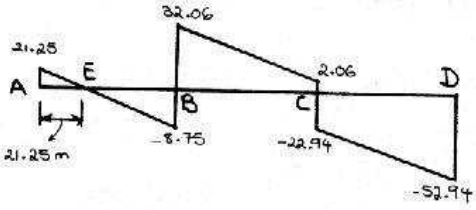
$$\blacktriangleright \vec{M}_{AB} = ۲۹۷/۵ \ kN.m \circlearrowleft$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۱۱۰ \ kN.m \circlearrowright$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{BD} = ۱۱۰ \ kN.m \circlearrowleft$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{DB} = ۷۳۶/۲۵ \ kN.m \circlearrowright$$

کنترل تعادل کل نیز:

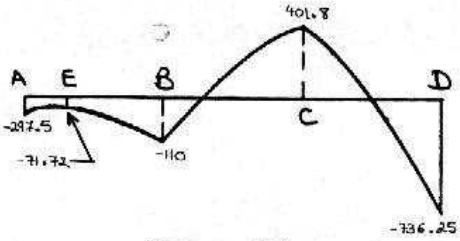
$$+\uparrow \sum F_y = -۱(۹۰) - ۲۵ + ۵۳/۱ + ۴۰/۶۵ + ۲۱/۲۵ = ۰ \quad O.K.$$
$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۵۲/۹۴(۹۰) - ۱(۹۰)(۴۵) - ۲۵(۶۰) + ۴۰/۸۱(۳۰) + ۲۹۷/۵ - ۷۳۶/۲۵ \simeq ۰$$



واکنشهای تکیه‌گاهی



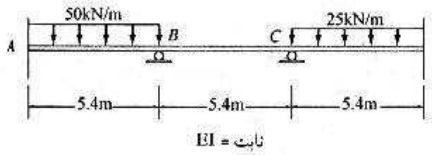
نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

در مسایل ۹-۱۷ تا ۹-۱۹ تیر نشان داده شده را با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کرده، واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی را نیز ترسیم کنید.

۱۷-۹



EI = ثابت

شکل ۱۷-۹

$$F.E.M_{AB} = -\frac{۵۰(۵/۴)^۲}{۱۲} = -۱۲۱/۵ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{BA} = \frac{۵۰(۵/۴)^۲}{۱۲} = ۱۲۱/۵ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{CD} = -\frac{۲۵(۵/۴)^۲}{۱۲} = -۶۰/۷۵ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{DC} = \frac{۲۵(۵/۴)^۲}{۱۲} = ۶۰/۷۵ \quad kN.m$$

$$M_{AB} = \frac{۲EI}{۵/۴}\left[۲\theta_A + \theta_B - ۳\psi_{AB}\right] - ۱۲۱/۵ = ۰/۳۷۰۴EI\theta_B - ۱۲۱/۵$$

$$M_{BA} = \frac{۲EI}{۵/۴}\left[۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{AB}\right] + ۱۲۱/۵ = ۰/۷۴۰۷EI\theta_B + ۱۲۱/۵$$

$$M_{BC} = \frac{۲EI}{۵/۴}\left[۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}\right] = ۰/۷۴۰۷EI\theta_B + ۰/۳۷۰۴EI\theta_C$$

$$M_{CB} = \frac{۲EI}{۵/۴}\left[۲\theta_C + \theta_B - ۳\psi_{AB}\right] = ۰/۳۷۰۴EI\theta_B + ۰/۷۴۰۷EI\theta_C$$

$$M_{CD} = \frac{۲EI}{۵/۴}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] - ۶۰/۷۵ = ۰/۷۴۰۷EI\theta_C - ۶۰/۷۵$$

$$M_{DC} = \frac{۲EI}{۵/۴}\left[۲\theta_D + \theta_C - ۳\psi_{CD}\right] + ۶۰/۷۵ = ۰/۳۷۰۴EI\theta_C + ۶۰/۷۵$$

$$+\circlearrowright \sum M^B = ۰ \;:\; M_{BA} + M_{BC} = ۰ \Rightarrow ۰/۷۴۰۷EI\theta_B + ۱۲۱/۵ + ۰/۷۴۰۷EI\theta_B + ۰/۳۷۰۴EI\theta_C = ۰$$

$$۱/۴۸۱۴EI\theta_B + ۰/۳۷۰۴EI\theta_C = -۱۲۱/۵ \quad (I)$$

$$+\circlearrowright \sum M^C = ۰ \;:\; M_{CB} + M_{CD} = ۰ \Rightarrow ۰/۳۷۰۴EI\theta_B + ۰/۷۴۰۷EI\theta_C + ۰/۷۴۰۷EI\theta_C - ۶۰/۷۵ = ۰$$

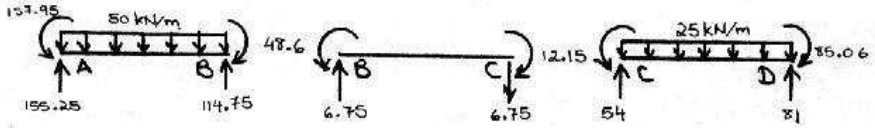
$$۰/۳۷۰۴EI\theta_B + ۱/۴۸۱۴EI\theta_C = ۶۰/۷۵ \quad (II)$$

از حل دستگاه معادلات (I) و (II) خواهیم داشت:

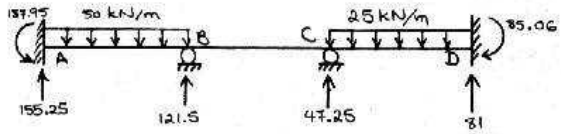
$$\theta_B = -\frac{۹۸/۴۲}{EI} \quad , \quad \theta_C = \frac{۶۵/۶۲}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AB} = ۱۵۷/۹۵ \quad kN.m \;\circlearrowright\;, \quad \blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۴۸/۶ \quad kN.m \;\circlearrowleft\;, \quad \blacktriangleright \vec{M}_{BC} = ۴۸/۶ \quad kN.m \;\circlearrowright$$

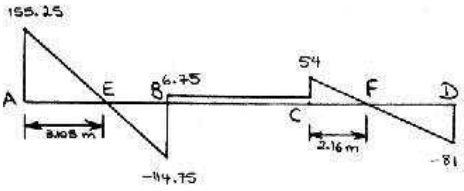
$$\blacktriangleright \vec{M}_{CB} = ۱۲/۱۵ \quad kN.m \;\circlearrowleft\;, \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۱۲/۱۵ \quad kN.m \;\circlearrowright\;, \quad \blacktriangleright \vec{M}_{DC} = ۸۵/۰۶ \quad kN.m \;\circlearrowleft$$



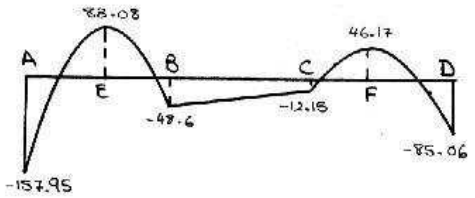
نیروهای برشی و لنگرهای خمشی در انتهای دهانه‌ها



واکنشهای تکیه‌گاهی

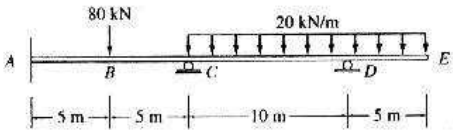


نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی، kN.m

۱۸-۹



EI = ثابت

شکل ۹-۱۸

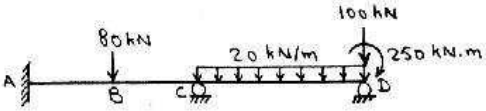
$$F.E.M_{AC}=\frac{-۸۰(۱۰)}{۸}=-۱۰۰\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{CA}=\frac{۸۰(۱۰)}{۸}=۱۰۰\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{CD}=-\frac{۲۰(۱۰)^{۲}}{۱۲}=-۱۶۶/۷\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{DC}=\frac{۲۰(۱۰)^{۲}}{۱۲}=۱۶۶/۷\ \ kN.m$$

قسمت طره‌ای DE را حذف کرده و بارهای وارد بر آن را به صورت یک نیرو و لنگر متمرکز بر گره D وارد می‌کنیم.



$$M_{AC}=\frac{۲EI}{۱۰}\left[۲\theta_A+\theta_C-۳\psi_{AC}\right]-۱۰۰=۰/۲EI\theta_C-۱۰۰$$

$$M_{CA}=\frac{۲EI}{۱۰}\left[۲\theta_C+\theta_A-۳\psi_{AC}\right]+۱۰۰=۰/۴EI\theta_C+۱۰۰$$

$$M_{CD}=\frac{۲EI}{۱۰}\left[۲\theta_C+\theta_D-۳\psi_{CD}\right]-۱۶۶/۷=۰/۴EI\theta_C+۰/۲EI\theta_D-۱۶۶/۷$$

$$M_{DC}=\frac{۲EI}{۱۰}\left[۲\theta_D+\theta_C-۳\psi_{CD}\right]+۱۶۶/۷=۰/۲EI\theta_C+۰/۴EI\theta_D+۱۶۶/۷$$

$$+\circlearrowleft\ \sum M^{C}=۰\ :\ M_{CA}+M_{CD}=۰\ \Rightarrow\ ۰/۴EI\theta_C+۱۰۰+۰/۴EI\theta_C+۰/۲EI\theta_D-۱۶۶/۷=۰$$

$$۰/۸EI\theta_C+۰/۲EI\theta_D=۶۶/۷\qquad (I)$$

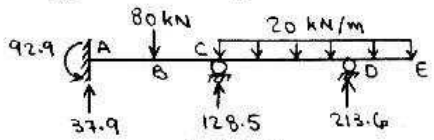
$$+\circlearrowleft\ \sum M^{D}=۰\ :\ M_{DC}-۲۵۰=۰\ \Rightarrow\ ۰/۲EI\theta_C+۰/۴EI\theta_D+۱۶۶/۷-۲۵۰=۰\ \Rightarrow\ ۰/۲EI\theta_C+۰/۴EI\theta_D=۸۳/۳\qquad (II)$$

از حل دستگاه معادلات (I) و (II) مقادیر θ_D و θ_C به دست می‌آیند

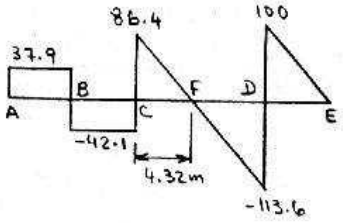
$$\theta_C=\frac{۳۵/۷۱}{EI}\quad ,\quad \theta_D=\frac{۱۹۰/۴۸}{EI}$$

$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{AC}=۹۲/۹\ \ kN.m\circlearrowleft,\quad \vec{M}_{CA}=۱۱۴/۳\ \ kN.m\circlearrowright$$

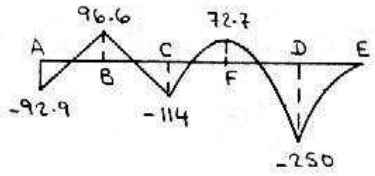
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{CD}=۱۱۴/۳\ \ kN.m\circlearrowleft$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

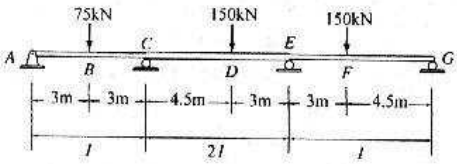


نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی، kN.m

۱۹-۹



$E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۲\times۱۰^{۹}\ mm^{۴}$

شکل ۱۹-۹

$$F.E.M_{AC} = -\frac{۷۵(۶)}{۸} = -۵۶/۲۵\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{CA} = \frac{۷۵(۶)}{۸} = ۵۶/۲۵\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{CE} = -\frac{۱۵۰(۴/۵)(۳)^{۲}}{۷/۵^{۲}} = -۱۰۸\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{EC} = \frac{۱۵۰(۴/۵)^{۲}(۳)}{۷/۵^{۲}} = ۱۶۲\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{EG} = -\frac{۱۵۰(۳)(۴/۵)^{۲}}{۷/۵^{۲}} = -۱۶۲\ \ kN.m \quad , \quad F.E.M_{GE} = \frac{۱۵۰(۳)^{۲}(۴/۵)}{۷/۵^{۲}} = ۱۰۸\ \ kN.m$$

برای اعضای AC و EG از روابط شیب - افت اصلاح شدهٔ عضو با یک انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم.

$$M_{CA} = \frac{۳EI}{۶}\theta_C - \frac{۳EI}{۶}\psi_{AC} + ۵۶/۲۵ - \frac{۱}{۲}(-۵۶/۲۵) = ۰/۵EI\theta_C + ۸۴/۳۷۵$$

$$M_{CE} = \frac{۲E(۲I)}{۷/۵}\left[۲\theta_C + \theta_E - ۳\psi_{CE}\right] - ۱۰۸ = ۱/۰۶۶۷EI\theta_C + ۰/۵۳۳EI\theta_E - ۱۰۸$$

$$M_{EC} = \frac{۲E(۲I)}{۷/۵}\left[۲\theta_E + \theta_C - ۳\psi_{CE}\right] + ۱۶۲ = ۰/۵۳۳EI\theta_C + ۱/۰۶۶۷EI\theta_E + ۱۶۲$$

$$M_{EG} = \frac{۳EI}{۷/۵}\theta_E - \frac{۳EI}{۷/۵}\psi_{EG} - ۱۶۲ - \frac{۱}{۲}(۱۰۸) = ۰/۴EI\theta_E - ۲۱۶$$

$$+\circlearrowright \sum M^C = ۰ \ : \ M_{CA} + M_{CE} = ۰ \ \Rightarrow \ ۰/۵EI\theta_C + ۸۴/۳۷۵ + ۱/۰۶۶۷EI\theta_C + ۰/۵۳۳EI\theta_E - ۱۰۸ = ۰$$

$$۱/۵۶۶۷EI\theta_C + ۰/۵۳۳EI\theta_E = ۲۳/۶۲۵ \quad (I)$$

$$+\circlearrowright \sum M^E = ۰ \ : \ M_{EC} + M_{EG} = ۰ \ \Rightarrow \ ۰/۵۳۳EI\theta_C + ۱/۰۶۶۷EI\theta_E + ۱۶۲ + ۰/۴EI\theta_E - ۲۱۶ = ۰$$

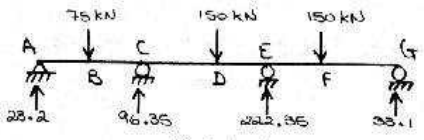
$$۰/۵۳۳EI\theta_C + ۱/۴۶۶۷EI\theta_E = ۵۴ \quad (II)$$

$$\theta_C = \frac{۲/۹۱۴}{EI} \quad , \quad \theta_E = \frac{۳۵/۷۵۸}{EI}$$

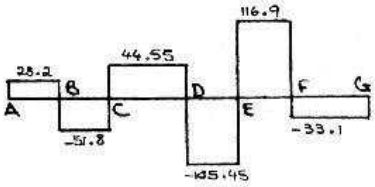
از حل دستگاه معادلات (I) و (II) خواهیم داشت:

$$\blacktriangleright \vec{M}_{CA} = ۸۵/۸۳\ \ kN.m\ \big) \ , \ \vec{M}_{CE} = ۸۵/۸۳\ \ kN.m\ \big)$$

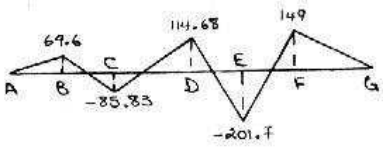
$$\blacktriangleright \vec{M}_{EC} = ۲۰۱/۷\ \ kN.m\ \big) \ , \ \vec{M}_{EG} = ۲۰۱/۷\ \ kN.m\ \big)$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

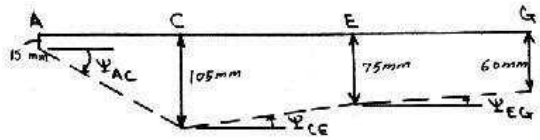


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۲۰-۹ مسئلهٔ ۹-۱۹ را بار دیگر با این فرض حل کنید که علاوه بر بارهای متمرکز اعمال شده بر تیر، تکیه‌گاههای A ، C ، E و G به ترتیب به اندازهٔ ۱۵ mm ، ۱۰۵ mm ، ۷۵ mm و ۶۰ mm نشست کنند.



دوران میان تار اعضا به علت نشستهای تکیه‌گاهی

$$F.E.M_{AC} = -۵۶/۲۵ \quad kN.m$$
$$F.E.M_{CA} = ۵۶/۲۵ \quad kN.m$$
$$F.E.M_{CE} = -۱۰۸ \quad kN.m$$
$$F.E.M_{EC} = ۱۶۲ \quad kN.m$$
$$F.E.M_{EG} = -۱۶۲ \quad kN.m$$
$$F.E.M_{GE} = ۱۰۸ \quad kN.m$$

$$EI = ۴۰۰۰۰۰ \quad kN/m^۲ \quad , \quad \psi_{AC} = \frac{۱۰۵ - ۱۵}{۶۰۰۰} = ۰/۰۱۵ \quad , \quad \psi_{CE} = \frac{۷۵ - ۱۰۵}{۷۵۰۰} = -۰/۰۰۴ \quad , \quad \psi_{EG} = \frac{۶۰ - ۷۵}{۷۵۰۰} = -۰/۰۰۲$$

$$M_{CA} = \frac{۳EI}{۶}\theta_C - \frac{۳EI}{۶}\psi_{AC} + ۵۶/۲۵ - \frac{۱}{۲}(-۵۶/۲۵) = \frac{۳(۴۰۰۰۰۰)}{۶}\theta_C - \frac{۳(۴۰۰۰۰۰)}{۶}(۰/۰۱۵) + ۸۴/۳۷۵$$

$$M_{CA} = ۲۰۰۰۰۰\theta_C - ۲۹۱۵/۶۲۵$$

$$M_{CE} = \frac{۲E(۲I)}{۷/۵}\left[۲\theta_C + \theta_E - ۳\psi_{CE}\right] - ۱۰۸ = \frac{۴(۴۰۰۰۰۰)}{۷/۵}\left[۲\theta_C + \theta_E - ۳(-۰/۰۰۴)\right] - ۱۰۸$$

$$M_{CE} = ۴۲۶۶۶۶/۶۷\theta_C + ۲۱۳۳۳۳/۳۳\theta_E + ۲۴۵۲$$

$$M_{EC} = \frac{۲E(۲I)}{۷/۵}\left[۲\theta_E + \theta_C - ۳\psi_{CE}\right] + ۱۶۲ = \frac{۴(۴۰۰۰۰۰)}{۷/۵}\left[۲\theta_E + \theta_C - ۳(-۰/۰۰۴)\right] + ۱۶۲$$

$$M_{EC} = ۲۱۳۳۳۳/۳۳\theta_C + ۴۲۶۶۶۶/۶۷\theta_E + ۲۷۲۲$$

$$M_{EG} = \frac{۳EI}{۷/۵}\theta_E - \frac{۳EI}{۷/۵}\psi_{EG} - ۱۶۲ - \frac{۱}{۲}(۱۰۸) = \frac{۳(۴۰۰۰۰۰)}{۷/۵}\theta_E - \frac{۳(۴۰۰۰۰۰)}{۷/۵}(-۰/۰۰۲) - ۲۱۶ = ۱۶۰۰۰۰\theta_E + ۱۰۴$$

$$+\circlearrowright \sum M^C = ۰ \quad : \quad M_{CA} + M_{CE} = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲۰۰۰۰۰\theta_C - ۲۹۱۵/۶۲۵ + ۴۲۶۶۶۶/۶۷\theta_C + ۲۱۳۳۳۳/۳۳\theta_E + ۲۴۵۲ = ۰$$

$$۶۲۶۶۶۶/۶۷\theta_C + ۲۱۳۳۳۳/۳۳\theta_E = ۴۶۳/۶۲۵ \qquad (I)$$

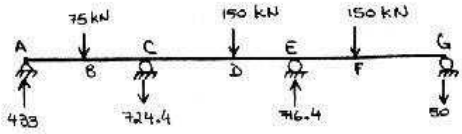
$$+\circlearrowright \sum M^E = ۰ \quad : \quad M_{EC} + M_{EG} = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲۱۳۳۳۳/۳۳\theta_C + ۴۲۶۶۶۶/۶۷\theta_E + ۲۷۲۲ + ۱۶۰۰۰۰\theta_E + ۱۰۴ = ۰$$

$$۲۱۳۳۳۳/۳۳\theta_C + ۵۸۶۶۶۶/۶۷\theta_E = -۲۸۲۶ \qquad (II)$$

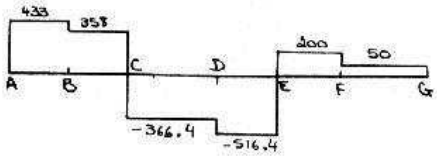
از حل دستگاه معادلات (I) و (II) مقادیر θ_B و θ_C به دست خواهد آمد.

$$\theta_C = ۰/۰۰۲۷۱ \quad , \quad \theta_E = -۰/۰۰۵۸$$

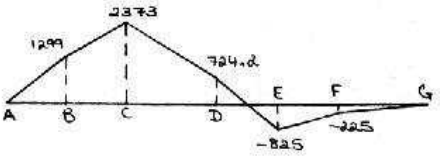
$$\blacktriangleright \vec{M}_{CA} = ۲۳۷۳ \quad kN.m \;\circlearrowright \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CE} = ۲۳۷۳ \quad kN.m \;\circlearrowright$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{EC} = ۸۲۵ \quad kN.m \;\circlearrowright \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{EG} = ۸۲۵ \quad kN.m \;\circlearrowright$$



واکنشهای تکیه‌گاهی



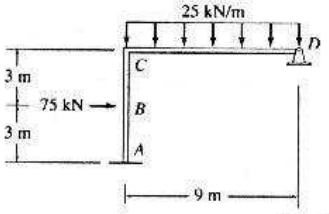
نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

در مسایل ۹-۲۱ تا ۹-۲۴ قاب نشان داده شده را با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کرده، سپس واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.

۹-۲۱



EI = ثابت ، $E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۴۰۰\times۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

شکل ۹-۲۱

$$F.E.M_{AC} = -\frac{۷۵(۶)}{۸} = -۵۶/۲۵\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{CA} = \frac{۷۵(۶)}{۸} = ۵۶/۲۵\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{CD} = -\frac{۲۵(۹)^{۲}}{۱۲} = -۱۶۸/۷۵\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{DC} = \frac{۲۵(۹)^{۲}}{۱۲} = ۱۶۸/۷۵\ \ kN.m$$

برای عضو CD از رابطهٔ شیب - افت اصلاح شدهٔ اعضای با انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم.

$$M_{CD} = \frac{۳EI}{۹}\theta_C - \frac{۳EI}{۹}\psi_{DC} - ۱۶۸/۷۵ - \frac{۱}{۲}(۱۶۸/۷۵) = \frac{EI}{۳}\theta_C - ۲۵۳/۱۳$$

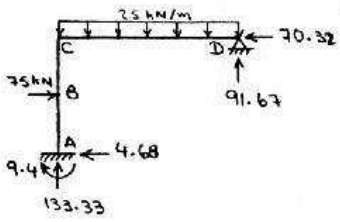
$$M_{AC} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_A + \theta_C - ۳\psi_{AC}\right] - ۵۶/۲۵ = \frac{EI}{۳}\theta_C - ۵۶/۲۵ \quad , \quad M_{CA} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_C + \theta_A - ۳\psi_{AC}\right] + ۵۶/۲۵ = \frac{۲EI}{۳}\theta_C + ۵۶/۱$$

$$+\circlearrowleft \sum M^C = ۰ \ : \ M_{CA} + M_{CD} = ۰ \ \Rightarrow \ \frac{۲EI}{۳}\theta_C + ۵۶/۲۵ + \frac{EI}{۳}\theta_C - ۲۵۳/۱۳ = ۰$$

$$EI\theta_C - ۱۹۶/۸۸ = ۰ \ \Rightarrow \ \theta_C = \frac{۱۹۶/۸۸}{EI}$$

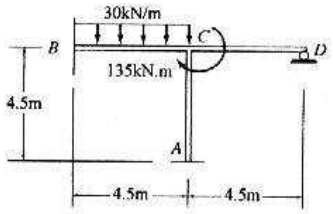
$$\blacktriangleright \vec{M}_{AC} = ۹/۳۸\ \ kN.m\ \circlearrowright \ , \ \blacktriangleright \vec{M}_{CA} = ۱۸۷/۵\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۱۸۷/۵\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

۹-۲۲



EI = ثابت ، $E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۱/۴\times۱۰^{۹}\ mm^{۴}$

شکل ۹-۲۲

$$F.E.M_{BC} = -\frac{۳۰(۴/۵)^{۲}}{۱۲} = -۵۰/۶۲۵\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{CB} = \frac{۳۰(۴/۵)^{۲}}{۱۲} = ۵۰/۶۲۵\ \ kN.m$$

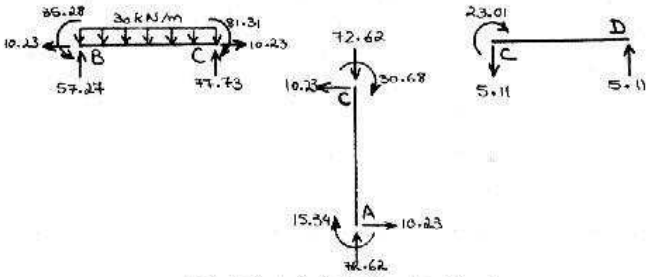
برای عضو CD از رابطهٔ شیب - افت اصلاح شدهٔ اعضای با یک انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم.

$$M_{CD} = \frac{۳EI}{۴/۵}\theta_C - \frac{۳EI}{۴/۵}\psi_{CD} = \frac{۲EI}{۳}\theta_C$$

$$M_{BC} = \frac{۲EI}{۴/۵}\left[۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}\right] - ۵۰/۶۲۵ = \frac{۴EI}{۹}\theta_C - ۵۰/۶۲۵$$

$$M_{CB}=\frac{2EI}{4/5}\left[2\theta_C+\theta_B-3\psi_{BC}\right]+50/625=\frac{8EI}{9}\theta_C+50/625$$

$$M_{AC}=\frac{2EI}{4/5}\left[2\theta_A+\theta_C-3\psi_{AC}\right]=\frac{4EI}{9}\theta_C \quad , \quad M_{CA}=\frac{2EI}{4/5}\left[2\theta_C+\theta_A-3\psi_{AC}\right]=\frac{8EI}{9}\theta_C$$



نیروهای برشی و لنگرهای خمشی در انتهای اعضا

$$+\circlearrowleft \sum M^C=0 \ :$$

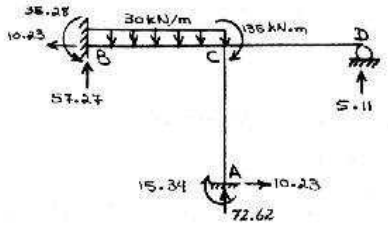
$$M_{CB}+M_{CA}+M_{CD}-135=0$$

$$\frac{8EI}{9}\theta_C+50/625+\frac{8EI}{9}\theta_C+\frac{2EI}{3}\theta_C-135=0$$

$$\frac{22EI}{9}\theta_C-84/375=0$$

$$\theta_C=\frac{33/52}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AC}=15/34 \quad kN.m \ \blacktriangleleft$$

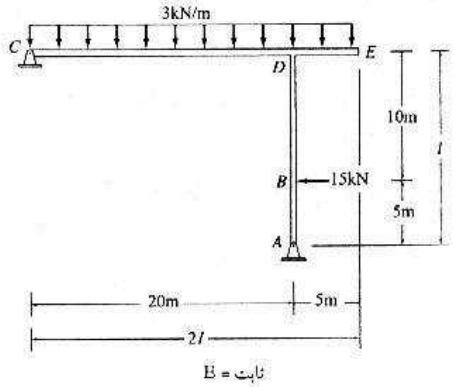


واکنشهای تکیه‌گاهی

$$\blacktriangleright \vec{M}_{CA}=30/68 \quad kN.m \ \blacktriangleleft \ , \ \vec{M}_{BC}=35/28 \quad kN.m \ \blacktriangleleft$$

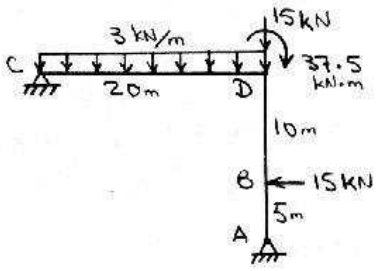
$$\blacktriangleright \vec{M}_{CB}=81/31 \quad kN.m \ \blacktriangleleft \ , \ \vec{M}_{CD}=23/01 \quad kN.m \ \blacktriangleleft$$

۹-۲۳



B = ثابت

شکل ۹-۲۳



سازهٔ اصلی پس از حذف طره

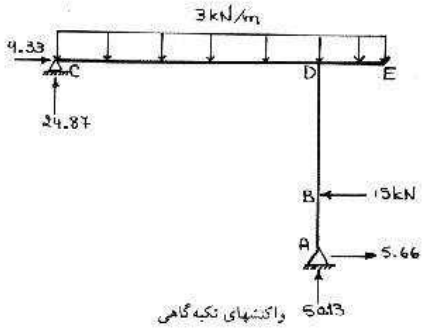
$$F.E.M_{AD}=-\frac{15(5)(10)^2}{(15)^2}=+33/33 \quad kN.m$$

$$F.E.M_{DA}=\frac{15(5)^2(10)}{(15)^2}=-16/67 \quad kN.m$$

$$F.E.M_{CD}=-\frac{3(20)^2}{12}=-100 \quad kN.m \quad , \quad F.E.M_{DC}=\frac{3(20)^2}{12}=100 \quad kN.m$$

$$M_{DA}=\frac{3EI}{15}\theta_D-\frac{3EI}{15}\psi_{AD}-16/67-\frac{1}{2}(33/33)=0/2EI\theta_D-33/34$$

$$M_{DC}=\frac{3E(2I)}{20}\theta_D-\frac{3E(2I)}{20}\psi_{DC}+100-\frac{1}{2}(-100)=0/3EI\theta_D+150$$



واکنشهای تکیه گاهی

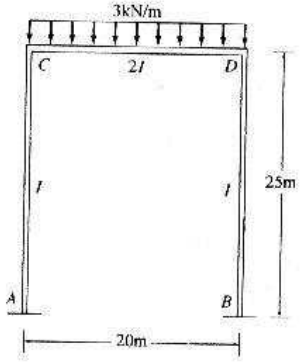
$$+\circlearrowleft \sum M^D = 0 \;:\; M_{DA} + M_{DC} - ۳۷/۵ = 0$$

$$۰/۲EI\theta_D - ۳۳/۳۴ + ۰/۳EI\theta_D + ۱۵۰ - ۳۷/۵ = 0$$

$$۰/۵EI\theta_D + ۷۹/۱۶ = 0 \Rightarrow \theta_D = -\frac{۱۵۸/۳۲}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{DA} = ۶۵/۰ \;\; kN.m \;\circlearrowleft\;,\quad \blacktriangleright \vec{M}_{DC} = ۱۰۲/۵ \;\; kN.m \;\circlearrowright$$

۲۴-۹



E = ثابت

شکل ۲۴-۹

$$F.E.M_{CD} = -\frac{۳(۲۰)^۲}{۱۲} = -۱۰۰ \;\; kN.m \;,\quad F.E.M_{DC} = \frac{۳(۲۰)^۲}{۱۲} = ۱۰۰ \;\; kN.m$$

این قاب در حالت کلی دارای یک درجه آزادی انتقالی (Δ) است، ولی به علت تقارن بارگذاری و مشخصات مقاطع ثابت می‌شود که $\Delta = 0$ بوده و در نتیجه درجهٔ آزادی (Δ) از روابط شیب - افت حذف خواهد شد.

$$M_{AC} = \frac{۲EI}{۲۵}\left[۲\theta_A + \theta_C - ۳\psi_{AC}\right] = ۰/۰۸EI\theta_C$$

$$M_{CA} = \frac{۲EI}{۲۵}\left[۲\theta_C + \theta_A - ۳\psi_{AC}\right] = ۰/۱۶EI\theta_C$$

$$M_{BD} = \frac{۲EI}{۲۵}\left[۲\theta_B + \theta_D - ۳\psi_{BD}\right] = ۰/۰۸EI\theta_D$$

$$M_{DB} = \frac{۲EI}{۲۵}\left[۲\theta_D + \theta_B - ۳\psi_{BD}\right] = ۰/۱۶EI\theta_D$$

$$M_{CD} = \frac{۲E(۲I)}{۲۰}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] - ۱۰۰ = ۰/۴EI\theta_C + ۰/۲EI\theta_D - ۱۰۰$$

$$M_{DC} = \frac{۲E(۲I)}{۲۰}\left[۲\theta_D + \theta_C - ۳\psi_{CD}\right] + ۱۰۰ = ۰/۲EI\theta_C + ۰/۴EI\theta_D + ۱۰۰$$

$$+\circlearrowleft \sum M^C = 0 \;:\; M_{CA} + M_{CD} = 0 \Rightarrow ۰/۱۶EI\theta_C + ۰/۴EI\theta_C + ۰/۲EI\theta_D - ۱۰۰ = 0$$

$$۰/۵۶EI\theta_C + ۰/۲EI\theta_D = ۱۰۰ \qquad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M^D = 0 \;:\; M_{DC} + M_{DB} = 0 \Rightarrow ۰/۲EI\theta_C + ۰/۴EI\theta_D + ۰/۱۶EI\theta_D + ۱۰۰ = 0$$

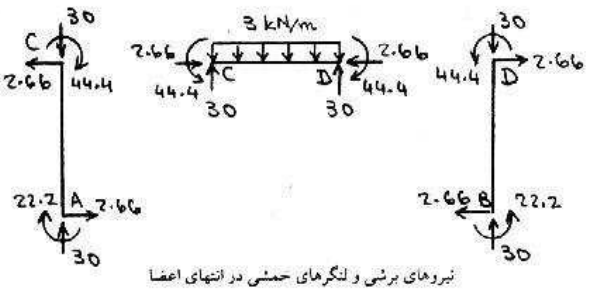
$$۰/۲EI\theta_C + ۰/۵۶EI\theta_D = -۱۰۰ \qquad (II)$$

از حل دستگاه معادلات (I) و (II) مقادیر θ_C و θ_D به دست می‌آید

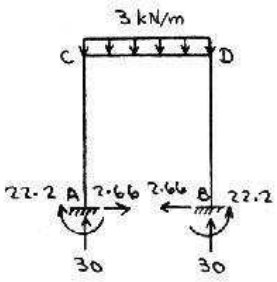
$$\theta_C = \frac{۲۷۷/۷۸}{EI} \;,\quad \theta_D = -\frac{۲۷۷/۷۸}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AC} = ۲۲/۲ \;\; kN.m \;\circlearrowleft\;,\quad \blacktriangleright \vec{M}_{BD} = ۲۲/۲ \;\; kN.m \;\circlearrowright\;,\quad \blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۴۴/۴ \;\; kN.m \;\circlearrowright$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{CA} = ۴۴/۴ \;\; kN.m \;\circlearrowleft\;,\quad \blacktriangleright \vec{M}_{DB} = ۴۴/۴ \;\; kN.m \;\circlearrowright\;,\quad \blacktriangleright \vec{M}_{DC} = ۴۴/۴ \;\; kN.m \;\circlearrowleft$$

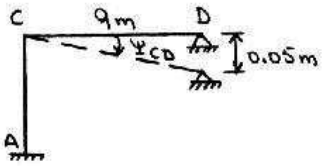


نیروهای برشی و لنگرهای خمشی در انتهای اعضا



واکنشهای تکیه‌گاهی

۹-۲۵ مسئلهٔ ۹-۲۱ را با این فرض حل کنید که علاوه بر بارهای وارده، تکیه‌گاه D به اندازهٔ **۵۰ mm** نشست کند.



دوران میان تار اعضا به علت نشست تکیه‌گاه D

$$F.E.M_{AC} = -F.E.M_{CA} = -۵۶/۲۵ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{CD} = -F.E.M_{DC} = -۱۶۸/۷۵ \quad kN.m$$

$$\psi_{CD} = \frac{۵۰ - ۰}{۹۰۰۰} = ۰/۰۰۵۵۶ \quad , \quad EI = ۸۰۰۰۰ \quad kN.m^۲$$

$$M_{AC} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_A + \theta_C - ۳\psi_{AC}\right] - ۵۶/۲۵ = ۰/۳۳۳EI\theta_C - ۵۶/۲۵$$

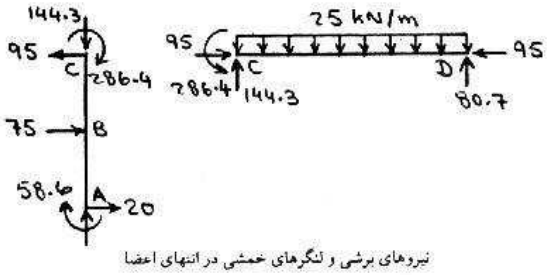
$$M_{CA} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_C + \theta_A - ۳\psi_{AC}\right] + ۵۶/۲۵ = ۰/۶۶۷EI\theta_C + ۵۶/۲۵$$

$$M_{CD} = \frac{۳EI}{۹}\theta_C - \frac{۳EI}{۹}\psi_{CD} - ۱۶۸/۷۵ - \frac{۱}{۲}(۱۶۸/۷۵) = ۰/۳۳۳EI\theta_C - \frac{۳(۸۰۰۰۰)}{۹}(۰/۰۰۵۵۶) - ۲۵۳/۱۲۵ = ۰/۳۳۳EI\theta_C - ۴۰۱/۲$$

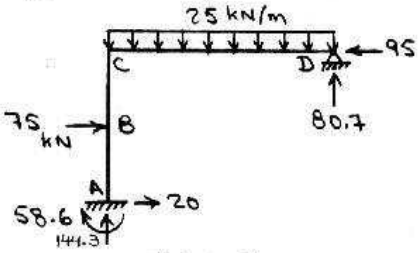
$$+\circlearrowleft \sum M^C = ۰ \;:\; M_{CA} + M_{CD} = ۰ \;\Rightarrow\; ۰/۶۶۷EI\theta_C + ۵۶/۲۵ + ۰/۳۳۳EI\theta_C - ۴۰۱/۲ = ۰$$

$$EI\theta_C - ۳۴۵/۱۵ = ۰ \;\Rightarrow\; \theta_C = \frac{۳۴۵/۱۵}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AC} = ۵۸/۶ \quad kN.m \;\circlearrowright\;, \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CA} = ۲۸۶/۴ \quad kN.m \;\circlearrowright\;, \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۲۸۶/۴ \quad kN.m \;\circlearrowleft$$

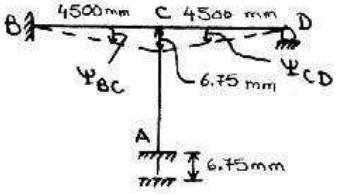


نیروهای برشی و لنگرهای خمشی در انتهای اعضا



واکنشهای تکیه‌گاهی

۹-۲۶ مسئلهٔ ۹-۲۲ را با این فرض حل کنید که علاوه بر بارهای وارده، تکیه‌گاه A به اندازهٔ **۶/۷۵ mm** نشست کند.



دوران میان تار اعضا به علت نشست تکیه‌گاه A

$$F.E.M_{BC} = -F.E.M_{CD} = -۵۰/۶۲۵ \quad kN.m \quad , \quad EI = ۲۸۰۰۰۰ \quad kN.m^۲$$

$$\psi_{BC} = \frac{۶/۷۵ - ۰}{۴۵۰۰} = ۰/۰۰۱۵ \quad , \quad \psi_{CD} = \frac{۰ - ۶/۷۵}{۴۵۰۰} = -۰/۰۰۱۵$$

$$M_{AC} = ۰/۴۴۴EI\theta_C \quad , \quad M_{CA} = ۰/۸۸۸EI\theta_C$$

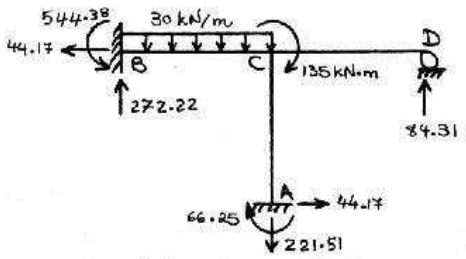
$$M_{CD} = \frac{۳EI}{۴/۵}\theta_C - \frac{۳EI}{۴/۵}\psi_{CD} = ۰/۶۶۶EI\theta_C - \frac{۳(۲۸۰۰۰۰)}{۴/۵}(-۰/۰۰۱۵)$$

$$M_{CD} = ۰/۶۶۶EI\theta_C + ۲۸۰$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{4/5}\left(2\theta_B+\theta_C-3\psi_{BC}\right)-50/625=0/444EI\theta_C-\frac{6(28000)}{4/5}(0/0015)-50/625=0/444EI\theta_C-610/625$$

$$M_{CB}=\frac{2EI}{4/5}\left(2\theta_C+\theta_B-3\psi_{BC}\right)+50/625=0/888EI\theta_C-\frac{6(28000)}{4/5}(0/0015)+50/625=0/888EI\theta_C-509/375$$

$$M_{CA}=\frac{2EI}{4/5}\left(2\theta_C+\theta_A-3\psi_{AC}\right)=0/888EI\theta_C\quad,\quad M_{AC}=\frac{2EI}{4/5}\left(2\theta_A+\theta_C-3\psi_{AC}\right)=0/444EI\theta_C$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

$$+\circlearrowleft\sum M^C=0\ :\ M_{CB}+M_{CD}+M_{CA}-135=0$$

$$0/888EI\theta_C-509/375+0/666EI\theta_C+280+0/888EI\theta_C-135=0$$

$$2/444EI\theta_C-364/375=0\ \Rightarrow\ \theta_C=\frac{149/21}{EI}$$

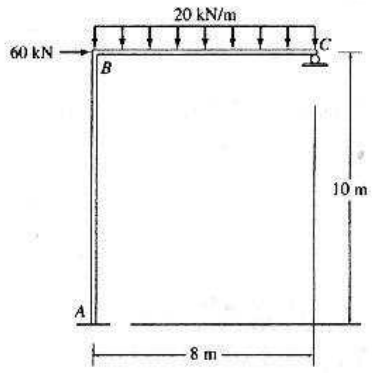
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{AC}=66/25\ \ kN.m\circlearrowleft,\quad \vec{M}_{CA}=132/5\ \ kN.m\circlearrowright$$

$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{BC}=544/38\ \ kN.m\circlearrowleft,\quad \vec{M}_{CB}=376/88\ \ kN.m\circlearrowright$$

$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{CD}=379/38\ \ kN.m\circlearrowright$$

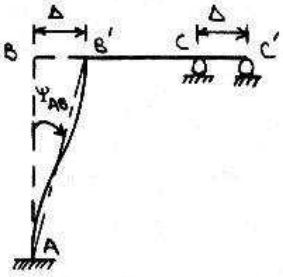
در مسایل ۹-۲۷ تا ۹-۳۳ تاب نشان داده شده را با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورید.

۹-۲۷



EI = ثابت

شکل ۹-۲۷



$$F.E.M_{BC}=-F.E.M_{CB}=-\frac{20(8)^2}{12}$$

$$F.E.M_{BC}=-106/67\ \ kN.m$$

$$\psi_{AB}=\frac{\Delta}{10}\quad,\quad \psi_{BC}=0$$

برای عضو BC از رابطهٔ شیب - افت اصلاح شدهٔ اعضای با یک انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم.

(تار تحتانی ستون AB در سمت راست آن در نظر گرفته شده است.)

$$M_{AB}=\frac{2EI}{10}\left(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB}\right)=0/2EI\theta_B-0/06EI\Delta$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{10}\left(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{AB}\right)=0/4EI\theta_B-0/06EI\Delta$$

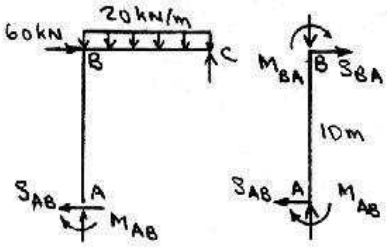
$$M_{BC}=\frac{3EI}{8}\theta_B-\frac{3EI}{8}\psi_{BC}-106/67-\frac{1}{2}(106/67)=0/375EI\theta_B-160$$

$$+\circlearrowleft\sum M_B^{AB}=0\ :\ -10S_{AB}-M_{AB}-M_{BA}=0$$

$$S_{AB}=-\frac{M_{AB}+M_{BA}}{10}$$

$$\pm\sum F_x=0\ :\ 60-S_{AB}=0\ \Rightarrow\ 600+M_{AB}+M_{BA}=0\qquad (I)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^B=0\ :\ M_{BC}+M_{BA}=0\qquad (II)$$

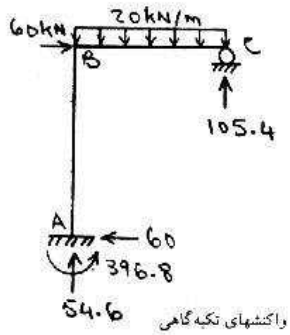


نمودار جسم آزاد کل قاب و ستون AB

با جایگزینی مقادیر M_{AB} ، M_{BA} و M_{BC} از معادلات شیب - افت، به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases}0/6EI\theta_B-0/12EI\Delta=-600\\0/375EI\theta_B-0/06EI\Delta=160\end{cases}$$

$$\theta_B=\frac{968/4}{EI}\quad,\quad \Delta=\frac{9842/1}{EI}$$

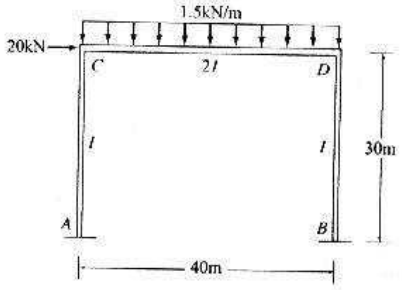


واکنشهای تکیه‌گاهی

$\blacktriangleright \vec{M}_{AB} = ۳۹۶/۸ \ \ kN.m \ \circlearrowleft$ ، $\blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۲۰۳/۲ \ \ kN.m \ \circlearrowleft$

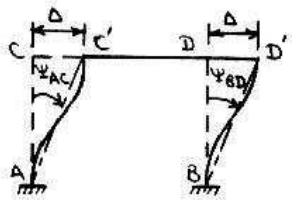
$\blacktriangleright \vec{M}_{BC} = ۲۰۳/۲ \ \ kN.m \ \circlearrowright$

۲۸-۹



E = ثابت

شکل ۲۸-۹



$F.E.M_{CD} = -F.E.M_{DC}$

$F.E.M_{CD} = -\frac{۱/۵(۴۰)^۲}{۱۲}$

$F.E.M_{CD} = -۲۰۰ \ \ kN.m$

$\psi_{AC} = \psi_{BD} = \frac{\Delta}{۳۰}$ ، $\psi_{CD} = ۰$

$M_{AC} = \frac{۲EI}{۳۰}\left[۲\theta_A + \theta_C - ۳\psi_{AC}\right]$

$M_{AC} = ۰/۰۶۶۷EI\left[\theta_C - ۰/۱\Delta\right]$

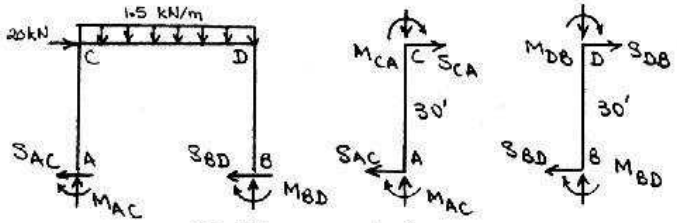
$M_{CA} = \frac{۲EI}{۳۰}\left[۲\theta_C + \theta_A - ۳\psi_{AC}\right] = ۰/۰۶۶۷EI\left[۲\theta_C - ۰/۱\Delta\right]$

$M_{BD} = \frac{۲EI}{۳۰}\left[۲\theta_B + \theta_D - ۳\psi_{BD}\right] = ۰/۰۶۶۷EI\left[\theta_D - ۰/۱\Delta\right]$

$M_{DB} = \frac{۲EI}{۳۰}\left[۲\theta_D + \theta_B - ۳\psi_{BD}\right] = ۰/۰۶۶۷EI\left[۲\theta_D - ۰/۱\Delta\right]$

$M_{CD} = \frac{۲E(۲I)}{۴۰}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] - ۲۰۰ = ۰/۱EI\left[۲\theta_C + \theta_D\right] - ۲۰۰$

$M_{DC} = \frac{۲E(۲I)}{۴۰}\left[۲\theta_D + \theta_C - ۳\psi_{CD}\right] + ۲۰۰ = ۰/۱EI\left[\theta_C + ۲\theta_D\right] + ۲۰۰$



نمودار جسم آزاد کل قاب و ستونهای AC و BD

$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = ۰$:

$-M_{AC} - M_{CA} - ۳۰S_{AC} = ۰$

$S_{AC} = -\frac{M_{AC} + M_{CA}}{۳۰}$

$+\circlearrowleft \sum M_D^{BD} = ۰$:

$-M_{BD} - M_{DB} - ۳۰S_{BD} = ۰$

$S_{BD} = -\frac{M_{BD} + M_{DB}}{۳۰}$

$\pm \sum F_x = ۰$: $۲۰ - S_{AC} - S_{BD} = ۰ \Rightarrow ۲۰ + \frac{M_{AC} + M_{CA}}{۳۰} + \frac{M_{BD} + M_{DB}}{۳۰} = ۰$

$M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB} = -۶۰۰ \quad (I)$

$+\circlearrowleft \sum M^C = ۰$: $M_{CA} + M_{CD} = ۰ \quad (II)$ ، $+\circlearrowleft \sum M^D = ۰$: $M_{DC} + M_{DB} = ۰ \quad (III)$

با جایگزینی مقادیر متناظر با لنگرها از معادلات شیب - افت به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

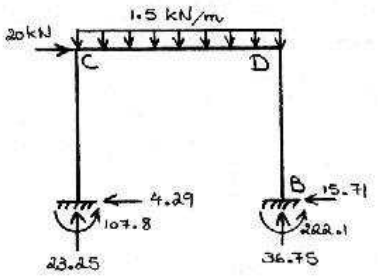
$$\begin{cases} ۰/۲EI\theta_C + ۰/۲EI\theta_D - ۰/۰۲۶۶۸EI\Delta = -۶۰۰ \\ ۰/۳۳۳۴EI\theta_C + ۰/۱EI\theta_D - ۰/۰۰۶۶۷EI\Delta = ۲۰۰ \\ ۰/۱EI\theta_C + ۰/۳۳۳۴EI\theta_D - ۰/۰۰۶۶۷EI\Delta = -۲۰۰ \end{cases}$$

$$\theta_C = \frac{۱۳۰۶/۸}{EI} \quad , \quad \theta_D = -\frac{۴۰۷}{EI} \quad , \quad \Delta = \frac{۲۹۳۳۴}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AC} = ۱۰۷/۸ \ \ kN.m \ \) \ , \ \blacktriangleright \vec{M}_{BD} = ۲۲۲/۱ \ \ kN.m \ \)$$

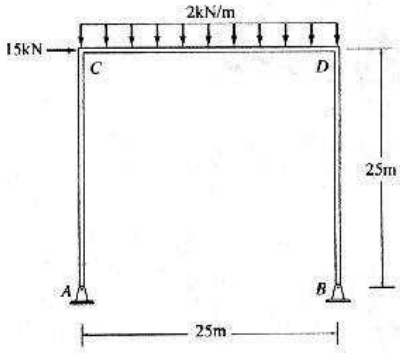
$$\blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۲۰۷ \ \ kN.m \ \) \ , \ \blacktriangleright \vec{M}_{CA} = ۲۰۷ \ \ kN.m \ \)$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{DB} = ۲۴۹/۳ \ \ kN.m \ \) \ , \ \blacktriangleright \vec{M}_{DC} = ۲۴۹/۳ \ \ kN.m \ \)$$



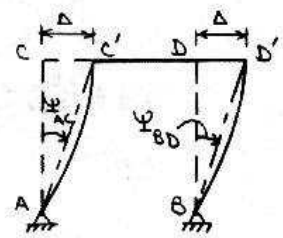
واکنشهای تکیه‌گاهی

۲۹-۹



EI = ثابت

شکل ۹-۲۹



$$F.E.M_{CD} = -F.E.M_{DC}$$

$$F.E.M_{CD} = -\frac{۲(۲۵)^۲}{۱۲}$$

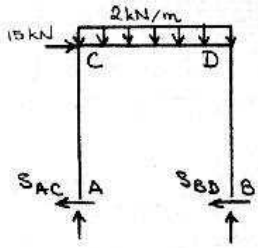
$$F.E.M_{CD} = -۱۰۴/۱۷ \ \ kN.m$$

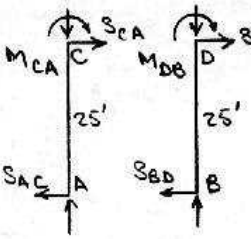
$$\psi_{AC} = \psi_{BD} = \frac{\Delta}{۲۵} \quad , \quad \psi_{CD} = ۰$$

برای اعضای AC و BD از روابط شیب - افت مربوط به اعضای با یک انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم. (تار تحتانی ستونهای AC و BD در سمت راست آنها در نظر گرفته شده است.)

$$M_{CA} = \frac{۳EI}{۲۵}\theta_C - \frac{۳EI}{۲۵}\psi_{AC} = \frac{۳EI}{۲۵}\theta_C - \frac{۳EI}{۲۵}\left[\frac{\Delta}{۲۵}\right] = ۰/۱۲EI\left[\theta_C - ۰/۰۴\Delta\right]$$

$$M_{DB} = \frac{۳EI}{۲۵}\theta_D - \frac{۳EI}{۲۵}\psi_{BD} = \frac{۳EI}{۲۵}\theta_D - \frac{۳EI}{۲۵}\left[\frac{\Delta}{۲۵}\right] = ۰/۱۲EI\left[\theta_D - ۰/۰۴\Delta\right]$$





نمودار جسم آزاد کل قاب و ستونهای AC و BD

$$M_{DC} = \frac{۲EI}{۲۵}\left[۲\theta_D + \theta_C - ۳\psi_{CD}\right] + ۱۰۴/۱۷$$

$$M_{DC} = ۰/۰۸EI\left[\theta_C + ۲\theta_D\right] + ۱۰۴/۱۷$$

$$M_{CD} = \frac{۲EI}{۲۵}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] - ۱۰۴/۱۷$$

$$M_{CD} = ۰/۰۸EI\left[۲\theta_C + \theta_D\right] - ۱۰۴/۱۷$$

$$+\circlearrowright \sum M_C^{AC} = ۰ \ : \ -۲۵S_{AC} - M_{CA} = ۰$$

$$S_{AC} = -\frac{M_{CA}}{۲۵}$$

$$+\circlearrowright \sum M_D^{BD} = ۰ \ : \ -۲۵S_{BD} - M_{DB} = ۰$$

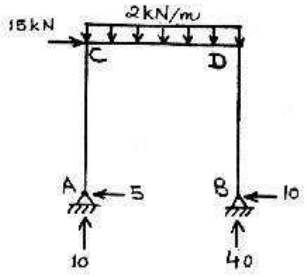
$$S_{BD} = -\frac{M_{DB}}{۲۵}$$

$$\pm \sum F_x = ۰ \ : \ ۱۵ - S_{AC} - S_{BD} = ۰ \ \Rightarrow \ ۱۵ + \frac{M_{CA}}{۲۵} + \frac{M_{DB}}{۲۵} = ۰ \ \Rightarrow \ M_{CA} + M_{DB} = -۳۷۵ \quad (I)$$

$$+\circlearrowright \sum M^C = ۰ \ : \ M_{CA} + M_{CD} = ۰ \quad (II) \quad , \quad +\circlearrowright \sum M^D = ۰ \ : \ M_{DC} + M_{DB} = ۰ \quad (III)$$

از روابط شیب - افت اعضا، مقادیر لنگرها را در معادلات (I)، (II) و (III) جایگزین کرده و به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} ۰/۱۲EI\theta_C + ۰/۱۲EI\theta_D - ۰/۰۰۹۶EI\Delta = -۳۷۵ \\ ۰/۲۸EI\theta_C + ۰/۰۸EI\theta_D - ۰/۰۰۴۸EI\Delta = ۱۰۴/۱۷ \\ ۰/۰۸EI\theta_C + ۰/۲۸EI\theta_D - ۰/۰۰۴۸EI\Delta = -۱۰۴/۱۷ \end{cases}$$



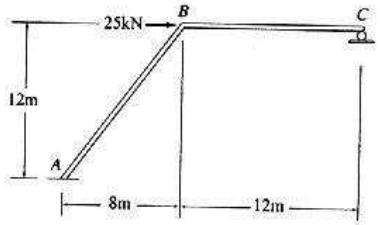
واکنشهای تکیه‌گاهی

$$\theta_C=\frac{۱۳۰۲/۱}{EI}\ ,\ \theta_D=\frac{۲۶۰/۴}{EI}\ ,\ \Delta=\frac{۵۸۵۹۳/۷۵}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{CA}=۱۲۵\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright \vec{M}_{DB}=۲۵۰\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

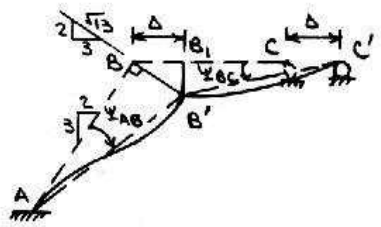
$$\blacktriangleright \vec{M}_{CD}=۱۲۵\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright \vec{M}_{DC}=۲۵۰\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

۳۰-۹



EI = ثابت

شکل ۹-۳۰

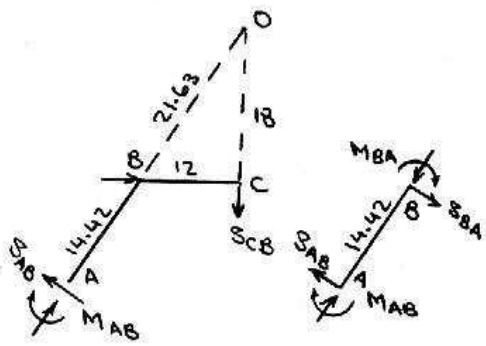


$$\psi_{AB}=\frac{BB'}{L_{AB}}=\frac{\left[\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}\right]\Delta}{۱۴/۴۲}=۰/۰۸۳۳\Delta\ ,\ \psi_{BC}=-\frac{B_1B'}{L_{BC}}=-\frac{\left[\frac{۲}{۳}\right]\Delta}{۱۲}=-۰/۰۵۵۶\Delta$$

$$M_{AB}=\frac{۲EI}{۱۴/۴۲}\left[۲\theta_A+\theta_B-۳\psi_{AB}\right]=۰/۱۳۹EI\theta_B-۰/۰۳۴۷\Delta$$

$$M_{BA}=\frac{۲EI}{۱۴/۴۲}\left[۲\theta_B+\theta_A-۳\psi_{AB}\right]=۰/۲۷۷EI\theta_B-۰/۰۳۴۷\Delta$$

$$M_{BC}=\frac{۳EI}{۱۲}\theta_B-\frac{۳EI}{۱۲}\psi_{BC}=۰/۲۵EI\theta_B+۰/۰۱۳۹\Delta$$



نمودار جسم آزاد کل قاب و عضو AB

برای عضو BC از رابطهٔ شیب - افت اصلاح شده استفاده می‌کنیم.

$$+\circlearrowright\ \sum M_B^{AB}=۰:\ -M_{AB}-M_{BA}-۱۴/۴۲S_{AB}=۰$$

$$S_{AB}=-\frac{M_{AB}+M_{BA}}{۱۴/۴۲}$$

$$+\circlearrowright\ \sum M_O=۰\ :\ -M_{AB}-۳۶/۰۵S_{AB}+۲۵(۱۸)=۰$$

$$-M_{AB}+۳۶/۰۵\left[\frac{M_{AB}+M_{BA}}{۱۴/۴۲}\right]+۴۵۰=۰\qquad (I)$$

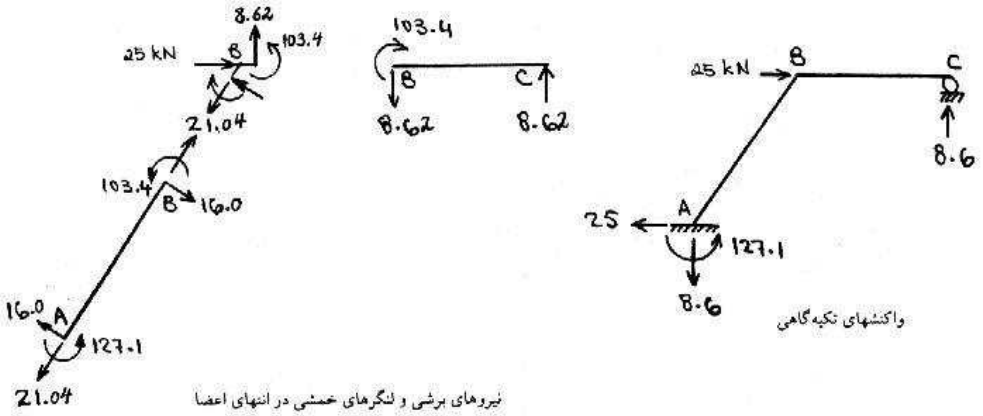
$$+\circlearrowright\ \sum M^B=۰\ :\ M_{BA}+M_{BC}=۰\qquad (II)$$

مقادیر متناظر با لنگرها را از معادلات شیب - افت، در روابط (I) و (II) جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{cases}۰/۹۰۱EI\theta_B-۰/۱۳۹EI\Delta=-۴۵۰\\ ۰/۵۲۷EI\theta_B-۰/۰۲۰۸EI\Delta=۰\end{cases}$$

$$\theta_B=\frac{۱۷۱/۷}{EI}\ ,\ \Delta=\frac{۴۳۵۰/۴}{EI}$$

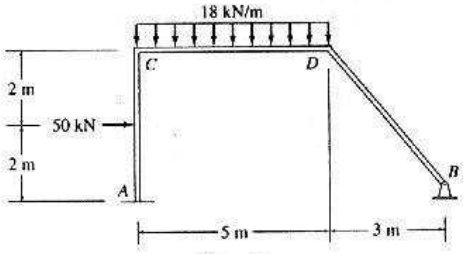
$\blacktriangleright \vec{M}_{AB} = ۱۲۷/۱ \ \ kN.m \ \circlearrowright$ ، $\blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۱۰۳/۴ \ \ kN.m \ \circlearrowright$ ، $\blacktriangleright \vec{M}_{BC} = ۱۰۳/۴ \ \ kN.m \ \circlearrowright$



نیروهای برشی و لنگرهای خمشی در انتهای اعضا

واکنشهای تکیه‌گاهی

۳۱-۹



EI = ثابت

شکل ۹-۳۱

$$F.E.M_{AC} = -F.E.M_{CA} = -\frac{۵۰(۴)}{۸} = -۲۵ \ \ kN.m$$

$$F.E.M_{CD} = -F.E.M_{DC} = -\frac{۱۸(۵)^{۲}}{۱۲} = -۳۷/۵ \ \ kN.m$$

$$\psi_{AC} = \frac{CC'}{L_{AC}} = \frac{۸}{۴} = ۰/۲۵۸ \ \ ، \ \ \psi_{BD} = \frac{DD'}{L_{BD}} = \frac{\left[\frac{۵}{۲}\right]۸}{۵} = ۰/۲۵۸$$

$$\psi_{CD} = -\frac{D_۱D'}{L_{CD}} = -\frac{\left[\frac{۳}{۲}\right]۸}{۵} = -۰/۱۵۸$$

$$M_{AC} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_A + \theta_C - ۳\psi_{AC}\right] - ۲۵$$

$$M_{AC} = ۰/۵EI\left[\theta_C - ۰/۷۵۸\right] - ۲۵$$

$$M_{CA} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_C + \theta_A - ۳\psi_{AC}\right] + ۲۵$$

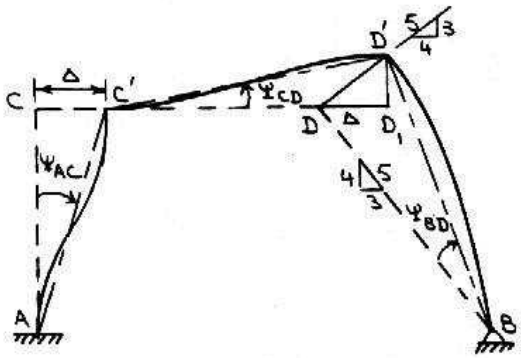
$$M_{CA} = ۰/۵EI\left[۲\theta_C - ۰/۷۵۸\right] + ۲۵$$

$$M_{CD} = \frac{۲EI}{۵}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] - ۳۷/۵$$

$$M_{CD} = ۰/۴EI\left[۲\theta_C + \theta_D + ۰/۴۵۸\right] - ۳۷/۵$$

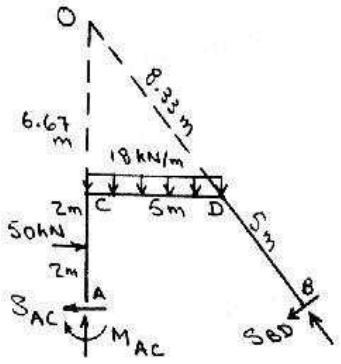
$$M_{DC} = \frac{۲EI}{۵}\left[۲\theta_D + \theta_C - ۳\psi_{CD}\right] + ۳۷/۵$$

$$M_{DC} = ۰/۴EI\left[\theta_C + ۲\theta_D + ۰/۴۵۸\right] + ۳۷/۵$$



برای عضو DB از رابطهٔ شیب - افت اصلاح شدهٔ اعضای با یک انتهای مفصلی استفاده می‌کنیم.

$$M_{DB} = \frac{۳EI}{۵}\theta_D - \frac{۳EI}{۵}\psi_{CD} = ۰/۶EI\left[\theta_D - ۰/۲۵۸\right]$$



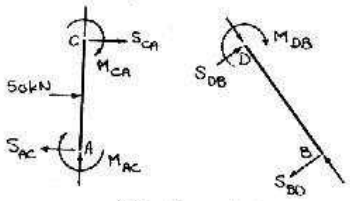
نمودار جسم آزاد کل قاب

$+\circlearrowleft \sum M_O = 0$:

$-M_{AC} - ۱۰/۶۷ S_{AC} - ۱۳/۳۳ S_{BD} + ۵۰(۸/۶۷) - ۱۸(۵)(۲/۵) = 0 \quad (a)$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0$: $-M_{AC} - M_{CA} - ۴ S_{AC} + ۵۰(۲) = 0$

$$S_{AC} = -\frac{M_{AC} + M_{CA}}{۴} + ۲۵ \quad (b)$$



نمودار جسم آزاد ستونها

$+\circlearrowleft \sum M_D^{BD} = 0$:

$-M_{DB} - ۵ S_{BD} = 0$

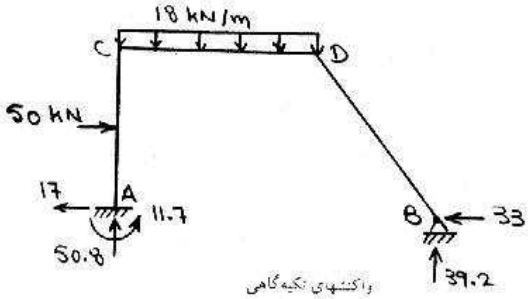
$$S_{BD} = -\frac{M_{DB}}{۵} \quad (c)$$

مقادیر S_{AC} و S_{BD} را از روابط (b) و (c) در رابطه (a) جایگزین می‌کنیم.

$$M_{AC} - ۱۰/۶۷\left[-\frac{M_{AC} + M_{CA}}{۴} + ۲۵\right] + ۱۳/۳۳\left[\frac{M_{DB}}{۵}\right] + ۲۰۸/۵ = 0 \quad (I)$$

$+\circlearrowleft \sum M^C = 0$: $M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (II)$ ، $+\circlearrowleft \sum M^D = 0$: $M_{DC} + M_{DB} = 0 \quad (III)$

در روابط (I)، (II) و (III) به جای مقادیر مناظر با لنگرها از روابط شیب - افت استفاده می‌کنیم.



واکنشهای تکیه‌گاهی

$$\begin{cases} ۳/۵EI\theta_C + ۱/۶EI\theta_D - ۲/۰۲۵EI\Delta = ۳۳/۲۵ \\ ۱/۸EI\theta_C + ۰/۴EI\theta_D - ۰/۱۹۵EI\Delta = ۱۲/۵ \\ ۰/۴EI\theta_C + ۱/۴EI\theta_D + ۰/۰۳EI\Delta = ۳۷/۵ \end{cases}$$

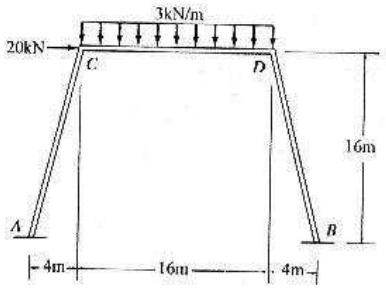
$$\theta_C = \frac{۱۱/۳۳}{EI} \quad , \quad \theta_D = -\frac{۲۹/۵۹}{EI} \quad , \quad \Delta = -\frac{۲۰/۲۲}{EI}$$

$\blacktriangleright \vec{M}_{AC} = ۱۱/۷ \ kN.m \big)$, $\blacktriangleright \vec{M}_{CA} = ۴۳/۹ \ kN.m \big)$

$\blacktriangleright \vec{M}_{DB} = ۱۴/۷ \ kN.m \big)$, $\blacktriangleright \vec{M}_{DC} = ۱۴/۷ \ kN.m \big)$

$\blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۴۳/۹ \ kN.m \big)$

۹-۳۲



EI ثابت

شکل ۹-۳۲

$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{۳(۱۶)^۲}{۱۲} = -۶۴ \ kN.m$$

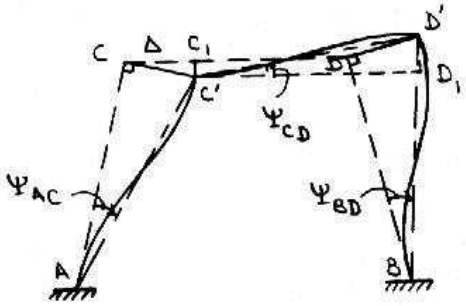
$$\psi_{AC} = \frac{CC'}{L_{AC}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}\right)\Delta}{۱۶/۴۹} = ۰/۰۶۲۵\Delta$$

$$\psi_{BD} = \frac{DD'}{L_{BD}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}\right)\Delta}{۱۶/۴۹} = ۰/۰۶۲۵\Delta$$

$$\psi_{CD} = -\frac{D_۱D'}{L_{CD}} = -\frac{۲\left(\frac{۱}{۴}\right)\Delta}{۱۶} = -۰/۰۳۱۲۵\Delta$$

$$M_{CD} = \frac{۲EI}{۱۶}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] - ۶۴$$

$$M_{CD} = ۰/۱۲۵EI\left[۲\theta_C + \theta_D + ۰/۰۹۳۸\Delta\right] - ۶۴$$



$$M_{DC}=\frac{2EI}{16}\left[2\theta_D+\theta_C-3\psi_{CD}\right]+64$$

$$M_{DC}=0/125EI\left[2\theta_D+\theta_C+0/0938\Delta\right]+64$$

$$M_{AC}=\frac{2EI}{16/49}\left[2\theta_A+\theta_C-3\psi_{AC}\right]=0/121EI\left[\theta_C-0/188\Delta\right]$$

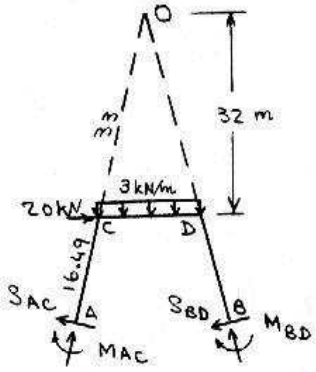
$$M_{CA}=\frac{2EI}{16/49}\left[2\theta_C+\theta_A-3\psi_{AC}\right]=0/121EI\left[2\theta_C-0/188\Delta\right]$$

$$M_{BD}=\frac{2EI}{16/49}\left[2\theta_B+\theta_D-3\psi_{BD}\right]=0/121EI\left[\theta_D-0/188\Delta\right]$$

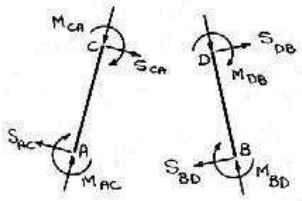
$$M_{DB}=\frac{2EI}{16/49}\left[2\theta_D+\theta_B-3\psi_{BD}\right]=0/121EI\left[2\theta_D-0/188\Delta\right]$$

$$+\circlearrowleft\sum M_O=0\ :$$

$$-M_{AC}-M_{BD}-49/49\left[S_{AC}+S_{BD}\right]+20(32)=0 \qquad \text{(الف)}$$



نمودار جسم آزاد کل قاب



نمودار جسم آزاد ستونها

$$+\circlearrowleft\sum M_C^{AC}=0\ :$$

$$-M_{AC}-M_{CA}-16/49S_{AC}=0$$

$$S_{AC}=-\frac{M_{AC}+M_{CA}}{16/49} \qquad \text{(ب)}$$

$$+\circlearrowleft\sum M_D^{BD}=0\ :$$

$$-M_{DB}-M_{BD}-16/49S_{BD}=0$$

$$S_{BD}=-\frac{M_{BD}+M_{DB}}{16/49} \qquad (c) \qquad \text{(ج)}$$

در رابطهٔ (الف) به جای مقادیر S_{AC} و S_{BD} از روابط (ب) و (ج) استفاده می‌کنیم.

$$-M_{AC}-M_{BD}+\frac{49/49}{16/49}\left[M_{AC}+M_{CA}+M_{BD}+M_{DB}\right]+640=0 \qquad (I)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^C=0\ :\ M_{CA}+M_{CD}=0 \qquad (II)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^D=0\ :\ M_{DC}+M_{DB}=0 \qquad (III)$$

با جایگزینی مقادیر متناظر با لنگرها از معادلات شیب - افت در روابط (I)، (II) و (III) به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم.

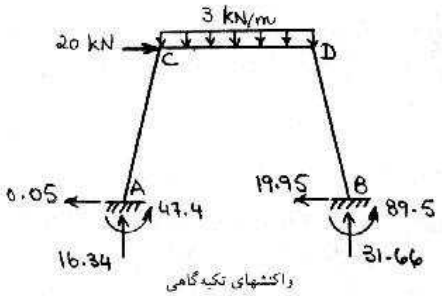
$$\begin{cases}0/968EI\theta_C+0/968EI\theta_D-0/227EI\Delta=-640\\0/492EI\theta_C+0/125EI\theta_D-0/011EI\Delta=64\\0/125EI\theta_C+0/492EI\theta_D-0/011EI\Delta=-64\end{cases}$$

$$\theta_C=\frac{233/7}{EI}\ ,\ \theta_D=-\frac{115/1}{EI}\ ,\ \Delta=\frac{3325}{EI}$$

$$\blacktriangleright\vec{M}_{AC}=47/4\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\quad \blacktriangleright\vec{M}_{CA}=19\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

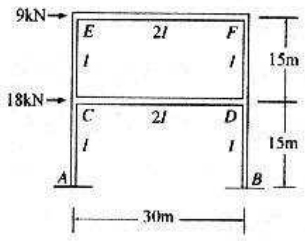
$$\blacktriangleright\vec{M}_{CD}=19\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\quad \blacktriangleright\vec{M}_{DC}=103/5\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$

$$\blacktriangleright\vec{M}_{DB}=103/5\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\quad \blacktriangleright\vec{M}_{BD}=89/5\ \ kN.m\ \circlearrowright$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

۹-۳۳



E = ثابت

شکل ۹-۳۳

$$\psi_{AC}=\psi_{BD}=\frac{\Delta_1}{15}\ ,\ \psi_{CE}=\psi_{DF}=\frac{\Delta_2}{15}\ ,\ \psi_{CD}=\psi_{EF}=0$$

$$M_{AC}=\frac{2EI}{15}\left(2\theta_A+\theta_C-3\psi_{AC}\right)=0/133EI\left(\theta_C-0/2\Delta_1\right)$$

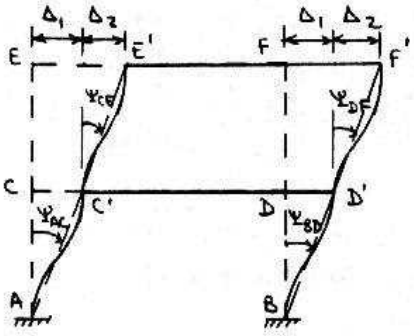
$$M_{CA}=0/133EI\left(2\theta_C-0/2\Delta_1\right)$$

$$M_{BD}=\frac{2EI}{15}\left(2\theta_B+\theta_D-3\psi_{BD}\right)=0/133EI\left(\theta_D-0/2\Delta_1\right)$$

$$M_{DB}=0/133EI\left(2\theta_D-0/2\Delta_1\right)$$

$$M_{CE}=\frac{2EI}{15}\left(2\theta_C+\theta_E-3\psi_{CE}\right)=0/133EI\left(2\theta_C+\theta_E-0/2\Delta_2\right)$$

$$M_{EC}=0/133EI\left(\theta_C+2\theta_E-0/2\Delta_2\right)$$



$$M_{DF}=\frac{2EI}{15}\left(2\theta_D+\theta_F-3\psi_{DF}\right)=0/133EI\left(2\theta_D+\theta_F-0/2\Delta_2\right)$$

$$M_{FD}=0/133EI\left(\theta_D+2\theta_F-0/2\Delta_2\right)$$

$$M_{CD}=\frac{2E(2I)}{30}\left(2\theta_C+\theta_D-3\psi_{CD}\right)=0/133EI\left(2\theta_C+\theta_D\right)$$

$$M_{DC}=0/133EI\left(\theta_C+2\theta_D\right)$$

$$M_{EF}=\frac{2E(2I)}{30}\left(2\theta_E+\theta_F-3\psi_{EF}\right)=0/133EI\left(2\theta_E+\theta_F\right)$$

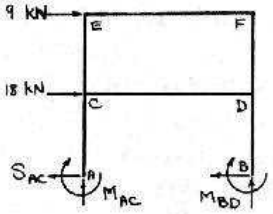
$$M_{FE}=0/133EI\left(\theta_E+2\theta_F\right)$$

$$+\circlearrowleft\sum M_E^{CE}=0\ \Rightarrow\ S_{CE}=-\frac{M_{CE}+M_{EC}}{15}$$

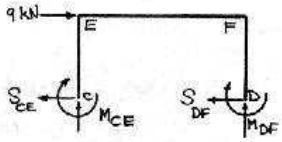
$$+\circlearrowleft\sum M_F^{FD}=0\ \Rightarrow\ S_{DF}=-\frac{M_{DF}+M_{FD}}{15}$$

$$+\circlearrowleft\sum M_C^{AC}=0\ \Rightarrow\ S_{AC}=-\frac{M_{AC}+M_{CA}}{15}$$

$$+\circlearrowleft\sum M_D^{BD}=0\ \Rightarrow\ S_{BD}=-\frac{M_{BD}+M_{DB}}{15}$$



نمودار جسم آزاد کل قاب



نمودار جسم آزاد طبقهٔ فوقانی

برای طبقهٔ فوقانی:

$$\rightarrow\sum F_x=0\ :\ 9-S_{CE}-S_{DF}=0$$

$$M_{CE}+M_{EC}+M_{DF}+M_{FD}=-135\qquad (I)$$

برای کل قاب:

$$\rightarrow\sum F_x=0\ :\ 9+18-S_{AC}-S_{BD}=0\ \Rightarrow\ M_{AC}+M_{CA}+M_{BD}+M_{DB}=-405\qquad (II)$$

برای به دست آوردن معادلات بعدی از تعادل لنگر گره‌های C ، D ، E و F استفاده می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft\sum M^C=0\ :\ M_{CA}+M_{CE}+M_{CD}=0\qquad (III)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^D=0\ :\ M_{DB}+M_{DC}+M_{DF}=0\qquad (IV)$$

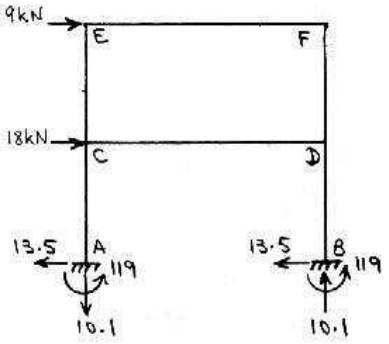
$$+\circlearrowleft\sum M^E=0\ :\ M_{EC}+M_{EF}=0\qquad (V)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^F=0\ :\ M_{FE}+M_{FD}=0\qquad (VI)$$

با جایگزینی مقادیر متناظر با لنگرها از معادلات شیب - افت به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}3EI\theta_C+3EI\theta_D+3EI\theta_E+3EI\theta_F-0/8EI\Delta_2=-1015\\ 3EI\theta_C+3EI\theta_D-0/8EI\Delta_1=-3045/1\\ 6EI\theta_C+EI\theta_D+EI\theta_E-0/2EI\Delta_1-0/2EI\Delta_2=0\\ EI\theta_C+6EI\theta_D+EI\theta_F-0/2EI\Delta_1-0/2EI\Delta_2=0\\ EI\theta_C+4EI\theta_E+EI\theta_F-0/2EI\Delta_2=0\\ EI\theta_D+EI\theta_E+4EI\theta_F-0/2EI\Delta_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}\theta_C=\theta_D=\dfrac{2697/6}{EI}\ ,\ \theta_E=\theta_F=\dfrac{1107}{EI}\\ \Delta_1=\dfrac{5813}{EI}\ ,\ \Delta_2=\dfrac{4106}{EI}\end{cases}$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

$\blacktriangleright \vec{M}_{AC} = \vec{M}_{BD} = ۱۱۹ \quad kN.m$)

$\blacktriangleright \vec{M}_{CA} = \vec{M}_{DB} = ۸۳/۵ \quad kN.m$)

$\blacktriangleright \vec{M}_{CE} = \vec{M}_{DF} = ۲۳/۳ \quad kN.m$)

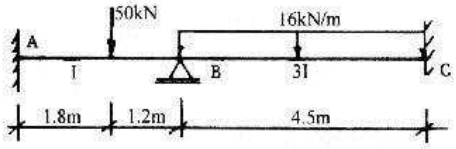
$\blacktriangleright \vec{M}_{EC} = \vec{M}_{FD} = ۴۴/۲ \quad kN.m$)

$\blacktriangleright \vec{M}_{CD} = \vec{M}_{DC} = ۱۰۶/۸ \quad kN.m$ (

$\blacktriangleright \vec{M}_{EF} = \vec{M}_{FE} = ۴۴/۲ \quad kN.m$ (

تیرهای نشان داده شده در مسایل ۹-۳۴ تا ۹-۳۸ را با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کرده، واکنشهای تکیه‌گاهی آنها را به دست آورید.

۹-۳۴



شکل ۹-۳۴

$F.E.M_{AB} = -\frac{۵۰(۱/۸)(۱/۲)^۲}{(۳)^۲} = -۱۴/۴ \quad kN.m$

$F.E.M_{BA} = \frac{۵۰(۱/۸)^۲(۱/۲)}{(۳)^۲} = ۲۱/۶ \quad kN.m$

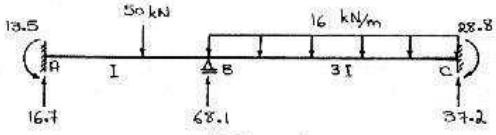
$F.E.M_{BC} = -\frac{۱۶(۴/۵)^۲}{۱۲} = -۲۷ \quad kN.m$

$F.E.M_{CB} = \frac{۱۶(۴/۵)^۲}{۱۲} = ۲۷ \quad kN.m$

$M_{AB} = \frac{۲EI}{۳}\left(۲\theta_A + \theta_B - ۳\psi_{AB}\right) - ۱۴/۴ = \frac{۲EI}{۳}\theta_B - ۱۴/۴ \quad , \quad M_{BA} = \frac{۴EI}{۳}\theta_B + ۲۱/۶$

$M_{BC} = \frac{۲E(۳I)}{۴/۵}\left(۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}\right) - ۲۷ = \frac{۸EI}{۳}\theta_B - ۲۷ \quad , \quad M_{CB} = \frac{۲E(۳I)}{۴/۵}(۲\theta_C + \theta_B - ۳\psi_{BC}) + ۲۷ = \frac{۴EI}{۳}\theta_B + ۲۷$

$+\circlearrowleft \sum M^B = ۰ \; : \; M_{BA} + M_{BC} = ۰ \Rightarrow \frac{۴EI}{۳}\theta_B + ۲۱/۶ + \frac{۸EI}{۳}\theta_B - ۲۷ = ۰ \Rightarrow ۴EI\theta_B - ۵/۴ = ۰ \Rightarrow \theta_B = \frac{۱/۳۵}{EI}$

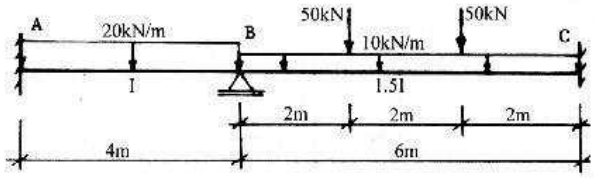


$\blacktriangleright \vec{M}_{AB} = ۱۳/۵ \quad kN.m$) , $\blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۲۳/۴ \quad kN.m$ (

$\blacktriangleright \vec{M}_{BC} = ۲۳/۴ \quad kN.m$) , $\blacktriangleright \vec{M}_{CB} = ۲۸/۸ \quad kN.m$ (

واکنشهای تکیه‌گاهی

۹-۳۵



$F.E.M_{AB} = -F.E.M_{BA} = -\frac{۲۰(۴)^۲}{۱۲}$

$F.E.M_{AB} = -۲۶/۶۷ \quad kN.m$

$F.E.M_{BC} = -F.E.M_{CB}$

$= -\frac{۱۰(۶)^۲}{۱۲} - \frac{۵۰(۲)(۴)}{۶} = -۹۶/۶۷ \quad kN.m$

شکل ۹-۳۵

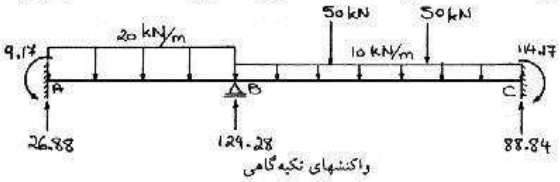
$$M_{AB}=\frac{2EI}{4}\left(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB}\right)-26/67=0/5EI\theta_B-26/67$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{4}\left(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{AB}\right)+26/67=EI\theta_B+26/67$$

$$M_{BC}=\frac{2E(1/5I)}{6}\left(2\theta_B+\theta_C-3\psi_{BC}\right)-96/67=EI\theta_B-96/67$$

$$M_{CB}=\frac{2E(1/5I)}{6}\left(2\theta_C+\theta_B-3\psi_{BC}\right)+96/67=0/5EI\theta_B+96/67$$

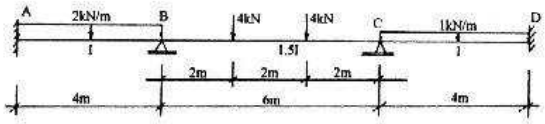
$$+\circlearrowleft\sum M^B=0\ :\ M_{BA}+M_{BC}=0\ \Rightarrow\ EI\theta_B+26/67+EI\theta_B-96/67=0\ \Rightarrow\ 2EI\theta_B-70=0\ \Rightarrow\ \theta_B=\frac{35}{EI}$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{AB}=9/17\ \ kN.m\ \circlearrowright$$
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{BA}=61/67\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{BC}=61/67\ \ kN.m\ \circlearrowright$$
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{CB}=114/17\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$

۳۶-۹



$$F.E.M_{AB}=-F.E.M_{BA}=-\frac{2(4)^2}{12}=-2/67\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{BC}=-F.E.M_{CB}=-\frac{4(2)(4)}{6}=-5/33\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{CD}=-F.E.M_{DC}=-\frac{1(4)^2}{12}=-1/33\ \ kN.m$$

شکل ۹-۳۶

$$M_{AB}=\frac{2EI}{4}\left(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB}\right)-2/67=0/5EI\theta_B-2/67$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{4}\left(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{AB}\right)+2/67=EI\theta_B+2/67$$

$$M_{BC}=\frac{2E(1/5I)}{6}\left(2\theta_B+\theta_C-3\psi_{BC}\right)-5/33=EI\theta_B+0/5EI\theta_C-5/33$$

$$M_{CB}=\frac{2E(1/5I)}{6}\left(2\theta_C+\theta_B-3\psi_{BC}\right)+5/33=0/5EI\theta_B+EI\theta_C+5/33$$

$$M_{CD}=\frac{2EI}{4}\left(2\theta_C+\theta_D-3\psi_{CD}\right)-1/33=EI\theta_C-1/33\ ,\ M_{DC}=\frac{2EI}{4}\left(2\theta_D+0\theta_C-3\psi_{CD}\right)+1/33=0/5EI\theta_C+1/33$$

$$+\circlearrowleft\sum M^B=0\ :\ M_{BA}+M_{BC}=0\ \Rightarrow\ EI\theta_B+2/67+EI\theta_B+0/5EI\theta_C-5/33=0$$

$$2EI\theta_B+0/5EI\theta_C=2/66\qquad(I)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^C=0\ :\ M_{CB}+M_{CD}=0\ \Rightarrow\ 0/5EI\theta_B+EI\theta_C+5/33+EI\theta_C-1/33=0$$

$$0/5EI\theta_B+2EI\theta_C=-4\qquad(II)$$

$$\theta_B=\frac{1/952}{EI}\ ,\ \theta_C=-\frac{2/488}{EI}$$

از حل دستگاه معادلات (I) و (II) خواهیم داشت:

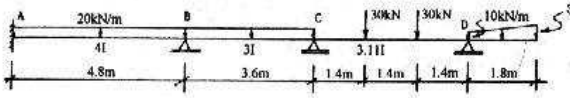


واکنشهای تکیه‌گاهی

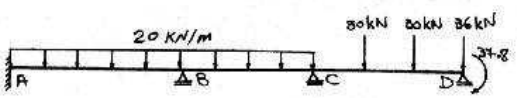
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{AB}=1/69\ \ kN.m\ \circlearrowright$$
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{BA}=2/62\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{BC}=2/62\ \ kN.m\ \circlearrowright$$
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{CB}=3/82\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{CD}=3/82\ \ kN.m\ \circlearrowright$$
$$\blacktriangleright\ \vec{M}_{DC}=0/09\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$

۳۷-۹

در تحلیل این تیر ابتدا قسمت طره‌ای را حذف کرده و بار 30kN/m وارد بر آن را به صورت یک نیرو و یک لنگر متمرکز بر گره D وارد می‌کنیم.



شکل ۳۷-۹



تیر جایگزین تیر اصلی

$$F.E.M_{AB} = -F.E.M_{BA} = -\frac{۲۰(۴/۸)^{۲}}{۱۲} = -۳۸/۴ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{BC} = -F.E.M_{CB} = -\frac{۲۰(۳/۶)^{۲}}{۱۲}$$

$$F.E.M_{BC} = -۲۱/۶ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{CD} = -F.E.M_{DC} = -\frac{۳۰(۱/۴)(۲/۸)}{۴/۲}$$

$$F.E.M_{CD} = -۲۸ \quad kN.m$$

$$M_{AB} = \frac{۲E(۴I)}{۴/۸}\left[۲\theta_A + \theta_B - ۳\psi_{AB}\right] - ۳۸/۴ = ۱/۶۶۷EI\theta_B - ۳۸/۴$$

$$M_{BA} = \frac{۲E(۴I)}{۴/۸}\left[۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{AB}\right] + ۳۸/۴ = ۳/۳۳۳EI\theta_B + ۳۸/۴$$

$$M_{BC} = \frac{۲E(۳I)}{۳/۶}\left[۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}\right] - ۲۱/۶ = ۳/۳۳۳EI\theta_B + ۱/۶۶۷EI\theta_C - ۲۱/۶$$

$$M_{CB} = \frac{۲E(۳I)}{۳/۶}\left[۲\theta_C + \theta_B - ۳\psi_{BC}\right] + ۲۱/۶ = ۱/۶۶۷EI\theta_B + ۳/۳۳۳EI\theta_C + ۲۱/۶$$

$$M_{CD} = \frac{۲E(۳/۱۱I)}{۴/۲}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] - ۲۸ = ۲/۹۶۱EI\theta_C + ۱/۴۸EI\theta_D - ۲۸$$

$$M_{DC} = \frac{۲E(۳/۱۱I)}{۴/۲}\left[۲\theta_D + \theta_C - ۳\psi_{CD}\right] + ۲۸ = ۱/۴۸EI\theta_C + ۲/۹۶۱EI\theta_D + ۲۸$$

$$+\circlearrowleft \sum M^B = ۰ \;:\; M_{BA} + M_{BC} = ۰ \Rightarrow ۳/۳۳۳EI\theta_B + ۳۸/۴ + ۳/۳۳۳EI\theta_B + ۱/۶۶۷EI\theta_C - ۲۱/۶ = ۰$$

$$۶/۶۶۶EI\theta_B + ۱/۶۶۷EI\theta_C = -۱۶/۸ \qquad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M^C = ۰ \;:\; M_{CB} + M_{CD} = ۰ \Rightarrow ۱/۶۶۷EI\theta_B + ۳/۳۳۳EI\theta_C + ۲۱/۶ + ۲/۹۶۱EI\theta_C + ۱/۴۸EI\theta_D - ۲۸ = ۰$$

$$۱/۶۶۷EI\theta_B + ۶/۲۹۴EI\theta_C + ۱/۴۸EI\theta_D = ۶/۴ \qquad (II)$$

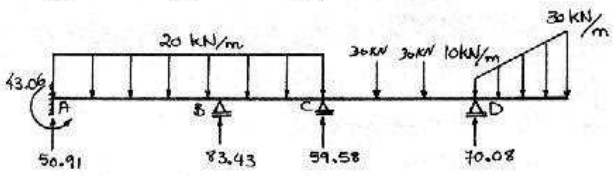
$$+\circlearrowleft \sum M^D = ۰ \;:\; M_{DC} - ۳۷/۸ = ۰ \Rightarrow ۱/۴۸EI\theta_C + ۲/۹۶۱EI\theta_D + ۲۸ - ۳۷/۸ = ۰$$

$$۱/۴۸EI\theta_C + ۲/۹۶۱EI\theta_D = ۹/۸ \qquad (III)$$

$$\theta_B = -\frac{۲/۸}{EI} \;,\; \theta_C = \frac{۱/۱۱}{EI} \;,\; \theta_D = \frac{۲/۷۵}{EI}$$

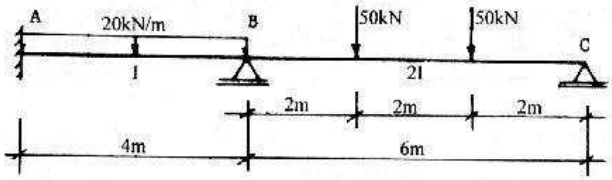
از حل دستگاه معادلات (I)، (II) و (III) خواهیم داشت:

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AB} = ۴۳/۰۶ \quad kN.m \;\circlearrowright$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۲۹/۰۷ \quad kN.m \;\circlearrowleft$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{BC} = ۲۹/۰۷ \quad kN.m \;\circlearrowright$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{CB} = ۲۰/۶۴ \quad kN.m \;\circlearrowleft$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۲۰/۶۴ \quad kN.m \;\circlearrowright$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

۳۸-۹



شکل ۹-۳۸

$$F.E.M_{AB} = -F.E.M_{BA} = -\frac{۲۰(۴)^۲}{۱۲}$$
$$F.E.M_{AB} = -۲۶/۶۷ \quad kN.m$$
$$F.E.M_{BC} = -F.E.M_{CB} = -\frac{۵۰(۲)(۴)}{۶}$$
$$F.E.M_{BC} = -۶۶/۶۷ \quad kN.m$$
$$\psi_{AB} = \frac{۲۰ - ۰}{۴۰۰۰} = ۰/۰۰۵$$
$$\psi_{BC} = \frac{۰ - ۲۰}{۶۰۰۰} = -۰/۰۰۳۳۳$$

$\Delta_B = 20\,mm \downarrow$

$EI = ۶۰۰۰ \quad kN.m^۲$

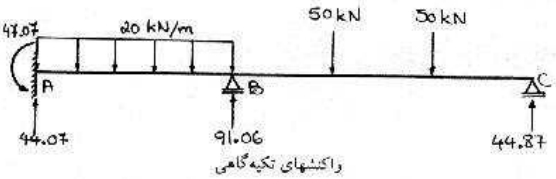
$$M_{AB} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_A + \theta_B - ۳\psi_{AB}\right] - ۲۶/۶۷ = \frac{۲(۶۰۰۰)}{۴}\left[\theta_B - ۳(۰/۰۰۵)\right] - ۲۶/۶۷ = ۳۰۰۰\theta_B - ۷۱/۶۷$$

$$M_{BA} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{AB}\right] + ۲۶/۶۷ = \frac{۲(۶۰۰۰)}{۴}\left[۲\theta_B - ۳(۰/۰۰۵)\right] + ۲۶/۶۷ = ۶۰۰۰\theta_B - ۱۸/۳۳$$

$$M_{BC} = \frac{۳E(۲I)}{۶}\theta_B - \frac{۳E(۲I)}{۶}\psi_{BC} - ۶۶/۶۷ - \frac{۱}{۲}(۶۶/۶۷) = ۶۰۰۰\theta_B - ۶۰۰۰(-۰/۰۰۳۳۳) - ۱۰۰ = ۶۰۰۰\theta_B - ۸۰$$

$$+) \sum M^B = ۰ \;:\; M_{BA} + M_{BC} = ۰ \Rightarrow ۶۰۰۰\theta_B - ۱۸/۳۳ + ۶۰۰۰\theta_B - ۸۰ = ۰ \Rightarrow ۱۲۰۰۰\theta_B - ۹۸/۳۳ = ۰$$

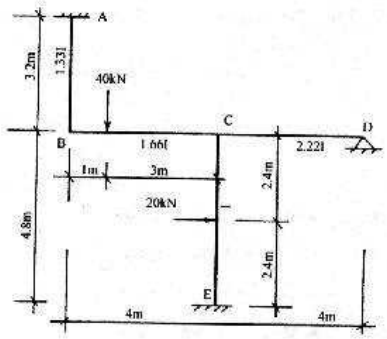
$$\theta_B = ۰/۰۰۸۲$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AB} = ۴۷/۰۷ \quad kN.m \;)$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۳۰/۸ \quad kN.m \;)$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{BC} = ۳۰/۸ \quad kN.m \;)$$

۹-۳۹ تاب نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کرده، سپس واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورید.



شکل ۹-۳۹

$$F.E.M_{BC} = -\frac{۲۰(۱)(۳)^۲}{۴^۲} = -۲۲/۵ \quad kN.m$$
$$F.E.M_{CB} = \frac{۲۰(۱)^۲(۳)}{۴^۲} = ۷/۵ \quad kN.m$$
$$F.E.M_{EC} = -F.E.M_{CE} = -\frac{۲۰(۴/۸)}{۸} = -۱۲ \quad kN.m$$
$$M_{AB} = \frac{۲E(۱/۳۳I)}{۳/۲}\left[۲\theta_A + \theta_B - ۳\psi_{AB}\right] = ۰/۸۳۱EI\theta_B$$
$$M_{BA} = \frac{۲E(۱/۳۳I)}{۳/۲}\left[۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{AB}\right] = ۱/۶۶۲EI\theta_B$$
$$M_{BC} = \frac{۲E(۱/۶۶I)}{۴}\left[۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}\right] - ۲۲/۵$$
$$M_{BC} = ۱/۶۶EI\theta_B + ۰/۸۳EI\theta_C - ۲۲/۵$$
$$M_{CB} = \frac{۲E(۱/۶۶I)}{۴}\left[۲\theta_C + \theta_B - ۳\psi_{BC}\right] + ۷/۵$$
$$M_{CB} = ۰/۸۳EI\theta_B + ۱/۶۶EI\theta_C + ۷/۵$$

$$M_{CE} = \frac{۲EI}{۴/۸}\left[۲\theta_C + \theta_E - ۳\psi_{CE}\right] + ۱۲ = ۰/۸۳۳EI\theta_C + ۱۲ \quad , \quad M_{EC} = \frac{۲EI}{۴/۸}\left[۲\theta_E + \theta_C - ۳\psi_{CE}\right] - ۱۲ = ۰/۴۱۷EI\theta_C - ۱۲$$

$$M_{CD} = \frac{۳E(۲/۲۲I)}{۴}\theta_C - \frac{۳E(۲/۲۲I)}{۴}\psi_{CD} = ۱/۶۶۵EI\theta_C$$

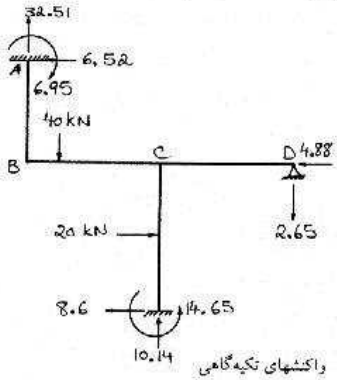
$$+\circlearrowleft \sum M^B = 0 \;:\; M_{BA} + M_{BC} = 0 \;\Rightarrow\; ۱/۶۶۲EI\theta_B + ۱/۶۶EI\theta_B + ۰/۸۳EI\theta_C - ۲۲/۵ = 0$$

$$۳/۳۲۲EI\theta_B + ۰/۸۳EI\theta_C = ۲۲/۵ \quad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M^C = 0 \;:\; M_{CB} + M_{CD} + M_{CE} = 0 \;\Rightarrow\; ۰/۸۳EI\theta_B + ۱/۶۶EI\theta_C + ۷/۵ + ۱/۶۶۵EI\theta_C + ۰/۸۳۳EI\theta_C + ۱۲ = 0$$

$$۰/۸۳EI\theta_B + ۴/۱۵۸EI\theta_C = -۱۹/۵ \quad (II)$$

از حل دستگاه معادلات (I) و (II) مقادیر θ_B و θ_C به دست خواهند آمد.



واکنشهای تکیه‌گاهی

$$\theta_B = \frac{۸/۳۶}{EI} \quad , \quad \theta_C = -\frac{۶/۳۶}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AB} = ۶/۹۵ \;\; kN.m \;\curvearrowright \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{BA} = ۱۳/۹۰ \;\; kN.m \;\curvearrowright$$

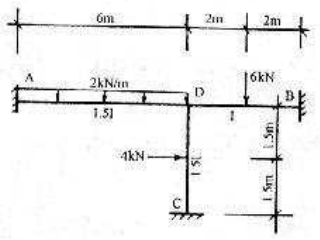
$$\blacktriangleright \vec{M}_{BC} = ۱۳/۹۰ \;\; kN.m \;\curvearrowleft \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CB} = ۳/۸۸ \;\; kN.m \;\curvearrowright$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{CE} = ۶/۷۰ \;\; kN.m \;\curvearrowright \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{EC} = ۱۴/۶۵ \;\; kN.m \;\curvearrowleft$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۱۰/۵۸ \;\; kN.m \;\curvearrowleft$$

در مسایل ۹-۴۰ تا ۹-۴۳ قاب نشان داده شده را با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کرده، سپس واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورید.

۹-۴۰



شکل ۹-۴۰

$$F.E.M_{AD} = -F.E.M_{DA} = -\frac{۲(۶)^۲}{۱۲} = -۶ \;\; kNm$$

$$F.E.M_{DB} = -F.E.M_{BD} = -\frac{۶(۴)}{۸} = -۳ \;\; kNm$$

$$F.E.M_{CD} = -F.E.M_{DC} = -\frac{۴(۳)}{۸} = -۱/۵ \;\; kNm$$

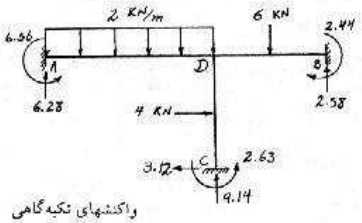
$$M_{AD} = \frac{۲E(۱/۵)}{۶}\left[۲\theta_A + \theta_D - ۳\psi_{AD}\right] - ۶ = ۰/۵EI\theta_D - ۶$$

$$M_{DA} = EI\theta_D + ۶$$

$$M_{CD} = \frac{۲E(۱/۵I)}{۳}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] - ۱/۵ = EI\theta_D - ۱/۵$$

$$M_{DC} = ۲EI\theta_D + ۱/۵$$

$$M_{BD} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_B + \theta_D - ۳\psi_{BD}\right] + ۳ = ۰/۵EI\theta_D + ۳ \quad , \quad M_{DB} = EI\theta_D - ۳$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

$$+\circlearrowleft \sum M^D = 0 \;:\; M_{DA} + M_{DC} + M_{DB} = 0$$

$$EI\theta_D + ۶ + ۲EI\theta_D + ۱/۵ + EI\theta_D - ۳ = 0 \;\Rightarrow\; ۴EI\theta_D + ۴/۵ = 0$$

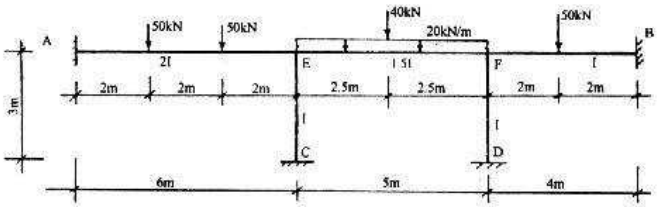
$$\theta_D = -\frac{۱/۱۲۵}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AD} = ۶/۵۶ \;\; kN.m \;\curvearrowleft \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{DA} = ۴/۸۸ \;\; kN.m \;\curvearrowright$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{DC} = ۰/۷۵ \;\; kN.m \;\curvearrowleft \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{CD} = ۲/۶۳ \;\; kN.m \;\curvearrowleft$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{BD} = ۲/۴۴ \;\; kN.m \;\curvearrowright \quad , \quad \blacktriangleright \vec{M}_{DB} = ۴/۱۳ \;\; kN.m \;\curvearrowleft$$

۹-۴۱



شکل ۹-۴۱

$$F.E.M_{AE}=-F.E.M_{EA}=-\frac{۵۰(۲)(۴)}{۶}$$
$$F.E.M_{AE}=-۶۶/۶۷\ \ kN.m$$
$$F.E.M_{FB}=-F.E.M_{BF}=-\frac{۵۰(۴)}{۸}$$
$$F.E.M_{FB}=-۲۵\ \ kN.m$$
$$F.E.M_{EF}=-\frac{۲۰(۵)^{۲}}{۱۲}-\frac{۴۰(۵)}{۸}$$
$$F.E.M_{EF}=-۶۶/۶۷\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{FE}=\frac{۲۰(۵)^{۲}}{۱۲}+\frac{۴۰(۵)}{۸}=۶۶/۶۷\ \ kN.m$$

$$M_{AE}=\frac{۲E(۲I)}{۶}\left[۲\theta_A+\theta_E-۳\psi_{AE}\right]-۶۶/۶۷=۰/۶۶۷EI\theta_E-۶۶/۶۷$$

$$M_{EA}=\frac{۲E(۲I)}{۶}\left[۲\theta_E+\theta_A-۳\psi_{AE}\right]+۶۶/۶۷=۱/۳۳۳EI\theta_E+۶۶/۶۷$$

$$M_{CE}=\frac{۲EI}{۳}\left[۲\theta_C+\theta_E-۳\psi_{CE}\right]=۰/۶۶۷EI\theta_E\ \ ,\ \ M_{EC}=\frac{۲EI}{۳}\left[۲\theta_E+\theta_C-۳\psi_{CE}\right]=۱/۳۳۳EI\theta_E$$

$$M_{EF}=\frac{۲E(۱/۵I)}{۵}\left[۲\theta_E+\theta_F-۳\psi_{EF}\right]-۶۶/۶۷=۱/۲EI\theta_E+۰/۶EI\theta_F-۶۶/۶۷$$

$$M_{FE}=\frac{۲E(۱/۵I)}{۵}\left[۲\theta_F+\theta_E-۳\psi_{EF}\right]+۶۶/۶۷=۰/۶EI\theta_E+۱/۲EI\theta_F+۶۶/۶۷$$

$$M_{DF}=\frac{۲EI}{۳}\left[۲\theta_D+\theta_F-۳\psi_{DF}\right]=۰/۶۶۷EI\theta_F\ \ ,\ \ M_{FD}=\frac{۲EI}{۳}\left[۲\theta_F+\theta_D-۳\psi_{DF}\right]=۱/۳۳۳EI\theta_F$$

$$M_{FB}=\frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_F+\theta_B-۳\psi_{FB}\right]-۲۵=EI\theta_F-۲۵\ \ ,\ \ M_{BF}=\frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_B+\theta_F-۳\psi_{BF}\right]+۲۵=۰/۵EI\theta_F+۲۵$$

$$+\circlearrowleft\ \sum M^{E}=۰\ :\ M_{EA}+M_{EC}+M_{EF}=۰\ \Rightarrow\ ۱/۳۳۳EI\theta_E+۶۶/۶۷+۱/۳۳۳EI\theta_E+۱/۲EI\theta_E+۰/۶EI\theta_F-۶۶/۶۷=۰$$

$$۳/۸۶۶EI\theta_E+۰/۶EI\theta_F=۰\qquad (I)$$

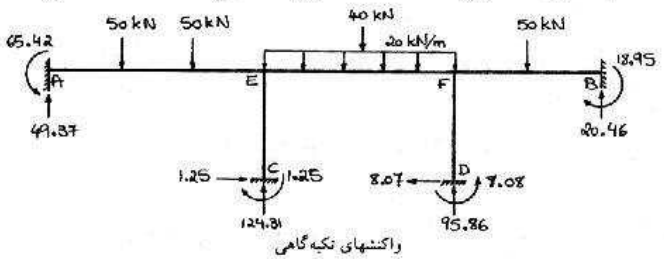
$$+\circlearrowleft\ \sum M^{F}=۰\ :\ M_{FE}+M_{FB}+M_{FD}=۰\ \Rightarrow\ ۰/۶EI\theta_E+۱/۲EI\theta_F+۶۶/۶۷+EI\theta_F-۲۵+۱/۳۳۳EI\theta_F=۰$$

$$۰/۶EI\theta_E+۳/۵۳۳EI\theta_F=-۴۱/۶۷\qquad (II)$$

از حل دستگاه معادلات (I) و (II) مقادیر θ_E و θ_F به دست می‌آیند.

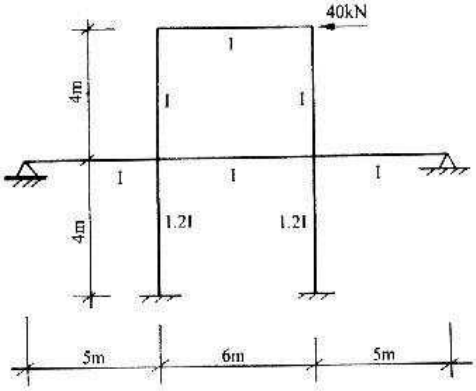
$$\theta_E=\frac{۱/۸۸}{EI}\ \ ,\ \ \theta_F=-\frac{۱۲/۱۱}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{AE}=۶۵/۴۲\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright \vec{M}_{EA}=۶۹/۱۸\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright \vec{M}_{CE}=۱/۲۵\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright \vec{M}_{EC}=۲/۵۱\ \ kN.m\ \circlearrowright$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{EF}=۷۱/۶۸\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright \vec{M}_{FE}=۵۳/۲۷\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright \vec{M}_{DF}=۸/۰۸\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\ \blacktriangleright \vec{M}_{FD}=۱۶/۱۴\ \ kN.m\ \circlearrowright$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{BF}=۱۸/۹۵\ \ kN.m\ \circlearrowright$$
$$\blacktriangleright \vec{M}_{FB}=۳۷/۱۱\ \ kN.m\ \circlearrowright$$



واکنشهای تکیه گاهی

۴۲-۹



شکل ۹-۴۲

$$\psi_{DG}=-\frac{\Delta}{۴}\ ,\ \psi_{EH}=-\frac{\Delta}{۴}\ ,\ \psi_{GH}=۰$$

$$M_{AD}=\frac{۲E(۱/۲I)}{۴}\left[۲\theta_A+\theta_D-۳\psi_{AD}\right]=۰/۶EI\theta_D$$

$$M_{DA}=۱/۲EI\theta_D$$

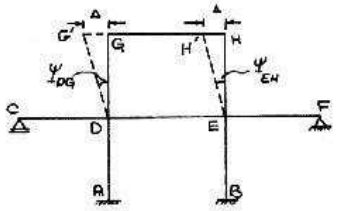
$$M_{BE}=\frac{۲E(۱/۲I)}{۴}\left[۲\theta_B+\theta_E-۳\psi_{BE}\right]=۰/۶EI\theta_E$$

$$M_{EB}=۱/۲EI\theta_E$$

$$M_{DC}=\frac{۳EI}{۵}\theta_D-\frac{۳EI}{۵}\psi_{CD}=۰/۶EI\theta_D$$

$$M_{EF}=\frac{۳EI}{۵}\theta_E-\frac{۳EI}{۵}\psi_{EF}=۰/۶EI\theta_E$$

$$M_{DE}=\frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_D+\theta_E-۳\psi_{DE}\right]=۰/۶۶۷EI\theta_D+۰/۳۳۳EI\theta_E$$



$$M_{ED}=۰/۳۳۳EI\theta_D+۰/۶۶۷EI\theta_E$$

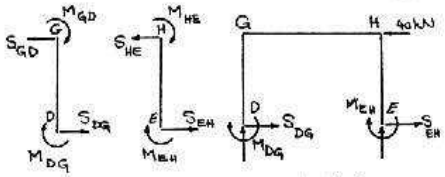
$$M_{GH}=\frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_G+\theta_H-۳\psi_{GH}\right]=۰/۶۶۷EI\theta_G+۰/۳۳۳EI\theta_H$$

$$M_{HG}=۰/۳۳۳EI\theta_G+۰/۶۶۷EI\theta_H$$

$$M_{DG}=\frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_D+\theta_G-۳\psi_{DG}\right]=EI\theta_D+۰/۵EI\theta_G+۰/۳۷۵EI\Delta$$

$$M_{GD}=\frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_G+\theta_D-۳\psi_{DG}\right]=۰/۵EI\theta_D+EI\theta_G+۰/۳۷۵EI\Delta$$

$$M_{EH}=\frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_E+\theta_H-۳\psi_{EH}\right]=EI\theta_E+۰/۵EI\theta_H+۰/۳۷۵EI\Delta$$



$$M_{HE}=\frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_H+\theta_E-۳\psi_{EH}\right]$$

$$M_{HE}=۰/۵EI\theta_E+EI\theta_H+۰/۳۷۵EI\Delta$$

$$+\circlearrowleft\sum M^G_{DG}=۰\ :\ ۴S_{DG}-M_{DG}-M_{GD}=۰$$

$$S_{DG}=\frac{M_{DG}+M_{GD}}{۴}\qquad(a)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^G=۰\ :\ M_{GD}+M_{GH}=۰\qquad(I)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^H_{EH}=۰\ :\ ۴S_{EH}-M_{EH}-M_{HE}=۰\ \Rightarrow\ S_{EH}=\frac{M_{EH}+M_{HE}}{۴}\qquad(b)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^H=۰\ :\ M_{HE}+M_{HG}=۰\qquad(II)$$

$$\xrightarrow[\text{روابط (a) و (b)}]{\text{با جایگزینی از}}\ M_{DG}+M_{GD}+M_{EH}+M_{HE}=۱۶۰\qquad(III)$$

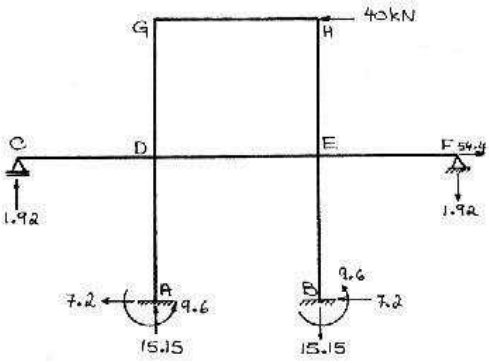
(برای طبقهٔ فوقانی) $\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=۰\ :\ -۴۰+S_{DG}+S_{EH}=۰$

$$+\circlearrowleft\sum M^D=۰\ :\ M_{DC}+M_{DA}+M_{DE}+M_{DG}=۰\quad(IV)\ ,\ +\circlearrowleft\sum M^E=۰\ :\ M_{ED}+M_{EB}+M_{EF}+M_{EH}=۰\quad(V)$$

با جایگزینی مقادیر مناظر با لنگرها از معادلات شیب - افت به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases}
۰/۵EI\theta_D+۱/۶۶۷EI\theta_G+۰/۳۳۳EI\theta_H+۰/۳۷۵EI\Delta=۰\\
۰/۳۳۳EI\theta_G+۱/۶۶۷EI\theta_H+۰/۵EI\theta_E+۰/۳۷۵EI\Delta=۰\\
۱/۵EI\theta_D+۱/۵EI\theta_G+۱/۵EI\theta_H+۱/۵EI\theta_E+۱/۵EI\Delta=۱۶۰\\
۳/۴۶۷EI\theta_D+۰/۵EI\theta_G+۰/۳۳۳EI\theta_E+۰/۳۷۵EI\Delta=۰\\
۰/۳۳۳EI\theta_D+۰/۵EI\theta_H+۳/۴۶۷EI\theta_E+۰/۳۷۵EI\Delta=۰
\end{cases}$$

$$\theta_D=-\frac{۱۶}{EI}\ ,\ \theta_G=-\frac{۳۵/۲}{EI}\ ,\ \theta_H=-\frac{۳۵/۲}{EI}\ ,\ \theta_E=-\frac{۱۶}{EI}\ ,\ \Delta=\frac{۲۰۹/۰۶۷}{E}$$



$\blacktriangleright \vec{M}_{AD} = \vec{M}_{BE} = ۹/۶ \quad kN.m$)

$\blacktriangleright \vec{M}_{DA} = \vec{M}_{EB} = ۱۹/۲ \quad kN.m$)

$\blacktriangleright \vec{M}_{DE} = \vec{M}_{ED} = ۱۶ \quad kN.m$)

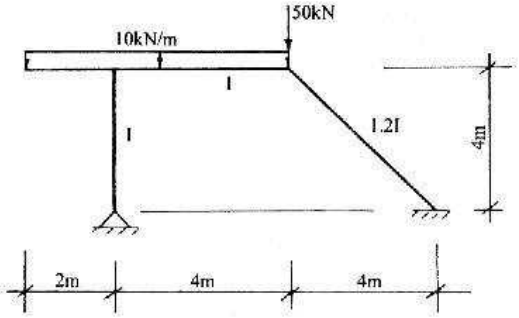
$\blacktriangleright \vec{M}_{DC} = \vec{M}_{EF} = ۹/۶ \quad kN.m$)

$\blacktriangleright \vec{M}_{DG} = \vec{M}_{EH} = ۴۴/۸ \quad kN.m$)

$\blacktriangleright \vec{M}_{GD} = \vec{M}_{HE} = ۳۵/۲ \quad kN.m$)

$\blacktriangleright \vec{M}_{GH} = \vec{M}_{HG} = ۳۵/۲ \quad kN.m$)

۹-۴۳



شکل ۹-۴۳

برای تعیین رابطهٔ بین ψ_{ij}ها، از دو رابطهٔ ارائه شده در ابتدای این فصل استفاده می‌کنیم.

$$(۰-۰)\psi_{AB} + (۰-۴)\psi_{BC} + (۰-۴)\psi_{CD} = (۰-۰) - (۰-۰)$$

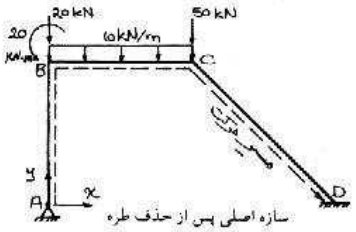
$$\psi_{BC} + \psi_{CD} = ۰$$

$$(۴-۰)\psi_{AB} + (۴-۴)\psi_{BC} + (۰-۴)\psi_{CD} = (۸-۸) - (۰-۰)$$

$$\psi_{AB} - \psi_{CD} = ۰$$

کلیهٔ روابط شیب - افت را بر حسب ψ_{CD} بازنویسی می‌کنیم.

$$M_{BA} = \frac{۳EI}{۴}\theta_B - \frac{۳EI}{۴}\psi_{AB} = ۰/۷۵EI\theta_B - ۰/۷۵EI\psi_{CD}$$



$$M_{BC} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}\right] - \frac{۱۰(۴)^۲}{۱۲}$$

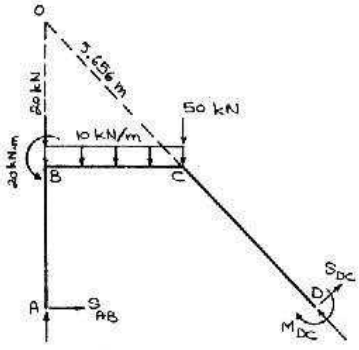
$$M_{BC} = EI\theta_B + ۰/۵EI\theta_C + ۱/۵EI\psi_{CD} - ۱۳/۳۳$$

$$M_{CB} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_C + \theta_B - ۳\psi_{BC}\right] + \frac{۱۰(۴)^۲}{۱۲}$$

$$M_{CB} = ۰/۵EI\theta_B + EI\theta_C + ۱/۵EI\psi_{CD} + ۱۳/۳۳$$

$$M_{CD} = \frac{۲E(۱/۲I)}{۵/۶۵۶}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] = ۰/۸۴۸EI\theta_C - ۱/۲۷۳EI\psi_{CD}$$

$$M_{DC} = \frac{۲E(۱/۲I)}{۵/۶۵۶}\left[۲\theta_D + \theta_C - ۳\psi_{CD}\right] = ۰/۴۲۴EI\theta_C - ۱/۲۷۳EI\psi_{CD}$$



$$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = ۰ \;:\; ۴S_{AB} - M_{BA} = ۰ \Rightarrow S_{AB} = \frac{M_{BA}}{۴} \qquad (\text{الف})$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{CD} = ۰ \;:\; +۵/۶۵۶S_{DC} - M_{DC} - M_{CD} = ۰$$

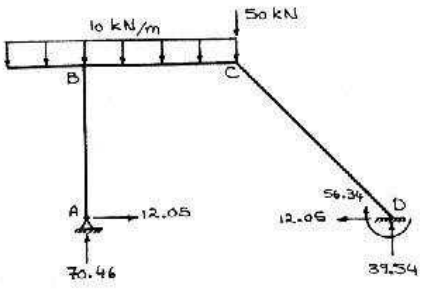
$$S_{DC} = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{۵/۶۵۶} \qquad (\text{ب})$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ \;:$$

$$۱۱/۳۱۲S_{DC} + ۸S_{AB} - ۵۰(۴) - ۱۰(۴)(۲) + ۲۰ - M_{DC} = ۰ \qquad (\text{ج})$$

با جایگزینی روابط (الف) و (ب) در (ج) به معادلهٔ (I) می‌رسیم.

$$۲M_{BA} + M_{DC} + ۲M_{CD} = ۲۶۰ \qquad (I)$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

$$+\circlearrowright \sum M^B = 0 \;:\; M_{BA} + M_{BC} = -20 \qquad (II)$$
$$+\circlearrowright \sum M^C = 0 \;:\; M_{CB} + M_{CD} = 0 \qquad (III)$$

با جایگزینی مقادیر مناظر با لنگرها از معادلات شیب - افت، به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} 1/5EI\theta_B + 2/12EI\theta_C - 5/319EI\Delta = 260 \\ 1/75EI\theta_B + 0/5EI\theta_C + 0/75EI\psi_{CD} = -6/67 \\ 0/5EI\theta_B + 1/848EI\theta_C + 0/227EI\psi_{CD} = -13/13 \end{cases}$$

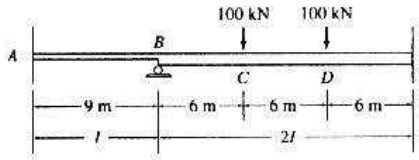
$$\theta_B = \frac{17/88}{EI} \;,\; \theta_C = -\frac{6/35}{EI} \;,\; \psi_{CD} = -\frac{46/37}{EI}$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{BA} = 48/18 \;\; kN.m \;) \;,\; \blacktriangleright \vec{M}_{BC} = 68/18 \;\; kN.m \;)$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_{CB} = 53/65 \;\; kN.m \;) \;,\; \blacktriangleright \vec{M}_{CD} = 53/65 \;\; kN.m \;) \;,\; \blacktriangleright \vec{M}_{DC} = 56/34 \;\; kN.m \;)$$

تیرهای نشان داده شده در مسایل ۹-۴۴ و ۹-۴۵ را با روش شیب - افت تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را ترسیم کنید.

۹-۴۴



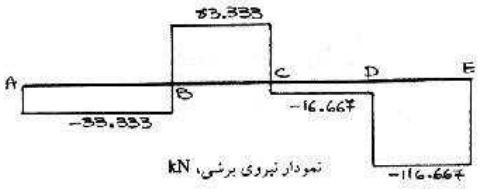
E ثابت =

شکل ۹-۴۴

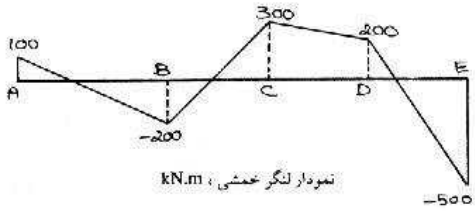
$$F.E.M_{AB} = F.E.M_{BA} = 0$$
$$F.E.M_{BE} = -F.E.M_{EB} = -\frac{100(6)(12)}{18} = -400 \;\; kN.m$$
$$M_{AB} = \frac{2EI}{9}\theta_B \;,\; M_{BA} = \frac{4EI}{9}\theta_B$$
$$M_{BE} = \frac{4EI}{9}\theta_B - 400 \;,\; M_{EB} = \frac{2EI}{9}\theta_B + 400$$

$$\sum M^B = 0 \;:\; M_{BA} + M_{BE} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4EI}{9}\theta_B + \frac{4EI}{9}\theta_B - 400 = 0 \;\Rightarrow\; \theta_B = \frac{450}{EI}$$

$$\vec{M}_{AB} = 100 \;\; kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{BA} = 200 \;\; kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{BE} = 200 \;\; kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{EB} = 500 \;\; kN.m \;)$$

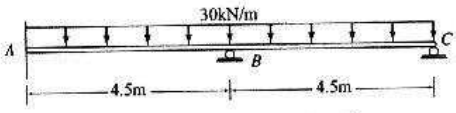


نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی، kN.m

۹-۴۵



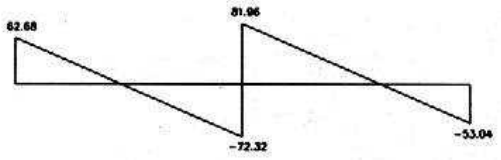
E = ۷۰ GPa ; I = ۱/۲×۱۰^۹ mm^۴

شکل ۹-۴۵

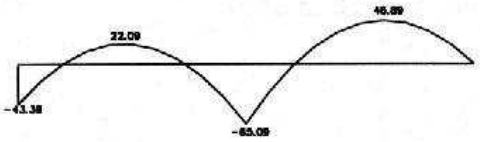
$$F.E.M_{AB} = -F.E.M_{BA} = F.E.M_{BC} = -F.E.M_{CB} = -\frac{30(4/5)^2}{12}$$
$$F.E.M_{AB} = -50/625 \;\; kN.m$$
$$M_{AB} = \frac{4EI}{9}\theta_B - 50/625 \;,\; M_{BA} = \frac{8EI}{9}\theta_B + 50/625$$
$$M_{BC} = \frac{3EI}{l}\theta_B - \frac{3EI}{l}\psi_{BC} + F.E.M_{BC} - \frac{1}{2}F.E.M_{CB}$$
$$M_{BC} = \frac{2EI}{3}\theta_B - 75/938$$

$$+\circlearrowright \sum M^B = 0 \;:\; M_{BA} + M_{BC} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{8EI}{9}\theta_B + 50/625 + \frac{2EI}{3}\theta_B - 75/938 = 0 \;\Rightarrow\; \theta_B = \frac{16/272}{EI}$$

$$\vec{M}_{AB} = 43/39 \;\; kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{BA} = 65/09 \;\; kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{BC} = 65/09 \;\; kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{CB} = 0$$



نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۹-۴۶ اگر علاوه بر بارهای اعمال شده بر تیر نشان داده شده در مسئلهٔ قبل، تکیه‌گاه B به اندازهٔ ۳۶ mm و تکیه‌گاه C به اندازهٔ ۱۸ mm نشست کنند، مسئله را مجدداً حل کنید.

$$\psi_{AB}=\psi_{BA}=\frac{۳۶-۰}{۴۵۰۰}=۰/۰۰۸\ ,\ \psi_{BC}=\psi_{CB}=\frac{۱۸-۳۶}{۴۵۰۰}=-۰/۰۰۴\ ,\ EI=۸۴۰۰۰\ \ kN.m^{۲}$$

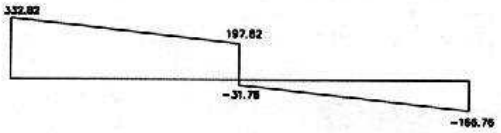
$$M_{AB}=\frac{۲(۸۴۰۰۰)}{۴/۵}\left[۲\theta_A+\theta_B-۳(۰/۰۰۸)\right]-۵۰/۶۲۵=۳۷۳۳۳/۳۳\theta_B-۹۴۶/۶۲۵$$

$$M_{BA}=۷۴۶۶۶/۶۶\theta_B-۸۴۵/۳۷۵$$

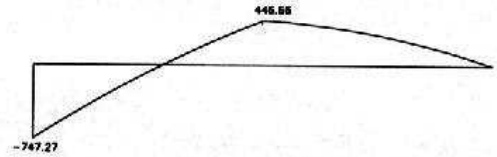
$$M_{BC}=\frac{۳EI}{l}\theta_B-\frac{۳EI}{l}\psi_{BC}+F.E.M_{BC}-\frac{۱}{۲}F.E.M_{CB}=۵۶۰۰۰\theta_B+۱۴۸/۰۶۲$$

$$\sum M^B=۰\ :\ M_{BA}+M_{BC}=۰\ \Rightarrow\ ۷۴۶۶۶/۶۶\theta_B-۸۴۵/۳۷۵+۵۶۰۰۰\theta_B+۱۴۸/۰۶۲=۰\ \Rightarrow\ \theta_B=۰/۰۰۵۳۴$$

$$\vec{M}_{AB}=۷۴۷/۲۷\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\quad \vec{M}_{BA}=۴۴۶/۶۶\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\quad \vec{M}_{BC}=۴۴۶/۶۶\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

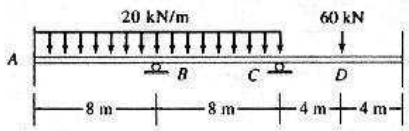


نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۹-۴۷ تیر نشان داده شده در شکل زیر را با روش شیب - افت تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



EI = ثابت ، E = ۷۰ GPa ، I = ۸۰۰×۱۰^{۶} mm^{۴}

شکل ۹-۴۷

$$F.E.M_{AB}=-F.E.M_{BA}=F.E.M_{BC}=-F.E.M_{CB}=-\frac{۲۰(۸)^{۲}}{۱۲}$$

$$F.E.M_{AB}=-۱۰۶/۶۶۷\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{CE}=-F.E.M_{EC}=-\frac{۶۰(۸)}{۸}=-۶۰\ \ kN.m$$

$$M_{AB}=۰/۲۵EI\theta_B-۱۰۶/۶۶۷\ ,\ M_{BA}=۰/۵EI\theta_B+۱۰۶/۶۶۷$$

$$M_{BC}=۰/۵EI\theta_B+۰/۲۵EI\theta_C-۱۰۶/۶۶۷$$

$$M_{CB}=۰/۲۵EI\theta_B+۰/۵EI\theta_C+۱۰۶/۶۶۷\ ,\ M_{CE}=۰/۵EI\theta_C-۶۰\ ,\ M_{EC}=۰/۲۵EI\theta_C+۶۰$$

$$\sum M^B=۰\ :\ M_{BA}+M_{BC}=۰\ \Rightarrow\ ۰/۵EI\theta_B+۱۰۶/۶۶۷+۰/۵EI\theta_B+۰/۲۵EI\theta_C-۱۰۶/۶۶۷=۰$$

$$EI\theta_B+۰/۲۵EI\theta_C=۰\qquad (I)$$

$$\sum M^C=۰\ :\ M_{CB}+M_{CE}=۰\ \Rightarrow\ ۰/۲۵EI\theta_B+۰/۵EI\theta_C+۱۰۶/۶۶۷+۰/۵EI\theta_C-۶۰=۰$$

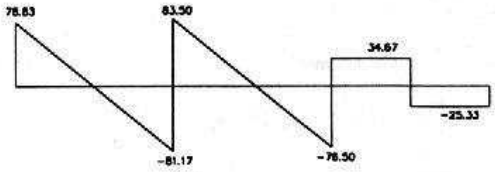
$$۰/۲۵EI\theta_B+EI\theta_C=-۴۶/۶۶۷\qquad (II)$$

از حل دستگاه معادلات (I) و (II) به دست خواهد آمد:

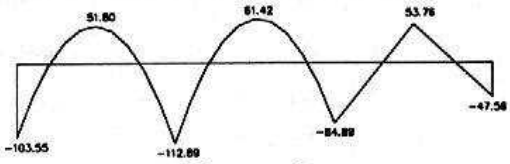
$$\theta_C=-\frac{۴۹/۷۷۸}{EI}\ ,\ \theta_B=\frac{۱۲/۴۴۴}{EI}$$

$\vec{M}_{AB} = ۱۰۳/۵۵ \ \ kN.m \ )$ ، $\vec{M}_{BA} = ۱۱۲/۸۹ \ \ kN.m \ )$ ، $\vec{M}_{BC} = ۱۱۲/۸۹ \ \ kN.m \ )$

$\vec{M}_{CB} = ۸۴/۸۹ \ \ kN.m \ )$ ، $\vec{M}_{CE} = ۸۴/۸۹ \ \ kN.m \ )$ ، $\vec{M}_{EC} = ۴۷/۵۶ \ \ kN.m \ )$



نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۹-۴۸ در مسئلهٔ ۹-۴۷ اگر علاوه بر بارهای اعمال شده بر تیر، تکیه‌گاه C به اندازهٔ mm ۲۵ نشست کند، مجدداً تیر را تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.

$\psi_{BC} = \psi_{CB} = \frac{۲۵ - ۰}{۸۰۰۰} = ۰/۰۰۳۱۲۵$ ، $\psi_{CE} = \psi_{EC} = \frac{۰ - ۲۵}{۸۰۰۰} = -۰/۰۰۳۱۲۵$ ، $EI = ۵۶۰۰۰ \ \ kN.m^{۲}$

$M_{AB} = \frac{۲(۵۶۰۰۰)}{۸} \left[۲\theta_A + \theta_B - ۳\psi_{AB} \right] - ۱۰۶/۶۶۷ = ۱۴۰۰۰\theta_B - ۱۰۶/۶۶۷$

$M_{BA} = \frac{۲(۵۶۰۰۰)}{۸} \left[۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{AB} \right] + ۱۰۶/۶۶۷ = ۲۸۰۰۰\theta_B + ۱۰۶/۶۶۷$

$M_{BC} = \frac{۲(۵۶۰۰۰)}{۸} \left[۲\theta_B + \theta_C - ۳(۰/۰۰۳۱۲۵) \right] - ۱۰۶/۶۶۷ = ۲۸۰۰۰\theta_B + ۱۴۰۰۰\theta_C - ۲۳۷/۹۱۷$

$M_{CB} = \frac{۲(۵۶۰۰۰)}{۸} \left[۲\theta_C + \theta_B - ۳(۰/۰۰۳۱۲۵) \right] + ۱۰۶/۶۶۷ = ۱۴۰۰۰\theta_B + ۲۸۰۰۰\theta_C - ۲۴/۵۸۳$

$M_{CE} = \frac{۲(۵۶۰۰۰)}{۸} \left[۲\theta_C + \theta_E + ۳(۰/۰۰۳۱۲۵) \right] - ۶۰ = ۲۸۰۰۰\theta_C + ۷۱/۲۵$

$M_{EC} = \frac{۲(۵۶۰۰۰)}{۸} \left[۲\theta_E + \theta_C + ۳(۰/۰۰۳۱۲۵) \right] + ۶۰ = ۱۴۰۰۰\theta_C + ۱۹۱/۲۵$

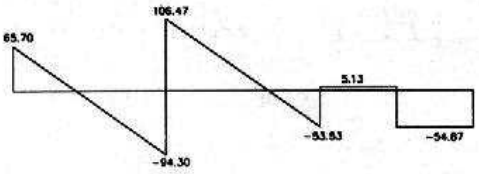
$\sum M^B = ۰ \ : \ M_{BA} + M_{BC} = ۰ \ \Rightarrow \ ۵۶۰۰۰\theta_B + ۱۴۰۰۰\theta_C = ۱۳۱/۲۵$

$\sum M^C = ۰ \ : \ M_{CB} + M_{CE} = ۰ \ \Rightarrow \ ۱۴۰۰۰\theta_B + ۵۶۰۰۰\theta_C = -۴۶/۶۶۷$

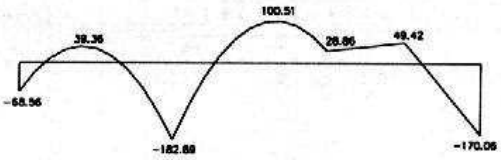
$\Rightarrow \theta_B = ۰/۰۰۲۷۲۲۲ \ , \ \theta_C = -۰/۰۰۱۵۱۳۹$

$\vec{M}_{AB} = ۶۸/۵۶ \ \ kN.m \ )$ ، $\vec{M}_{BA} = ۱۸۲/۸۹ \ \ kN.m \ )$ ، $\vec{M}_{BC} = ۱۸۲/۸۹ \ \ kN.m \ )$

$\vec{M}_{CB} = ۲۸/۸۶ \ \ kN.m \ )$ ، $\vec{M}_{CE} = ۲۸/۸۶ \ \ kN.m \ )$ ، $\vec{M}_{EC} = ۱۷۰/۰۶ \ \ kN.m \ )$

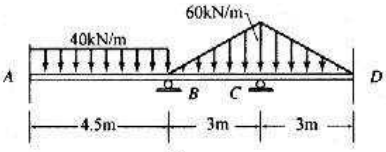


نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۹-۴۹ تیر نشان داده شده در شکل زیر را با روش شیب - افت تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



EI = ثابت

شکل ۹-۴۹

$$F.E.M_{AB} = -F.E.M_{BA} = -\frac{۴۰(۴/۵)^۲}{۱۲} = -۶۷/۵ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{BC} = -\frac{۶۰(۳)^۲}{۳۰} = -۱۸ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{CB} = \frac{۶۰(۳)^۲}{۲۰} = ۲۷ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{CD} = -\frac{۶۰(۳)^۲}{۲۰} = -۲۷ \quad kN.m \;,\; F.E.M_{DC} = \frac{۶۰(۳)^۲}{۳۰} = ۱۸ \quad kN.m$$

$$M_{AB} = \frac{۴EI}{۹}\theta_B - ۶۷/۵ \;,\; M_{BA} = \frac{۸EI}{۹}\theta_B + ۶۷/۵ \;,\; M_{BC} = \frac{۴EI}{۳}\theta_B + \frac{۲EI}{۳}\theta_C - ۱۸$$

$$M_{CB} = \frac{۲EI}{۳}\theta_B + \frac{۴EI}{۳}\theta_C + ۲۷ \;,\; M_{CD} = \frac{۴EI}{۳}\theta_C - ۲۷ \;,\; M_{DC} = \frac{۲EI}{۳}\theta_C + ۱۸$$

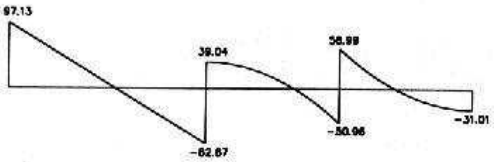
$$\sum M^B = ۰ : M_{BA} + M_{BC} = ۰ \Rightarrow \frac{۲۰}{۹}EI\theta_B + \frac{۲}{۳}EI\theta_C = -۴۹/۵$$

$$\sum M^C = ۰ : M_{CB} + M_{CD} = ۰ \Rightarrow \frac{۲}{۳}EI\theta_B + \frac{۸}{۳}EI\theta_C = ۰$$

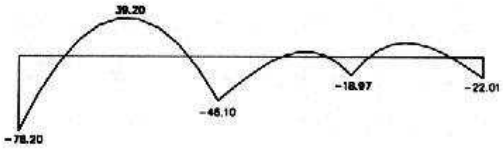
$$\Rightarrow \theta_B = -\frac{۲۴/۰۸}{EI} \;,\; \theta_C = \frac{۶/۰۲}{EI}$$

$$\vec{M}_{AB} = ۷۸/۲۰ \quad kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{BA} = ۴۶/۱۰ \quad kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{BC} = ۴۶/۱۰ \quad kN.m \;)$$

$$\vec{M}_{CB} = ۱۸/۹۷ \quad kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{CD} = ۱۸/۹۷ \quad kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{DC} = ۲۲/۰۱ \quad kN.m \;)$$



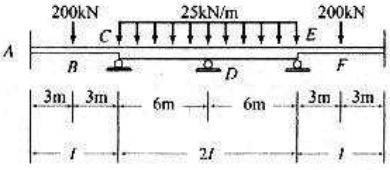
نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

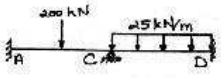
تیرهای نشان داده شده در مسایل ۹-۵۰ و ۹-۵۱ را با روش شیب - افت تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را ترسیم کنید.

۹-۵۰



E = ثابت

شکل ۹-۵۰



تیر معادل

برای حل این مسئله از ویژگی تقارن که در فصل ۱۱ به آن اشاره شده است، استفاده می‌کنیم.

$$F.E.M_{AC} = -F.E.M_{CA} = -\frac{۲۰۰(۶)}{۸}$$

$$F.E.M_{AC} = -۱۵۰ \quad kN.m$$

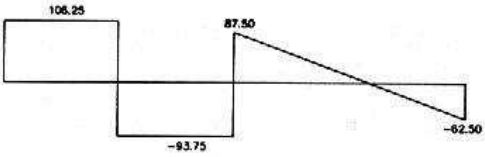
$$F.E.M_{CD} = -F.E.M_{DC} = -\frac{۲۵(۶)^۲}{۱۲} = -۷۵ \quad kN.m$$

$$M_{AC} = \frac{۲EI}{۶}\left[۲\theta_A + \theta_C\right] - ۱۵۰ = \frac{EI}{۳}\theta_C - ۱۵۰$$

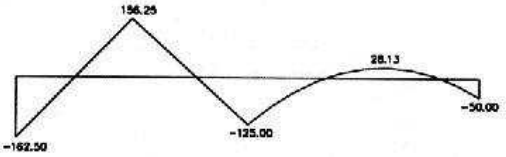
$$M_{CA} = \frac{۲EI}{۳}\theta_C + ۱۵۰ \;,\; M_{CD} = \frac{۲E(۲I)}{۶}\left[۲\theta_C + \theta_D\right] - ۷۵ = \frac{۴EI}{۳}\theta_C - ۷۵ \;,\; M_{DC} = \frac{۲EI}{۳}\theta_C + ۷۵$$

$$\sum M^C = ۰ : M_{CA} + M_{CD} = ۰ \Rightarrow \frac{۲EI}{۳}\theta_C + ۱۵۰ + \frac{۴EI}{۳}\theta_C - ۷۵ = ۰ \Rightarrow \theta_C = -\frac{۳۷/۵}{EI}$$

$$\vec{M}_{AC} = ۱۶۲/۵ \quad kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{CA} = ۱۲۵ \quad kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{CD} = ۱۲۵ \quad kN.m \;) \;,\; \vec{M}_{DC} = ۵۰ \quad kN.m \;)$$



نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

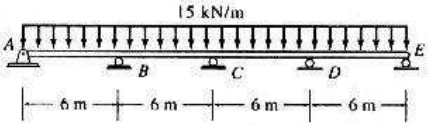
۵۱-۹

از ویژگی تقارن که در فصل ۱۱ به آن اشاره شده است، استفاده می‌کنیم.

$$F.E.M_{AB} = -F.E.M_{BA} = F.E.M_{BC}$$

$$F.E.M_{AB} = -F.E.M_{CB} = -\frac{۱۵(۶)^{۲}}{۱۲}$$

$$F.E.M_{AB} = -۴۵ \quad kN.m$$



EI = ثابت

شکل ۹-۵۱

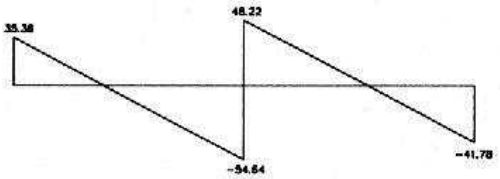


تیر معادل

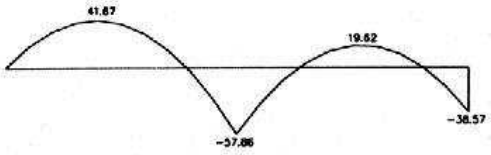
$$M_{BA} = \frac{۳EI}{۶}\theta_B + ۴۵ - \frac{۱}{۲}(-۴۵) = ۰/۵EI\theta_B + ۶۷/۵ \quad , \quad M_{BC} = \frac{۲EI}{۳}\theta_B - ۴۵ \quad , \quad M_{CB} = \frac{EI}{۳}\theta_B + ۴۵$$

$$\sum M^B = ۰ \; : \; M_{BA} + M_{BC} = ۰ \Rightarrow ۰/۵EI\theta_B + ۶۷/۵ + \frac{۲EI}{۳}\theta_B - ۴۵ = ۰ \Rightarrow \theta_B = -\frac{۱۹/۲۸۶}{EI}$$

$$\vec{M}_{BA} = ۵۷/۸۶ \quad kN.m \;) \quad , \quad \vec{M}_{BC} = ۵۷/۸۶ \quad kN.m \;) \quad , \quad \vec{M}_{CB} = ۳۸/۵۷ \quad kN.m \;)$$

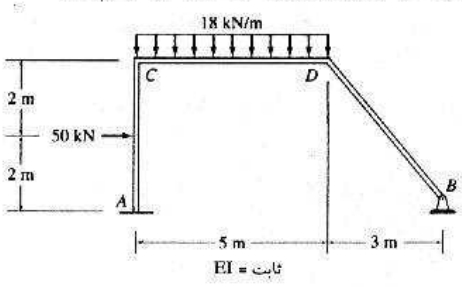


نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۵۲-۹ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با روش شیب - افت تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



EI = ثابت

شکل ۹-۵۲

$$\psi_{AC} - \psi_{DB} = ۰ \Rightarrow \psi_{AC} = \psi_{DB}$$

$$۵\psi_{CD} + ۳\psi_{DB} = ۰ \Rightarrow \psi_{CD} = -۰/۶\psi_{DB}$$

$$F.E.M_{AC} = -F.E.M_{CA} = -\frac{۵۰(۴)}{۸} = -۲۵ \quad kN.m$$

$$F.E.M_{CD} = -F.E.M_{DC} = -\frac{۱۸(۵)^{۲}}{۱۲} = -۳۷/۵ \quad kN.m$$

$$M_{AC} = ۰/۵EI\theta_C - ۱/۵EI\psi_{AC} - ۲۵$$

$$M_{AC} = ۰/۵EI\theta_C - ۱/۵EI\psi_{DB} - ۲۵$$

$$M_{CA} = EI\theta_C - ۱/۵EI\psi_{AC} + ۲۵$$

$$M_{CA} = EI\theta_C - ۱/۵EI\psi_{DB} + ۲۵$$

$$M_{CD} = \frac{۲EI}{۵}\left[۲\theta_C + \theta_D - ۳\psi_{CD}\right] - ۳۷/۵ = ۰/۸EI\theta_C + ۰/۴EI\theta_D + ۰/۷۲EI\psi_{DB} - ۳۷/۵$$

$$M_{DC} = \frac{۲EI}{۵}\left[۲\theta_D + \theta_C - ۳\psi_{CD}\right] + ۳۷/۵ = ۰/۴EI\theta_C + ۰/۸EI\theta_D + ۰/۷۲EI\psi_{DB} + ۳۷/۵$$

$$M_{DB}=\frac{۳EI}{۵}\theta_D-\frac{۳EI}{۵}\psi_{DB}=۰/۶EI\theta_D-۰/۶EI\psi_{DB}$$

$$+\circlearrowright\sum M_C^{AC}=۰\ :\ ۵۰(۲)-M_{AC}-M_{CA}-۴S_{AC}=۰$$

$$S_{AC}=۲۵-\frac{M_{AC}+M_{CA}}{۴}$$

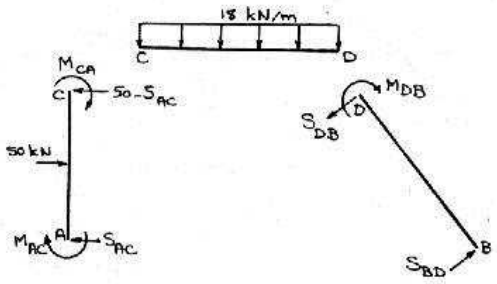
$$+\circlearrowright\sum M_B^{DB}=۰\ :\ ۵S_{DB}-M_{DB}=۰\ \Rightarrow\ S_{DB}=\frac{M_{DB}}{۵}$$

$$+\circlearrowright\sum M_O=۰\ :\ S_{BD}(۱۳/۳۳۳)-\frac{۱۸(۵)^۲}{۲}-S_{AC}(۱۰/۶۶۶)-M_{AC}+۵۰(۸/۶۶۶)=۰$$

$$۲/۶۶۶M_{DB}+۱/۶۶۶M_{AC}+۲/۶۶۶M_{CA}=۵۸/۳۳۳$$

(نقطهٔ O محل تلاقی امتداد اعضای BD و AC است.)

$$۳/۵EI\theta_C+۱/۶EI\theta_D-۸/۱EI\psi_{BD}=۳۳/۳۳۳\quad(I)$$



$$+\circlearrowright\sum M^C=۰\ :\ M_{CA}+M_{CD}=۰\ \Rightarrow\ ۱/۸EI\theta_C+۰/۴EI\theta_D-۰/۷۸EI\psi_{DB}=۱۲/۵\quad(II)$$

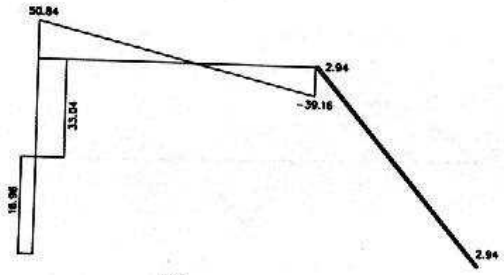
$$+\circlearrowright\sum M^D=۰\ :\ M_{DC}+M_{DB}=۰\ \Rightarrow\ ۰/۴EI\theta_C+۱/۴EI\theta_D+۰/۱۲EI\psi_{DB}=-۳۷/۵\quad(III)$$

از حل همزمان دستگاه معادلات (I)، (II) و (III) به دست خواهد آمد:

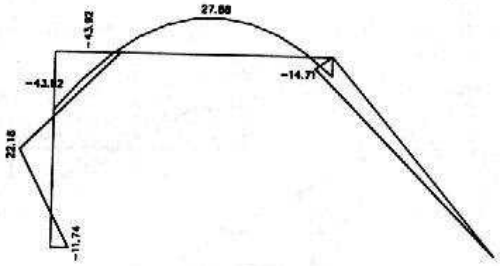
$$\theta_C=\frac{۱۱/۳۳۳}{EI}\ ,\ \theta_D=-\frac{۲۹/۵۸۷}{EI}\ ,\ \psi_{BD}=-\frac{۵/۰۶۶}{EI}$$

$$\vec{M}_{AC}=۱۱/۷۴\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\quad \vec{M}_{CA}=۴۳/۹۲\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\quad \vec{M}_{CD}=۴۳/۹۲\ \ kN.m\ \circlearrowright$$

$$\vec{M}_{DC}=۱۴/۷۱\ \ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\quad \vec{M}_{DB}=۱۴/۷۱\ \ kN.m\ \circlearrowright\ ,\quad \vec{M}_{BD}=۰$$

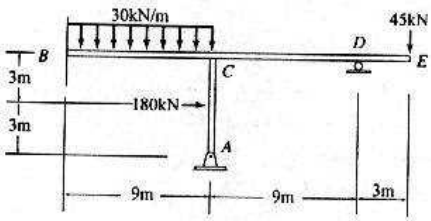


نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی، kN.m

۹-۵۳ در قاب نشان داده شده واکنشهای تکیه‌گاهی را با استفاده از روش شیب - افت به دست آورید. فرض کنید که علاوه بر بارهای وارد شده بر قاب، تکیه‌گاه A به اندازهٔ **۲۷ mm** و تکیه‌گاه D به اندازهٔ **۳۶ mm** نشست کرده باشند.



EI = ثابت ، E = ۷۰ GPa ، I = ۱/۲×۱۰^۹ mm^۴

شکل ۹-۵۳

$$F.E.M_{BC}=-F.E.M_{CB}=-\frac{۳۰(۹)^۲}{۱۲}=-۲۰۲/۵\ \ kN.m$$

$$M_{DE}=-۴۵(۳)=-۱۳۵\ \ kN.m$$

$$F.E.M_{AC}=-F.E.M_{CA}=-\frac{۱۸۰(۶)}{۸}=-۱۳۵\ \ kN.m$$

$$EI=۸۴۰۰۰\ \ kN.m^۲$$

$$\psi_{BC}=\psi_{CB}=\frac{۲۷-۰}{۹۰۰۰}=۰/۰۰۳\ ,\ \psi_{CD}=\psi_{DC}=\frac{۳۶-۲۷}{۹۰۰۰}=۰/۰۰۱$$

$$M_{BC}=\frac{۲EI}{۹}\left[۲\theta_B+\theta_C-۳(۰/۰۰۳)\right]-۲۰۲/۵=\frac{۲EI}{۹}\theta_C-۳۷۰/۵$$

$$M_{CB}=\frac{۲EI}{۹}\left[۲\theta_C+\theta_B-۳(۰/۰۰۳)\right]+۲۰۲/۵=\frac{۴EI}{۹}\theta_C+۳۴/۵$$

$$M_{CD}=\frac{۲EI}{۹}\left[۲\theta_C+\theta_D-۳(۰/۰۰۱)\right]=\frac{۴EI}{۹}\theta_C+\frac{۲EI}{۹}\theta_D-۵۶$$

$$M_{DC}=\frac{۲EI}{۹}\left[۲\theta_D+\theta_C-۳(۰/۰۰۱)\right]=\frac{۲EI}{۹}\theta_C+\frac{۴EI}{۹}\theta_D-۵۶$$

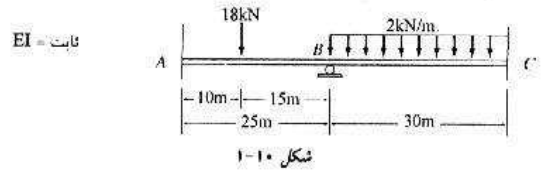
$$M_{CA}=\frac{۳EI}{۶}\theta_C+۱۳۵-\frac{۱}{۲}(-۱۳۵)=۰/۵EI\theta_C+۲۰۲/۵$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum M^D=۰\ :\ M_{DC}+M_{DE}=۰\ \Rightarrow\ \frac{۲EI}{۹}\theta_C+\frac{۴EI}{۹}\theta_D=۱۹۱\\ \sum M^C=۰\ :\ M_{CB}+M_{CD}+M_{CA}=۰\ \Rightarrow\ \frac{۲۵EI}{۱۸}\theta_C+\frac{۲EI}{۹}\theta_D=-۱۸۱\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \theta_C=-۰/۰۰۲۵۷۶\ ,\ \theta_D=۰/۰۰۶۴۰۴$$

$$\vec{M}_{BC}=۴۱۸/۵۸\ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\quad \vec{M}_{CB}=۶۱/۶۷\ kN.m\ \circlearrowright\ ,\quad \vec{M}_{CD}=۳۲/۶۳\ kN.m\ \circlearrowright$$

$$\vec{M}_{CA}=۹۴/۳۰\ kN.m\ \circlearrowleft\ ,\quad \vec{M}_{DC}=۱۳۵\ kN.m\ \circlearrowleft$$

۱۰-۱ تیر دو دهانهٔ نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از توزیع لنگر تحلیل کرده، لنگرهای خمشی انتهای اعضا را به دست آورید.



شکل ۱۰-۱

$$DF_{BA}=\frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}}=\frac{\frac{I}{۲۵}}{\left[\frac{I}{۲۵}\right]+\left[\frac{I}{۳۰}\right]}=۰/۵۴۵$$

$$DF_{BC}=\frac{K_{BC}}{K_{BA}+K_{BC}}=\frac{\frac{I}{۳۰}}{\left[\frac{I}{۲۵}\right]+\left[\frac{I}{۳۰}\right]}=۰/۴۵۵$$

	AB	BA	BC	CB
DF		۰/۵۴۵	۰/۴۵۵	
FEM	-۶۴/۸	+۴۳/۲	-۱۵۰	۱۵۰
DM		۵۸/۲	۴۸/۶	
COM	۲۹/۱			۲۴/۳
لنگر نهایی	-۳۵/۷	۱۰۱/۴	-۱۰۱/۴	۱۷۴/۳

$$FEM_{AB}=-\frac{۱۸(۱۰)(۱۵)}{(۲۵)^۲}=-۶۴/۸\ \ kN.m$$

$$FEM_{BA}=\frac{۱۸(۱۰)^۲(۱۵)}{(۲۵)^۲}=۴۳/۲\ \ kN.m$$

$$FEM_{BC}=-\frac{۲(۳۰)^۲}{۱۲}=-۱۵۰\ \ kN.m$$

$$FEM_{CB}=\frac{۲(۳۰)^۲}{۱۲}=۱۵۰\ \ kN.m$$



لنگرهای نهایی در انتهای اعضا

در مرحلهٔ اول:

(لنگر نامتعادل) $UM_B=۴۳/۲-۱۵۰=-۱۰۶/۸$

$$DM_{BA}=DF_{BA}(-UM_B)=۰/۵۴۵(۱۰۶/۸)$$

$$DM_{BA}=۵۸/۲\ \ kN.m$$

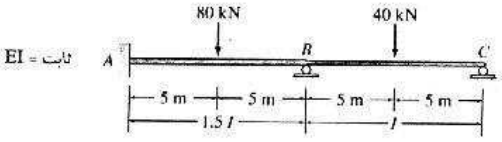
$$DM_{BC}=DF_{BC}(-UM_B)=(۰/۴۵۵)(۱۰۶/۸)$$

$$DM_{BC}=۴۸/۶\ \ kN.m$$

در مرحلهٔ دوم:

$$COM_{AB}=\frac{۱}{۲}(DM_{BA})=\frac{۱}{۲}(۵۸/۲)=۲۹/۱\ \ ,\ \ COM_{CB}=\frac{۱}{۲}(DM_{BC})=\frac{۱}{۲}(۴۸/۶)=۲۴/۳$$

۱۰-۲ تیر دو دهانهٔ شکل زیر را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده، واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



شکل ۱۰-۲

$$DF_{BA}=\frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}}=\frac{\left[\frac{۱/۵I}{۱۰}\right]}{\left[\frac{۱/۵I}{۱۰}\right]+\left[\frac{I}{۱۰}\right]}=۰/۶$$

$$DF_{BC}=\frac{K_{BC}}{K_{BA}+K_{BC}}=\frac{\left[\frac{I}{۱۰}\right]}{\left[\frac{۱/۵I}{۱۰}\right]+\left[\frac{I}{۱۰}\right]}=۰/۴$$

در گره C مفصل وجود دارد: $DF_{CB}=\frac{K_{CB}}{K_{CB}}=۱$

$$FEM_{AB}=-\frac{۸۰(۱۰)}{۸}=-۱۰۰\ \ kN.m$$

$$FEM_{BA}=۱۰۰\ \ kN.m$$

$$FEM_{BC}=-\frac{۴۰(۱۰)}{۸}=-۵۰\ \ kN.m$$

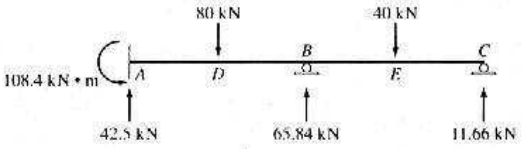
$$FEM_{CB}=۵۰\ \ kN.m$$

چون از سختی کامل $\left[K_{BC}=\frac{I}{۱۰}\right]$ که دارای یک انتهای مفصلی است استفاده شده است، پس انتهای مفصلی C در کل چرخه‌های توزیع لنگر شرکت داشته و جدول پخش لنگر در این حالت به صورت روبرو خواهد بود.

	AB	BA	BC	CB
		۰/۶	۰/۴	۱/۰
DF				
FEM	-۱۰۰	۱۰۰	-۵۰	۵۰
DM		-۳۰	-۲۰	-۵۰
COM	-۱۵		-۲۵	-۱۰
DM		۱۵	۱۰	۱۰
COM	۷/۵		۵	۵
COM		-۳	-۲	-۵
DM	-۱/۵		-۲/۵	-۱
DM		۱/۵	۱	۱
COM	۰/۸		۰/۵	۰/۵
DM		-۰/۳	-۰/۲	-۰/۵
COM	-۰/۲		-۰/۳	-۰/۱
DM		۰/۲	۰/۱	۰/۱
لنگر نهایی	-۱۰۸/۴	۸۳/۴	-۸۳/۴	۰

اگر برای عضو BC از سختی کاهش یافته $K_{BC}=\frac{۳}{۴}\left[\frac{I}{۱۰}\right]$ استفاده شود، انتهای مفصلی C فقط در چرخهٔ اول توزیع لنگر وارد شده و در سایر چرخه‌های توزیع لنگر شرکت داده نمی‌شود.

	AB	BA	BC	CB
		$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۱
DF				
FEM	-۱۰۰	۱۰۰	-۵۰	۵۰
DF		-۳۳/۳	-۱۶/۷	-۵۰
COM	-۱۶/۷		-۲۵	
DF		۱۶/۷	۸/۳	
COM	۸/۳			
لنگر نهایی	-۱۰۸/۴	۸۳/۴	-۸۳/۴	۰



واکنشهای تکیه‌گاهی

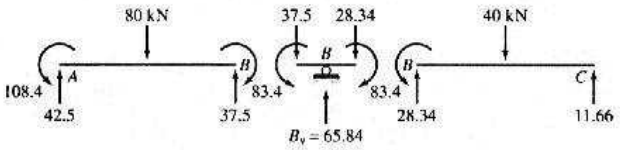
اگر از سختی کاهش یافتهٔ عضو BC استفاده شود:

$$DF_{BA}=\frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}}=\frac{\frac{۱/۵I}{۱۰}}{\left[\frac{۱/۵I}{۱۰}\right]+\left[\frac{۳I}{۴۰}\right]}$$

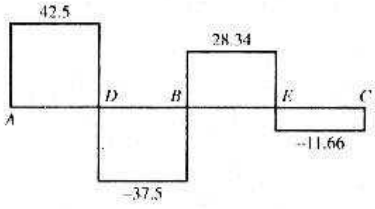
$$DF_{BA}=\frac{۲}{۳}$$

$$DF_{BC}=\frac{K_{BC}}{K_{BA}+K_{BC}}=\frac{\frac{۳I}{۴۰}}{\left[\frac{۱/۵I}{۱۰}\right]+\left[\frac{۳I}{۴۰}\right]}$$

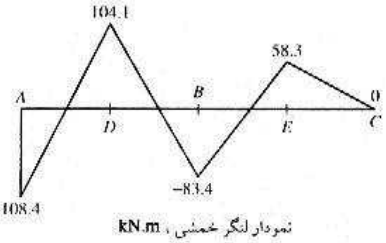
$$DF_{BC}=\frac{۱}{۳}$$



لنگرها و برشها در انتهای اعضا

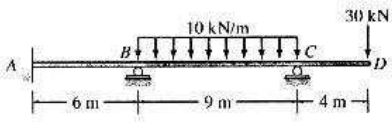


نمودار نیروی برشی ، kN

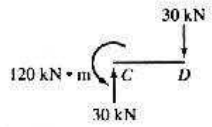


نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۱۰-۳ تیر پیوستهٔ نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده و لنگرهای خمشی انتهای اعضا را به دست آورید.



EI = ثابت



طرهٔ معین استاتیکی

شکل ۱۰-۳

برای عضو BC از سختی کاهش یافته استفاده می‌کنیم.

$$K_{BA}=\frac{I}{۶}\quad,\quad K_{BC}=\frac{۳}{۴}\left[\frac{I}{۹}\right]=\frac{I}{۱۲}$$

$$DF_{BA}=\frac{\frac{I}{۶}}{\left[\frac{I}{۶}\right]+\left[\frac{I}{۱۲}\right]}=\frac{۲}{۳}$$

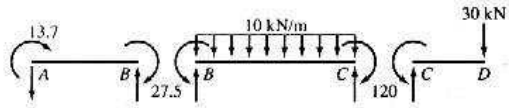
$$DF_{BC}=\frac{\frac{I}{۱۲}}{\left[\frac{I}{۶}\right]+\left[\frac{I}{۱۲}\right]}=\frac{۱}{۳}$$

$$FEM_{BC}=-\frac{۱۰(۹)^{۲}}{۱۲}=-۶۷/۵\ \ kN.m$$

$$FEM_{CB}=\frac{۱۰(۹)^{۲}}{۱۲}=۶۷/۵\ \ kN.m$$

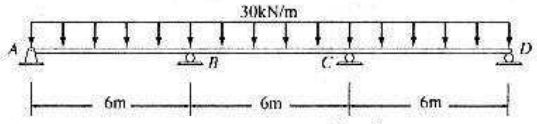
$$M_{CD}=-۳۰(۴)=-۱۲۰\ \ kN.m$$

	AB	BA	BC	CB	CD
		۲/۳	۱/۳	۱	
FEM			-۶۷/۵	۶۷/۵	-۱۲۰
DM		۴۵	۲۲/۵	۵۲/۵	
COM		۲۲/۵	۲۶/۳		
DM		-۱۷/۵	-۸/۸		
COM		-۸/۸			
لنگر نهایی		۱۳/۷	۲۷/۵	-۲۷/۵	۱۲۰	-۱۲۰



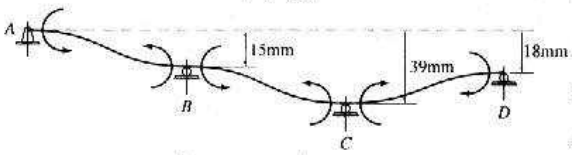
لنگرهای خمشی در انتهای اعضا

۱۰-۴ در تیر یکسرهٔ سه دهانهٔ نشان داده شده، اگر علاوه بر بار گستردهٔ وارد شده، تکیه‌گاههای B ، C و D به ترتیب به اندازهٔ ۱۵ mm ، ۳۹ mm و ۱۸ mm نشست کنند، لنگرهای خمشی انتهای دهانه‌ها را با استفاده از روش توزیع لنگر تعیین کنید.



$E = ۲۰۰\ GPa$ ، $I = ۳/۰\times۱۰^{۶}\ mm^{۴}$

شکل ۱۰-۴



دوران اعضا به علت نشستهای تکیه‌گاهی

$$\Delta_{AB}=۱۵-۰=۱۵\ mm\quad,\quad \Delta_{BC}=۳۹-۱۵=۲۴\ mm$$

$$\Delta_{CD}=۱۸-۳۹=-۲۱\ mm$$

$$FEM_{ij}=-\frac{۶EI\Delta_{ij}}{l_{ij}^{۲}}\pm\frac{wl_{ij}^{۲}}{۱۲}$$

$$EI=۶۰۰۰۰۰\ \ kN.m^{۲}$$

$$FEM_{AB}=-\frac{۶(۶۰۰۰۰۰)(۰/۰۱۵)}{(۶)^{۲}}-\frac{۳۰(۶)^{۲}}{۱۲}$$

$$FEM_{AB}=-۱۵۹۰\ \ kN.m$$

$$FEM_{BA}=-\frac{۶(۶۰۰۰۰۰)(۰/۰۱۵)}{۶^{۲}}+\frac{۳۰(۶)^{۲}}{۱۲}$$

$$FEM_{BA}=-۱۴۱۰\ \ kN.m$$

$$FEM_{BC}=-\frac{۶(۶۰۰۰۰۰)(۰/۰۲۴)}{(۶)^{۲}}-\frac{۳۰(۶)^{۲}}{۱۲}$$

$$FEM_{BC}=-۲۴۹۰\ \ kN.m$$

$$FEM_{CB}=-\frac{۶(۶۰۰۰۰۰)(۰/۰۲۴)}{(۶)^{۲}}+\frac{۳۰(۶)^{۲}}{۱۲}=-۲۳۱۰\ \ kN.m$$

$$FEM_{CD}=-\frac{۶(۶۰۰۰۰)(-۰/۰۲۱)}{(۶)^۲}-\frac{۳۰(۶)^۲}{۱۲}=۲۰۱۰\ \ kN.m\ \ ,\ \ FEM_{DC}=-\frac{۶(۶۰۰۰۰)(-۰/۰۲۱)}{(۶)^۲}+\frac{۳۰(۶)^۲}{۱۲}=۲۱۹۰\ \ kN.m$$

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	۱	۰/۴۲۹	۰/۵۷۱	۰/۵۷۱	۰/۴۲۹	۱
FEM	-۱۵۹۰	-۱۴۱۰	-۲۴۹۰	-۲۳۱۰	۲۰۱۰	۲۱۹۰
	۱۵۹۰	۱۶۷۳/۱	۲۲۲۶/۹	۱۷۱/۳	۱۲۸/۷	-۲۱۹۰
		۷۹۵	۸۵/۶	۱۱۱۳/۴	-۱۰۹۵	
		-۳۷۷/۸	-۵۰۲/۸	-۱۰/۵	-۷/۹	
			-۵/۲	-۲۵۱/۴		
		۲/۲	۳/۰	۱۴۳/۵	۱۰۷/۹	
			۷۱/۸	۱/۵		
		-۳۰/۸	-۴۱/۰	-۰/۹	-۰/۶	
			-۰/۵	-۲۰/۵		
		۰/۲	۰/۳	۱۱/۷	۸/۸	
			۵/۹	۰/۲		
		-۲/۵	-۳/۴	-۰/۱	-۰/۱	
لنگر نهایی	۰	۶۴۹/۴	-۶۴۹/۴	-۱۱۵۱/۸	۱۱۵۱/۸	۰

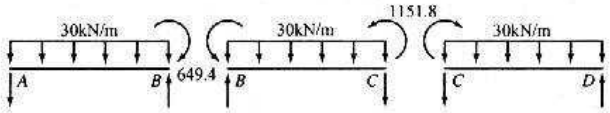
$$DF_{DC}=DF_{AB}=۱$$

$$DF_{BA}=\frac{\frac{۳I}{۸۰}}{\left[\frac{۳I}{۸۰}\right]+\left[\frac{I}{۲۰}\right]}=۰/۴۲۹$$

$$DF_{BC}=\frac{\frac{I}{۲۰}}{\left[\frac{۳I}{۸۰}\right]+\left[\frac{I}{۲۰}\right]}=۰/۵۷۱$$

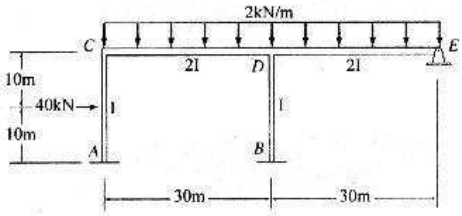
$$DF_{CB}=\frac{\frac{I}{۲۰}}{\left[\frac{۳I}{۸۰}\right]+\left[\frac{I}{۲۰}\right]}=۰/۵۷۱$$

$$DF_{CD}=\frac{\frac{۳I}{۸۰}}{\left[\frac{۳I}{۸۰}\right]+\left[\frac{I}{۲۰}\right]}=۰/۴۲۹$$



لنگرهای خمشی نهایی در انتهای اعضا

۱۰-۵ با استفاده از روش توزیع لنگر، قاب نشان داده شده را تحلیل کرده و لنگرهای خمشی انتهای اعضا را به دست آورید.



E = ۲۰۰ GPa ، I = ۳×۱۰^۴ mm^۴

شکل ۱۰-۵

$$FEM_{CD}=-FEM_{DC}=-\frac{۲(۳۰)^۲}{۱۲}=-۱۵۰\ \ kN.m$$

$$FEM_{DE}=-FEM_{ED}=-\frac{۲(۳۰)^۲}{۱۲}=-۱۵۰\ \ kN.m$$

$$FEM_{AC}=-FEM_{CA}=-\frac{۴۰(۲۰)}{۸}=-۱۰۰\ \ kN.m$$

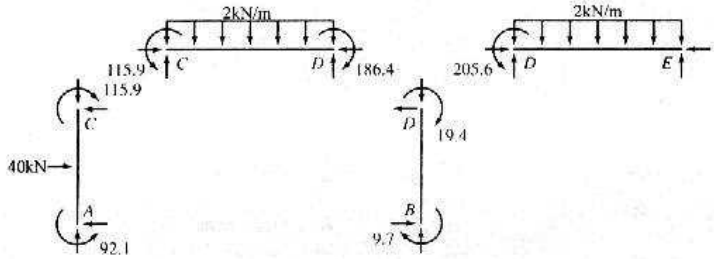
$$DF_{CA}=\frac{\left[\frac{I}{۲۰}\right]}{\left[\frac{I}{۲۰}\right]+\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]}=۰/۴۲۹$$

$$DF_{CD}=\frac{\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]}{\left[\frac{I}{۲۰}\right]+\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]}=۰/۵۷۱$$

$$DF_{DB}=\frac{\left[\frac{I}{۲۰}\right]}{\left[\frac{I}{۲۰}\right]+\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]+\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]}=۰/۳$$

$$DF_{DC}=\frac{\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]}{\left[\frac{I}{۲۰}\right]+\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]+\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]}=۰/۴\ \ ,\ \ DF_{DE}=\frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]}{\left[\frac{I}{۲۰}\right]+\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]+\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۳۰}\right]}=۰/۳$$

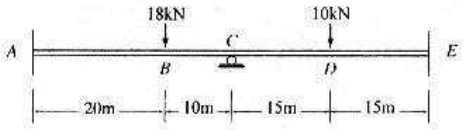
	AC	CA	CD	DC	DB	DE	ED	BD
DF		۰/۴۲۹	۰/۵۷۱	۰/۴	۰/۳	۰/۳	۱	
FEM	-۱۰۰	۱۰۰	-۱۵۰	۱۵۰		-۱۵۰	۱۵۰	
DM		۲۱/۴	۲۸/۶				-۱۵۰	
COM	۱۰/۷			۱۴/۳		-۷۵		
DM				۲۴/۳	۱۸/۲	۱۸/۲		
COM			۱۲/۲					۹/۱
DM		-۵/۲	-۷/۰					
COM	-۲/۶			-۳/۵				
DM				۱/۴	۱/۱	۱/۱		
COM			۰/۷					۰/۶
DM		-۰/۳	-۰/۴					
COM	-۰/۲			-۰/۲				
DM				۰/۱	۰/۱	۰/۱		
لنگر نهایی	-۹۳/۱	۱۱۵/۹	-۱۱۵/۹	۱۸۶/۴	۱۹/۴	-۲۰۵/۶		۹/۷



لنگرهای خمشی نهایی در انتهای اعضا

تیرهای نشان داده شده در مسایل ۱۰-۶ تا ۱۰-۸ را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را ترسیم کنید.

۶-۱۰



EI = ثابت

شکل ۶-۱۰

$$FEM_{AC} = -\frac{۱۸(۲۰)(۱۰)^۲}{(۳۰)^۲} = -۴۰ \quad kN.m$$

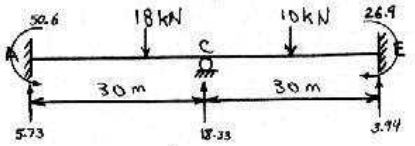
$$FEM_{CA} = -\frac{۱۸(۲۰)^۲(۱۰)}{(۳۰)^۲} = ۸۰ \quad kN.m$$

$$FEM_{CE} = -FEM_{EC} = -\frac{۱۰(۳۰)}{۸} = -۳۷/۵ \quad kN.m$$

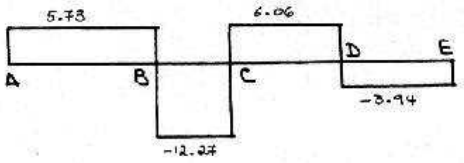
$$K_{AC} = \frac{I}{۳۰} \quad , \quad K_{CE} = \frac{I}{۳۰}$$

$$DF_{CA} = \frac{\left[\frac{I}{۳۰}\right]}{\left[\frac{I}{۳۰}\right] + \left[\frac{I}{۳۰}\right]} = ۰/۵ \quad , \quad DF_{CE} = \frac{\left[\frac{I}{۳۰}\right]}{\left[\frac{I}{۳۰}\right] + \left[\frac{I}{۳۰}\right]} = ۰/۵$$

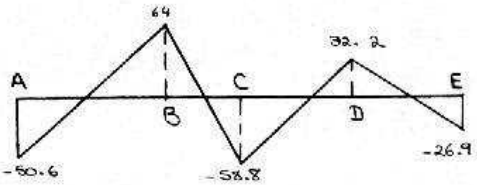
	AC	CA	CE	EC
DF		۰/۵	۰/۵	
FEM	-۴۰	۸۰	-۳۷/۵	۳۷/۵
		-۲۱/۳	-۲۱/۳	
	-۱۰/۶			-۱۰/۶
لنگر نهایی	-۵۰/۶	۵۸/۷	-۵۸/۸	۲۶/۹



واکنشهای تکیه‌گاهی

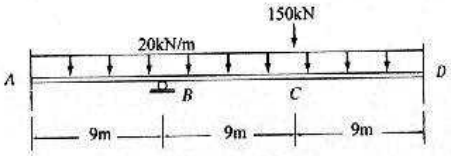


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۷-۱۰



E = ۲۰۰ GPa , I = ۱/۳۵×۱۰^{۹} mm^{۴}

شکل ۷-۱۰

$$FEM_{AB} = -\frac{۲۰(۹)^{۲}}{۱۲} = -۱۳۵ \quad kN.m$$

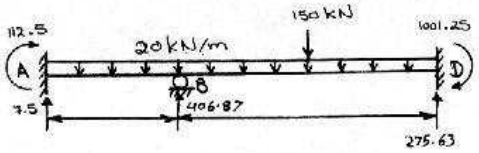
$$FEM_{BA} = \frac{۲۰(۹)^{۲}}{۱۲} = ۱۳۵ \quad kN.m$$

$$FEM_{BD} = -FEM_{DB} = -\frac{۲۰(۱۸)^{۲}}{۱۲} - \frac{۱۵۰(۱۸)}{۸} = -۸۷۷/۵ \quad kN.m$$

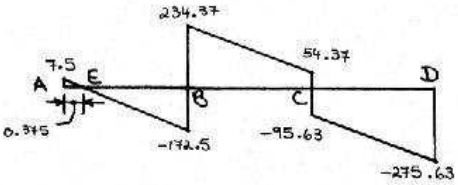
$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{I}{۹}\right]}{\left[\frac{I}{۹}\right] + \left[\frac{I}{۱۸}\right]} = \frac{۲}{۳} \quad , \quad DF_{BD} = \frac{\left[\frac{I}{۱۸}\right]}{\left[\frac{I}{۹}\right] + \left[\frac{I}{۱۸}\right]} = \frac{۱}{۳}$$

$$EI = (۲۰۰)(۱/۳۵\times ۱۰^{۹}) = ۲/۷\times ۱۰^{۱۱} \quad kN.mm^{۲} = ۲۷۰۰۰۰ \quad kN.m^{۲}$$

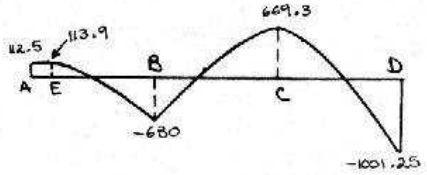
	AB	BA	BD	DB
DF		۲/۳	۱/۳	
FEM	-۱۳۵	۱۳۵	-۸۷۷/۵	۸۷۷/۵
		۴۹۵	۲۴۷/۵	
	۲۴۷/۵			۱۲۳/۷۵
لنگر نهایی	۱۱۲/۵	۶۳۰	-۶۳۰	۱۰۰۱/۲۵



واکنشهای تکیه‌گاهی

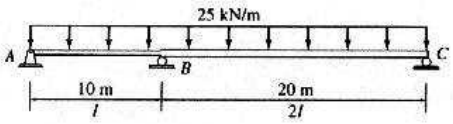


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

A-۱۰



E = ۲۰۰ GPa ، I = ۵۰۰×۱۰^{۶} mm^{۴}

شکل A-۱۰

$$FEM_{AB} = -\frac{۲۵(۱۰)^{۲}}{۱۲} = -۲۰۸/۳ \ kN.m$$

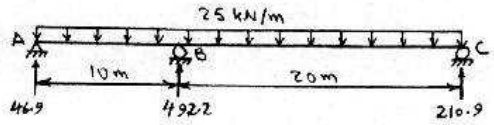
$$FEM_{BA} = \frac{۲۵(۱۰)^{۲}}{۱۲} = ۲۰۸/۳ \ kN.m$$

$$FEM_{BC} = -\frac{۲۵(۲۰)^{۲}}{۱۲} = -۸۳۳/۳ \ kN.m$$

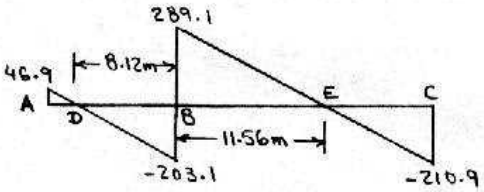
$$FEM_{CB} = \frac{۲۵(۲۰)^{۲}}{۱۲} = ۸۳۳/۳ \ kN.m$$

$$DF_{BA} = \frac{\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{I}{۱۰}\right)}{\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{I}{۱۰}\right) + \left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲I}{۲۰}\right)} = ۰/۵ \quad , \quad DF_{BC} = \frac{\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲I}{۲۰}\right)}{\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{I}{۱۰}\right) + \left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲I}{۲۰}\right)} = ۰/۵$$

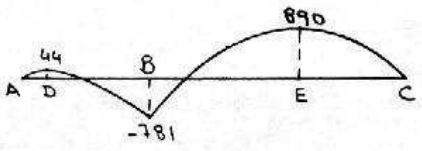
	AB	BA	BD	DB
DF		۰/۵	۰/۵	
FEM	-۲۰۸/۳	۲۰۸/۳	-۸۳۳/۳	۸۳۳/۳
	۲۰۸/۳	۳۱۲/۵	۳۱۲/۵	-۸۳۳/۳
		۱۰۴/۱	-۴۱۶/۶	
		۱۵۶/۲	۱۵۶/۲	
لنگر نهایی	۰	۷۸۱/۱	-۷۸۱/۱	۰



واکنشهای تکیه‌گاهی



نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۱۰-۹ مسئلهٔ ۱۰-۷ را با این فرض حل کنید که علاوه بر بارهای وارد شده بر تیر، تکیه‌گاه B به اندازهٔ ۱۲ mm نشست کند.

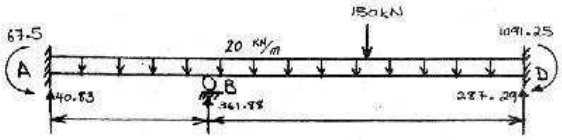
$$FEM_{AB} = -\frac{wl^{۲}}{۱۲} - \frac{۶EI\Delta}{l^{۲}} = -\frac{۲۰(۹)^{۲}}{۱۲} - \frac{۶(۲۷۰۰۰۰)(۰/۰۱۲)}{(۹)^{۲}} = -۳۷۵ \ kN.m$$

$$FEM_{BA} = \frac{۲۰(۹)^{۲}}{۱۲} - \frac{۶(۲۷۰۰۰۰)(۰/۰۱۲)}{(۹)^{۲}} = -۱۰۵ \ kN.m$$

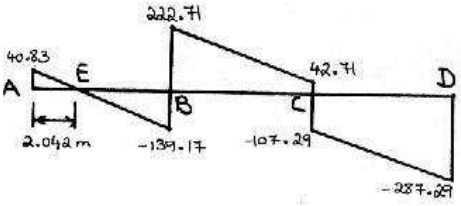
$$FEM_{BD} = -\frac{wl^2}{12} - \frac{Pl}{8} - \frac{6EI\Delta}{l^2} = -\frac{20(18)^2}{12} - \frac{150(18)}{8} - \frac{6(27000)(-0/012)}{(18)^2} = -817/5 \quad kN.m$$

$$FEM_{DB} = \frac{20(18)^2}{12} + \frac{150(18)}{8} - \frac{6(27000)(-0/012)}{(18)^2} = 937/5 \quad kN.m$$

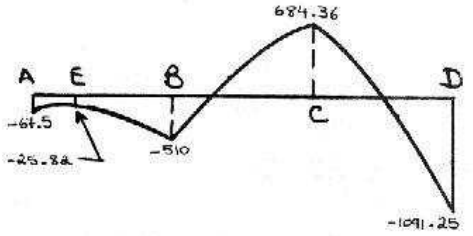
	AB	BA	BD	DB
DF		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
FEM	-375	-105	-817/5	937/5
		615	307/5	
	307/5			1537/5
لنگر نهایی	-67/5	510	-510	1091/25



واکنشهای تکیه‌گاهی



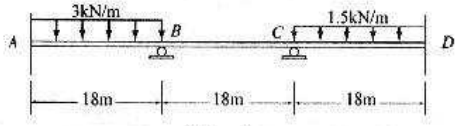
نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

تیرهای نشان داده شده در مسایل ۱۰-۱۰ تا ۱۰-۱۲ را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده، واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کنید.

۱۰-۱۰



EI = ثابت

شکل ۱۰-۱۰

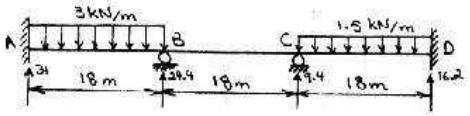
$$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -\frac{3(18)^2}{12} = -81 \quad kN.m$$

$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{1/5(18)^2}{12} = -40/5 \quad kN.m$$

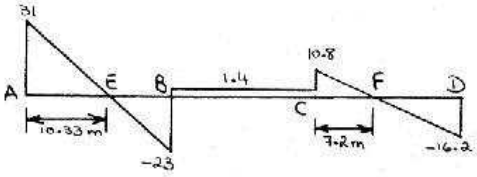
$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{I}{18}\right]}{\left[\frac{I}{18}\right] + \left[\frac{I}{18}\right]} = 0/5 \quad , \quad DF_{BC} = \frac{\left[\frac{I}{18}\right]}{\left[\frac{I}{18}\right] + \left[\frac{I}{18}\right]} = 0/5$$

$$DF_{CB} = \frac{\left[\frac{I}{18}\right]}{\left[\frac{I}{18}\right] + \left[\frac{I}{18}\right]} = 0/5 \quad , \quad DF_{CD} = \frac{\left[\frac{I}{18}\right]}{\left[\frac{I}{18}\right] + \left[\frac{I}{18}\right]} = 0/5$$

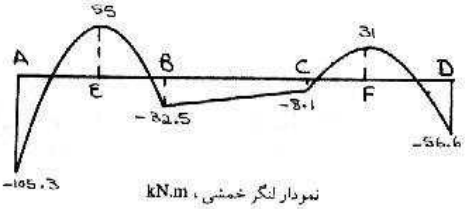
	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	
FEM	-۸۱	۸۱			-۴۰/۵	۴۰/۵
		-۴۰/۵	-۴۰/۵	۲۰/۳	۲۰/۳	
	-۲۰/۳		۱۰/۱	-۲۰/۳		۱۰/۱
		-۵/۱	-۵/۱	۱۰/۱	۱۰/۱	
	-۲/۵		۵/۱	-۲/۵		۵/۱
		-۲/۵	-۲/۵	۱/۳	۱/۳	
	-۱/۳		۰/۶	-۱/۳		۰/۶
		-۰/۳	-۰/۳	۰/۶	۰/۶	
	-۰/۲		۰/۳	-۰/۲		۰/۳
		-۰/۱	-۰/۱	۰/۱	۰/۱	
	-۱۰۵/۳	۳۲/۵	-۳۲/۴	۸/۱	-۸/۱	۵۶/۶



واکنشهای تکیه‌گاهی

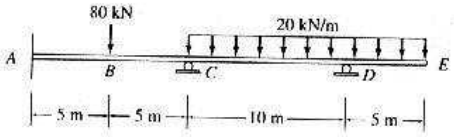


نمودار نیروی برشی، kN



نمودار لنگر خمشی، kN.m

۱۱-۱۰



EI = ثابت

شکل ۱۱-۱۰

$$FEM_{AC} = -FEM_{CA} = -\frac{۸۰(۱۰)}{۸} = -۱۰۰ \ kN.m$$

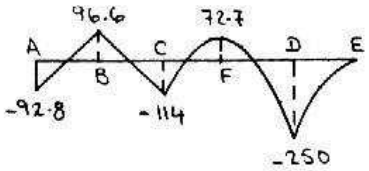
$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{۲۰(۱۰)^۲}{۱۲} = -۱۶۶/۷ \ kN.m$$

$$M_{DE} = -۲۰\frac{(۵)^۲}{۲} = -۲۵۰ \ kN.m$$

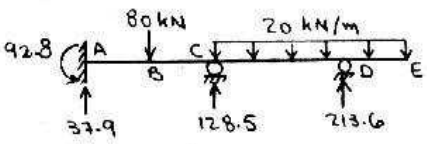
$$DF_{CA} = \frac{\left[\frac{I}{۱۰}\right]}{\left[\frac{I}{۱۰}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۱۰}\right]} = ۰/۵۷۱$$

$$DF_{CD} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۱۰}\right]}{\left[\frac{I}{۱۰}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۱۰}\right]} = ۰/۴۲۹$$

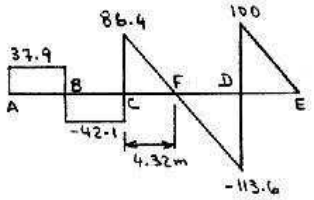
	AC	CA	CD	DC	
DF		۰/۵۷۱	۰/۴۲۹	۱	
FEM	-۱۰۰	۱۰۰	-۱۶۶/۷	۱۶۶/۷	-۲۵۰
		۳۸/۱	۲۸/۶	۸۳/۳	
	۱۹/۱		۴۱/۷		
		-۲۳/۸	-۱۷/۹		
	-۱۱/۹				
لنگر نهایی	-۹۲/۸	۱۱۴/۳	-۱۱۴/۳	۲۵۰	-۲۵۰



نمودار لنگر خمشی، kN.m

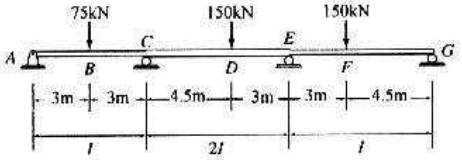


واکنشهای تکیه‌گاهی



نمودار نیروی برشی، kN

۱۲-۱۰



E = ۲۰۰ GPa ، I = ۲×۱۰^{۶} mm^{۴}

شکل ۱۲-۱۰

$$FEM_{AC} = -\frac{۷۵(۶)}{۸} = -۵۶/۲۵ \ kN.m$$

$$FEM_{CA} = \frac{۷۵(۶)}{۸} = ۵۶/۲۵ \ kN.m$$

$$FEM_{CE} = -\frac{۱۵۰(۴/۵)(۳)^{۲}}{(۷/۵)^{۲}} = -۱۰۸ \ kN.m$$

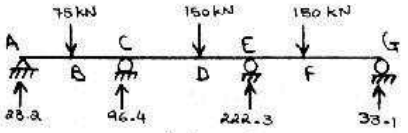
$$FEM_{EC} = \frac{۱۵۰(۴/۵)^{۲}(۳)}{(۷/۵)^{۲}} = ۱۶۲ \ kN.m$$

$$FEM_{EG} = -\frac{۱۵۰(۳)(۴/۵)^{۲}}{(۷/۵)^{۲}} = -۱۶۲ \ kN.m \quad , \quad FEM_{GE} = \frac{۱۵۰(۳)^{۲}(۴/۵)}{(۷/۵)^{۲}} = ۱۰۸ \ kN.m$$

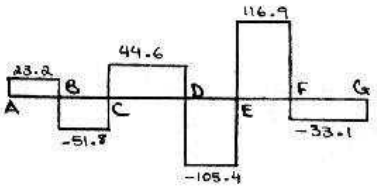
$$DF_{CA} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۶}\right]}{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۶}\right] + \left[\frac{۲I}{۷/۵}\right]} = ۰/۳۱۹ \quad , \quad DF_{CE} = \frac{\left[\frac{۲I}{۷/۵}\right]}{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۶}\right] + \left[\frac{۲I}{۷/۵}\right]} = ۰/۶۸۱$$

$$DF_{EC} = \frac{\left[\frac{۲I}{۷/۵}\right]}{\left[\frac{۲I}{۷/۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۷/۵}\right]} = ۰/۷۲۷ \quad , \quad DF_{EG} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۷/۵}\right]}{\left[\frac{۲I}{۷/۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۷/۵}\right]} = ۰/۲۷۳$$

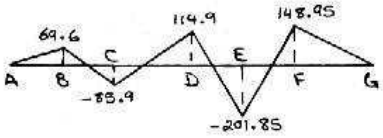
	AC	CA	CE	EC	EG	GE
DF		۰/۳۱۹	۰/۶۸۱	۰/۷۲۷	۰/۲۷۳	
FEM	-۵۶/۲۵	۵۶/۲۵	-۱۰۸	۱۶۲	-۱۶۲	۱۰۸
	۵۶/۲۵	۱۶/۵	۳۵/۲۵	۰	۰	-۱۰۸
		۲۸/۱		۱۷/۶	-۵۴	
		-۹	-۱۹/۱	۲۶/۵	۹/۹	
			۱۳/۲۵	-۹/۵۵		
		-۴/۲	-۹/۰۵	۶/۹۵	۲/۶	
			۳/۵	-۴/۵		
		-۱/۱	-۲/۴	۳/۳	۱/۲	
			۱/۶۵	-۱/۲		
		-۰/۵	-۱/۱۵	۰/۹	۰/۳	
			۰/۴۵	-۰/۶		
		-۰/۱۵	-۰/۳	۰/۴۵	۰/۱۵	
لنگر نهایی	۰	۸۵/۹	-۸۵/۹	۲۰۱/۸۵	-۲۰۱/۸۵	۰



واکنشهای تکیه‌گاهی

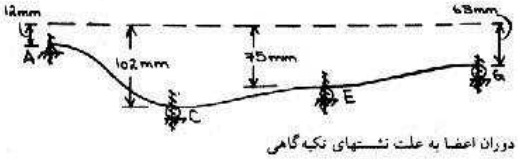


نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۱۰-۱۳ مسئلهٔ ۱۰-۱۲ را با این فرض حل کنید که علاوه بر بارهای متمرکز اعمال شده بر تیر، تکیه‌گاههای A ، C ، E و G به ترتیب به اندازهٔ ۱۲ mm ، ۱۰۲ mm ، ۷۵ mm و ۶۳ mm نشست کنند.



دوران اعضا به علت نشستهای تکیه‌گاهی

$$EI = ۴۰۰۰۰۰ \quad kN.m^۲$$

$$FEM_{(\text{نشست})} = -\frac{۶EI\Delta}{l^۲}$$

$$\Delta_{AC} = ۱۰۲ - ۱۲ = ۹۰ \; mm$$

$$\Delta_{CE} = ۷۵ - ۱۰۲ = -۲۷ \; mm$$

$$\Delta_{EG} = ۶۳ - ۷۵ = -۱۲ \; mm \quad , \quad FEM_{AC} = -\frac{۷۵(۶)}{۸} - \frac{۶(۴۰۰۰۰۰)(۰/۰۹)}{(۶)^۲} = -۶۰۵۶/۲۵ \quad kN.m$$

$$FEM_{CA} = \frac{۷۵(۶)}{۸} - \frac{۶(۴۰۰۰۰۰)(۰/۰۹)}{(۶)^۲} = -۵۹۴۳/۷۵ \quad kN.m$$

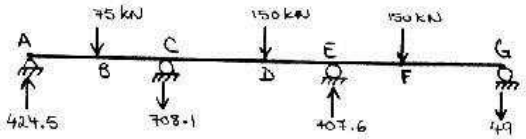
$$FEM_{CE} = -\frac{۱۵۰(۴/۵)(۳)^۲}{(۷/۵)^۲} - \frac{۶\left[۲(۴۰۰۰۰۰)\right](-۰/۰۲۷)}{(۷/۵)^۲} = ۲۱۹۶ \quad kN.m$$

$$FEM_{EC} = \frac{۱۵۰(۴/۵)^۲(۳)}{(۷/۵)^۲} - \frac{۶\left[۲(۴۰۰۰۰۰)\right](-۰/۰۲۷)}{(۷/۵)^۲} = ۲۴۶۶ \quad kN.m$$

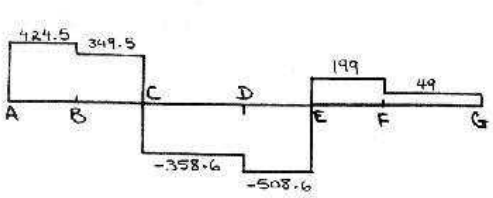
$$FEM_{EG} = -\frac{۱۵۰(۳)(۴/۵)^۲}{(۷/۵)^۲} - \frac{۶(۴۰۰۰۰۰)(-۰/۰۱۲)}{(۷/۵)^۲} = ۳۵۰ \quad kN.m$$

$$FEM_{GE} = \frac{۱۵۰(۳)^۲(۴/۵)}{(۷/۵)^۲} - \frac{۶(۴۰۰۰۰۰)(-۰/۰۱۲)}{(۷/۵)^۲} = ۶۲۰ \quad kN.m$$

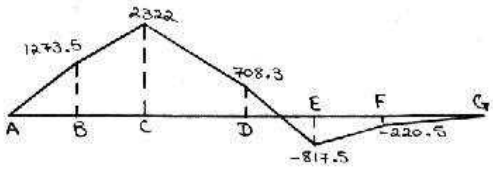
	AC	CA	CE	EC	EG	
DF		۰/۳۱۹	۰/۶۸۱	۰/۷۲۷	۰/۲۷۳	
FEM	-۶۰۵۶/۲۵	-۵۹۴۳/۷۵	۲۱۹۶	۲۴۶۶	۳۵۰	۶۲۰
	۶۰۵۶/۲۵	۱۱۹۵/۵۵	۲۵۵۲/۲	-۲۰۴۷/۲	-۷۶۸/۸	-۶۲۰
		۳۰۲۸/۱	-۱۰۲۳/۶	۱۲۷۶/۱	-۳۱۰	
		-۶۳۹/۲۵	-۱۳۶۵/۰۵	-۷۰۲/۲۵	-۲۶۳/۷۵	
			-۲۵۱/۲	-۶۸۲/۵		
		۱۱۲/۰	۲۳۹/۲	۴۹۶/۲	۱۸۶/۳	
			۲۴۸/۱	۱۱۹/۶		
		-۷۹/۱	-۱۶۹	-۸۶/۹	-۳۲/۷	
			-۴۳/۴۵	-۸۴/۵		
		۱۳/۸۵	۲۹/۶	۶۱/۲	۲۳/۱	
			۳۰/۷	۱۴/۸		
		-۹/۸	-۲۰/۹	-۱۰/۸	-۴/۰	
			-۵/۲	-۱۰/۴۵		
		۱/۷	۳/۷	۷/۶	۲/۸۵	
			۳/۸	۱/۸۵		
		-۱/۲	-۲/۶	-۱/۳۵	-۰/۵	
			-۰/۷	-۱/۳		
		۰/۲	۰/۵	۰/۹	۰/۲	
			۰/۵	۰/۲۵		
		-۰/۱۵	-۰/۳۵	-۰/۲	-۰/۵	
لنگر نهایی	۰	-۲۳۲۲/۰۵	۲۳۲۲/۰۵	۸۱۷/۱۵	-۸۱۷/۵	۰



واکنشهای تکیه‌گاهی



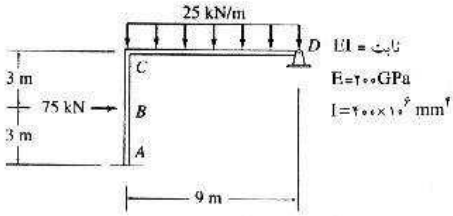
نمودار نیروی برشی ، kN



نمودار لنگر خمشی ، kN.m

در مسایل ۱۰-۱۴ تا ۱۰-۱۷ قاب نشان داده شده را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورید.

۱۰-۱۴



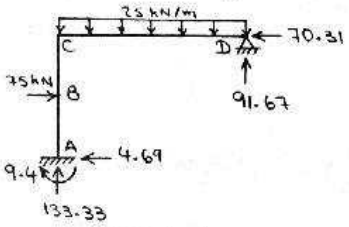
شکل ۱۰-۱۴

$$FEM_{AC} = -FEM_{CA} = -\frac{۷۵(۶)}{۸} = -۵۶/۲۵ \quad kN.m$$

$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{۲۵(۹)^۲}{۱۲} = -۱۶۸/۷۵ \quad kN.m$$

$$DF_{CA} = \frac{\left[\frac{I}{۶}\right]}{\left[\frac{I}{۶}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۹}\right]} = \frac{۲}{۳}$$

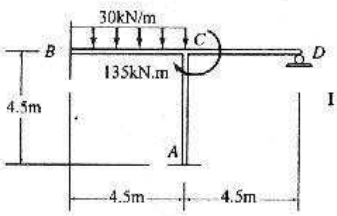
$$DF_{CD} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۹}\right]}{\left[\frac{I}{۶}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۹}\right]} = \frac{۱}{۳}$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

	AC	CA	CD	DC
DF		۲/۳	۱/۳	
FEM	-۵۶/۲۵	۵۶/۲۵	-۱۶۸/۷۵	۱۶۸/۷۵
		۷۵	۳۷/۵	-۱۶۸/۷۵
	۳۷/۵		-۸۴/۴	
		۵۶/۲۵	۲۸/۱۵	
	۲۸/۱۵			
لنگر نهایی	۹/۴	۱۸۷/۵	-۱۸۷/۵	۰

۱۰-۱۵



شکل ۱۰-۱۵

EI = ثابت
E = ۲۰۰ GPa
I = ۱/۴×۱۰⁹ mm⁴

$$FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -\frac{۳۰(۴/۵)^۲}{۱۲} = -۵۰/۶۲۵ \quad kN.m$$

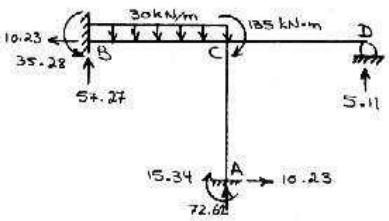
$$DF_{CB} = \frac{\left[\frac{I}{۴/۵}\right]}{\left[\frac{I}{۴/۵}\right] + \left[\frac{I}{۴/۵}\right] + \left[\frac{I}{۶}\right]} = ۰/۳۶۴$$

$$DF_{CD} = \frac{\left[\frac{I}{۶}\right]}{\left[\frac{I}{۴/۵}\right] + \left[\frac{I}{۴/۵}\right] + \left[\frac{I}{۶}\right]} = ۰/۲۷۲$$

$$DF_{CA} = \frac{\left[\frac{I}{۴/۵}\right]}{\left[\frac{I}{۴/۵}\right] + \left[\frac{I}{۴/۵}\right] + \left[\frac{I}{۶}\right]} = ۰/۳۶۴$$

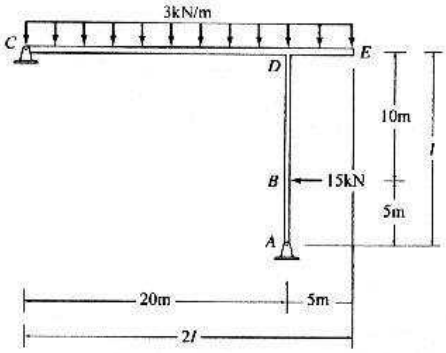
COM

	BC	CB	$M_{(خارجی)}$	CA	CD	DC	AC
DF		۰/۳۶۴	-	۰/۳۶۴	۰/۲۷۲		
FEM	-۵۰/۶۳	۵۰/۶۳	-۱۳۵	۰	۰	۰	۰
		۳۰/۷۱	-	۳۰/۷۱	۲۲/۹۵		
	۱۵/۳۵						۱۵/۳۵
لنگر نهایی	-۳۵/۲۸		-۱۳۵	۳۰/۷۱	۲۲/۹۵		۱۵/۳۵



واکنشهای تکیه‌گاهی

۱۶-۱۰



E = ثابت

شکل ۱۰-۱۶

$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{۳(۲۰)^۲}{۱۲} = -۱۰۰ \quad kN.m$$

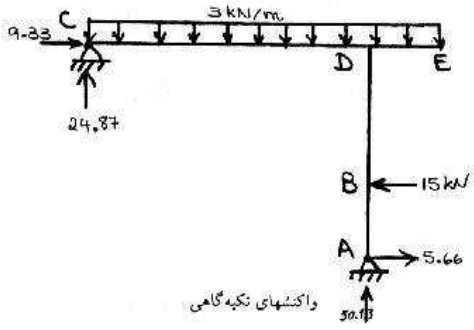
$$M_{DE} = -۳\frac{(۵)^۲}{۲} = -۳۷/۵ \quad kN.m$$

$$FEM_{AD} = \frac{۱۵(۵)(۱۰)^۲}{(۱۵)^۲} = ۳۳/۳ \quad kN.m$$

$$FEM_{DA} = \frac{۱۵(۵)^۲(۱۰)}{(۱۵)^۲} = -۱۶/۷ \quad kN.m$$

$$DF_{DC} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۲۰}\right]}{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۱۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۲۰}\right]} = ۰/۶$$

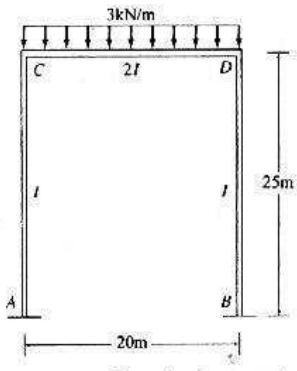
$$DF_{DA} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۱۵}\right]}{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۱۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۲۰}\right]} = ۰/۴$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

	CD	DC	DE	DA	AD
DF		۰/۶	-	۰/۴	
FEM	-۱۰۰	۱۰۰	-۳۷/۵	-۱۶/۷	۳۳/۳
	۱۰۰	-۲۷/۵		-۱۸/۳	-۳۳/۳
		۵۰		-۱۶/۷	
		-۲۰		-۱۳/۳	
لنگر نهایی	۰	۱۰۲/۵	-۳۷/۵	-۶۵	۰

۱۷-۱۰



E = ثابت

شکل ۱۰-۱۷

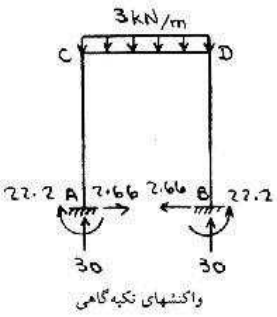
این قاب در حالت کلی دارای یک درجه آزادی انتقالی (Δ یا ψ) است، ولی به علت تقارن بارگذاری و مشخصات مقاطع، ثابت می‌شود که $\Delta = 0$ بوده و در واقع درجهٔ آزادی انتقالی وجود ندارد.

$$FEM_{CD} = -\frac{3(20)^2}{12} = -100 \ kN.m \quad , \quad FEM_{DC} = \frac{3(20)^2}{12} = 100 \ kN.m$$

$$DF_{CA} = \frac{\left[\frac{I}{25}\right]}{\left[\frac{I}{25}\right] + \left[\frac{2I}{20}\right]} = 0.286 \quad , \quad DF_{CD} = \frac{\left[\frac{2I}{20}\right]}{\left[\frac{I}{25}\right] + \left[\frac{2I}{20}\right]} = 0.714$$

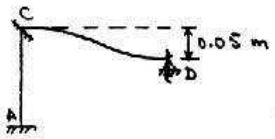
$$DF_{DB} = \frac{\left[\frac{I}{25}\right]}{\left[\frac{I}{25}\right] + \left[\frac{2I}{20}\right]} = 0.286 \quad , \quad DF_{DC} = \frac{\left[\frac{2I}{20}\right]}{\left[\frac{I}{25}\right] + \left[\frac{2I}{20}\right]} = 0.714$$

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۲۸۶	۰/۷۱۴	۰/۷۱۴	۰/۲۸۶	
FEM	۰	۰	-۱۰۰	۱۰۰	۰	۰
		۲۸/۶	۷۱/۴	-۷۱/۴	-۲۸/۶	
	۱۴/۳		-۳۵/۷	۳۵/۷		-۱۴/۳
		۱۰/۲	۲۵/۵	-۲۵/۵	-۱۰/۲	
	۵/۱		-۱۲/۸	۱۲/۸		-۵/۱
		۳/۷	۹/۱	-۹/۱	-۳/۷	
	۱/۸۵		-۴/۶	۴/۶		-۱/۸۵
		۱/۳	۳/۳	-۳/۳	-۱/۳	
	۰/۶۵		-۱/۷	۱/۷		-۰/۶۵
		۰/۵	۱/۲	-۱/۲	-۰/۵	
	۰/۲۵		-۰/۶	۰/۶		-۰/۲۵
		۰/۲	۰/۴	-۰/۴	-۰/۲	
	۰/۱		-۰/۲	۰/۲		-۰/۱
		۰/۱	۰/۱	-۰/۱	-۰/۱	
لنگر نهایی	۲۲/۲۵	۴۴/۶	-۴۴/۶	۴۴/۶	-۴۴/۶	-۲۲/۴



واکنشهای تکیه‌گاهی

۱۸-۱۰ مسئلهٔ ۱۰-۱۴ را با این فرض حل کنید که علاوه بر بارهای وارده، تکیه‌گاه D به اندازهٔ **۵۰ mm** نشست کند.

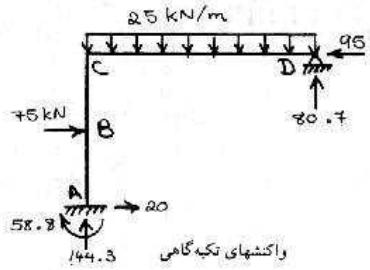


$$FEM_{AC} = -FEM_{CA} = -\frac{75(6)}{8} = -56.25 \quad , \quad EI = 80000 \ kN.m^2 \quad , \quad \Delta = 50 \ mm$$

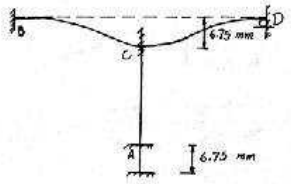
$$FEM_{CD} = -\frac{wl^2}{12} - \frac{6EI\Delta}{l^2} = -\frac{25(9)^2}{12} - \frac{6(80000)(0.05)}{(9)^2} = -465.05 \ kN.m$$

$$FEM_{DA} = \frac{wl^2}{12} - \frac{6EI\Delta}{l^2} = \frac{25(9)^2}{12} - \frac{6(80000)(0.05)}{(9)^2} = -127.5 \ kN.m$$

	AC	CA	CD	DC
		$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	
DF				
FEM	-۵۶/۲۵	۵۶/۲۵	-۲۶۵/۰۵	-۱۲۷/۵
		۲۷۲/۵۵	۱۳۶/۲۵	۱۲۷/۵
	۱۳۶/۳		۶۳/۷۵	
		-۴۲/۵	-۲۱/۲۵	
	-۲۱/۲۵			
لنگر نهایی	۵۸/۸	۲۸۶/۳	-۲۸۶/۳	۰



۱۰-۱۹ مسئلهٔ ۱۰-۱۵ را با این فرض حل کنید که علاوه بر بارهای وارده، تکیه‌گاه A به اندازهٔ ۶/۷۵ mm نشست کند.



$$FEM_{BC}=-\frac{wl^2}{12}-\frac{6EI\Delta}{l^2}=-\frac{۳۰(۴/۵)^2}{12}-\frac{۶(۲۸۰۰۰۰)(۰/۰۰۶۷۵)}{(۴/۵)^2}$$

$$FEM_{BC}=-۶۱۰/۶۳\ kN.m$$

$$FEM_{CB}=\frac{wl^2}{12}-\frac{6EI\Delta}{l^2}=\frac{۳۰(۴/۵)^2}{12}-\frac{۶(۲۸۰۰۰۰)(۰/۰۰۶۷۵)}{(۴/۵)^2}$$

$$FEM_{CB}=-۵۰۹/۳۸\ kN.m$$

$$FEM_{CD}=-\frac{6EI\Delta}{l^2}=-\frac{۶(۲۸۰۰۰۰)(-۰/۰۰۶۷۵)}{(۴/۵)^2}=۵۶۰\ kN.m$$

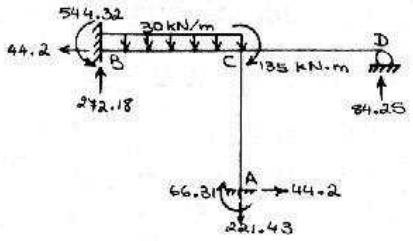
$$FEM_{DC}=-\frac{6EI\Delta}{l^2}=-\frac{۶(۲۸۰۰۰۰)(-۰/۰۰۶۷۵)}{(۴/۵)^2}=۵۶۰\ kN.m$$

$$DF_{CB}=\frac{\left[\frac{I}{۴/۵}\right]}{\left[\frac{I}{۴/۵}\right]+\left[\frac{I}{۴/۵}\right]+\left[\frac{I}{۶}\right]}=۰/۳۶۴\quad,\quad DF_{CD}=\frac{\left[\frac{I}{۶}\right]}{\left[\frac{I}{۴/۵}\right]+\left[\frac{I}{۴/۵}\right]+\left[\frac{I}{۶}\right]}=۰/۲۷۲$$

$$DF_{CA}=\frac{\left[\frac{I}{۴/۵}\right]}{\left[\frac{I}{۴/۵}\right]+\left[\frac{I}{۴/۵}\right]+\left[\frac{I}{۶}\right]}=۰/۳۶۴$$

COM

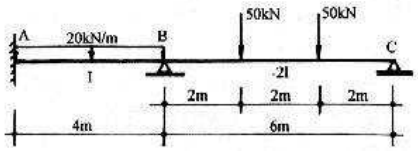
	BC	CB	$M_{(خارجی)}$	CA	CD	DC	AC
		۰/۳۶۴	-	۰/۳۶۴	۰/۲۷۲		
DF							
FEM	-۶۱۰/۶۳	-۵۰۹/۳۸	-۱۳۵	۰	۵۶۰	۵۶۰	۰
		۳۰/۷۱		۳۰/۷۱	۲۲/۹۵	-۵۶۰	
	۱۵/۳۵				-۲۸۰		۱۵/۳۵
		۱۰۱/۹۲		۱۰۱/۹۲	۷۶/۱۶		
	۵۰/۹۶						۵۰/۹۶
لنگر نهایی	-۵۲۴/۳۲	-۳۷۶/۷۵	-۱۳۵	۱۳۲/۶۳	۳۷۹/۱۲		۶۶/۳۱



واکنشهای تکیه‌گاهی

تیرهای نشان داده شده در مسایل ۱۰-۲۰ تا ۱۰-۲۲ را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی آنها را به دست آورید.

۲۰-۱۰



شکل ۲۰-۱۰

$I = ۳\times۱۰^{۷}\ mm^{۴}$

$\Delta_B = ۲۰\ mm$

$E = ۲۰۰\ GPa$

$\Delta_C = ۱۰\ mm$

$$FEM'_{AB} = -FEM'_{BA} = -\frac{۲۰(۴)^{۲}}{۱۲}$$

$$FEM'_{AB} = -۲۶/۶۶\ \ kN.m$$

$$FEM'_{BC} = -FEM'_{CB} = -\frac{۵۰(۲)(۴)}{۶}$$

$$FEM'_{BC} = -۶۶/۶۶\ \ kN.m$$

$$DF_{BA} = \frac{\left(\frac{I}{۴}\right)}{\left(\frac{I}{۴}\right)+\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲I}{۶}\right)} = ۰/۵$$

	AB	BA	BC	CB
DF		۰/۵	۰/۵	
FEM	-۷۱/۶۶	-۱۸/۳۴	-۴۶/۶۶	۸۶/۶۶
		۳۲/۵	۳۲/۵	-۸۶/۶۶
		۱۶/۲۵	-۴۳/۳۳	
			۲۱/۶۷	۲۱/۶۷
		۱۰/۸۳		
لنگر نهایی	-۴۴/۵۸	۳۵/۸۳	-۳۵/۸۲	۰

$$DF_{BC} = \frac{\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲I}{۶}\right)}{\left(\frac{I}{۴}\right)+\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲I}{۶}\right)} = ۰/۵$$

$$FEM_{AB} = FEM'_{AB} - \frac{۶EI\Delta}{l^{۲}} = -۲۶/۶۶ - \frac{۶(۶۰۰۰)(۰/۰۲)}{(۴)^{۲}}$$

$$FEM_{AB} = -۷۱/۶۶\ \ kN.m$$

$$FEM_{BA} = FEM'_{BA} - \frac{۶EI\Delta}{l^{۲}} = ۲۶/۶۶ - \frac{۶(۶۰۰۰)(۰/۰۲)}{(۴)^{۲}}$$

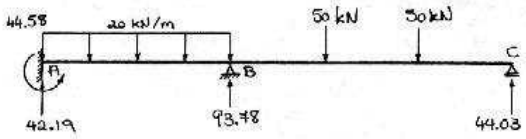
$$FEM_{BA} = -۱۸/۳۴\ \ kN.m$$

$$FEM_{BC} = FEM'_{BC} - \frac{۶EI\Delta}{l^{۲}} = -۶۶/۶۶ - \frac{۶(۶۰۰۰)(-۰/۰۲)}{(۶)^{۲}}$$

$$FEM_{BC} = -۴۶/۶۶\ \ kN.m$$

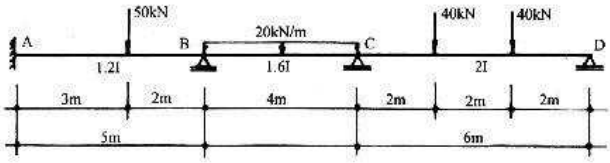
$$FEM_{CB} = FEM'_{CB} - \frac{۶EI\Delta}{l^{۲}} = ۶۶/۶۶ - \frac{۶(۶۰۰۰)(-۰/۰۲)}{(۶)^{۲}}$$

$$FEM_{CB} = ۸۶/۶۶\ \ kN.m$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

۲۱-۱۰



شکل ۲۱-۱۰

$$FEM_{AB} = -\frac{50(3)(2)^2}{(5)^2} = -24 \quad kN.m$$

$$FEM_{BA} = \frac{50(3)^2(2)}{(5)^2} = 36 \quad kN.m$$

$$FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -\frac{20(4)^2}{12}$$

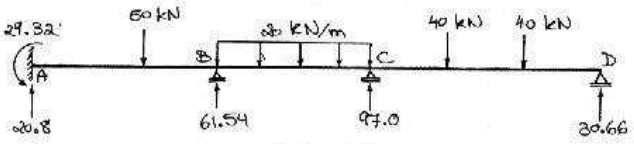
$$FEM_{BC} = -26/66 \quad kN.m$$

$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{40(2)(4)}{6} = -53/33 \quad kN.m$$

$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{1/2I}{5}\right]}{\left[\frac{1/2I}{5}\right] + \left[\frac{1/6I}{4}\right]} = 0/375 \quad , \quad DF_{BC} = \frac{\left[\frac{1/6I}{4}\right]}{\left[\frac{1/2I}{5}\right] + \left[\frac{1/6I}{4}\right]} = 0/625$$

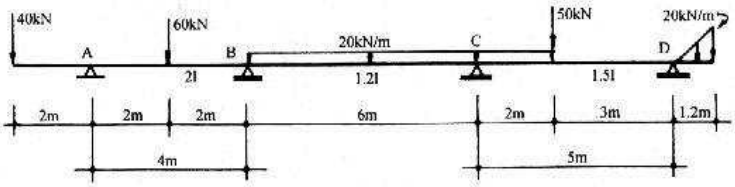
$$DF_{CB} = \frac{\left[\frac{1/6I}{4}\right]}{\left[\frac{1/6I}{4}\right] + \left[\frac{3}{4}\right]\left[\frac{2I}{6}\right]} = 0/615 \quad , \quad DF_{BC} = \frac{\left[\frac{3}{4}\right]\left[\frac{2I}{6}\right]}{\left[\frac{1/6I}{4}\right] + \left[\frac{3}{4}\right]\left[\frac{2I}{6}\right]} = 0/385$$

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF		۰/۳۷۵	۰/۶۲۵	۰/۶۱۵	۰/۳۸۵	
FEM	-۲۴	۳۶	-۲۶/۶۶	۲۶/۶۶	-۵۳/۳۳	۵۳/۳۳
		-۳/۵۰	-۵/۸۴	۱۶/۲	۱۰/۲۷	-۵۳/۳۳
	-۱/۷۵		۸/۲	-۲/۹۲	-۲۶/۶۶	
		-۳/۰۸	-۵/۱۲	۱۸/۱۹	۱۱/۲۹	
	-۱/۵۴		۹/۱	-۲/۵۶		
		-۳/۴۲	-۵/۶۸	۱/۵۷	۰/۹۹	
	-۱/۷۱		۰/۷۸	-۲/۸۴		
		-۰/۲۹	-۰/۴۹	۱/۷۴	۱/۱	
	-۰/۱۵		۰/۸۷	-۰/۲۵		
		-۰/۳۳	-۰/۵۴	۰/۱۵	۰/۱	
	-۰/۱۶		۰/۰۸	-۰/۲۷		
		-۰/۰۳	-۰/۰۵	۰/۱۷	۰/۱	
	-۰/۰۱		۰/۰۸	-۰/۰۳		
		-۰/۰۳	-۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۱	
لنگر نهایی	-۲۹/۳۲	۲۵/۳۲	-۲۵/۳۲	۵۶/۰۳	-۵۶/۰۳	۰



واکنشهای تکیه‌گاهی

۲۲-۱۰



شکل ۱۰-۲۲

$M_A = ۴۰(۲) = ۸۰ \quad kN.m$

$M_D = \frac{۱}{۲}(۲۰)(۱/۲)\left[\frac{۲}{۳}(۱/۲)\right]$

$M_D = -۹/۶ \quad kN.m$

$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -\frac{۶۰(۴)}{۸}$

$FEM_{AB} = -۳۰ \quad kN.m$

	AB	BA	BC	CB	CD	DC	
DF	۱	۰/۶۵۲	۰/۳۴۸	۰/۴۷	۰/۵۳	۱	
FEM	۸۰	-۳۰	۳۰	-۶۰	۶۰	-۵۷/۸۶	۳۱/۴۶	-۹/۶
		-۵۰	۱۹/۵۶	۱۰/۴۴	-۱/۰	-۱/۱۴	-۲۱/۸۶	
			-۲۵	-۰/۵	۵/۲۲	-۱۰/۹۳		
			۱۶/۶۳	۸/۸۷	۲/۶۸	۳/۰۳		
				۱/۳۴	۴/۴۳			
			-۰/۸۸	-۰/۴۶	-۲/۰۸	-۲/۳۵		
				-۱/۰۲	-۰/۲۳			
			-۰/۶۸	۰/۳۶	۰/۱۱	۰/۱۲		
				۰/۰۵	۰/۱۸			
			-۰/۰۳	-۰/۰۲	-۰/۰۸	-۰/۱		
لنگر نهایی	۸۰	-۸۰	۴۰/۹۶	-۴۰/۹۶	۶۹/۲۳	-۶۹/۲۳	۹/۶	-۹/۶

$FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -\frac{۲۰(۶)^۲}{۱۲}$

$FEM_{BC} = -۶۰ \quad kN.m$

در دهانهٔ CD:

$m = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$

$FEM_{CD} = -۵۷/۸۶ \quad kN.m$

$FEM_{DC} = ۳۱/۴۶ \quad kN.m$

$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۴}\right]}{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۴}\right] + \left[\frac{۱/۲I}{۶}\right]}$

$DF_{BA} = ۰/۶۵۲$

$DF_{BC} = \frac{\left[\frac{۱/۲I}{۶}\right]}{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۴}\right] + \left[\frac{۱/۲I}{۶}\right]}$

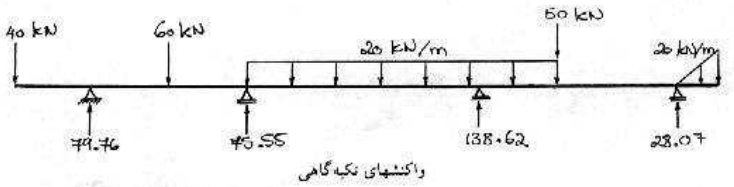
$DF_{BC} = ۰/۳۴۸$

$DF_{CB} = \frac{\left[\frac{۱/۲I}{۶}\right]}{\left[\frac{۱/۲I}{۶}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۱/۵I}{۵}\right]}$

$DF_{CB} = ۰/۴۷۰$

$DF_{CD} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۱/۵I}{۵}\right]}{\left[\frac{۱/۲I}{۶}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۱/۵I}{۵}\right]}$

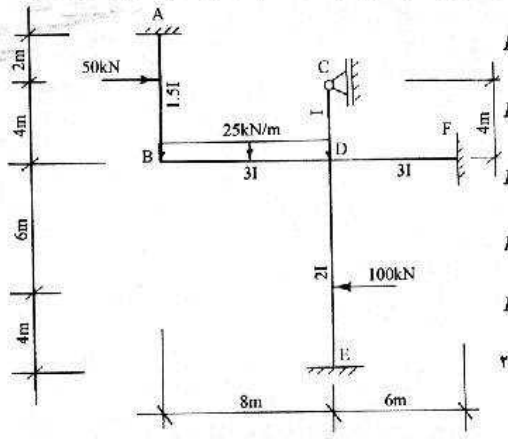
$DF_{CD} = ۰/۵۳۰$



واکنشهای تکیه‌گاهی

قابهای نشان داده شده در مسایل ۱۰-۲۳ و ۱۰-۲۴ را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورید.

۲۳-۱۰



شکل ۱۰-۲۳

$FEM_{AB} = \frac{۵۰(۲)(۴)^۲}{(۶)^۲} = ۴۴/۴۴ \quad kN.m$

$FEM_{BA} = -\frac{۵۰(۲)^۲(۴)}{(۶)^۲} = -۲۲/۲۲ \quad kN.m$

$FEM_{ED} = \frac{۱۰۰(۴)(۶)^۲}{(۱۰)^۲} = ۱۴۴ \quad kN.m$

$FEM_{DE} = -\frac{۱۰۰(۴)^۲(۶)}{(۱۰)^۲} = -۹۶ \quad kN.m$

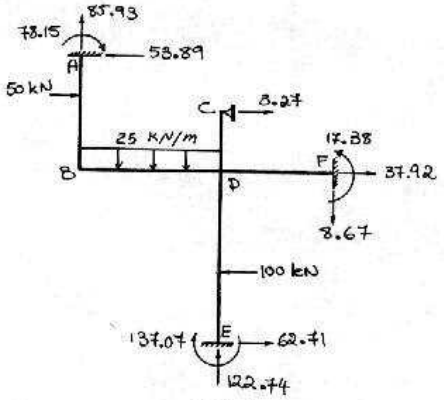
$FEM_{BD} = -FEM_{DB} = -\frac{۲۵(۸)^۲}{۱۲} = -۱۳۳/۳۳ \quad kN.m$

$$DF_{BA}=\frac{\left[\frac{1/5I}{6}\right]}{\left[\frac{1/5I}{6}\right]+\left[\frac{3I}{8}\right]}=0/4 \quad , \quad DF_{BD}=\frac{\left[\frac{3I}{8}\right]}{\left[\frac{1/5I}{6}\right]+\left[\frac{3I}{8}\right]}=0/6$$

$$DF_{DB}=\frac{\left[\frac{3I}{8}\right]}{\left[\frac{3I}{8}\right]+\left[\frac{2I}{10}\right]+\left[\frac{3I}{6}\right]+\left[\frac{3}{4}\right]\left[\frac{I}{4}\right]}=0/297 \quad , \quad DF_{DE}=\frac{\left[\frac{2I}{10}\right]}{\left[\frac{3I}{8}\right]+\left[\frac{2I}{10}\right]+\left[\frac{3I}{6}\right]+\left[\frac{3}{4}\right]\left[\frac{I}{4}\right]}=0/158$$

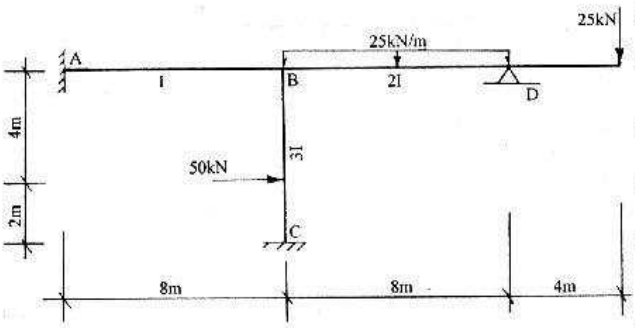
$$DF_{DF}=\frac{\left[\frac{3I}{6}\right]}{\left[\frac{3I}{8}\right]+\left[\frac{2I}{10}\right]+\left[\frac{3I}{6}\right]+\left[\frac{3}{4}\right]\left[\frac{I}{4}\right]}=0/396 \quad , \quad DF_{DC}=\frac{\left[\frac{3}{4}\right]\left[\frac{I}{4}\right]}{\left[\frac{3I}{8}\right]+\left[\frac{2I}{10}\right]+\left[\frac{3I}{6}\right]+\left[\frac{3}{4}\right]\left[\frac{I}{4}\right]}=0/149$$

	AB	BA	BD	DB	DF	DC	DE	ED	CD	FD
DF		۰/۴	۰/۶	۰/۲۹۷	۰/۳۹۶	۰/۱۴۹	۰/۱۵۸			
FEM	۴۴/۴۴	-۲۲/۲۲	-۱۳۳/۳۳	۱۳۳/۳۳			-۹۶	۱۴۴	۰	۰
		۶۲/۲۲	۹۳/۳۳	-۱۱/۰۹	-۱۴/۷۸	-۵/۵۶	-۵/۹	-۲/۹۵		-۷/۳۹
	۳۱/۱۱		-۵/۵۵	۴۶/۶۷						
		۲/۲۲	۳/۳۳	-۱۳/۸۶	-۱۸/۴۸	-۶/۹۵	-۷/۳۸	-۳/۶۹		-۹/۲۴
	۱/۱۱		-۶/۹۳	۱/۶۶						
		۲/۷۷	۴/۱۶	-۰/۴۹	-۰/۶۶	-۰/۲۵	-۰/۲۶	-۰/۱۳		-۰/۳۳
	۱/۳۸		-۰/۲۵	۲/۰۸						
		۰/۱	۰/۱۵	-۰/۶۲	-۰/۸۲	-۰/۳۱	-۰/۳۳	-۰/۱۶		-۰/۴۱
	۰/۰۵		-۰/۳۱	۰/۰۸						
		۰/۱۲	۰/۱۹	-۰/۰۲	-۰/۰۳	-۰/۰۱	-۰/۰۱	۰/۰۰		-۰/۰۱
	۰/۰۶		۰/۰۱	۰/۱						
		۰/۰۰	۰/۰۰	-۰/۰۳	-۰/۰۴	-۰/۰۲	-۰/۰۲			
لنگر نهایی	۷۸/۱۵	۴۵/۲۱	-۴۵/۲	۱۵۷/۸۱	-۳۴/۸۱	-۱۳/۱	-۱۰۹/۹	۱۳۷/۰۷	۰	-۱۷/۳۸



واکنشهای تکیه‌گاهی

۲۴-۱۰



شکل ۵-۲۴

$$FEM_{BD} = -FEM_{DB} = -\frac{۲۵(۸)^{۲}}{۱۲}$$

$$FEM_{BD} = -۱۳۳/۳۳ \quad kN.m$$

$$FEM_{CB} = -\frac{۵۰(۲)(۴)^{۲}}{(۶)^{۲}} = -۴۴/۴۴ \quad kN.m$$

$$FEM_{BC} = \frac{۵۰(۲)^{۲}(۴)}{(۶)^{۲}} = ۲۲/۲۲ \quad kN.m$$

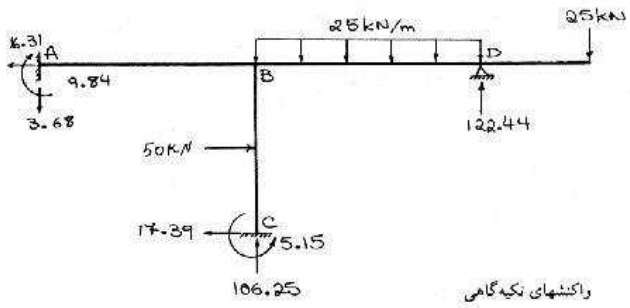
$$M_D = -۱۰۰ \quad kN.m$$

$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{I}{۸}\right]}{\left[\frac{I}{۸}\right] + \left[\frac{۲I}{۶}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۸}\right]} = ۰/۱۵۴$$

$$DF_{BC} = \frac{\left[\frac{۳I}{۶}\right]}{\left[\frac{I}{۸}\right] + \left[\frac{۲I}{۶}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۸}\right]} = ۰/۶۱۵$$

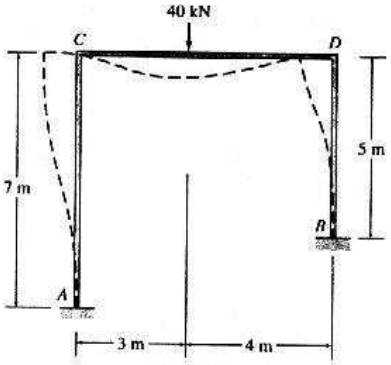
$$DF_{BD} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۸}\right]}{\left[\frac{I}{۸}\right] + \left[\frac{۲I}{۶}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{۲I}{۸}\right]} = ۰/۲۳۱$$

	AB	BA	BC	BD	DB	$M_{(طره)}$		CB
DF		۰/۱۵۴	۰/۶۱۵	۰/۲۳۱	۱			
FEM	۰	۰	۲۲/۲۲	-۱۳۳/۳۳	۱۳۳/۳۳	-۱۰۰		-۴۴/۴۴
		۱۷/۱۱	۶۸/۳۳	۲۵/۶۶	-۳۳/۳۳			
	۸/۵۶			-۱۶/۶۶				۳۴/۱۷
		۲/۵۷	۱۰/۲۴	۳/۸۵				
	۱/۲۸							۵/۱۲
لنگر نهایی	۹/۸۲	۱۹/۶۸	۱۰۰/۷۹	-۱۲۰/۴۸	۱۰۰	-۱۰۰		-۵/۱۵

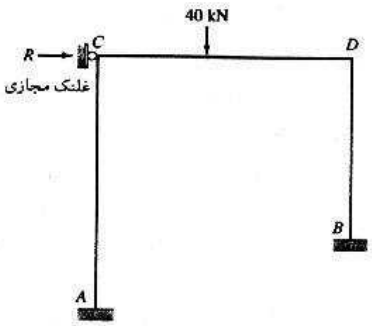


واکنشهای تکیه‌گاهی

۱۰-۲۵ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده و لنگرهای خمشی انتهای اعضا را به دست آورید.



شکل ۵-۲۵



سازهٔ مقید شده در برابر درجهٔ آزادی انتقالی (۰)

$$FEM_{CD} = -\frac{۴۰(۳)(۴)^۲}{(۷)^۲} = -۳۹/۲ \quad kN.m \quad , \quad FEM_{DC} = \frac{۴۰(۳)^۲(۴)}{(۷)^۲} = ۲۹/۴ \quad kN.m$$

$$DF_{CA} = \frac{\left[\frac{I}{۷}\right]}{\left[\frac{I}{۷}\right]+\left[\frac{I}{۷}\right]} = ۰/۵ \quad , \quad DF_{CD} = \frac{\left[\frac{I}{۷}\right]}{\left[\frac{I}{۷}\right]+\left[\frac{I}{۷}\right]} = ۰/۵ \quad , \quad DF_{DC} = \frac{\left[\frac{I}{۷}\right]}{\left[\frac{I}{۷}\right]+\left[\frac{I}{۵}\right]} = ۰/۴۱۷$$

$$DF_{DB} = \frac{\left[\frac{I}{۵}\right]}{\left[\frac{I}{۷}\right]+\left[\frac{I}{۵}\right]} = ۰/۵۸۳$$

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۵	۰/۵	۰/۴۱۷	۰/۵۸۳	
FEM			-۳۹/۲	۲۹/۴		
		۱۹/۶	۱۹/۶	-۱۲/۳	-۱۷/۱	
		۹/۸	-۶/۲	۹/۸		-۸/۶
		۳/۱	۳/۱	-۴/۱	-۵/۷	
		۱/۶	-۲/۲	۱/۶		-۲/۹
		۱/۱	۱/۱	-۰/۷	-۰/۹	
		۰/۶	-۰/۲	۰/۶		-۰/۵
		۰/۲	۰/۲	-۰/۳	-۰/۳	
لنگر نهایی	۱۲	۲۴	-۲۳/۹	۲۴	-۲۴	-۱۲

در جدول مقابل نتایج توزیع لنگر مربوط به سازهٔ مقید شده درج شده است. پس از محاسبهٔ لنگرهای خمشی انتهای اعضا، واکنش تکیه‌گاه غلتکی مجازی (R) را به دست می‌آوریم.

$$+\circlearrowright \sum M_C^{AC} = ۰ \quad :$$

$$۷S_A - ۱۲ - ۲۴ = ۰$$

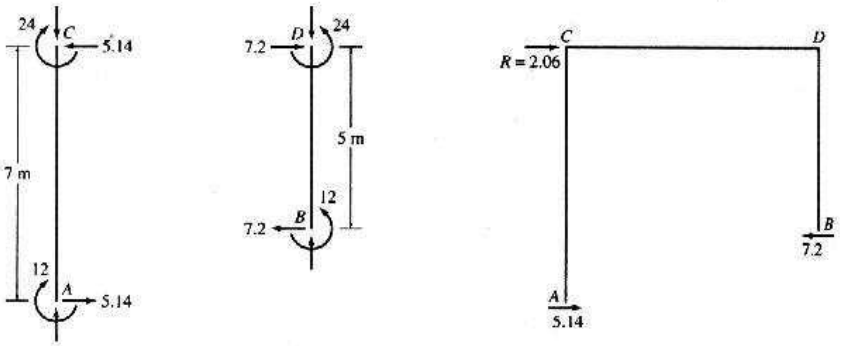
$$\vec{S}_A = ۵/۱۴ \quad kN \rightarrow$$

$$+\circlearrowright \sum M_D^{BD} = ۰ \quad :$$

$$۵S_B + ۱۲ + ۲۴ = ۰$$

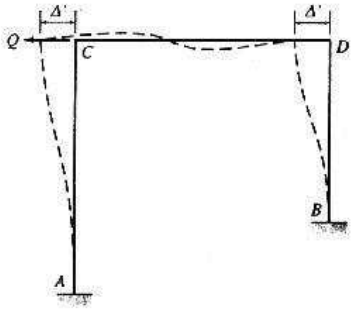
$$\vec{S}_B = ۷/۲ \quad kN \leftarrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \quad : \quad ۵/۱۴ - ۷/۲ + R = ۰ \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = ۲/۰۶ \quad kN \rightarrow$$

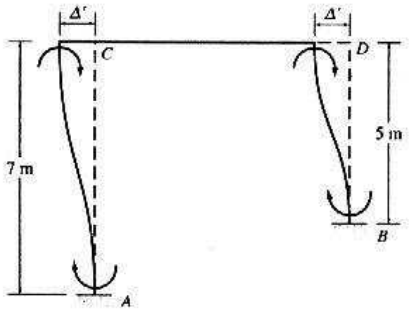


لنگرهای خمشی و نیروهای برشی در انتهای اعضای قاب مقید شده، (۰)

در ادامه تکیه‌گاه غلتکی مجازی را حذف کرده و یک تغییر مکان (جابه جایی) دلخواه (Δ') در امتداد درجهٔ آزادی انتقالی ایجاد شده به قاب اعمال می‌کنیم.



سازهٔ آزاد شده تحت اثر تغییر مکان جانبی دلخواه Δ' (۱)



لنگرهای گیرداری ایجاد شده در اعضای قاب به علت جابه جایی Δ'

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۵	۰/۵	۰/۴۷۱	۰/۵۸۳	
FEM	۵۰	۵۰			۹۸	۹۸
		-۲۵	-۲۵	-۴۰/۹	-۵۷/۱	
	-۱۲/۵		-۲۰/۵	-۱۲/۵		-۲۸/۶
		۱۰/۳	۱۰/۳	۵/۲	۷/۳	
	۵/۲		۲/۶	۵/۲		۳/۷
		-۱/۳	-۱/۳	-۲/۲	-۳	
	-۰/۷		-۱/۱	-۰/۷		-۱/۵
		۰/۶	۰/۶	۰/۳	۰/۴	
	۰/۳		۰/۳	۰/۳		۰/۲
		-۰/۱	-۰/۱	-۰/۱	-۰/۲	
لنگر نهایی	۴۲/۳	۳۴/۵	-۳۴/۳	-۴۵/۴	۴۵/۴	۷۱/۸

$$FEM_{AC}=FEM_{CA}=\frac{۶EI\Delta'}{l_{AC}^{۲}}$$

$$FEM_{AC}=\frac{۶EI\Delta'}{(۷)^{۲}}$$

$$FEM_{BD}=FEM_{DB}=\frac{۶EI\Delta'}{l_{BD}^{۲}}$$

$$FEM_{BD}=\frac{۶EI\Delta'}{(۵)^{۲}}$$

برای سهولت محاسبات فرض می‌کنیم: $EI\Delta'=\frac{۱۲۲۵}{۳}$ به این ترتیب:

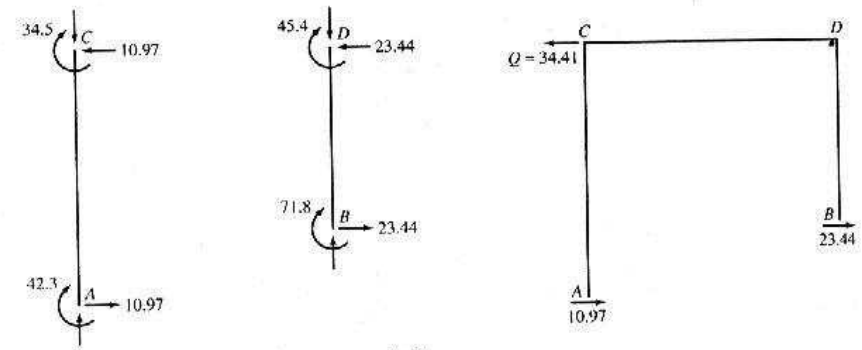
$$FEM_{BD}=FEM_{DB}$$

$$FEM_{BD}=۹۸\ kNm$$

$$FEM_{AC}=FEM_{CA}$$

$$FEM_{AC}=۵۰\ kNm$$

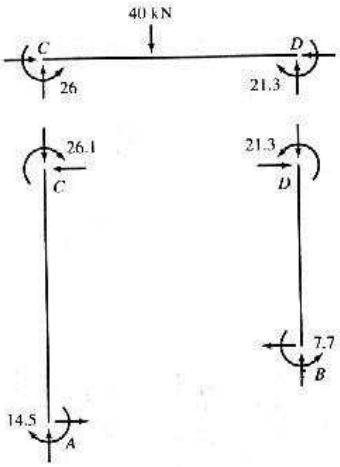
جدول توزیع لنگر سازهٔ آزاد شدهٔ (۱) به صورت مقابل است.



لنگرهای خمشی و نیروهای برشی در انتهای اعضای قاب آزاد شده، (۱)

نیروی متمرکز O را که برای برقراری تعادل قاب آزاد شدهٔ (۱) لازم است، از روابط تعادل به دست می‌آوریم.

در سازهٔ آزاد شدهٔ (۱):



لنگرهای خمشی واقعی در انتهای اعضای قاب اصلی، kN.m

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = 0 \;:\; 7S_A - 34/5 - 42/3 = 0 \Rightarrow S_A = 10/97 \;\; kN \rightarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{BD} = 0 \;:\; 5S_B - 45/4 - 71/8 = 0 \Rightarrow S_B = 23/44 \;\; kN \rightarrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \;:\; 23/44 + 10/97 + Q = 0 \Rightarrow Q = 34/41 \;\; kN \leftarrow$$

$$R_{10} = R = 2/06 \;\; kN \;\; , \;\; R_{11} = Q = -34/41 \;\; kN$$

$$x_1 R_{11} + R_{10} = 0 \Rightarrow -34/41 x_1 + 2/06 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2/06}{34/41}$$

بنابراین لنگرهای خمشی واقعی در انتهای اعضای قاب اصلی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$M_{AC} = 12 + \left[\frac{2/06}{34/41}\right](42/3) = 14/5 \;\; kN.m$$

$$M_{CA} = 24 + \left[\frac{2/06}{34/41}\right](34/5) = 26/1 \;\; kN.m$$

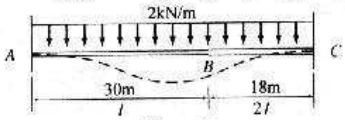
$$M_{CD} = -23/9 + \left[\frac{2/06}{34/41}\right](-34/3) = -26 \;\; kN.m$$

$$M_{DC} = 24 + \left[\frac{2/06}{34/41}\right](-45/4) = 21/3 \;\; kN.m$$

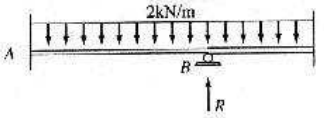
$$M_{DB} = -24 + \left[\frac{2/06}{34/41}\right](45/4) = -21/3 \;\; kN.m$$

$$M_{BD} = -12 + \left[\frac{2/06}{34/41}\right](71/8) = -7/7 \;\; kN.m$$

۱۰-۲۶ تیر نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورید.



شکل ۵-۲۶



تیر مفید شده، (ه)

$$FEM_{AB} = -FEM_{BA}$$

$$FEM_{AB} = -\frac{2(30)^2}{12}$$

$$FEM_{AB} = -150 \;\; kN.m$$

$$FEM_{BC} = -FEM_{CB}$$

$$FEM_{BC} = -\frac{2(18)^2}{12}$$

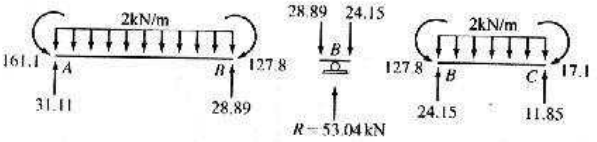
$$FEM_{BC} = -54 \;\; kN.m$$

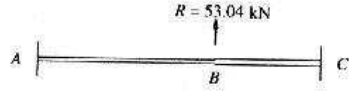
	AB	BA	BC	CB
DF		۰/۲۳۱	۰/۷۶۹	
FEM	-۱۵۰	۱۵۰	-۵۴	۵۴
		-۲۲/۲	-۷۳/۸	
	-۱۱/۱			-۳۶/۹
لنگر نهایی	-۱۶۱/۱	۱۲۷/۸	-۱۲۷/۸	۱۷/۱

$$DF_{BA}=\frac{\left(\frac{I}{۳۰}\right)}{\left(\frac{I}{۳۰}\right)+\left(\frac{۲I}{۱۸}\right)}=۰/۲۳۱$$

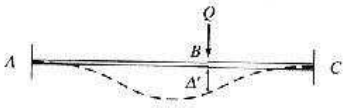
$$DF_{BC}=\frac{\left(\frac{۲I}{۱۸}\right)}{\left(\frac{I}{۳۰}\right)+\left(\frac{۲I}{۱۸}\right)}=۰/۷۶۹$$

در جدول مقابل نتایج توزیع لنگر مربوط به سازهٔ مفید شده نشان داده شده است.

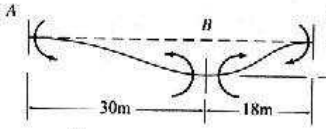




لنگرهای خمشی و نیروهای برشی در انتهای اعضای تیر مفید شده، (۰)



تیر تحت اثر تغییر مکان قائم Δ' در گره B (۱)



لنگرهای گیرداری ایجاد شده در تیر به علت تغییر مکان Δ'

$$FEM_{AB}=FEM_{BA}$$

$$FEM_{AB}=-\frac{۶EI\Delta'}{l_{AB}^{۲}}$$

$$FEM_{AB}=-\frac{۶EI\Delta'}{(۳۰)^{۲}}$$

$$FEM_{BC}=FEM_{CB}=\frac{۶E(۲I)\Delta'}{l_{BC}^{۲}}=\frac{۱۲EI\Delta'}{(۱۸)^{۲}}$$

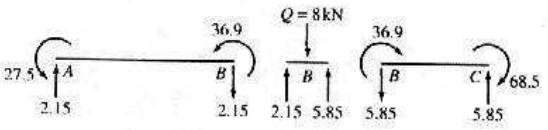
برای ایجاد سهولت در محاسبات فرض می‌کنیم: $EI\Delta'=۲۷۰۰$

در این حالت خواهیم داشت:

$$FEM_{AB}=FEM_{BA}=-۱۸\ \ kN.m$$

$$FEM_{BC}=FEM_{CB}=۱۰۰\ \ kN.m$$

	AB	BA	BC	CB
DF		۰/۲۳۱	۰/۷۶۹	
FEM	-۱۸	-۱۸	۱۰۰	۱۰۰
		-۱۸/۹	-۶۳/۱	
	-۹/۵			-۳۱/۵
لنگر نهایی	-۲۷/۵	-۳۶/۹	۳۶/۹	۶۸/۵



لنگرهای خمشی و نیروهای برشی در انتهای اعضای تیر آزاد شده، (۱)

$$R_{۱۰}=R=۵۳/۰۴\ \ kN\ \ ,\ \ R_{۱۱}=Q=-۸\ \ kN$$

$$x_۱R_{۱۱}+R_{۱۰}=۰\ \Rightarrow\ -۸x_۱+۵۳/۰۴=۰\ \Rightarrow\ x_۱=۶/۶۳$$

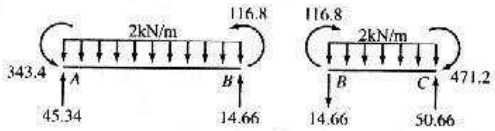
بنابراین لنگرهای خمشی واقعی در انتهای اعضای تیر اصلی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$M_{AB}=-۱۶۱/۱+(۶/۶۳)(-۲۷/۵)=-۳۴۳/۴\ \ kN.m$$

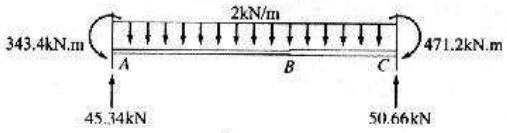
$$M_{BA}=۱۲۷/۸+(۶/۶۳)(-۳۶/۹)=-۱۱۶/۸\ \ kN.m$$

$$M_{BC}=-۱۲۷/۸+(۶/۶۳)(۳۶/۹)=۱۱۶/۸\ \ kN.m$$

$$M_{CB}=۱۷/۱+(۶/۶۳)(۶۸/۵)=۴۷۱/۲\ \ kN.m$$

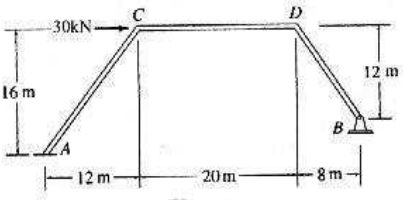


لنگرهای خمشی و نیروهای برشی در انتهای اعضای تیر اصلی



واکنشهای تکیه‌گاهی

۲۷-۱۰ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورید.



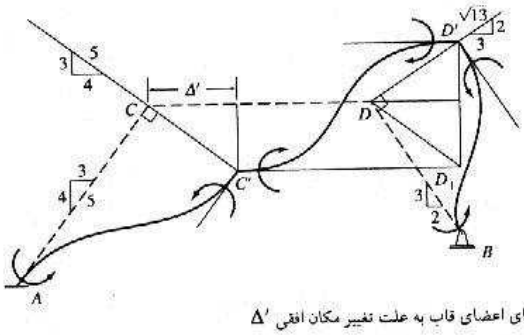
شکل ۲۷-۵

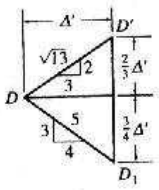
اگر در محل گره C، یک تکیه‌گاه غلتکی قرار داده شود، واکنش تکیه‌گاهی این غلتک $\vec{R} = ۳۰ \quad kN \leftarrow$ خواهد بود. حال غلتک مزبور را حذف کرده و به گره C یک تغییر مکان افقی Δ' اعمال می‌کنیم و نیروی افقی O را که این تغییر مکان دلخواه Δ' را ایجاد می‌کند، به دست می‌آوریم.

$$\Delta_{AC} = CC' = \frac{۵}{۴}\Delta' = ۱/۲۵\Delta' \quad , \quad \Delta_{CD} = D_۱D' = \frac{۲}{۳}\Delta' + \frac{۳}{۴}\Delta' = ۱/۴۱۷\Delta'$$

$$\Delta_{BD} = DD' = \frac{\sqrt{۱۳}}{۳}\Delta' = ۱/۲۰۲\Delta'$$

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = -\frac{۶EI(۱/۲۵\Delta')}{(۲۰)^۲}$$





$$FEM_{CD} = FEM_{DC}$$

$$FEM_{CD} = \frac{۶EI(۱/۴۱۷\Delta')}{(۲۰)^۲}$$

$$FEM_{BD} = FEM_{DB}$$

$$FEM_{BD} = -\frac{۶EI(۱/۲۰۲\Delta')}{(۱۴/۴۲)^۲}$$

لنگرهای گیرداری انتهای اعضای قاب به علت تغییر مکان افقی Δ'

برای ایجاد سهولت در محاسبات فرض می‌کنیم: $FEM_{BD} = FEM_{DB} = -۱۰۰ \quad kN.m$ و پس از تعیین $EI\Delta'$، مقادیر سایر لنگرهای گیرداری ناشی از تغییر مکان Δ' به دست می‌آید.

$$FEM_{AC} = -FEM_{CA} = -۵۴/۱ \quad kN.m \quad , \quad FEM_{CD} = FEM_{DC} = ۶۱/۳ \quad kN.m$$

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۵	۰/۵	۰/۴۹	۰/۵۱	۱
FEM	-۵۴/۱	-۵۴/۱	۶۱/۳	۶۱/۳	-۱۰۰	-۱۰۰
		-۳/۶	-۳/۶	۱۹	۱۹/۷	۱۰۰
	-۱/۸		۹/۵	-۱/۸	۵۰	
		-۴/۸	-۴/۸	-۲۳/۶	-۲۴/۶	
	-۲/۴		-۱۱/۸	-۲/۴		
		۵/۹	۵/۹	۱/۲	۱/۲	
	۳		۰/۶	۳		
		-۰/۳	-۰/۳	-۱/۵	-۱/۵	
	-۰/۲		-۰/۸	-۰/۲		
		۰/۴	۰/۴	۰/۱	۰/۱	
	۰/۲			۰/۲		
				-۰/۱	-۰/۱	
لنگر نهایی	-۵۵/۳	-۵۶/۵	۵۶/۴	۵۵/۲	-۵۵/۲	۰

$$DF_{CA} = DF_{CD} = \frac{\left(\frac{I}{۲۰}\right)}{۲\left(\frac{I}{۲۰}\right)} = ۰/۵$$

$$DF_{DC} = \frac{\left(\frac{I}{۲۰}\right)}{\left(\frac{I}{۲۰}\right) + \left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{I}{۱۴/۴۲}\right)} = ۰/۴۹$$

$$DF_{DB} = \frac{\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{I}{۱۴/۴۲}\right)}{\left(\frac{I}{۲۰}\right) + \left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{I}{۱۴/۴۲}\right)} = ۰/۵۱$$

نتایج مربوط به تحلیل قاب مزبور تحت اثر تغییر مکان جانبی Δ' در جدول مقابل ارائه شده است.

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = ۰ \quad : \quad \vec{S}_A = ۱۱/۱۷ \quad kN \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{BD} = ۰ \quad : \quad \vec{S}_B = ۸/۳۲ \quad kN \leftarrow$$

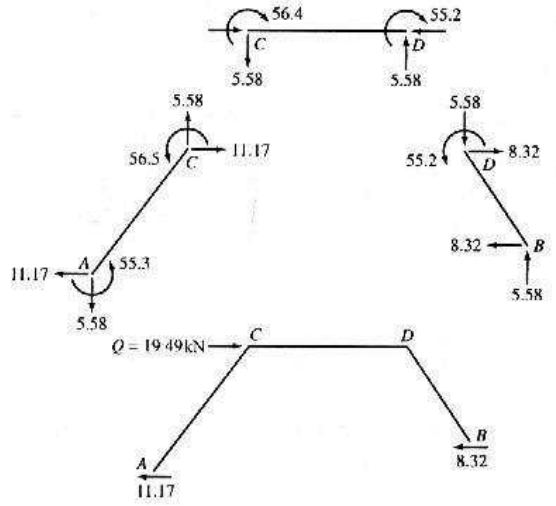
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \quad : \quad Q - ۱۱/۱۷ - ۸/۳۲ = ۰$$

$$\vec{Q} = ۱۹/۴۹ \quad kN \rightarrow$$

$$R_{۱۰} = R = -۳۰ \quad kN$$

$$R_{۱۱} = Q = ۱۹/۴۹ \quad kN$$

$$x_۱R_{۱۱} + R_{۱۰} = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۱۹/۴۹x_۱ - ۳۰ = ۰ \quad \Rightarrow \quad x_۱ = \frac{۳۰}{۱۹/۴۹}$$



بنابراین لنگرهای خمشی در انتهای اعضا به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$M_{AC} = \left[\frac{۳۰}{۱۹/۴۹}\right](-۵۵/۳) = -۸۵/۱ \quad kN.m$$

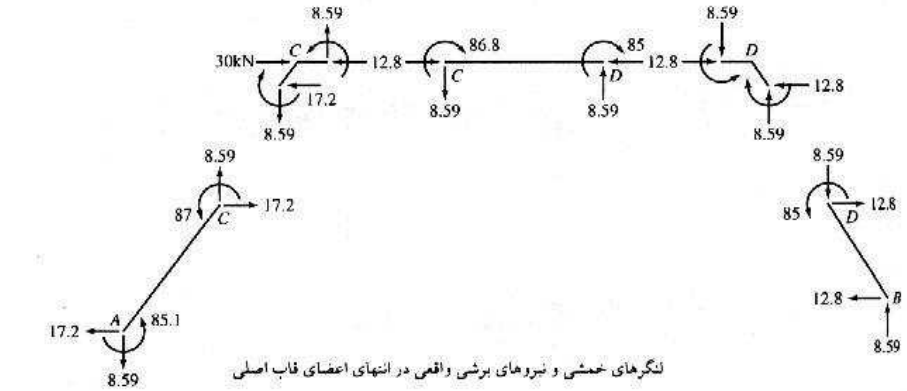
$$M_{CA} = \left[\frac{۳۰}{۱۹/۴۹}\right](-۵۶/۵) = -۸۷ \quad kN.m$$

$$M_{CD} = \left[\frac{۳۰}{۱۹/۴۹}\right](۵۶/۴) = ۸۶/۸ \quad kN.m$$

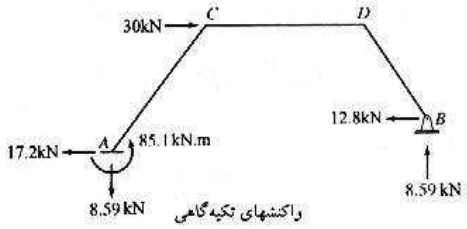
$$M_{DC} = \left[\frac{۳۰}{۱۹/۴۹}\right](۵۵/۲) = ۸۵ \quad kN.m$$

$$M_{DB} = \left[\frac{۳۰}{۱۹/۴۹}\right](-۵۵/۲) = -۸۵ \quad kN.m$$

$$M_{BD} = ۰$$



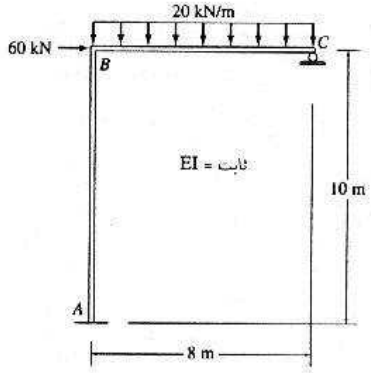
لنگرهای خمشی و نیروهای برشی واقعی در انتهای اعضای قاب اصلی



واکنشهای تکیه‌گاهی

قابهای نشان داده شده در مسایل ۱۰-۲۸ تا ۱۰-۳۴ را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی آنها را به دست آورید.

۲۸-۱۰



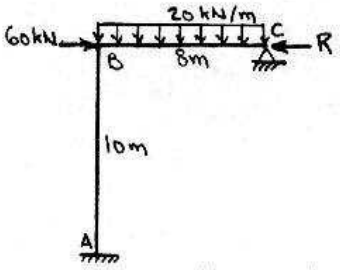
شکل ۱۰-۲۸

تحلیل قاب مقید شده:

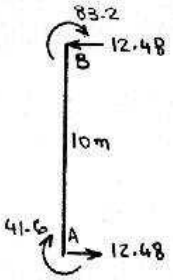
$$FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -\frac{۲۰(۸)^۲}{۱۲} = -۱۰۶/۷ \quad kN.m$$

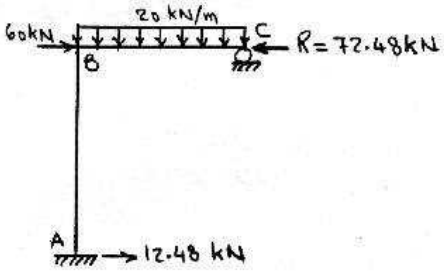
$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{I}{۱۰}\right]}{\left[\frac{I}{۱۰}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۸}\right]} = ۰/۵۲ \quad , \quad DF_{BC} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۸}\right]}{\left[\frac{I}{۱۰}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۸}\right]} = ۰/۴۸$$

	AB	BA	BC	CB
DF		۰/۵۲	۰/۴۸	
FEM			-۱۰۶/۷	۱۰۶/۷
	۵۵/۵	۵۱/۲	-۱۰۶/۷	
	۲۷/۷		-۵۳/۳	
		۲۷/۷	۲۵/۶	
	۱۳/۹			
لنگر نهایی	۴۱/۶	۸۳/۲	-۸۳/۲	۰

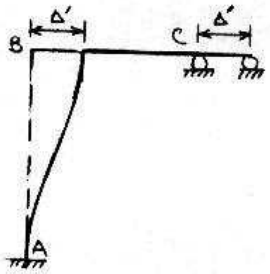


قاب مقید شده، (۰)





فرض می‌کنیم:



قاب تحت اثر تغییر مکان جانبی Δ'، (۱)

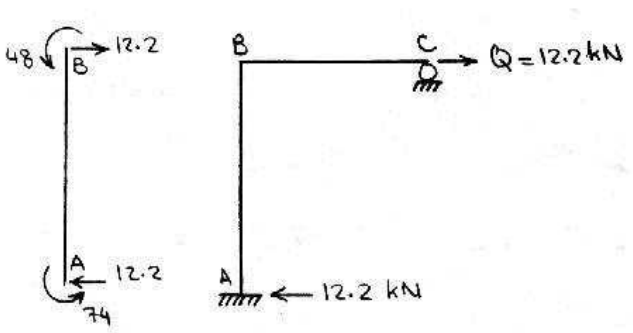
$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = -\frac{۶EI\Delta'}{(۱۰)^۲} \Rightarrow FEM_{AB} = FEM_{BA} = -۱۰۰ \quad kN.m$$

	AB	BA	BC	CB
DF		۰/۵۲	۰/۴۸	
FEM	-۱۰۰	-۱۰۰		
		۵۲	۴۸	
	۲۶			
لنگر نهایی	-۷۴	-۴۸	۴۸	

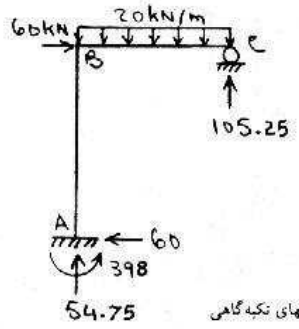
$$R_{۱۰} = R = -۷۲/۴۸ \quad kN \quad , \quad R_{۱۱} = Q = ۱۲/۲ \quad kN$$

$$x_۱ R_{۱۱} + R_{۱۰} = ۰ \Rightarrow ۱۲/۲ x_۱ - ۷۲/۴۸ = ۰ \Rightarrow x_۱ = \left[\frac{۷۲/۴۸}{۱۲/۲}\right]$$

$$M_{AB} = ۴۱/۶ + \left[\frac{۷۲/۴۸}{۱۲/۲}\right](-۷۴) = -۳۹۸ \quad kN.m \quad , \quad M_{BA} = ۸۳/۲ + \left[\frac{۷۲/۴۸}{۱۲/۲}\right](-۴۸) = -۲۰۲ \quad kN.m$$



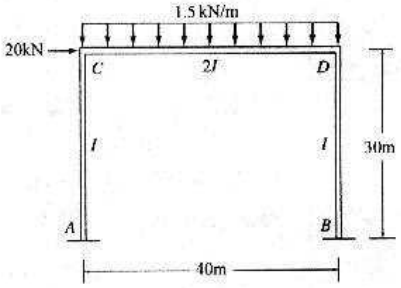
$$M_{BC} = -۸۳/۲ + \left[\frac{۷۲/۴۸}{۱۲/۲}\right](۴۸)$$
$$M_{BC} = ۲۰.۲ \quad kN.m$$
$$M_{CB} = ۰$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

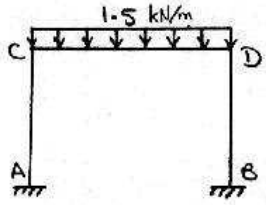
۲۹-۱۰

در سازهٔ نشان داده شده (بدون بار متمرکز) به علت وجود تقارن، درجهٔ آزادی انتقالی جانبی وجود ندارد. بنابراین اگر یک تکیه‌گاه غلتکی در C قرار داده شود، در سازهٔ اصلی واکنش تکیه‌گاهی (R) تکیه‌گاه غلتکی مزبور برابر خواهد بود با:



E = ثابت

شکل ۲۹-۱۰



$$\vec{R} = ۲۰ \quad kN \leftarrow$$

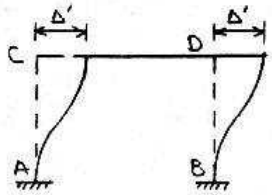
$$DF_{CA} = DF_{DB} = \frac{\left[\frac{I}{۳۰}\right]}{\left[\frac{I}{۳۰}\right] + \left[\frac{۲I}{۲۰}\right]} = ۰/۴$$

$$DF_{CD} = DF_{DC} = \frac{\left[\frac{۲I}{۴۰}\right]}{\left[\frac{I}{۳۰}\right] + \left[\frac{۲I}{۴۰}\right]} = ۰/۶ \quad , \quad FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{۱/۵(۴۰)^۲}{۱۲} = -۲۰۰ \quad kN.m$$

روند توزیع لنگر سازهٔ متقارن در جدول مقابل نشان داده شده است.

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۴	۰/۶	۰/۶	۰/۴	
FEM	۰	۰	-۲۰۰	۲۰۰	۰	۰
		۸۰	۱۲۰	-۱۲۰	-۸۰	
	۴۰		-۶۰	۶۰		-۴۰
		۲۴	۳۶	-۳۶	-۲۴	
	۱۲		-۱۸	۱۸		-۱۲
		۷/۲	۱۰/۸	-۱۰/۸	-۷/۲	
	۳/۶		-۵/۴	۵/۴		-۳/۶
		۲/۲	۳/۲	-۳/۲	-۲/۲	
	۱/۱		-۱/۶	۱/۶		-۱/۱
		۰/۶	۰/۱	-۰/۱	-۰/۶	
	۰/۳		-۰/۵	۰/۵		-۰/۳
		۰/۲	۰/۳	-۰/۳	-۰/۲	
	۰/۱		-۰/۲	۰/۲		-۰/۱
		۰/۱	۰/۱	-۰/۱	-۰/۱	
	۵۷/۱	۱۱۴/۳	-۱۱۴/۳	۱۱۴/۳	-۱۱۴/۳	-۵۷/۱

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۴	۰/۶	۰/۶	۰/۴	
FEM	-۱۰۰	-۱۰۰	۰	۰	-۱۰۰	-۱۰۰
		۴۰	۶۰	۶۰	۴۰	
	۲۰		۳۰	۳۰		۲۰
		-۱۲	-۱۸	-۱۸	-۱۲	
	-۶		-۹	-۹		-۶
		۳/۶	۵/۴	۵/۴	۳/۶	
	۱/۸		۲/۷	۲/۷		۱/۸
		-۱/۱	-۱/۶	-۱/۶	-۱/۱	
	-۰/۶		-۰/۸	-۰/۸		-۰/۶
		۰/۳	۰/۵	۰/۵	۰/۳	
	۰/۲		۰/۳	۰/۳		۰/۲
		-۰/۱	-۰/۲	-۰/۲	-۰/۱	
	-۸۲/۶	-۶۹/۳	۶۹/۳	۶۹/۳	-۶۹/۳	-۸۲/۶



سازهٔ آزاد شده، (۱)

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = FEM_{BD}$$

$$FEM_{AC} = FEM_{DB} = \frac{۶EI\Delta'}{(۳۰)^۲}$$

فرض می‌کنیم:

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = -۱۰۰ \quad kN.m$$

$$FEM_{BD} = FEM_{DB} = -۱۰۰ \quad kN.m$$

$$R_{۱۰} = R = -۲۰ \quad kN$$

$$R_{۱۱} = Q = ۱۰/۲۶ \quad kN$$

$$x_۱ R_{۱۱} + R_{۱۰} = ۰$$

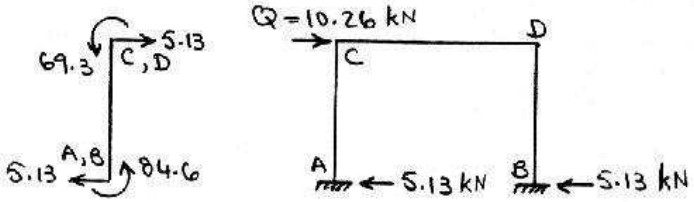
$$۱۰/۲۶ x_۱ - ۲۰ = ۰$$

$$x_۱ = \frac{۲۰}{۱۰/۲۶}$$

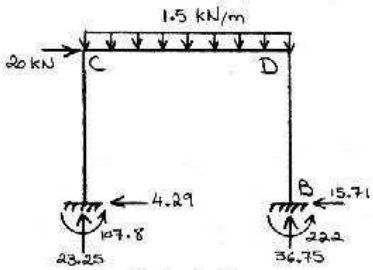
$$M_{AC} = ۵۷/۱ + \left[\frac{۲۰}{۱۰/۲۶}\right](-۸۴/۶) = -۱۰۷/۸ \quad kN.m \quad , \quad M_{CA} = ۱۱۴/۳ + \left[\frac{۲۰}{۱۰/۲۶}\right](-۶۹/۳) = -۲۰/۸ \quad kN.m$$

$$M_{DC} = ۱۱۴/۳ + \left[\frac{۲۰}{۱۰/۲۶}\right](۶۹/۴) = ۲۴۹/۴ \quad kN.m \quad , \quad M_{CD} = -۱۱۴/۳ + \left[\frac{۲۰}{۱۰/۲۶}\right](۶۹/۳) = ۲۰/۸ \quad kN.m$$

$$M_{DB} = -۱۱۴/۳ + \left[\frac{۲۰}{۱۰/۲۶}\right](-۶۹/۳) = -۲۴۹/۴ \quad kN.m \quad , \quad M_{BD} = -۵۷/۱ + \left[\frac{۲۰}{۱۰/۲۶}\right](-۸۴/۶) = -۲۲۲ \quad kN.m$$



نیروهای برشی و لنگرهای خمشی در انتهای ستونهای سازهٔ آزاد شده، (۱)

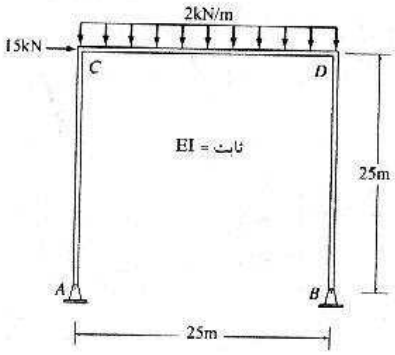


واکنشهای تکیه‌گاهی

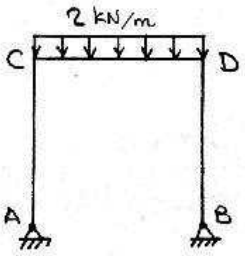
۳۰-۱۰

در سازهٔ نشان داده شده (بدون بار متمرکز) به علت وجود تقارن، درجهٔ آزادی انتقالی جانبی وجود ندارد. بنابراین اگر یک تکیه‌گاه غلتکی در C قرار داده شود، در سازهٔ اصلی واکنشهای تکیه‌گاهی (R) تکیه‌گاه غلتکی مزبور برابر خواهد بود با:

$\vec{R} = ۱۵ \quad kN \leftarrow$



شکل ۳۰-۱۰



$$DF_{DB} = DF_{CA} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۲۵}\right]}{\left[\frac{I}{۲۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۲۵}\right]}$$

$$DF_{DB} = ۰/۴۲۹$$

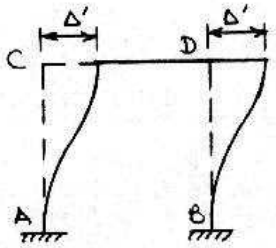
$$DF_{CD} = DF_{DC} = \frac{\left[\frac{I}{۲۵}\right]}{\left[\frac{I}{۲۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۲۵}\right]} = ۰/۵۷۱$$

$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{۲(۲۵)^۲}{۱۲} = -۱۰۴/۲ \quad kN.m$$

روند توزیع لنگر سازهٔ مقابل در جدول مقابل نشان داده شده است.

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۴۲۹	۰/۵۷۱	۰/۵۷۱	۰/۴۲۹	
FEM	۰	۰	-۱۰۴/۲	۱۰۴/۲	۰	۰
		۴۴/۷	۵۹/۵	-۵۹/۵	-۴۴/۷	
		۱۲/۸	۲۹/۸ ۱۷	-۱۷	-۱۲/۸	
		۳/۶	-۸/۵ ۴/۹	-۴/۹	-۳/۶	
		۱/۱	۲/۵ ۱/۴	-۱/۴	-۱/۱	
		۰/۳	-۰/۷ ۰/۴	-۰/۴	-۰/۳	
		۰/۱	-۰/۲ ۰/۱	-۰/۱	-۰/۱	
	۰	۶۲/۶	-۶۲/۶	۶۲/۶	-۶۲/۶	۰

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۴۲۹	۰/۵۷۱	۰/۵۷۱	۰/۴۲۹	
FEM	-۱۰۰	-۱۰۰	۰	۰	-۱۰۰	-۱۰۰
	۱۰۰	۴۲/۹	۵۷/۱	-۵۷/۱		۱۰۰
		۵۰	۲۸/۶	-۲۸/۶	۵۰	
		-۳۳/۷	-۴۴/۹	۴۴/۹	-۳۳/۷	
		۹/۷	-۲۲/۵ ۱۲/۸	-۱۲/۸	۹/۷	
		-۲/۷	۶/۴ -۳/۷	۳/۷	-۲/۷	
		۰/۸	-۱/۹ ۱/۱	-۱/۱	۰/۸	
		-۰/۳	۰/۶ -۰/۳	۰/۳	-۰/۳	
		۰/۱	-۰/۲ ۰/۱	-۰/۱	۰/۱	
	۰	-۳۳/۲	۳۳/۲	-۳۳/۲	-۳۳/۲	۰



$$FEM_{AC}=FEM_{CA}=FEM_{BD}$$

$$FEM_{AC}=FEM_{DB}=\frac{6EI\Delta'}{(25)^2}$$

فرض می‌کنیم:

$$FEM_{AC}=FEM_{CA}=-100 \quad kN.m$$

$$FEM_{BD}=FEM_{DB}=-100 \quad kN.m$$

$$R_{10}=R=-15 \quad kN$$

$$R_{11}=Q=2/66 \quad kN$$

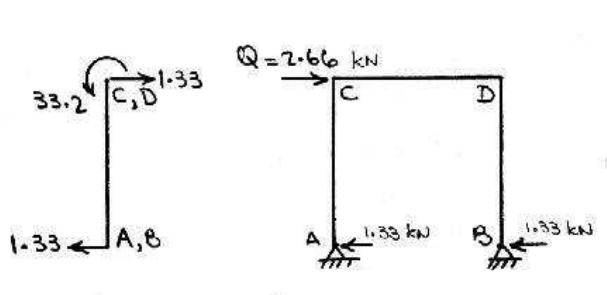
$$x_1R_{11}+R_{10}=0$$

$$2/66x_1-15=0 \Rightarrow x_1=\frac{15}{2/66}$$

$$M_{CA}=62/6+\left[\frac{15}{2/66}\right](-33/2)=-124/6 \quad kN.m \quad , \quad M_{CD}=-62/6+\left[\frac{15}{2/66}\right](33/2)=124/6 \quad kN.m$$

$$M_{DC}=62/6+\left[\frac{15}{2/66}\right](33/2)=249/8 \quad kN.m \quad , \quad M_{DB}=-62/6+\left[\frac{15}{2/66}\right](-33/2)=-249/8 \quad kN.m$$

$$M_{AC}=M_{BD}=0$$

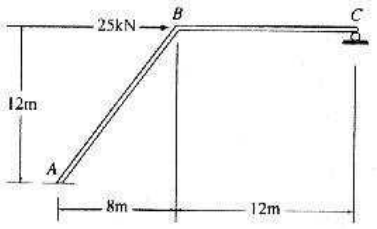


واکنشهای تکیه‌گاهی

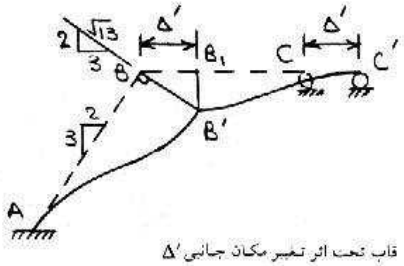
۳۱-۱۰

اگر تکیه‌گاه غلتکی در گره B قرار داده شود، واکنش افقی تکیه‌گاه مزبور:

$$\vec{R} = ۲۵ \quad kN \leftarrow$$



EI = ثابت



قاب تحت اثر تغییر مکان جانبی Δ'

شکل ۳۱-۱۰

	AB	BA	BC	CB
DF		۰/۵۲۶	۰/۴۷۴	
FEM	-۱۰۰	-۱۰۰	۸۰/۱	۸۰/۱
		۱۰/۵	۹/۴	-۸۰/۱
	۵/۳		-۴۰/۱	
		۲۱/۱	۱۹	
	۱۰/۶			
	-۸۴/۱	-۶۸/۴	۶۸/۲	۰

$$\Delta_{AB} = BB' = \frac{\sqrt{۱۳}}{۳}\Delta' = ۱/۲۰۲\Delta' \quad , \quad \Delta_{BC} = B_۱B' = \frac{۲}{۳}\Delta' = ۰/۶۶۷\Delta'$$

$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = \frac{۶EI(۱/۲۰۲\Delta')}{(۱۴/۴۲)^۲}$$

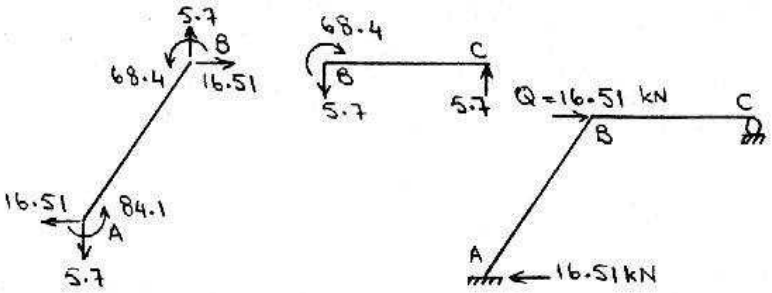
$$FEM_{BC} = FEM_{CB} = -\frac{۶EI(۰/۶۶۷\Delta')}{(۱۲)^۲}$$

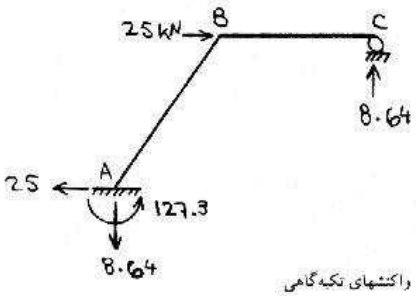
اگر فرض کنیم: $FEM_{AB} = FEM_{BA} = -۱۰۰ \quad kN.m$ در این صورت $EI\Delta' = ۲۸۸۳/۲$ و با جایگزینی مقدار $EI\Delta'$ به دست می‌آید:

$$FEM_{BC} = FEM_{CB} = ۸۰/۱ \quad kN.m$$

$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{I}{۱۴/۴۲}\right]}{\left[\frac{I}{۱۴/۴۲}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۱۲}\right]} = ۰/۵۲۶$$

$$DF_{BC} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۱۲}\right]}{\left[\frac{I}{۱۴/۴۲}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۱۲}\right]} = ۰/۴۷۴$$





واکنشهای تکیه‌گاهی

$$R_{1\circ} = R = -۲۵ \ kN \quad , \quad R_{11} = Q = ۱۶/۵۱ \ kN$$

$$x_1 R_{11} + R_{1\circ} = \circ \ \Rightarrow \ ۱۶/۵۱ x_1 - ۲۵ = \circ \ \Rightarrow \ x_1 = \frac{۲۵}{۱۶/۵۱}$$

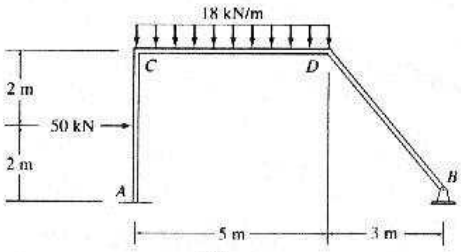
$$M_{AB} = \left[\frac{۲۵}{۱۶/۵۱}\right](-۸۴/۱) = -۱۲۷/۳ \ kN.m$$

$$M_{BA} = \left[\frac{۲۵}{۱۶/۵۱}\right](-۶۸/۴) = -۱۰۳/۶ \ kN.m$$

$$M_{BC} = \left[\frac{۲۵}{۱۶/۵۱}\right](۶۸/۴) = ۱۰۳/۶ \ kN.m$$

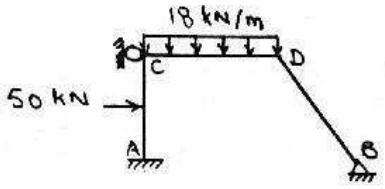
$$M_{CB} = \circ$$

۱۰-۳۲



EI = ثابت

شکل ۱۰-۳۲



قاب مقید شده، (۰)

$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{۱۸(۵)^۲}{۱۲} = -۳۷/۵ \ kN.m$$

$$FEM_{AC} = -FEM_{CA} = -\frac{۵۰(۴)}{۸} = -۲۵ \ kN.m$$

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۵۵۶	۰/۴۴۴	۰/۵۷۱	۰/۴۲۹	
FEM	-۲۵	۲۵	-۳۷/۵	۳۷/۵	۰	۰
		۷	۵/۵	-۲۱/۴	-۱۶/۱	
	۳/۵		-۱۰/۷	۲/۸		
		۵/۹	۴/۸	-۱/۶	-۱/۲	
	۳		-۰/۸	۲/۴		
		۰/۴	۰/۴	-۱/۲	-۱/۰	
	۰/۲		-۰/۷	۰/۲		
		۰/۴	۰/۳	-۰/۱	-۰/۱	
	۰/۲			۰/۲		
				-۰/۱	-۰/۱	
	-۱۸/۱	۳۸/۷	-۳۸/۷	۱۸/۵	-۱۸/۵	۰

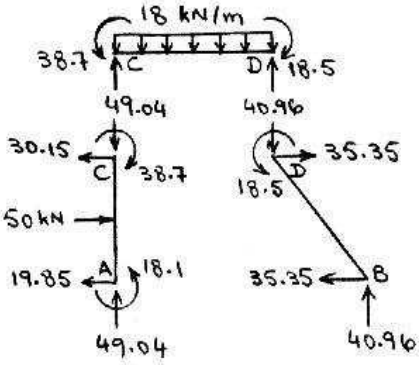
$$DF_{CA} = \frac{\left[\frac{I}{۴}\right]}{\left[\frac{I}{۴}\right] + \left[\frac{I}{۵}\right]} = ۰/۵۵۶$$

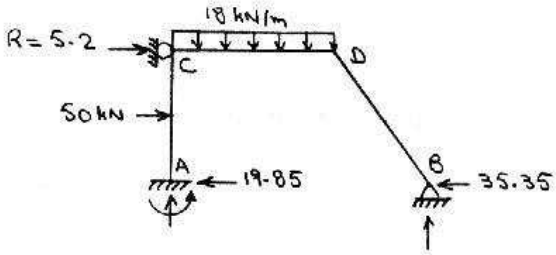
$$DF_{CD} = \frac{\left[\frac{I}{۵}\right]}{\left[\frac{I}{۴}\right] + \left[\frac{I}{۵}\right]} = ۰/۴۴۴$$

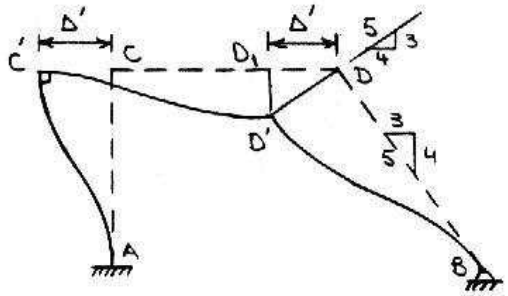
$$DF_{DC} = \frac{\left[\frac{I}{۵}\right]}{\left[\frac{I}{۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right]} = ۰/۵۷۱$$

$$DF_{DB} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right]}{\left[\frac{I}{۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right]} = ۰/۴۲۹$$

روند توزیع لنگر در سازهٔ مقید شده در جدول مقابل نشان داده شده است.







$$\Delta_{AC} = \Delta' \quad ; \quad \Delta_{CD} = \frac{3}{4}\Delta' = ۰/۷۵\Delta'$$

$$\Delta_{BD} = \frac{5}{4}\Delta' = ۱/۲۵\Delta'$$

فرض می‌کنیم که:

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = \frac{۶EI\Delta'}{(۴)^۲} = ۱۰۰ \quad kN.m$$

$$EI\Delta' = ۲۶۶/۷$$

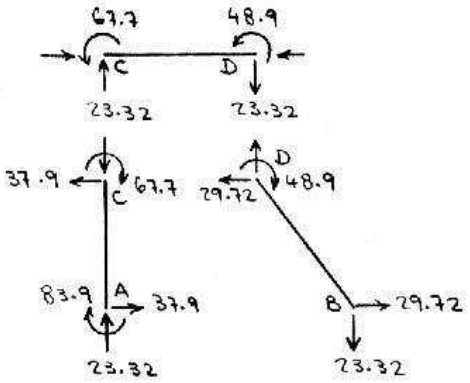
$$FEM_{CD} = FEM_{DC} = -\frac{۶EI(۰/۷۵\Delta')}{(۵)^۲} = -۴۸ \quad kN.m$$

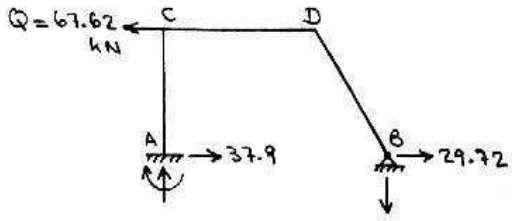
$$FEM_{BD} = FEM_{DB} = \frac{۶EI(۱/۲۵\Delta')}{(۵)^۲} = ۸۰ \quad kN.m$$

قاب تحت اثر تغییر مکان جانبی Δ' در گره C

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۵۵۶	۰/۴۴۴	۰/۵۷۱	۰/۴۲۹	
FEM	۱۰۰	۱۰۰	-۴۸	-۴۸	۸۰	۸۰
		-۲۸/۹	-۲۳/۱	-۱۸/۳	-۱۳/۷	-۸۰
	-۱۴/۵		-۹/۲	-۱۱/۶	-۴۰	
		۵/۱	۴/۱	۲۹/۵	۲۲/۱	
	۲/۶		۱۴/۸	۲/۱		
		-۸/۲	-۶/۶	-۱/۲	-۰/۹	
	-۴/۱		-۰/۶	-۳/۳		
		۰/۳	۰/۳	۱/۹	۱/۲	
	۰/۲		۱/۰	۰/۲		
		-۰/۶	-۰/۴	-۰/۱	-۰/۱	
	-۰/۳			-۰/۲		
				۰/۱	۰/۱	
	۸۳/۹	۶۷/۷	-۶۷/۷	-۴۸/۹	۴۸/۹	۰

با توجه به نتایج تحلیل قاب آزاد شده تحت اثر تغییر مکان جانبی Δ' می‌توان مقدار Q را به کمک شکلهای زیر به دست آورد.





$R_{1\circ} = R = ۵/۲ \ \ kN \ \ , \ \ R_{11} = Q = -۶۷/۶۲ \ \ kN$

$x_1 R_{11} + R_{1\circ} = \circ \ \Rightarrow \ ۶۷/۶۲ x_1 - ۵/۲ = \circ \ \Rightarrow \ x_1 = \dfrac{۵/۲}{۶۷/۶۲}$

$M_{AC} = -۱۸/۱ + \left[\dfrac{۵/۲}{۶۷/۶۲}\right](۸۳/۹) = -۱۱/۷ \ \ kN.m$

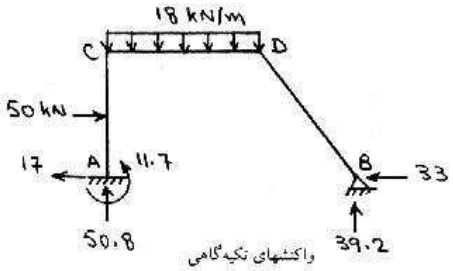
$M_{CA} = ۳۸/۷ + \left[\dfrac{۵/۲}{۶۷/۶۲}\right](۶۷/۷) = ۴۳/۹ \ \ kN.m$

$M_{CD} = -۳۸/۷ + \left[\dfrac{۵/۲}{۶۷/۶۲}\right](-۶۷/۷) = -۴۳/۹ \ \ kN.m$

$M_{DC} = ۱۸/۵ + \left[\dfrac{۵/۲}{۶۷/۶۲}\right](-۴۸/۹) = ۱۴/۷ \ \ kN.m$

$M_{DB} = -۱۸/۵ + \left[\dfrac{۵/۲}{۶۷/۶۲}\right](۴۸/۹) = -۱۴/۷ \ \ kN.m$

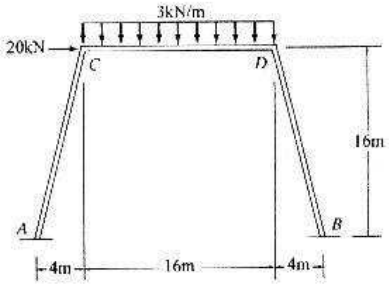
$M_{BD} = \circ$



واکنشهای تکیه‌گاهی

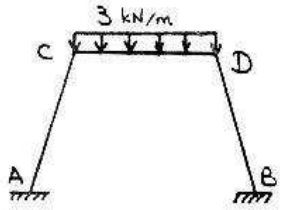
۱۰-۳۳

با توجه به ویژگی تقارن سازه، زمانی که سازه تنها تحت تأثیر بار گسترده یکنواخت نشان داده شده قرار دارد، می‌توان نتیجه گرفت که در چنین حالتی Δ' (درجهٔ آزادی انتقالی جانبی) وجود ندارد. بنابراین اگر یک تکیه‌گاه غلتکی در نقطهٔ C سازهٔ اصلی قرار گیرد، واکنش آن برابر خواهد بود با:



EI = ثابت

شکل ۱۰-۳۳



$\vec{R} = ۲۰ \ \ kN \leftarrow$

$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\dfrac{۳(۱۶)^۲}{۱۲} = -۶۴ \ \ kN.m$

$DF_{CA} = \dfrac{\left[\dfrac{I}{۱۶/۴۹}\right]}{\left[\dfrac{I}{۱۶/۴۹}\right] + \left[\dfrac{I}{۱۶}\right]} = ۰/۴۹۲$

$DF_{CD} = DF_{DC} = \dfrac{\left[\dfrac{I}{۱۶}\right]}{\left[\dfrac{I}{۱۶/۴۹}\right] + \left[\dfrac{I}{۱۶}\right]} = ۰/۵۰۸ \ \ , \ \ DF_{DB} = \dfrac{\left[\dfrac{I}{۱۶/۴۹}\right]}{\left[\dfrac{I}{۱۶/۴۹}\right] + \left[\dfrac{I}{۱۶}\right]} = ۰/۴۹۲$

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۴۹۲	۰/۵۰۸	۰/۵۰۸	۰/۴۹۲	
FEM	۰	۰	-۶۴	۶۴	۰	۰
		۳۱/۵	۳۲/۵	-۳۲/۵	-۳۱/۵	
	۱۵/۸		-۱۶/۳	۱۶/۳		-۱۵/۸
		۸	۸/۳	-۸/۳	-۸	
	۴		-۴/۲	۴/۲		-۴
		۲/۱	۲/۱	-۲/۱	-۲/۱	
	۱/۱		-۱/۱	۱/۱		-۱/۱
		۰/۵	۰/۶	-۰/۶	-۰/۵	
	۰/۳		-۰/۳	۰/۳		-۰/۳
		۰/۱	۰/۲	۰/۲	-۰/۱	
	۲۱/۲	۴۲/۲	-۴۲/۲	۴۲/۲	-۴۲/۲	-۲۱/۲

در جدول مقابل روند توزیع لنگر در قاب متقارن (تحت اثر بار گستردهٔ تنها) ارائه شده است.

$$\Delta_{AC} = CC' = \frac{\sqrt{۱۷}}{۴}\Delta' = ۱/۰۳۱\Delta'$$

$$\Delta_{CD} = D_۱D' = ۲\left[\frac{۱}{۴}\right]\Delta' = ۰/۵\Delta'$$

$$\Delta_{BD} = DD' = \frac{\sqrt{۱۷}}{۴}\Delta' = ۱/۰۳۱\Delta'$$

اگر فرض کنیم:

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = -\frac{۶EI(۱/۰۳۱\Delta')}{(۱۶/۴۹)^۲}$$

$$FEM_{AC} = -۱۰۰ \ kN.m$$

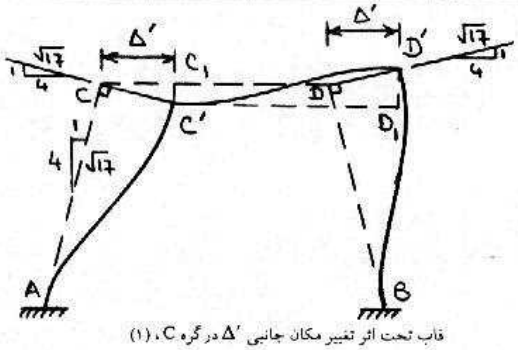
در ایـــن صـــورت: $EI\Delta' = ۴۳۹۵/۷$ و بـا جایگزینی این مقدار در روابط سایر FEM ها به نتایج زیر می‌رسیم.

$$FEM_{BD} = FEM_{DB} = -\frac{۶EI(۱/۰۳۱\Delta')}{(۱۶/۴۹)^۲}$$

$$FEM_{BD} = -۱۰۰ \ kN.m$$

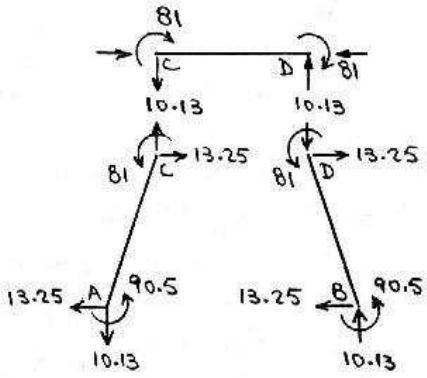
$$FEM_{CD} = FEM_{DC} = -\frac{۶EI(۰/۵\Delta')}{(۱۶)^۲}$$

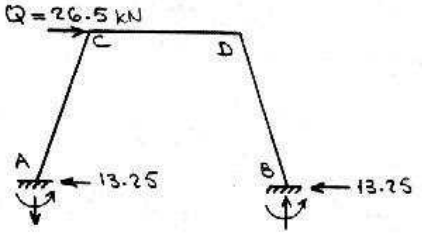
$$FEM_{CD} = ۵۱/۵ \ kN.m$$



قاب تحت اثر تغییر مکان جانبی Δ' در گره C، (۱)

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		۰/۴۹۲	۰/۵۰۸	۰/۵۰۸	۰/۴۹۲	
FEM	-۱۰۰	-۱۰۰	۵۱/۵	۵۱/۵	-۱۰۰	-۱۰۰
		۲۳/۹	۲۴/۶	۲۴/۶	۲۳/۹	
	۱۲		۱۲/۳	۱۲/۳		۱۲
		-۶/۱	-۶/۲	-۶/۲	-۶/۱	
	-۳/۱		-۳/۱	-۳/۱		-۳/۱
		۱/۵	۱/۶	۱/۶	۱/۵	
	۰/۸		۰/۸	۰/۸		۰/۸
		-۰/۴	-۰/۴	-۰/۴	-۰/۴	
	-۰/۲		-۰/۲	-۰/۲		-۰/۲
		۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	
	-۹۰/۵	-۸۱	۸۱	۸۱	-۸۱	-۹۰/۵





$$R_{10} = R = -20 \ kN \ , \ R_{11} = Q = 26/5 \ kN$$

$$x_1 R_{11} + R_{10} = 0 \Rightarrow 26/5 x_1 - 20 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{20}{26/5}$$

$$M_{AC} = 21/2 + \left[\frac{20}{26/5}\right](-90/5) = -47/1 \ kN.m$$

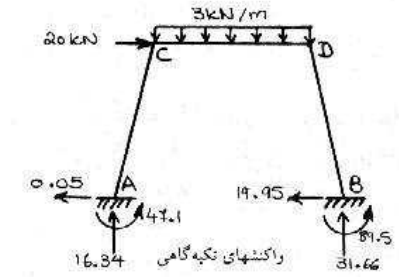
$$M_{CA} = 42/2 + \left[\frac{20}{26/5}\right](-81) = -18/9 \ kN.m$$

$$M_{CD} = -42/2 + \left[\frac{20}{26/5}\right](81) = 18/9 \ kN.m$$

$$M_{DC} = 42/2 + \left[\frac{20}{26/5}\right](81) = 103/3 \ kN.m$$

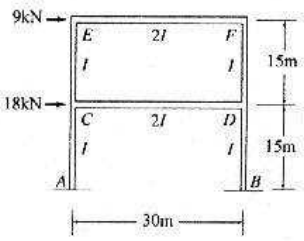
$$M_{DB} = -42/2 + \left[\frac{20}{26/5}\right](-81) = -103/3 \ kN.m$$

$$M_{BD} = -21/2 + \left[\frac{20}{26/5}\right](-90/5) = -89/5 \ kN.m$$



۳۴-۱۰

با توجه به این که بر سازهٔ مورد نظر تنها دو بار متمرکز گرهی اعمال می‌شود و امتداد اعمال این بارها نیز در راستای تغییر مکانهای جانبی گره‌های C و E است، می‌توان نتیجه گرفت که اگر دو تکیه‌گاه غلتکی در گره‌های C و E قرار دهیم به طوری که هر دو درجهٔ آزادی انتقالی قاب صفر شوند، واکنش تکیه‌گاههای غلتکی مزبور برابر خواهد بود با:



E = ثابت

شکل ۱۰-۳۴

$$R_C = R_{10} = -18 \ kN \ , \ R_E = R_{20} = -9 \ kN$$

$$DF_{EC} = DF_{EP} = DF_{FE} = DF_{FD} = \frac{\left[\frac{I}{15}\right]}{\left[\frac{I}{15}\right] + \left[\frac{2I}{30}\right]} = \frac{1}{2}$$

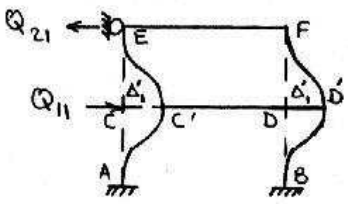
$$DF_{CD} = DF_{DC} = \frac{\left[\frac{2I}{30}\right]}{\left[\frac{I}{15}\right] + \left[\frac{I}{15}\right] + \left[\frac{2I}{30}\right]} = \frac{1}{3}$$

$$DF_{CE} = DF_{CA} = \frac{\left[\frac{I}{15}\right]}{\left[\frac{I}{15}\right] + \left[\frac{I}{15}\right] + \left[\frac{2I}{30}\right]}$$

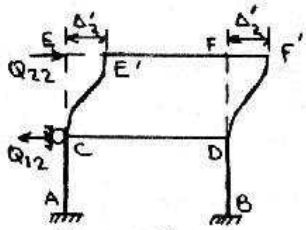
$$DF_{CE} = \frac{1}{3}$$

$$DF_{DF} = DF_{DB} = \frac{\left[\frac{I}{15}\right]}{\left[\frac{I}{15}\right] + \left[\frac{I}{15}\right] + \left[\frac{2I}{30}\right]}$$

$$DF_{DF} = \frac{1}{3}$$



قاب دارای درجهٔ آزادی انتقالی Δ'_1



قاب دارای درجهٔ آزادی انتقالی Δ'_2

در قاب با درجهٔ آزادی انتقالی Δ'_1:

$$FEM_{AC}=FEM_{CA}=-\frac{6EI\Delta'_1}{(15)^2}=-100\ \ kN.m\quad,\quad FEM_{BD}=FEM_{DB}=-\frac{6EI\Delta'_1}{(15)^2}=-100\ \ kN.m$$

$$FEM_{EC}=FEM_{CE}=\frac{6EI\Delta'_1}{(15)^2}=100\ \ kN.m\quad,\quad FEM_{DF}=FEM_{FD}=\frac{6EI\Delta'_1}{(15)^2}=100\ \ kN.m$$

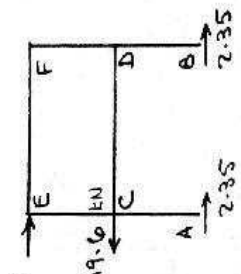
در قاب با درجهٔ آزادی انتقالی Δ'_2:

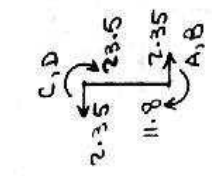
$$FEM_{CE}=FEM_{EC}=-\frac{6EI\Delta'_2}{(15)^2}=-100\ \ kN.m\quad,\quad FEM_{DF}=FEM_{FD}=-\frac{6EI\Delta'_2}{(15)^2}=-100\ \ kN.m$$

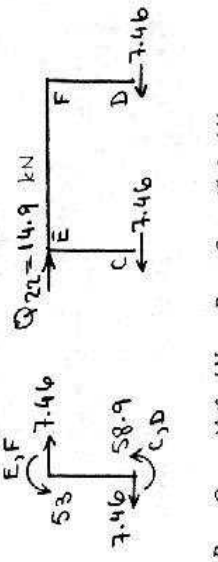
جدول توزیع لنگر مربوط به قاب با درجهٔ آزادی Δ'_2

	AC	CA	CD	CE	EC	EF	FE	FD	DF	DC	DB	BD
		1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	
FEM	0	33/3		-100	-100	0	0	-100	33/3	0	0	
DF					50	50	50	50	33/3			
COM	16/7			25	25	25	25	16/7	25	16/7	33/4	16/7
		-13/9	33/4	-13/9	-20/9	-20/9	-20/9	-20/9	-13/9	-13/9	-13/9	
DF					-10/5	-10/5	-10/5	-7	-10/5	-7		-7
COM	-7		16/7	-10/5	-7	-10/5	-10/5					
		5/8		5/8	8/8	8/8	8/8	8/8	5/8	5/8	5/8	
DF			-13/9									2/9
COM	2/9			4/4	4/4	4/4	4/4	2/9	4/4	2/9	-2/4	
		-2/4	2/9	-2/4	-3/7	-3/7	-3/7	-3/7	-2/4	-2/4	-2/4	
DF					-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/9	-1/2		-1/2
COM	-1/2		-2/4	-1/9	-1/9	-1/9	-1/9					
		1/0		1/0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/0	1/0	1/0	
DF			-1/2									0/5
COM	0/5			0/8	0/8	0/8	0/8	0/5	0/8	0/5	-0/4	
		-0/4	0/5	-0/4	-0/7	-0/7	-0/7	-0/7	-0/4	-0/4	-0/4	
DF					-0/2	-0/2	-0/2	-0/2	-0/2	-0/2		-0/2
COM	-0/2		-0/4	-0/2	-0/2	-0/2	-0/2					
		0/2		0/2	0/3	0/3	0/3	0/3	0/2	0/2	0/2	
DF			-0/2									0/1
COM	0/1			0/1	0/1	0/2	0/2	0/1	0/2	0/1	-0/1	
		-0/1	0/1	-0/1	-0/2	-0/2	-0/2	-0/2	-0/1	-0/1		
	11/8	33/5	25/4	-58/9	-53	52/8	52/8	-53	-58/9	35/4	23/5	11/8

با توجه به شکلهای فوق خواهیم داشت:

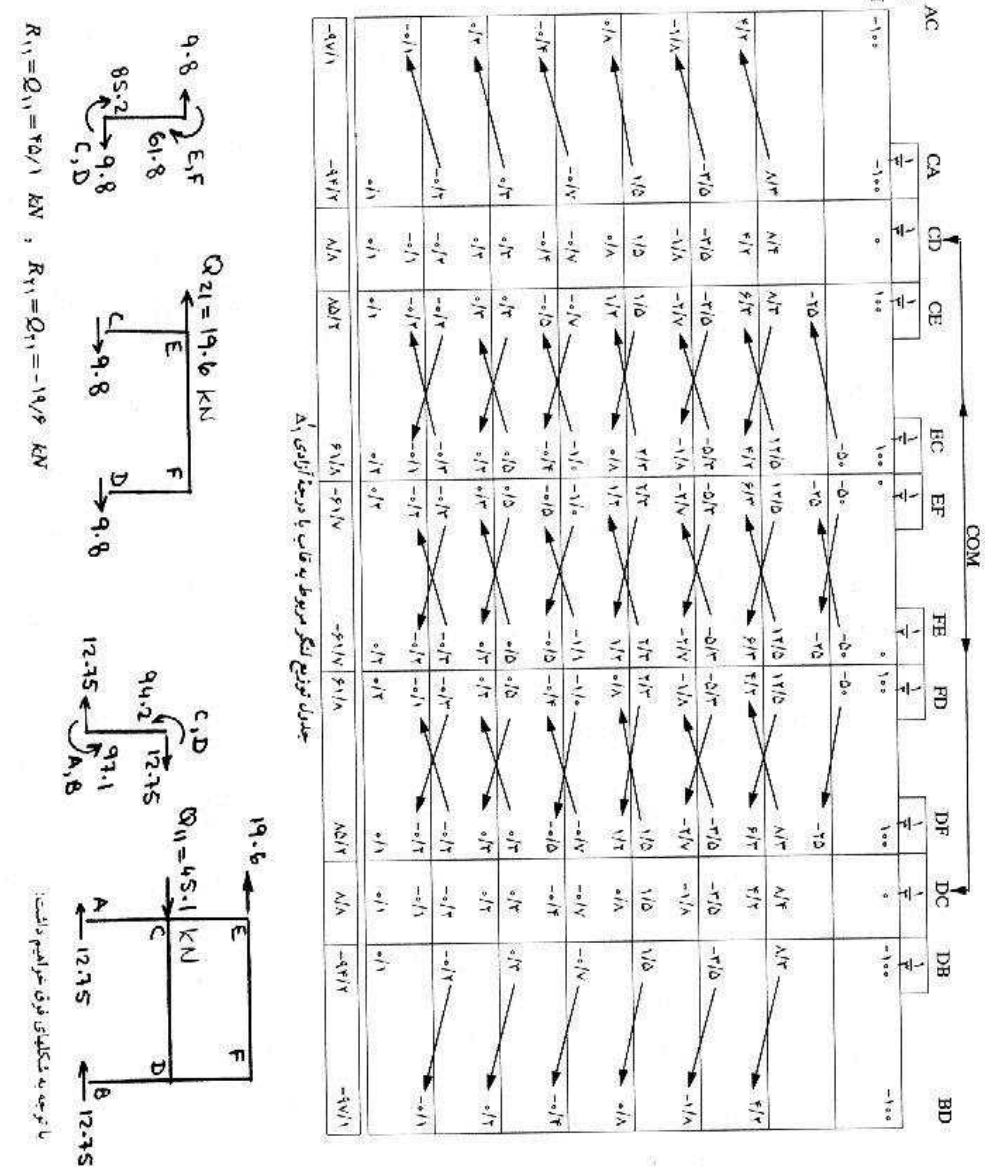






$R_{12}=Q_{12}=-19/6\ \ kN\quad,\quad R_{22}=Q_{22}=14/9\ \ kN$

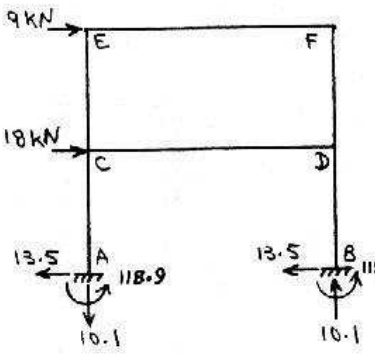
در ادامهٔ حل مسئله، قاب با درجهٔ آزادی Δ'_1 را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل می‌کنیم و در نهایت نتایج هر دو تحلیل را به کمک ضرایب X_1 و X_2 حاصل با هم ترکیب می‌کنیم.



جدول توزیع لنگر مربوط به قاب با درجهٔ آزادی Δ'_1

با توجه به شکلهای فوق خواهیم داشت:

$R_{11} = Q_{11} = 45/1$ kN ، $R_{21} = Q_{21} = -19/6$ kN



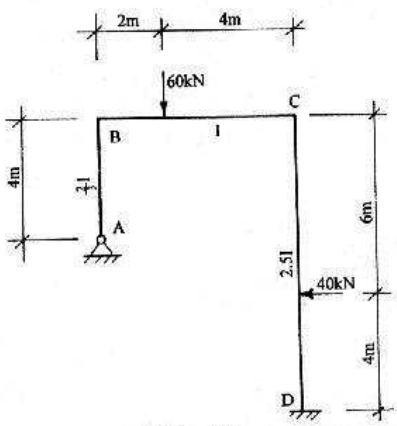
واکنشهای تکیه‌گاهی

$$\begin{cases} x_1R_{11}+x_2R_{12}+R_{1P}=0 \\ x_1R_{21}+x_2R_{22}+R_{2P}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴۵/۱x_1-۱۹/۶x_2=۱۸ \\ -۱۹/۶x_1+۱۴/۹x_2=۹ \end{cases}$$

از حل دستگاه معادلات فوق به دست می‌آید: $x_1=۱/۵۴۵$, $x_2=۲/۶۳۶$

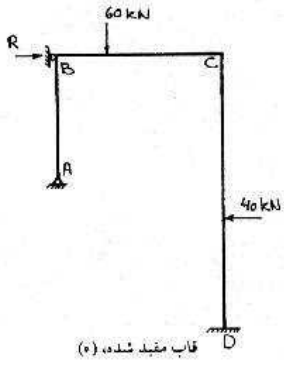
$$M_{AC}=M_{BD}=۲/۶۳۶(۱۱/۸)+۱/۵۴۵(-۹۷/۱)=-۱۱۸/۹ \quad kN.m$$
$$M_{CD}=M_{DC}=۲/۶۳۶(۳۵/۴)+۱/۵۴۵(۸/۸)=۱۰۶/۹ \quad kN.m$$
$$M_{CE}=M_{DF}=۲/۶۳۶(-۵۸/۹)+۱/۵۴۵(۸۵/۲)=-۲۳/۶ \quad kN.m$$
$$M_{CA}=M_{DB}=۲/۶۳۶(۲۳/۵)+۱/۵۴۵(-۹۴/۲)=-۸۳/۶ \quad kN.m$$
$$M_{EC}=M_{FD}=-M_{EF}=-M_{FE}=۲/۶۳۶(-۵۳)+۱/۵۴۵(۶۱/۸)$$
$$M_{EC}=-۴۴/۲ \quad kN.m$$

۱۰-۳۵ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورید.



شکل ۱۰-۳۵

ابتدا در گره B یک تکیه‌گاه غلتکی قرار داده و واکنش تکیه‌گاهی (R) آن را به دست می‌آوریم.



قاب مقید شده (۰)

$$FEM_{BC}=-\frac{۶۰(۲)(۴)^2}{(۶)^2}$$
$$FEM_{BC}=-۵۳/۳۳ \quad kN.m$$
$$FEM_{CB}=\frac{۶۰(۲)^2(۴)}{(۶)^2}$$
$$FEM_{CB}=۲۶/۶۷ \quad kN.m$$
$$FEM_{DC}=\frac{۴۰(۴)(۶)^2}{(۱۰)^2}$$
$$FEM_{DC}=۵۷/۶ \quad kN.m$$
$$FEM_{CD}=-\frac{۴۰(۴)^2(۶)}{(۱۰)^2}=-۳۸/۴ \quad kN.m$$

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF		۰/۴۲۹	۰/۵۷۱	۰/۴	۰/۶	
FEM	۰	۰	-۵۳/۳۳	۲۶/۶۷	-۳۸/۴	۵۷/۶
		۲۲/۸۸	۳۰/۴۵	۲/۶۹	۷/۰۴	۳/۵۲
		۲/۳۵	۱۵/۲۳			
		-۱/۰۱	-۱/۳۴	-۶/۰۹	-۹/۱۴	-۴/۵۷
		-۳/۰۵	-۰/۶۷			
		۱/۳۱	۱/۷۴	۰/۲۶	۰/۴۱	۰/۲
		۰/۱۳	۰/۸۷			
		-۰/۰۶	-۰/۰۷	-۰/۳۵	-۰/۵۲	-۰/۲۶
		-۰/۱۸	-۰/۰۴			
		۰/۰۸	۰/۱	۰/۰۲	۰/۰۲	
	۰	۲۳/۲	-۲۳/۲	۴۰/۵۹	-۴۰/۵۹	۵۶/۴۹

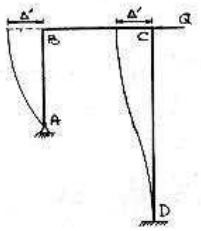
$$DF_{BA}=\frac{\left[\frac{۰/۵I}{۴}\right]}{\left[\frac{I}{۶}\right]+\left[\frac{۰/۵I}{۴}\right]}=۰/۴۲۹$$
$$DF_{BC}=\frac{\left[\frac{I}{۶}\right]}{\left[\frac{I}{۶}\right]+\left[\frac{۰/۵I}{۴}\right]}=۰/۵۷۱$$
$$DF_{CB}=\frac{\left[\frac{I}{۶}\right]}{\left[\frac{I}{۶}\right]+\left[\frac{۲/۵I}{۱۰}\right]}=۰/۴$$
$$DF_{CD}=\frac{\left[\frac{۲/۵I}{۱۰}\right]}{\left[\frac{I}{۶}\right]+\left[\frac{۲/۵I}{۱۰}\right]}=۰/۶$$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; S_A(۴) - ۲۳/۲ = 0 \;\Rightarrow\; \vec{S_A} = ۵/۸ \;\; kN \rightarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{CD} = 0 \;:\; S_D(۱۰) + ۴۰/۵۹ - ۵۶/۴۹ - (۲۰)(۶) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{S_D} = ۲۵/۵۹ \;\; kN \rightarrow$

$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; \vec{R} = ۸/۶۱ \;\; kN \rightarrow$

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF		۰/۴۲۹	۰/۵۷۱	۰/۴	۰/۶	
FEM	۲۵	۲۵	۰	۰	۱۵	۱۵
	-۲۵	-۱۰/۷۲	-۱۴/۲۸	-۶	-۹	
		-۱۲/۵	-۳	-۷/۱۴		-۴/۵
		۶/۴۵	۸/۸۵	۲/۸۶	۴/۲۸	
			۱/۴۳	۴/۴۳		۲/۱۴
		-۰/۶۱	-۰/۸۲	-۱/۷۷	-۲/۶۶	
			-۰/۸۸	-۰/۴۱		-۱/۳۳
		۰/۳۸	۰/۵	۰/۱۶	۰/۲۵	
			۰/۰۸	۰/۲۵		۰/۱۳
		-۰/۰۳	-۰/۰۵	-۰/۱	-۰/۱۵	
			-۰/۰۵	-۰/۰۲		-۰/۰۷
		۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۰۱	
	۰	۸/۲	-۸/۱۹	-۷/۷۳	۷/۷۳	۱۱/۳۷



قاب تحت اثر تغییر مکان جانبی Δ'، (۱)

اگر فرض کنیم: $EI\Delta' = ۱۰۰$، در این صورت:

$$FEM_{CD} = FEM_{DC} = \frac{۶E(۲/۵I)\Delta'}{(۱۰)^۲}$$

$$FEM_{CD} = ۱۵ \;\; kN.m$$

$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = \frac{۶E\left[\frac{۲}{۳}I\right]\Delta'}{(۴)^۲}$$

$$FEM_{AB} = ۲۵ \;\; kN.m$$

$+\circlearrowleft \sum M_B^{AB} = 0 \;:\; S_A(۴) - ۸/۲ = 0 \;\Rightarrow\; S_A = ۲/۰۵ \;\; kN \rightarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{DC} = 0 \;:\; -۱۱/۳۷ - ۷/۷۳ + S_D(۱۰) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{S_D} = ۱/۹۱ \;\; kN \rightarrow$

$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 \;:\; Q - ۱/۹۱ - ۲/۰۵ = 0 \;\Rightarrow\; \vec{Q} = ۳/۹۶ \;\; kN \leftarrow$

$R_{۱۰} = R = ۸/۶۱ \;\; kN \;\;,\;\; R_{۱۱} = Q = -۳/۹۶ \;\; kN \;\;,\;\; x_۱ R_{۱۱} + R_{۱۰} = 0 \;\Rightarrow\; -۳/۹۶ x_۱ + ۸/۶۱ = 0 \;\Rightarrow\; x_۱ = ۲/۱۷۴$

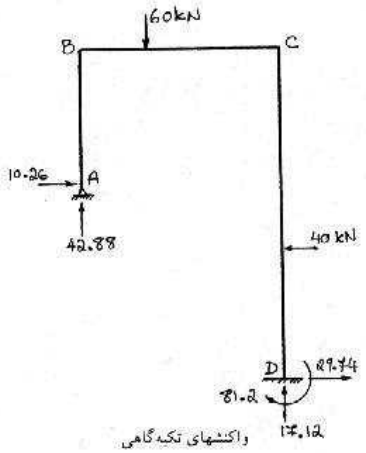
$$M_{BA} = ۲۳/۲ + (۲/۱۷۴)(۸/۲) = ۴۱/۰۳ \;\; kN.m \;\;,\;\; M_{AB} = 0$$

$$M_{BC} = -۲۳/۲ + (۲/۱۷۴)(-۸/۱۹) = -۴۱/۰۳ \;\; kN.m$$

$$M_{CB} = ۴۰/۵۹ + (۲/۱۷۴)(-۷/۷۳) = ۲۳/۷۸ \;\; kN.m$$

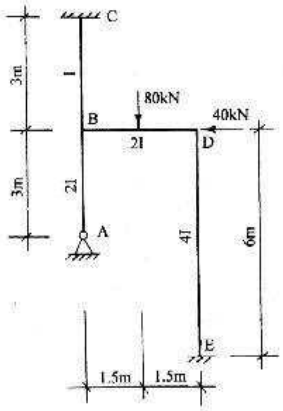
$$M_{CD} = -۴۰/۵۹ + (۲/۱۷۴)(۷/۷۳) = -۲۳/۷۸ \;\; kN.m$$

$$M_{DC} = ۵۶/۴۹ + (۲/۱۷۴)(۱۱/۳۷) = ۸۱/۲۰ \;\; kN.m$$

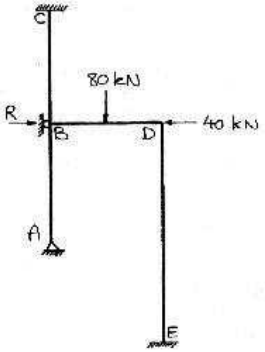


واکنشهای تکیه‌گاهی

۱۰-۳۶ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش توزیع لنگر تحلیل کرده، واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورید.



شکل ۱۰-۳۶



قاب مفید شده

در گره B یک تکیه‌گاه غلتکی قرار می‌دهیم و واکنش تکیه‌گاهی (R) آن را به دست می‌آوریم.

$$FEM_{BD} = -FEM_{DB} = -\frac{۸۰(۳)}{۸} = -۳۰ \quad kN.m$$

$$DF_{DB} = \frac{\left(\frac{۲I}{۳}\right)}{\left(\frac{۲I}{۳}\right)+\left(\frac{۴I}{۶}\right)} = ۰/۵$$

$$DF_{DE} = \frac{\left(\frac{۴I}{۶}\right)}{\left(\frac{۲I}{۳}\right)+\left(\frac{۴I}{۶}\right)} = ۰/۵$$

$$DF_{BC} = \frac{\left(\frac{I}{۳}\right)}{\left(\frac{I}{۳}\right)+\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲I}{۳}\right)+\left(\frac{۲I}{۳}\right)} = ۰/۲۲۲$$

$$DF_{BD} = \frac{\left(\frac{۲I}{۳}\right)}{\left(\frac{I}{۳}\right)+\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲I}{۳}\right)+\left(\frac{۲I}{۳}\right)} = ۰/۴۴۴$$

$$DF_{BA} = \frac{\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲I}{۳}\right)}{\left(\frac{I}{۳}\right)+\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲I}{۳}\right)+\left(\frac{۲I}{۳}\right)} = ۰/۳۳۳$$

	COM						
	CB	BC	BA	BD	DB	DE	BD	AB
DF		۰/۲۲۲	۰/۳۳۳	۰/۴۴۴	۰/۵	۰/۵		
FEM	۰	۰	۰	-۳۰	۳۰	۰	۰	۰
		۶/۶۶	۱۰	۱۳/۳۳	-۱۵	-۱۵		
	۳/۳۳			-۷/۵	۶/۶۶		-۷/۵	
		۱/۶۶	۲/۵	۳/۳۳	-۳/۳۳	-۳/۳۳		
	۰/۸۳			-۱/۶۶	۱/۶۶		-۱/۶۶	
		۰/۳۷	۰/۵۵	۰/۷۴	-۰/۸۳	-۰/۸۳		
	۰/۱۸			-۰/۴۲	۰/۳۷		-۰/۴۱	
		۰/۰۹	۰/۱۲	۰/۱۹	-۰/۱۸	-۰/۱۸		
	۰/۰۵			-۰/۰۹	۰/۱		-۰/۰۹	
		۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴	-۰/۰۵	-۰/۰۵		
	۰/۰۱						-۰/۰۲	
	۴/۴۰	۸/۸۰	۱۳/۲۲	-۲۲/۰۴	۱۹/۴	-۱۹/۳۹	-۹/۶۸	۰

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{BC} = ۰ \;:\; S_{B_۲}(۳) - ۸/۸۰ - ۴/۴ = ۰ \;\Rightarrow\; \vec{S}_{B_۲} = ۴/۴ \quad kN \rightarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A^{AB} = ۰ \;:\; S_{B_۱}(۳) - ۱۳/۲۲ = ۰ \;\Rightarrow\; \vec{S}_{B_۱} = ۴/۴ \quad kN \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E^{ED} = ۰ \;:\; -S_D(۶) + ۱۹/۳۹ + ۹/۶۸ = ۰ \;\Rightarrow\; \vec{S}_D = ۴/۸۴ \quad kN \rightarrow$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x^{BD} = ۰ \;:\; R - ۴۰ - ۴/۸۴ + ۴/۴ - ۴/۴ = ۰ \;\Rightarrow\; \vec{R} = ۴۴/۸۴ \quad kN \rightarrow$$

COM

	CB	BC	BA	BD	DB	DE	ED	AB
DF		۰/۲۲۲	۰/۳۳۳	۰/۴۴۴	۰/۵	۰/۵		
FEM	-۴۰	-۴۰	۸۰	۰	۰	۴۰	۴۰	۸۰
		-۸/۸۸	-۱۳/۳۳	-۱۷/۷۸	-۲۰	-۲۰		-۸۰
	-۴/۴۴		-۴۰	-۱۰	-۸/۸۹		-۱۰	
		۱۱/۱۱	۱۶/۶۷	۲۲/۲۲	۴/۴۴	۴/۴۴		
	۵/۵۶			۲/۲۲	۱۱/۱۱		۲/۲۲	
		-۰/۴۹	-۰/۷۴	-۰/۹۹	-۵/۵۶	-۵/۵۶		
	-۰/۲۵			-۲/۷۸	-۰/۵		-۲/۷۸	
		۰/۶۲	۰/۹۳	۱/۲۴	۰/۲۵	۰/۲۵		
	۰/۳۱			۰/۱۳	۰/۶۲		۰/۱۳	
		-۰/۰۳	-۰/۰۴	-۰/۰۵	-۰/۳۱	-۰/۳۱		
	-۰/۰۱			-۰/۱۵	-۰/۰۲		-۰/۱۵	
		۰/۰۳	۰/۰۵	۰/۰۷	۰/۰۱	۰/۰۱		
	۰/۰۱						۰/۰	
	-۳۸/۸۲	-۳۷/۶۴	۴۳/۵۲	-۵/۸۷	-۱۸/۸۵	۱۸/۸۳	۲۹/۴۲	۰

اگر فرض کنیم $EI\Delta' = ۶۰$ در این صورت:

$$FEM_{AB}=FEM_{BA}=\frac{۶E(۲I)\Delta'}{(۳)^۲}=۸۰\ kN.m\ ,\ FEM_{ED}=FEM_{DE}=\frac{۶E(۴I)\Delta'}{(۶)^۲}=۴۰\ kN.m$$

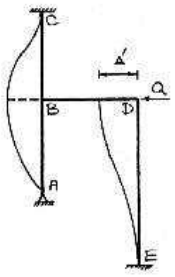
$$FEM_{BC}=FEM_{CB}=-\frac{۶E(I)\Delta'}{(۳)^۲}=-۴۰\ kN.m$$

$$+\circlearrowright \sum M_A^{BA}=۰\ :\ -S_{B_۱}(۳)+۴۳/۵۴=۰ \Rightarrow S_{B_۱}=۱۴/۵۱\ kN\leftarrow$$

$$+\circlearrowright \sum M_C^{BC}=۰\ :\ -S_{B_۲}(۳)+۳۷/۶۴+۳۸/۸۲=۰ \Rightarrow S_{B_۲}=۲۵/۴۹\ kN\leftarrow$$

$$+\circlearrowright \sum M_E^{DE}=۰\ :\ -S_D(۶)+۱۸/۸۳+۲۹/۴۲=۰ \Rightarrow \vec{S_D}=۸/۰۴\ kN\leftarrow$$

$$\pm\sum F_x^{BD}=۰\ :\ -Q+۸/۰۴+۲۵/۴۹+۱۴/۵۱=۰ \Rightarrow \vec{Q}=۴۸/۰۴\ kN\leftarrow$$



تاب تحت اثر تغییر مکان جانبی Δ'

$$R_{۱۰}=R=۴۴/۸۴\ kN\ ,\ R_{۱۱}=Q=-۴۸/۰۴\ kN$$

$$x_۱R_{۱۱}+R_{۱۰}=۰ \Rightarrow -۴۸/۰۴x_۱+۴۴/۸۴=۰ \Rightarrow x_۱=۰/۹۳۳$$

$$M_{CB}=۴/۴+(۰/۹۳۳)(-۳۸/۸۲)=-۳۱/۸۳\ kN.m$$

$$M_{BC}=۸/۸+(۰/۹۳۳)(-۳۷/۶۴)=-۲۶/۳۳\ kN.m$$

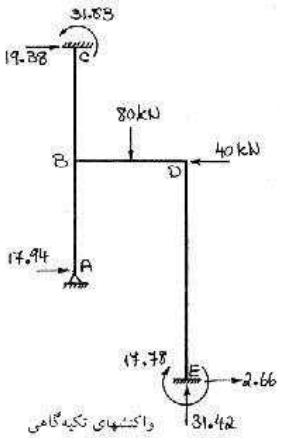
$$M_{BD}=-۲۲/۰۴+(۰/۹۳۳)(-۵/۸۷)=-۲۷/۵۲\ kN.m$$

$$M_{DB}=۱۹/۴+(۰/۹۳۳)(-۱۸/۸۵)=۱/۸\ kN.m$$

$$M_{DE}=-۱۹/۳۹+(۰/۹۳۳)(۱۸/۸۳)=-۱/۸\ kN.m$$

$$M_{ED}=-۹/۶۸+(۰/۹۳۳)(۲۹/۴۲)=۱۷/۷۸\ kN.m$$

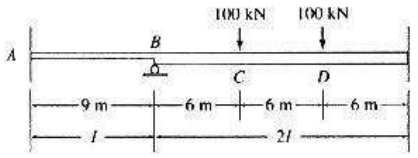
$$M_{BA}=۱۳/۲۲+(۰/۹۳۳)(۴۳/۵۴)=۵۳/۸۴\ kN.m$$



واکنشهای تکیه‌گاهی

تیرهای نشان داده شده در مسایل ۱۰-۳۷ و ۱۰-۳۸ را با روش توزیع لنگر تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.

۱۰-۳۷



شکل ۱۰-۳۷

$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = ۰$$

$$FEM_{BE} = -FEM_{EB} = -\frac{۱۰۰(۶)(۱۲)}{۱۸} = -۴۰۰ \quad kN.m$$

$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{I}{۹}\right]}{\left[\frac{I}{۹}\right] + \left[\frac{۲I}{۱۸}\right]} = ۰/۵ \quad , \quad DF_{BE} = \frac{\left[\frac{۲I}{۱۸}\right]}{\left[\frac{I}{۹}\right] + \left[\frac{۲I}{۱۸}\right]} = ۰/۵$$

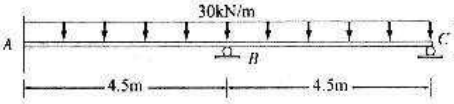
	AB	BA	BE	EB
DF		۰/۵	۰/۵	
FEM	۰	۰	-۴۰۰	۴۰۰
		۲۰۰	۲۰۰	
	۱۰۰			۱۰۰
	۱۰۰	۲۰۰	-۲۰۰	۵۰۰

$$\vec{M}_{AB} = ۱۰۰ \quad kN.m \circlearrowright, \quad \vec{M}_{BA} = ۲۰۰ \quad kN.m \circlearrowleft$$

$$\vec{M}_{BE} = ۲۰۰ \quad kN.m \circlearrowright, \quad \vec{M}_{EB} = ۵۰۰ \quad kN.m \circlearrowleft$$

● برای نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی به حل مسئلهٔ ۹-۴۲ رجوع کنید.

۱۰-۳۸



E = ۷۰ GPa ، I = ۱/۲×۱۰^{۸} mm^{۴}

شکل ۱۰-۳۸

$$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -\frac{۳۰(۴/۵)^{۲}}{۱۲}$$

$$FEM_{AB} = -۵۰/۶۲۵ \quad kN.m$$

$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{I}{۴/۵}\right]}{\left[\frac{I}{۴/۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۴/۵}\right]} = \frac{۴}{۷} \quad , \quad DF_{BC} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۴/۵}\right]}{\left[\frac{I}{۴/۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۴/۵}\right]} = \frac{۳}{۷}$$

	AB	BA	BC	CB
DF		$\frac{۴}{۷}$	$\frac{۳}{۷}$	
FEM	-۵۰/۶۲۵	۵۰/۶۲۵	-۵۰/۶۲۵	۵۰/۶۲۵
		۰	۰	-۵۰/۶۲۵
	۰		-۲۵/۳۱۲	
		۱۲/۴۶۴	۱۰/۸۴۸	
	۷/۲۳۲			
	-۴۳/۳۹	۶۵/۰۹	-۶۵/۰۹	۰

$$\vec{M}_{AB} = ۴۳/۳۹ \quad kN.m \circlearrowright, \quad \vec{M}_{BA} = ۶۵/۰۹ \quad kN.m \circlearrowleft$$

$$\vec{M}_{BC} = ۶۵/۰۹ \quad kN.m \circlearrowright, \quad \vec{M}_{CB} = ۰$$

● برای نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی به حل مسئلهٔ ۹-۲۵ رجوع کنید.

۱۰-۳۹ اگر علاوه بر بار اعمال شده بر تیر نشان داده شده در مسئلهٔ قبل، تکیه‌گاه B به اندازهٔ ۳۶ mm و تکیه‌گاه C به اندازهٔ ۱۸ mm نشست کنند، مسئله را مجدداً حل کنید.

$$EI = ۸۴۰۰۰ \quad kN.m^{۲} \quad , \quad \psi_{AB} = \psi_{BA} = \frac{۳۶ - ۰}{۴۵۰۰} = ۰/۰۰۸ \quad , \quad \psi_{BC} = \frac{۱۸ - ۳۶}{۴۵۰۰} = -۰/۰۰۴$$

$$FEM_{AB} = -۵۰/۶۲۵ - \frac{۶(۸۴۰۰۰)(۰/۰۰۸)}{۴/۵} = -۹۴۶/۶۲۵ \quad kN.m$$

$$FEM_{BA} = ۵۰/۶۲۵ - \frac{۶(۸۴۰۰۰)(۰/۰۰۸)}{۴/۵} = -۸۴۵/۳۷۵ \quad kN.m$$

$$FEM_{BC} = -۵۰/۶۲۵ - \frac{۶\,(۸۴۰۰۰)(-۰/۰۰۴)}{۴/۵} = ۳۹۷/۳۷۵ \quad kN.m$$

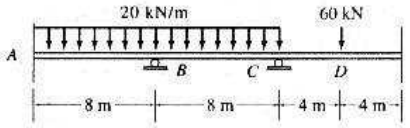
$$FEM_{CB} = ۵۰/۶۲۵ - \frac{۶\,(۸۴۰۰۰)(-۰/۰۰۴)}{۴/۵} = ۴۹۸/۶۲۵ \quad kN.m$$

$$\vec{M}_{AB} = ۷۴۷/۳۹ \quad kN.m \;\circlearrowright, \quad \vec{M}_{BA} = ۴۴۶/۹۱ \quad kN.m \;\circlearrowright$$

● برای نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی به حل مسئلهٔ ۹-۲۶ رجوع کنید.

	AB	BA	BC	CB
DF		۴/۷	۳/۷	
FEM	-۹۴۶/۶۲۵	-۸۲۵/۳۷۵	۳۹۷/۳۷۵	۴۹۸/۶۲۵
		۲۵۶	۱۹۲	-۴۹۸/۶۲۵
	۱۲۸		-۲۲۹/۳۱۲	
		۱۴۲/۴۶۴	۱۰۶/۸۴۸	
	۷۱/۲۳۲			
	-۷۴۷/۳۹	-۴۴۶/۹۱	۴۴۶/۹۱	۰

۱۰-۴۰ تیر نشان داده شده در شکل زیر را با روش توزیع لنگر تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



EI = ثابت ، E = ۷۰ GPa ، I = ۸۰۰×۱۰^{۶} mm^{۴}

شکل ۱۰-۴۰

$$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -\frac{۲۰\,(۸)^{۲}}{۱۲}$$

$$FEM_{AB} = -۱۰۶/۶۶۷ \quad kN.m$$

$$FEM_{CE} = -FEM_{EC} = -\frac{۶۰\,(۸)}{۸} = -۶۰ \quad kN.m$$

$$DF_{BA} = DF_{BC} = \frac{\left[\frac{I}{۸}\right]}{\left[\frac{I}{۸}\right] + \left[\frac{I}{۸}\right]} = ۰/۵$$

$$DF_{CB} = DF_{CE} = \frac{\left[\frac{I}{۸}\right]}{\left[\frac{I}{۸}\right] + \left[\frac{I}{۸}\right]} = ۰/۵$$

	AB	BA	BC	CB	CE	EC
DF		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	
FEM	-۱۰۶/۶۶۷	۱۰۶/۶۶۷	-۱۰۶/۶۶۷	۱۰۶/۶۶۷	-۶۰	۶۰
	۰	۰	-۲۳/۳۳۳	-۲۳/۳۳۳		
	۰	-۱۱/۶۶۶	۰		-۱۱/۶۶۶	
	۵/۸۳۳	۵/۸۳۳	۰	۰		
	۲/۹۱۷	۰	۲/۹۱۷	۰	۰	
	۰	۰	-۱/۴۵۹	-۱/۴۵۹		
	۰	-۰/۷۳	۰		-۰/۷۳	
	۰/۳۶۵	۰/۳۶۵	۰	۰		
	۰/۱۸۳	۰	۰/۱۸۳	۰	۰	
	۰	۰	-۰/۰۹۱	-۰/۰۹۱		
	۰	-۰/۰۴۵	۰		-۰/۰۴۵	
	۰/۰۲۳	۰/۰۲۳	۰	۰		
	-۰/۰۱۲				۰	
	-۱۰۳/۵۵۵	۱۱۲/۸۸۸	-۱۱۲/۸۸۷	۸۴/۸۸۴	-۸۴/۸۸۳	۴۷/۵۵۹

$$\vec{M}_{AB} = ۱۰۳/۵۵۵ \quad kN.m \;\circlearrowright$$

$$\vec{M}_{BA} = ۱۱۲/۸۸۸ \quad kN.m \;\circlearrowleft$$

$$\vec{M}_{BC} = ۱۱۲/۸۸۷ \quad kN.m \;\circlearrowright$$

$$\vec{M}_{CB} = ۸۴/۸۸۴ \quad kN.m \;\circlearrowleft$$

$$\vec{M}_{CE} = ۸۴/۸۸۴ \quad kN.m \;\circlearrowright$$

$$\vec{M}_{EC} = ۴۷/۵۵۹ \quad kN.m \;\circlearrowleft$$

● برای نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی به حل مسئلهٔ ۹-۴۷ رجوع کنید.

۱۰-۴۱ مسئلهٔ ۱۰-۴۰ را با این فرض حل کنید که علاوه بر بارهای اعمال شده بر تیر، تکیه‌گاه C به اندازهٔ ۲۵ mm نشست کرده باشد.

$$\psi_{BC} = \psi_{CB} = \frac{۲۵ - ۰}{۸۰۰۰} = ۰/۰۰۳۱۲۵ \quad , \quad \psi_{CE} = \psi_{EC} = \frac{۰ - ۲۵}{۸۰۰۰} = -۰/۰۰۳۱۲۵ \quad , \quad EI = ۵۶۰۰۰ \quad kN.m^{۲}$$

$$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -۱۰۶/۶۶۷ \quad kN.m \quad , \quad FEM_{BC} = -۱۰۶/۶۶۷ - \frac{۶(۵۶۰۰۰)(۰/۰۰۳۱۲۵)}{۸} = -۲۳۷/۹۱۷ \quad kN.m$$

$$FEM_{CB} = -۲۴/۵۸۳ \quad kN.m \quad , \quad FEM_{CE} = -۶۰ - \frac{۶(۵۶۰۰۰)(-۰/۰۰۳۱۲۵)}{۸} = ۷۱/۲۵ \quad kN.m$$

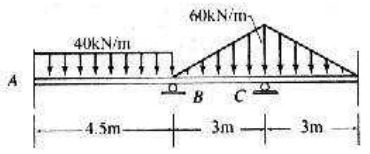
$$FEM_{EC} = ۱۹۱/۲۵ \quad kN.m$$

	AB	BA	BC	CB	CE	EC
DF		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	
FEM	-۱۰۶/۶۶۷	۱۰۶/۶۶۷	-۲۳۷/۹۱۷	-۲۴/۵۸۳	۷۱/۲۵	۱۹۱/۲۵
		۶۵/۶۲۵	۶۵/۶۲۵	-۲۳/۳۳۴	-۲۳/۳۳۴	
	۳۲/۸۱۲		-۱۱/۶۶۷	۳۲/۸۱۲		-۱۱/۶۶۷
		۵/۸۳۴	۵/۸۳۴	-۱۶/۴۰۶	-۱۶/۴۰۶	
	۲/۹۱۷		-۸/۲۰۳	۲/۹۱۷		-۸/۲۰۳
		۴/۱۰۲	۴/۱۰۲	-۱/۴۵۸	-۱/۴۵۸	
	۲/۰۵۱		-۰/۷۲۹	۲/۰۵۱		-۰/۷۲۹
		۰/۳۶۴	۰/۳۶۴	-۱/۰۲۵	-۱/۰۲۵	
	۰/۱۸۲		-۰/۵۱۲	۰/۱۸۲		-۰/۵۱۲
		۰/۲۵۶	۰/۲۵۶	-۰/۰۹۱	-۰/۰۹۱	
	۰/۱۲۸		-۰/۰۴۶	۰/۱۲۸		-۰/۰۴۶
		۰/۰۲۳	۰/۰۲۳	-۰/۰۶۴	-۰/۰۶۴	
	۰/۰۱۲					-۰/۰۳۲
	-۶۸/۵۶۵	۱۸۲/۸۷۱	-۱۸۲/۸۷۰	-۲۸/۸۷۱	۲۸/۸۷۲	۱۷۰/۰۶۱

$$\vec{M}_{AB} = ۶۸/۵۵۶ \quad kN.m \;)$$
$$\vec{M}_{BA} = ۱۸۲/۸۷۱ \quad kN.m \;)$$
$$\vec{M}_{BC} = ۱۸۲/۸۷۰ \quad kN.m \;)$$
$$\vec{M}_{CB} = ۲۸/۸۷۱ \quad kN.m \;)$$
$$\vec{M}_{CE} = ۲۸/۸۷۲ \quad kN.m \;)$$
$$\vec{M}_{EC} = ۱۷۰/۰۶۱ \quad kN.m \;)$$

● برای نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی به حل مسئلهٔ ۹-۲۸ رجوع کنید.

۱۰-۴۲ تیر نشان داده شده در شکل زیر را با روش توزیع لنگر تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



EI = ثابت

شکل ۱۰-۴۲

$$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -\frac{۴۰(۴/۵)^۲}{۱۲} = -۶۷/۵ \quad kN.m$$

$$FEM_{BC} = -\frac{۶۰(۳)^۲}{۳۰} = -۱۸ \quad kN.m \quad , \quad FEM_{CB} = \frac{۶۰(۳)^۲}{۲۰} = ۲۷ \quad kN.m$$

$$FEM_{CD} = -\frac{۶۰(۳)^۲}{۲۰} = -۲۷ \quad kN.m \quad , \quad FEM_{DC} = \frac{۶۰(۳)^۲}{۳۰} = ۱۸ \quad kN.m$$

$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{I}{۴/۵}\right]}{\left[\frac{I}{۴/۵}\right] + \left[\frac{I}{۳}\right]} = ۰/۴ \quad , \quad DF_{BC} = \frac{\left[\frac{I}{۳}\right]}{\left[\frac{I}{۴/۵}\right] + \left[\frac{I}{۳}\right]} = ۰/۶$$

AB	BA	BC	CB	CD	DC
	۰/۴	۰/۶	۰/۵	۰/۵	
-۶۷/۵	۶۷/۵	-۱۸	۲۷	-۲۷	۱۸
	-۱۹/۸	-۲۹/۷	۰	۰	
-۹/۹		۰	-۱۴/۸۵		۰
	۰	۰	۷/۴۲۵	۷/۴۲۵	
۰		۳/۷۱۲	۰		۳/۷۱۲
	-۱/۴۸۵	-۲/۲۲۷	۰	۰	
-۰/۷۴۳		۰	-۱/۱۱۴		۰
	۰	۰	۰/۵۵۷	۰/۵۵۷	
۰		۰/۲۷۹	۰		۰/۲۷۹
	-۰/۱۳۹	-۰/۱۳۹	۰	۰	
-۰/۰۶۹		۰	-۰/۰۶۹		۰
	۰	۰	۰/۰۳۵	۰/۰۳۵	
۰					۰/۰۱۸
-۷۸/۲۱۲	۴۶/۰۷۶	-۴۶/۰۷۵	۱۸/۹۸۴	-۱۸/۹۸۳	۲۲/۰۰۹

$$DF_{CD} = DF_{CB} = \frac{\left[\frac{I}{۴}\right]}{\left[\frac{I}{۴}\right] + \left[\frac{I}{۴}\right]} = ۰/۵$$

$\vec{M}_{AB} = ۷۸/۲۱۲ \quad kN.m$)

$\vec{M}_{BA} = ۴۶/۰۷۶ \quad kN.m$)

$\vec{M}_{BC} = ۴۶/۰۷۵ \quad kN.m$)

$\vec{M}_{CB} = ۱۸/۹۸۴ \quad kN.m$)

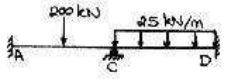
$\vec{M}_{CD} = ۱۸/۹۸۳ \quad kN.m$)

● برای نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی به حل مسئلهٔ ۹-۴۹ رجوع کنید.

تیرهای نشان داده شده در مسایل ۱۰-۴۳ و ۱۰-۴۴ را با روش توزیع لنگر تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را ترسیم کنید.

۱۰-۴۳

برای حل این مسئله از ویژگی تقارن که در فصل ۱۱ به آن اشاره شده است، استفاده می‌کنیم.



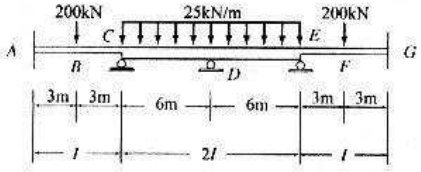
$$FEM_{AC} = -FEM_{CA} = -\frac{۲۰۰(۶)}{۸}$$

$$FEM_{AC} = -۱۵۰ \quad kN.m$$

$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{۲۵(۶)^{۲}}{۱۲} = -۷۵ \quad kN.m$$

$$DF_{CA} = \frac{\left[\frac{I}{۶}\right]}{\left[\frac{I}{۶}\right] + \left[\frac{۲I}{۶}\right]} = \frac{۱}{۳} \quad , \quad DF_{CD} = \frac{\left[\frac{۲I}{۶}\right]}{\left[\frac{I}{۶}\right] + \left[\frac{۲I}{۶}\right]} = \frac{۲}{۳}$$

	AC	CA	CD	DC
DF		$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	
FEM	-۱۵۰	۱۵۰	-۷۵	۷۵
		-۲۵	-۵۰	
	-۱۲/۵			-۲۵
	-۱۶۲/۵	۱۲۵	-۱۲۵	۵۰



E = ثابت

شکل ۱۰-۴۳

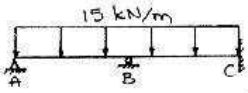
$\vec{M}_{AC} = ۱۶۲/۵ \quad kN.m$), $\vec{M}_{CA} = ۱۲۵ \quad kN.m$)

$\vec{M}_{CD} = ۱۲۵ \quad kN.m$), $\vec{M}_{DC} = ۵۰ \quad kN.m$)

● برای نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی به حل مسئلهٔ ۹-۵۰ رجوع کنید.

۴۴-۱۰

از ویژگی تقارن که در فصل ۱۱ به آن اشاره شده است، استفاده می‌کنیم.

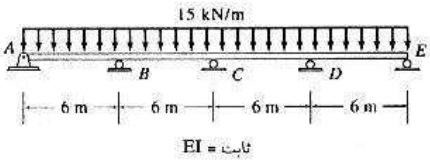


تیر معادل

$$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = FEM_{BC}$$

$$FEM_{AB} = -FEM_{CB} = -\frac{15(6)^2}{12}$$

$$FEM_{AB} = -45 \quad kN.m$$



EI = ثابت

شکل ۱۰-۴۴

	AB	BA	BC	CB
DF		۰/۴۲۸۶	۰/۵۷۱۴	
FEM	-۴۵	۴۵	-۴۵	۴۵
	۴۵	۰	۰	
	۰	۲۲/۵		۰
		-۹/۶۲	-۱۲/۸۶	
				-۶/۴۳
	۰	۵۷/۸۶	-۵۷/۸۶	۳۸/۵۷

$$DF_{BA} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{I}{6}\right)}{\left(\frac{I}{6}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{I}{6}\right)} = ۰/۴۲۸۶$$

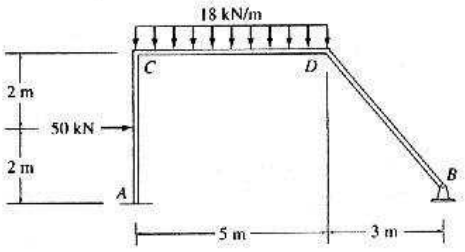
$$DF_{BC} = \frac{\left(\frac{I}{6}\right)}{\left(\frac{I}{6}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{I}{6}\right)} = ۰/۵۷۱۴$$

$\vec{M}_{AB} = ۰$, $\vec{M}_{BA} = ۵۷/۸۶ \quad kN.m$)

$\vec{M}_{BC} = ۵۷/۸۶ \quad kN.m$), $\vec{M}_{CB} = ۳۸/۵۷ \quad kN.m$)

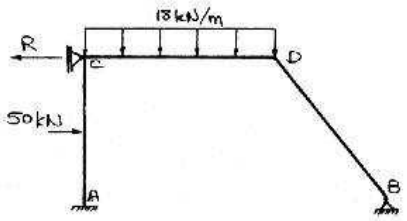
● برای نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی به حل مسئلهٔ ۹-۵۱ رجوع کنید.

۴۵-۱۰ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با روش توزیع لنگر تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



EI = ثابت

شکل ۱۰-۴۵



قاب مقید شده بدون حرکت جانبی

تحلیل قاب مقید شده (بدون حرکت جانبی):

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	
FEM	-۲۵	۲۵	-۳۷/۵	۳۷/۵	۰	۰
		۶/۹۴۴	۵/۵۵۶	-۲۱/۴۲۸	-۱۶/۰۷۲	
	۳/۴۷۲		-۱۰/۷۱۴	۲/۷۷۸		
		۵/۹۵۲	۲/۷۶۲	-۱/۵۸۷	-۱/۱۹۱	
	۲/۹۷۶		-۰/۷۹۴	۲/۳۸۱		
		۰/۴۴۱	۰/۳۵۳	-۱/۳۶۰	-۱/۰۲۱	
	۰/۲۲۱		-۰/۶۸۰	۰/۱۷۷		
		۰/۳۷۸	۰/۳۰۲	-۰/۱۰۱	-۰/۰۷۶	
	۰/۱۸۹		-۰/۰۵۰	۰/۱۵۱		
		۰/۰۲۷۸	۰/۰۲۲	-۰/۰۸۶	-۰/۰۶۵	
	۰/۰۱۴		-۰/۰۴۳	۰/۰۱۱		
		۰/۰۲۴	۰/۰۱۹	-۰/۰۰۶	-۰/۰۰۵	
	۰/۰۱۲		-۰/۰۰۳	۰/۰۰۹		
		۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	-۰/۰۰۴	-۰/۰۰۴	
	-۱۸/۱۱۶	۳۸/۷۶۹	-۳۸/۷۶۹	۱۸/۴۳۵	-۱۸/۴۳۴	۰

$$DF_{CA}=\frac{\left[\frac{I}{4}\right]}{\left[\frac{I}{5}\right]+\left[\frac{I}{4}\right]}=\frac{5}{9}$$

$$DF_{CD}=\frac{4}{9}$$

$$DF_{DC}=\frac{\left[\frac{I}{5}\right]}{\left[\frac{I}{5}\right]+\left[\frac{3}{4}\right]\left[\frac{I}{5}\right]}=\frac{4}{7}$$

$$DF_{DB}=\frac{3}{7}$$

$$FEM_{AC}=-FEM_{CA}=-\frac{50(4)}{8}$$

$$FEM_{AC}=-25\ \ kN.m$$

$$FEM_{CD}=-FEM_{DC}=-\frac{18(5)^2}{12}$$

$$FEM_{CD}=-37/5\ \ kN.m$$

● نقطهٔ O محل تلاقی امتداد اعضای AC و BD در نظر گرفته شده است.

$$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC}=0\ :\ 18/116-38/769+50(2)-S_{AC}(4)=0\ \Rightarrow\ \vec{S}_{AC}=19/836\ \ kN\leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D^{BD}=0\ :\ 18/434-S_{BD}(5)=0\ \Rightarrow\ \vec{S}_{BD}=3/687\ \ kN\swarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_O=0\ :\ 50(8/666)-R(6/666)+18/116-19/836(10/666)-\frac{18(5)^2}{2}-3/687(13/333)=0$$

$$\vec{R}=5/128\ \ kN\rightarrow$$

تحلیل قاب با حرکت جانبی:

	AC	CA	CD	DC	DB	BD
DF		$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	
FEM	-۷/۵	-۷/۵	۳/۶	۳/۶	-۶/۰	-۶/۰
		۲/۱۶۶	۱/۷۳۴	۱/۳۷۱	۱/۰۲۹	۶/۰
	۱/۰۸۳		۰/۶۸۶	۰/۸۶۷	۳/۰	
		-۰/۳۸۱	-۰/۳۰۵	-۲/۷۱	-۱/۶۵۷	
	-۰/۱۹۱		-۱/۱۰۵	-۰/۱۵۳		
		۰/۶۱۴	۰/۴۹۱	۰/۰۸۷	۰/۰۶۶	
	۰/۳۰۷		۰/۰۴۲	۰/۲۴۶		
		-۰/۰۲۴	-۰/۰۲	-۰/۱۴۱	-۰/۱۰۵	
	-۰/۰۱۲		-۰/۰۷۱	-۰/۰۱		
		۰/۰۳۹	۰/۰۳۲	۰/۰۰۶	۰/۰۰۴	
	-۰/۰۲		۰/۰۰۳	۰/۰۱۶		
		-۰/۰۰۱	-۰/۰۰۱	-۰/۰۰۹	-۰/۰۰۷	
	-۶/۲۹۳	-۵/۰۸۷	۵/۰۸۸	۳/۶۷	-۳/۶۷	۰

اگر فرض کنیم: $\psi_{DB}=5$ و $EI=1$ خواهیم داشت:

$$\psi_{AC}=5\ ,\ \psi_{CD}=-3$$

$$FEM_{AC}=FEM_{CA}=-\frac{6EI\psi_{AC}}{l_{AC}}$$

$$FEM_{AC}=-7/5\ \ kN.m$$

$$FEM_{CD}=FEM_{DC}=-\frac{6EI\psi_{CD}}{l_{CD}}$$

$$FEM_{CD}=3/6\ \ kN.m$$

$$FEM_{DB}=FEM_{BD}=-\frac{6EI\psi_{BD}}{l_{DB}}$$

$$FEM_{DB}=-6/0\ \ kN.m$$

$+\circlearrowleft \sum M_C^{AC} = ۰ \;:\; ۶/۲۹۳ + ۵/۰۸۷ - S_{AC}(۴) = ۰ \Rightarrow \vec{S}_{AC} = ۲/۸۴۵ \;\; kN \leftarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_D^{BD} = ۰ \;:\; ۳/۶۷ - S_{BD}(۵) = ۰ \Rightarrow \vec{S}_{BD} = ۰/۷۳۴ \;\; kN \swarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_O = ۰ \;:\; R'(۶/۶۶۶) - ۲/۸۴۵(۱۰/۶۶۶) - ۰/۷۳۴(۱۳/۳۳۳) + ۶/۲۹۳ = ۰ \Rightarrow \vec{R'} = ۵/۰۷۶ \;\; kN \rightarrow$

$xR' + R = ۰ \Rightarrow ۵/۰۷۶x + ۵/۱۴۸ = ۰ \Rightarrow x = -۱/۰۱۴۲$

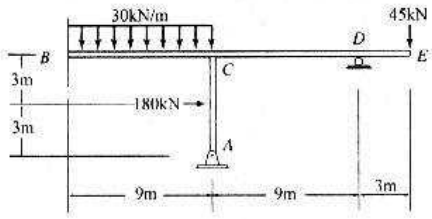
$M_{AC} = -۱۸/۱۱۶ + (۱/۰۱۴۲)(۶/۲۹۳) = -۱۱/۷۳۴ \;\; kN.m \Rightarrow \vec{M}_{AC} = ۱۱/۷۳۴ \;\; kN.m \circlearrowleft$

$M_{CA} = ۳۸/۷۶۹ + (۱/۰۱۴۲)(۵/۰۸۷) = ۴۳/۹۲۸ \;\; kN.m \Rightarrow \vec{M}_{CA} = ۴۳/۹۲۸ \;\; kN.m \circlearrowright$ ، $\vec{M}_{CD} = ۴۳/۹۲۸ \;\; kN.m \circlearrowleft$

$M_{DC} = ۱۸/۴۳۵ - (۱/۰۱۴۲)(۳/۶۷) = ۱۴/۷۱۳ \;\; kN.m \Rightarrow \vec{M}_{DC} = ۱۴/۷۱۳ \;\; kN.m \circlearrowright$ ، $\vec{M}_{DB} = ۱۴/۷۱۳ \;\; kN.m \circlearrowleft$

● برای نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی به حل مسئلهٔ ۹-۵۲ رجوع کنید.

۱۰-۴۶ در قاب نشان داده شده واکنشهای تکیه‌گاهی را با استفاده از روش توزیع لنگر به دست آورید. فرض کنید که علاوه بر بارهای وارد شده بر قاب، تکیه‌گاه A به اندازهٔ ۲۷ mm و تکیه‌گاه D به اندازهٔ ۳۶ mm نشست کرده باشند.



EI = ثابت ، $E = ۷۰ \; GPa$ ، $I = ۱/۲ \times ۱۰^{۹} \; mm^۴$

شکل ۱۰-۴۶

$\psi_{BC} = \psi_{CB} = \frac{۲۷ - ۰}{۹۰۰۰} = ۰/۰۰۳$ ، $\psi_{CD} = \psi_{DC} = \frac{۳۶ - ۲۷}{۹۰۰۰} = ۰/۰۰۱$

$FEM_{BC} = -\frac{۳۰(۹)^۲}{۱۲} - \frac{۶(۸۴۰۰۰)(۰/۰۰۳)}{۹} = -۳۷۰/۵ \;\; kN.m$

$FEM_{CB} = \frac{۳۰(۹)^۲}{۱۲} - \frac{۶(۸۴۰۰۰)(۰/۰۰۳)}{۹} = ۳۴/۵ \;\; kN.m$

$FEM_{CD} = -\frac{۶(۸۴۰۰۰)(۰/۰۰۱)}{۹} = -۵۶ \;\; kN.m$

$FEM_{DC} = -\frac{۶(۸۴۰۰۰)(۰/۰۰۱)}{۹} = -۵۶ \;\; kN.m$

$FEM_{AC} = -\frac{۱۸۰(۶)}{۸} = -۱۳۵ \;\; kN.m$

$FEM_{CA} = \frac{۱۸۰(۶)}{۸} = ۱۳۵ \;\; kN.m$

	BC	CB	CA	CD	DC	AC
DF		۰/۳۴۷۸	۰/۳۹۱۳	۰/۲۶۰۹		
FEM	-۳۷۰/۵	۳۴/۵	۱۳۵	-۵۶	-۵۶	-۱۳۵
		-۳۹/۴۸	-۴۴/۲۱	-۲۹/۶۱	۱۹۱	۱۳۵
	-۱۹/۷۴		۶۷/۵	۹۵/۵		
		-۵۶/۶۹	-۶۳/۷۸	-۴۲/۵۳		
	-۲۸/۳۴					
	-۴۱۸/۵۸	-۶۱/۶۷	۹۴/۳۱	-۳۲/۶۴	۱۳۵	-۱۳۵
						۰

$DF_{CB} = \frac{\left[\frac{I}{۹}\right]}{\left[\frac{I}{۹}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۹}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۶}\right]} = ۰/۳۴۷۸$ ، $DF_{CA} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۶}\right]}{\left[\frac{I}{۹}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۹}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۶}\right]} = ۰/۳۹۱۳$

$DF_{CD} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۹}\right]}{\left[\frac{I}{۹}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۹}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۶}\right]} = ۰/۲۶۰۹$

$\vec{M}_{BC} = ۴۱۸/۵۸ \;\; kN.m \circlearrowleft$ ، $\vec{M}_{CB} = ۶۱/۶۷ \;\; kN.m \circlearrowleft$ ، $\vec{M}_{CA} = ۹۴/۳۱ \;\; kN.m \circlearrowright$ ، $\vec{M}_{CD} = ۳۲/۶۴ \;\; kN.m \circlearrowleft$

مجدداً تأکید می‌کنیم که در دسته‌بندیهای فوق برای تعیین سازهٔ معادل در حالت (۳)، اثر سختی محوری اعضا منظور نشده است.

بارگذاری متقارن

● روش شیب - افت: در حالتهای (۲) و (۳) سازهٔ معادل را تحلیل می‌کنیم، بدون این که ممان اینرسی اعضای سازهٔ اصلی به هنگام تبدیل به سازهٔ معادل تغییر کنند. FEM ها نیز از سازهٔ تبدیل یافته محاسبه می‌شوند.

در حالت (۱) به دو روش می‌توان عمل کرد. (الف) برای عضو AB (که توسط محور تقارن نصف می‌شود)، می‌توان اثر ψ (تغییر مکان جانبی دو انتهای) عضو AO را در سازهٔ معادل در نظر گرفت و از FEM_{AO} در روابط شیب - افت عضو AO استفاده کرد. (ب) یا این که به جای رابطهٔ شیب - افت عضو AO از رابطهٔ شیب - افت عضو AB استفاده کرد و اثر ψ را در معادلهٔ شیب - افت عضو AO در نظر نگرفت و در عوض $\theta_B = -\theta_A$ قرار داد.

● روش توزیع لنگر: در حالتهای (۲) و (۳) سازهٔ معادل را تحلیل می‌کنیم، بدون این که ممان اینرسی اعضای سازهٔ اصلی به هنگام تبدیل به سازهٔ معادل تغییر کند. FEM ها نیز از سازهٔ تبدیل یافته محاسبه می‌شوند.

در حالت (۱) سختی (ممان اینرسی I) عضو AB را به هنگام تبدیل شدن به عضو AO باید نصف کرد، یعنی $\left[I_{AO} = \frac{I_{AB}}{۲}\right]$. همچنین در عضو AO از FEM_{AB} عضو AB استفاده کرده و اثر ψ (تغییر مکان جانبی دو انتهای) عضو AO نیز در محاسبهٔ FEM وارد نمی‌شود.

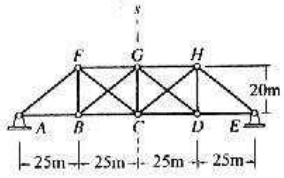
بارگذاری متقارن معکوس

● روش شیب - افت: سازهٔ معادل را بدون تغییر دادن ممان اینرسی اعضای سازهٔ اصلی تحلیل می‌کنیم. FEM ها را نیز از خود سازهٔ معادل محاسبه می‌کنیم.

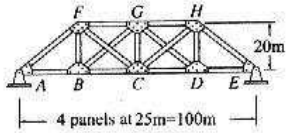
● روش توزیع لنگر: سازهٔ معادل را بدون تغییر دادن ممان اینرسی اعضای سازهٔ اصلی تحلیل می‌کنیم. FEM ها را نیز از خود سازهٔ معادل محاسبه می‌کنیم.

۱۱-۱ آیا خرپای نشان داده شده در شکل زیر سازه‌ای متقارن است؟

با توجه به این که هندسهٔ اعضا، ابعاد، مشخصات مقطع (A) و مشخصات مصالح (E) و شرایط تکیه‌گاهی در خرپا دارای ویژگی تقارن است، پس می‌توان گفت که خرپا نسبت به محور (S) دارای تقارن است.



ثابت = A و E

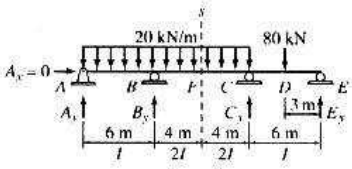


ثابت = A و E

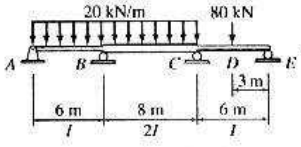
شکل ۱۱-۱

۱۱-۲ یک تیر سه دهانه به همراه بارگذاری آن در شکل زیر نشان داده شده است. آیا این تیر را می‌توان از نظر سازه‌ای متقارن در نظر گرفت؟

با توجه به شکل دیده می‌شود که ابعاد، هندسه و مشخصات مقطع (I) و مشخصات مصالح (E) برای کلیهٔ اعضای تیر نسبت به محور (S) دارای ویژگی تقارند. اما تکیه‌گاهها نسبت به محور (S) متقارن نیستند. البته چون تیر مزبور فقط تحت بارهای قائم قرار دارد، پس واکنش افقی تکیه‌گاه A، $A_x = ۰$ بوده و عملاً تکیه‌گاه مفصلی A مانند یک غلتک است، یعنی تقارن تکیه‌گاهها نیز تأمین شده و می‌توان تیر مزبور را از نظر سازه‌ای متقارن در نظر گرفت.



ثابت = E

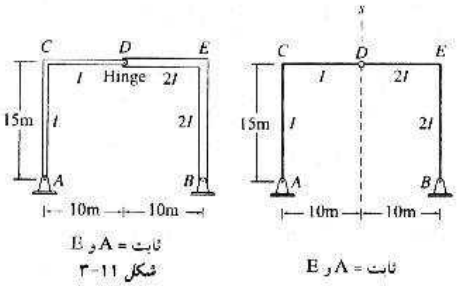


ثابت = E

شکل ۱۱-۲

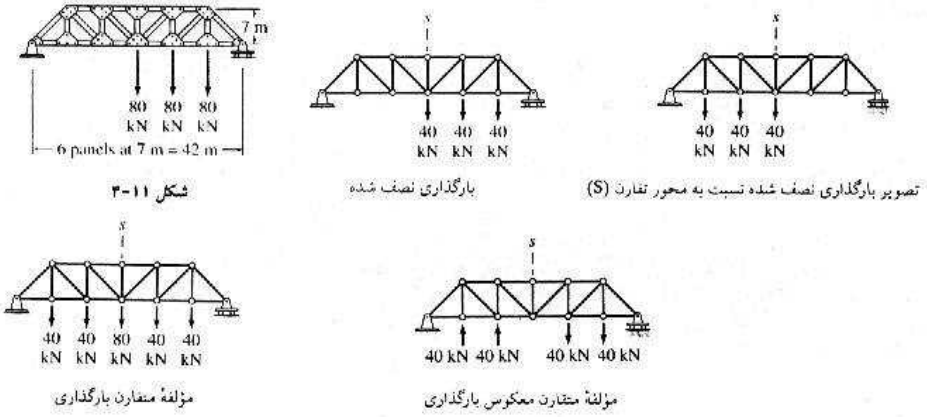
۱۱-۳ آیا قاب نشان داده شده در شکل زیر متقارن است؟

همان‌طور که دیده می‌شود، ابعاد اعضا و هندسهٔ قاب و همچنین شرایط تکیه‌گاهی و مشخصات مصالح (E) اعضا، ویژگی تقارن نسبت به محور S را تأمین می‌کنند. ولی چون ممان اینرسی (I) اعضای قاب نسبت به محور (S) فاقد تقارن است، پس قاب مورد نظر حالت تقارن سازه‌ای ندارد.



شکل ۱۱-۳

۱۱-۴ یک خرپای پرات همانند شکل زیر تحت اثر یک بارگذاری دلخواه قرار دارد. برای بارگذاری نشان داده شده مؤلفه‌های بارگذاری متقارن و متقارن معکوس را نسبت به محور تقارن خرپا تعیین کنید.



شکل ۱۱-۴

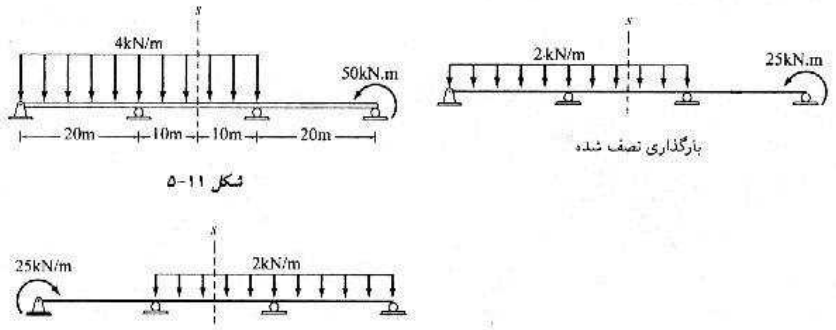
بارگذاری نصف شده

تصویر بارگذاری نصف شده نسبت به محور تقارن (S)

مؤلفهٔ متقارن بارگذاری

مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

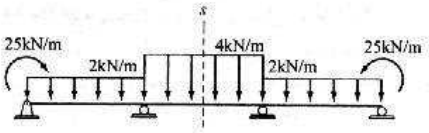
۱۱-۵ یک تیر دو دهانه به همراه بارگذاری آن در شکل زیر نشان داده شده است. مؤلفه‌های بارگذاری متقارن و متقارن معکوس این تیر را نسبت به محور تقارن تیر تعیین کنید.



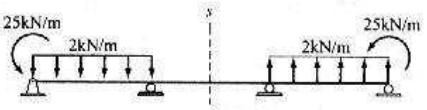
شکل ۱۱-۵

بارگذاری نصف شده

تصویر بارگذاری نصف شده نسبت به محور تقارن (S)

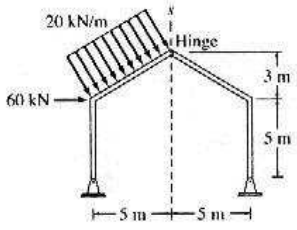


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری

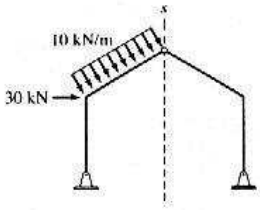


مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

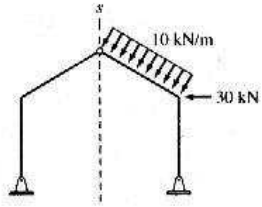
۱۱-۶ برای قاب شیدار نشان داده شده در شکل زیر، مؤلفه‌های متقارن و متقارن معکوس بارهای وارد بر آن را نسبت به محور تقارن قاب به دست آورید.



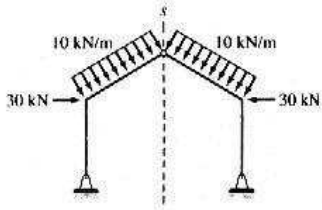
شکل ۱۱-۶



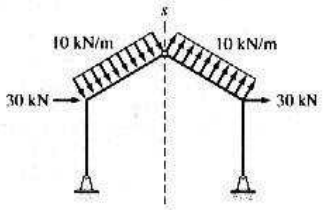
بارگذاری نصف شده



نصویر بارگذاری نصف شده نسبت به محور تقارن (S)



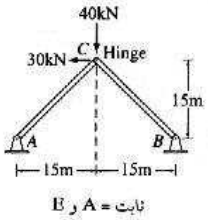
مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

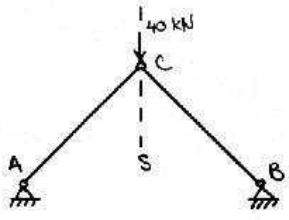
برای سازه‌های نشان داده شده در مسایل ۱۱-۷ تا ۱۱-۱۷ ، مؤلفه‌های متقارن و متقارن معکوس بارهای وارد بر سازه را نسبت به محور تقارن سازه به دست آورید.

۱۱-۷

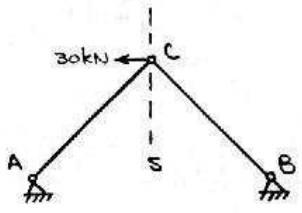


ثابت = A و E

شکل ۱۱-۷

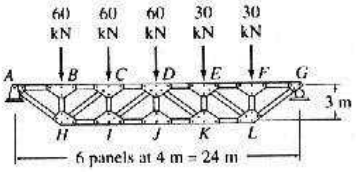


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



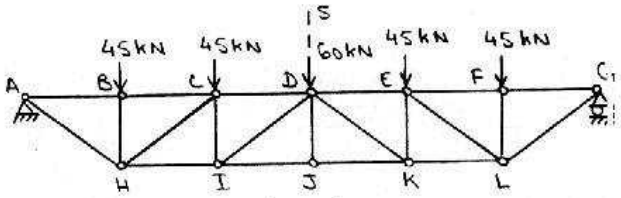
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۸-۱۱

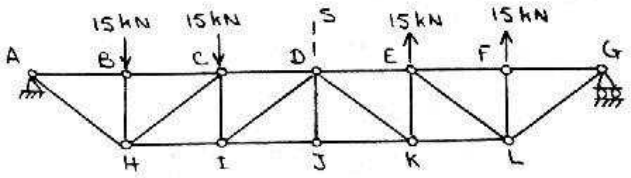


ثابت = A و E

شکل ۱۱-۸

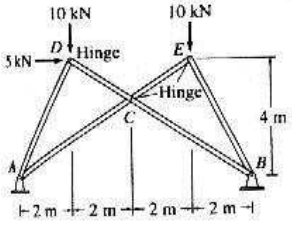


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



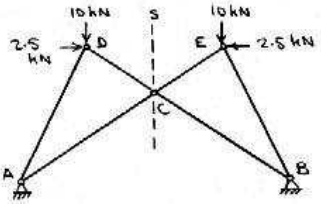
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۹-۱۱

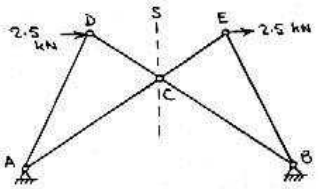


ثابت = A و E

شکل ۱۱-۹

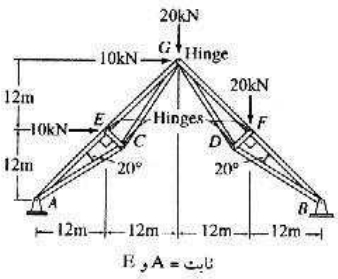


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



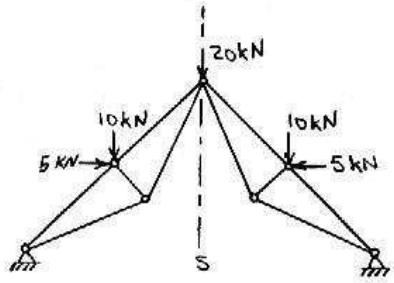
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۱۰-۱۱

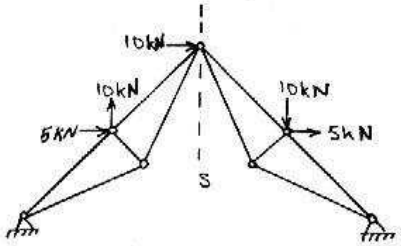


ثابت = A و E

شکل ۱۱-۱۰

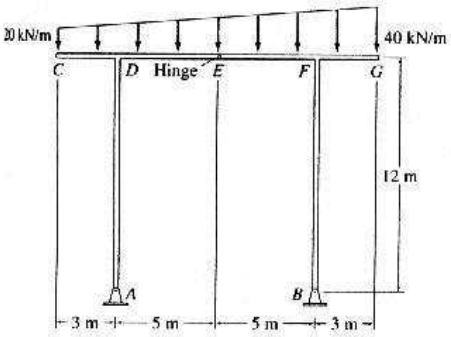


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



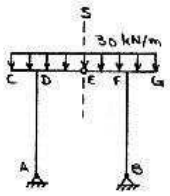
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۱۱-۱۱

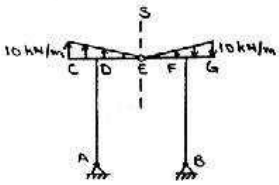


ثابت = A و I ،E

شکل ۱۱-۱۱

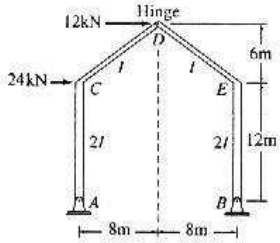


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



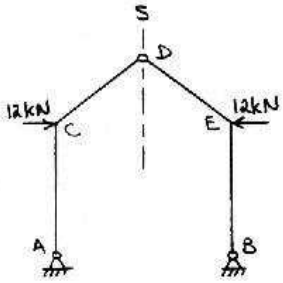
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۱۲-۱۱

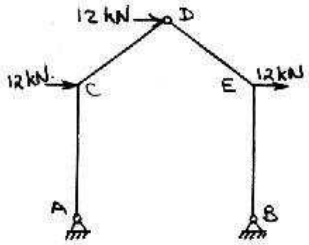


E و A = ثابت

شکل ۱۲-۱۱

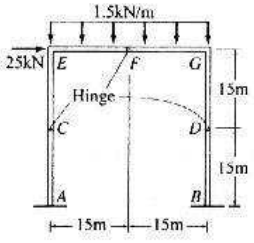


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



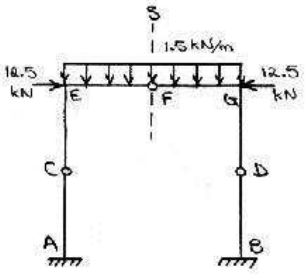
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۱۳-۱۱

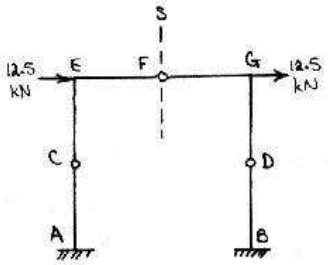


E, I و A = ثابت

شکل ۱۳-۱۱

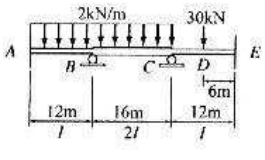


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



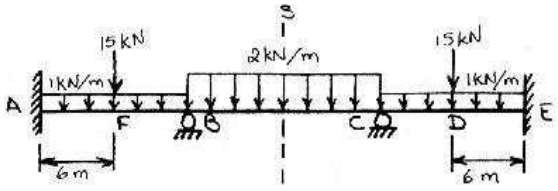
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۱۴-۱۱

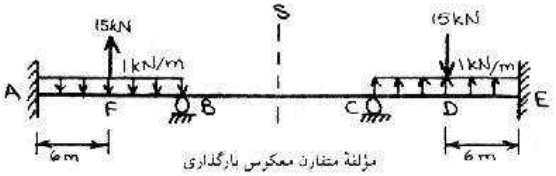


E = ثابت

شکل ۱۴-۱۱

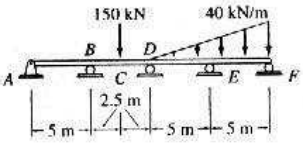


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



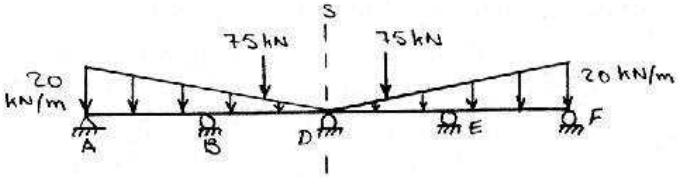
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۱۵-۱۱

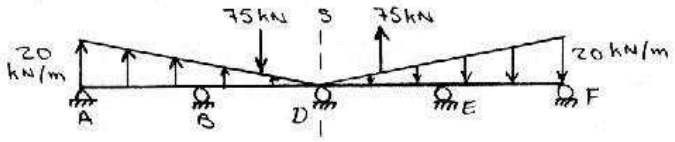


ثابت = I و E

شکل ۱۱-۱۵

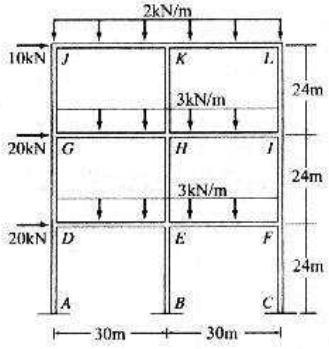


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



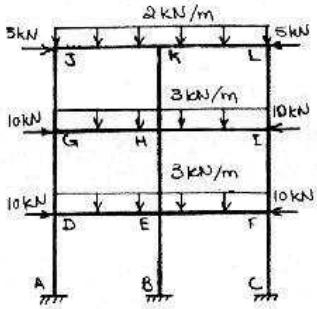
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۱۶-۱۱

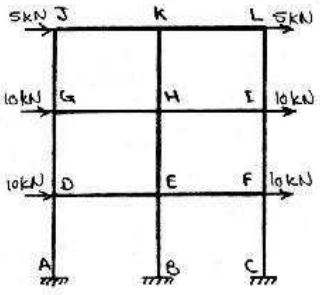


ثابت = A و E , I

شکل ۱۱-۱۶

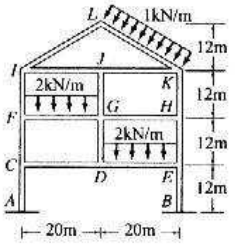


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



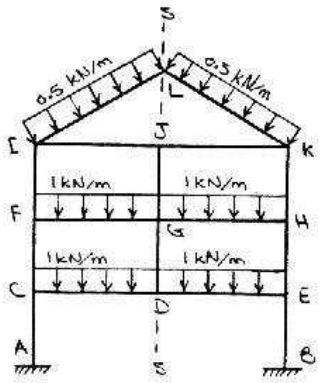
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۱۷-۱۱

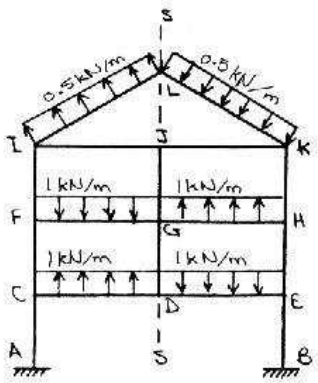


ثابت = A و E, I

شکل ۱۱-۱۷



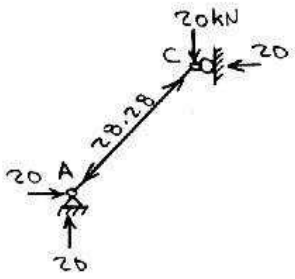
مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



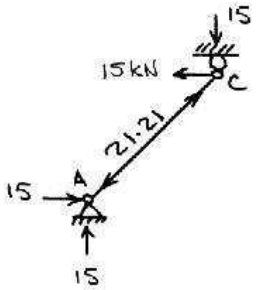
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

خرپاهای نشان داده شده در مسایل ۱۱-۷ تا ۱۱-۱۰ را تحلیل کنید. (از بر هم نهی نتایج تحلیل خرپا تحت اثر مؤلفه‌های متقارن و متقارن معکوس بارگذاری استفاده کنید.)

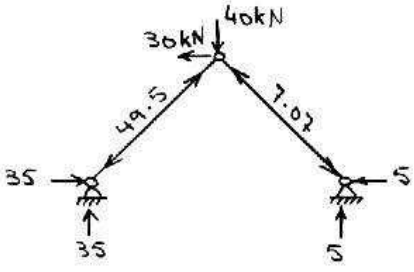
۱۱-۱۸ تحلیل خرپای مسئلهٔ ۱۱-۷



تحلیل خرپای معادل تحت بارگذاری متقارن

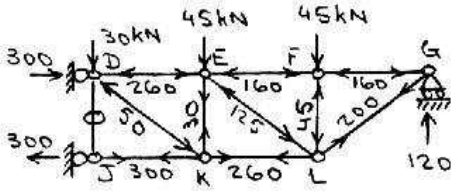


تحلیل خرپای معادل تحت بارگذاری پاد متقارن

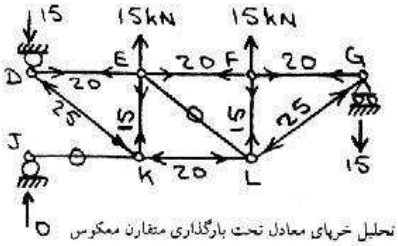


نتایج تحلیل نهایی خرپای اصلی

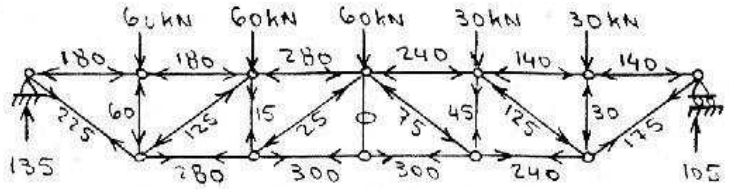
۱۱-۱۹ تحلیل خرپای مسئلهٔ ۱۱-۸



تحلیل خرپای معادل تحت بارگذاری متقارن

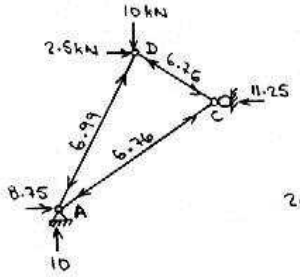


تحلیل خرپای معادل تحت بارگذاری متقارن معکوس

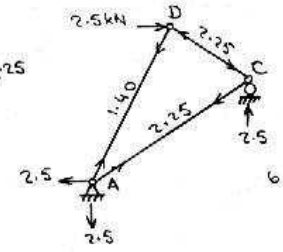


نتایج تحلیل نهایی خرپای اصلی

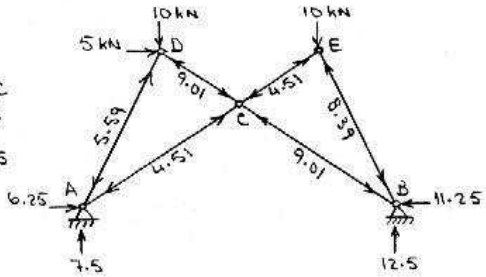
۱۱-۲۰ تحلیل خرپای مسئلهٔ ۱۱-۹



تحلیل خرپای معادل تحت بارگذاری متقارن

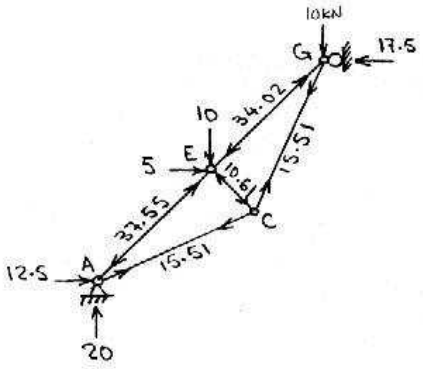


تحلیل خرپای معادل تحت بارگذاری پاد متقارن

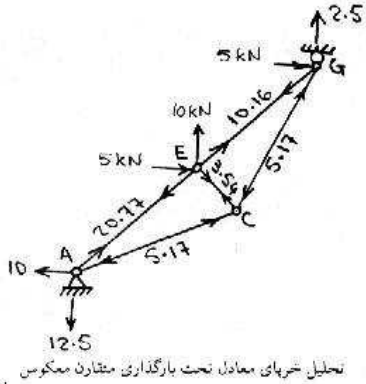


نتایج تحلیل نهایی خرپای اصلی

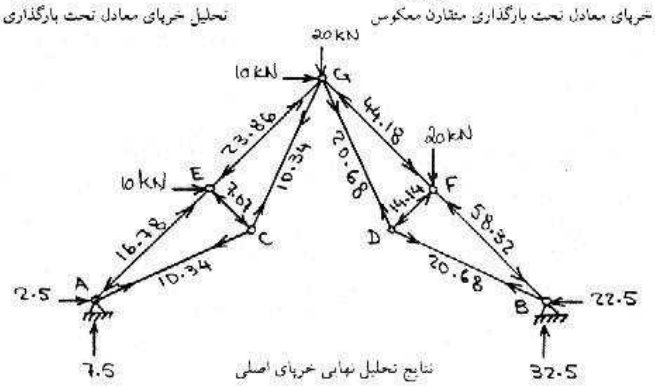
۱۱-۲۱ تحلیل خرپای مسئلهٔ ۱۱-۱۰



تحلیل خرپای معادل تحت بارگذاری متقارن

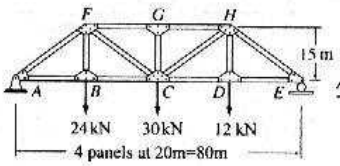


تحلیل خرپای معادل تحت بارگذاری متقارن معکوس

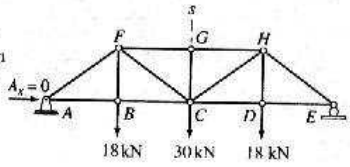


نتایج تحلیل نهایی خرپای اصلی

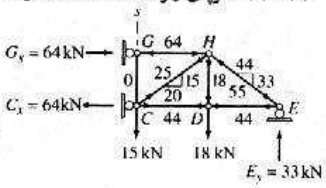
۱۱-۲۲ خرپای وارن نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از ویژگی تقارن سازه‌ای آن تحلیل کنید.



شکل ۱۱-۲۲

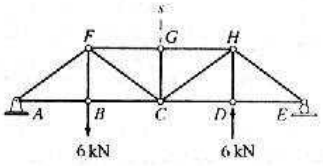


مؤلفهٔ متقارن بارگذاری

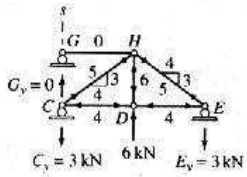


تحلیل خرپای معادل تحت بارگذاری متقارن

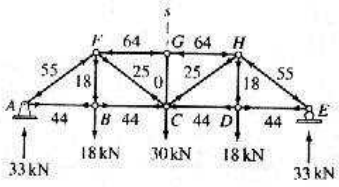
● در خرپاهای معادل واکنشهای تکیه‌گاهی از معادلات تعادل $\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$ و $\sum M_C = 0$ (+ به دست می‌آیند.



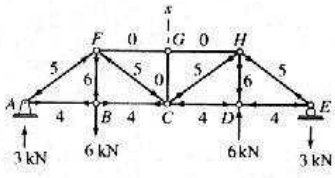
مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری



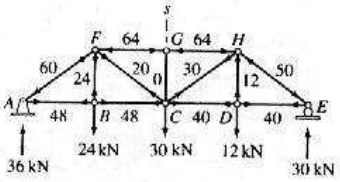
تحلیل خرپای معادل تحت بارگذاری متقارن معکوس



تحلیل خرپای اصلی تحت بارگذاری متقارن

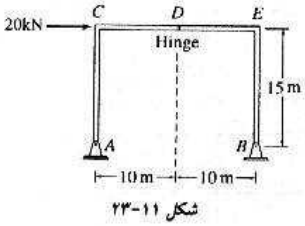


تحلیل خرپای اصلی تحت بارگذاری منفارن معکوس

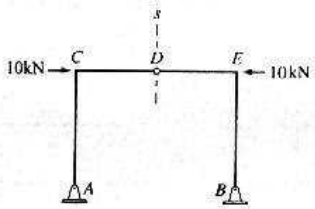


نتایج تحلیل نهایی خرپای اصلی

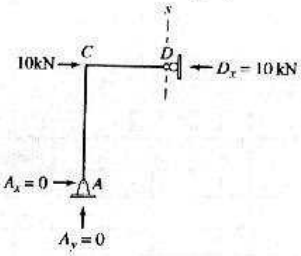
۱۱-۲۳ در قاب نشان داده شده با توجه به ویژگی تقارن سازه‌ای، نیروها و لنگرهای انتهای اعضا را به دست آورید.



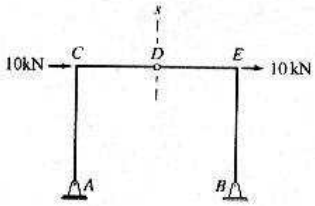
شکل ۱۱-۲۳



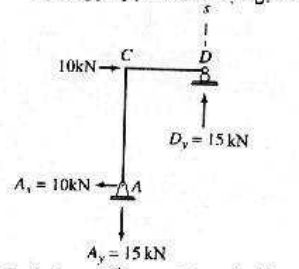
مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



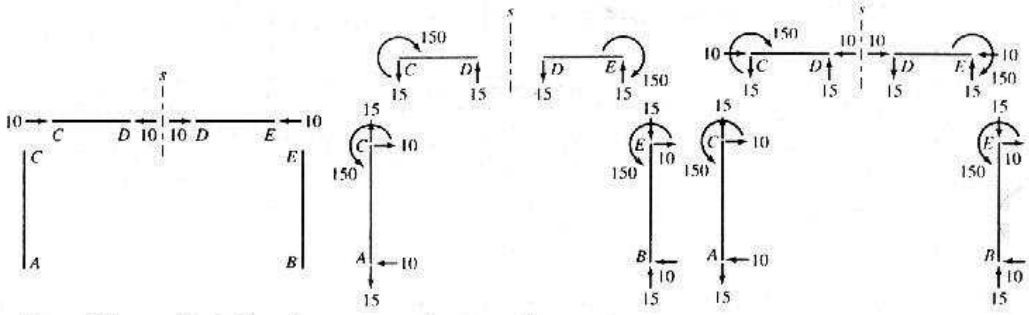
تحلیل قاب معادل تحت بارگذاری متقارن



مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

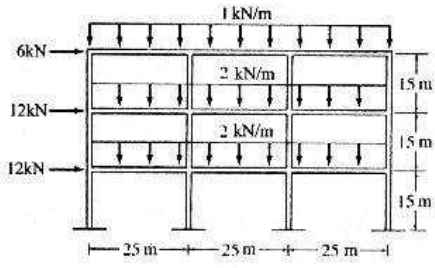


تحلیل قاب معادل تحت بارگذاری متقارن معکوس

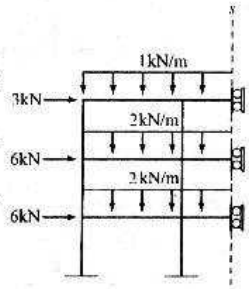


نتایج تحلیل قاب اصلی تحت بارگذاری متقارن — نتایج تحلیل قاب اصلی تحت بارگذاری متقارن معکوس — نتایج تحلیل نهایی قاب

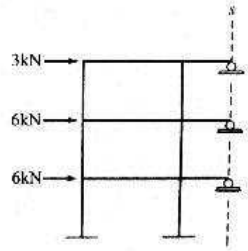
۱۱-۲۴ برای قاب نشان داده شده در شکل زیر، پس از تعیین مؤلفه‌های متقارن و متقارن معکوس بارگذاری، قاب معادل را برای هر حالت تعیین کنید.



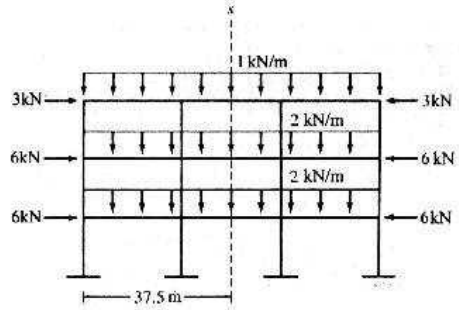
شکل ۱۱-۲۴



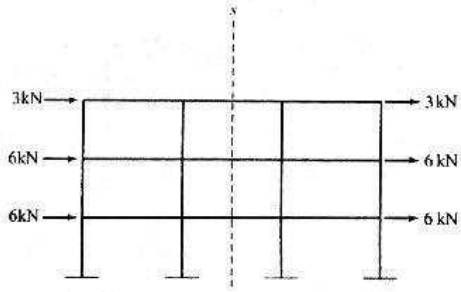
قاب معادل تحت بارگذاری متقارن



قاب معادل تحت بارگذاری متقارن معکوس



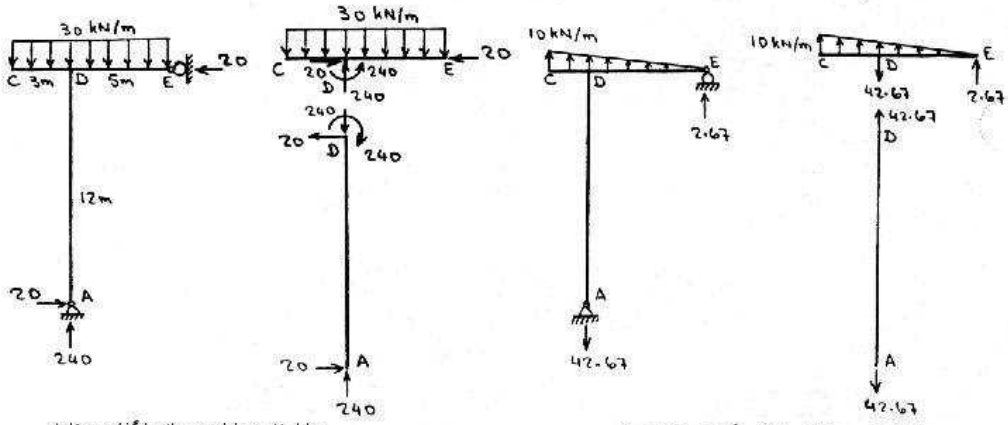
مؤلفهٔ متقارن بارگذاری



مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

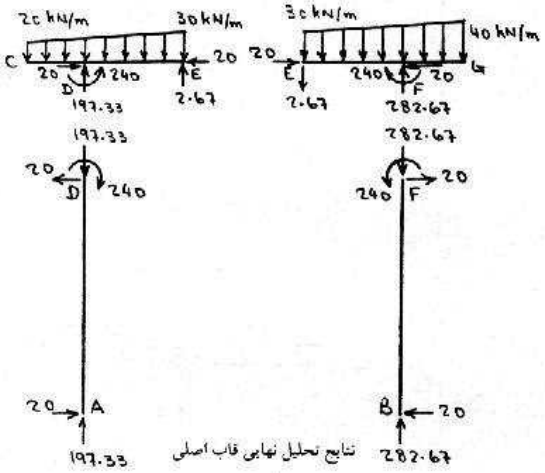
قاب نشان داده شده در مسایل ۱۱-۱۱ تا ۱۱-۱۳ را با توجه به ویژگی تقارن آنها تحلیل کنید.

۱۱-۲۵ تحلیل قاب مسئلهٔ ۱۱-۱۱



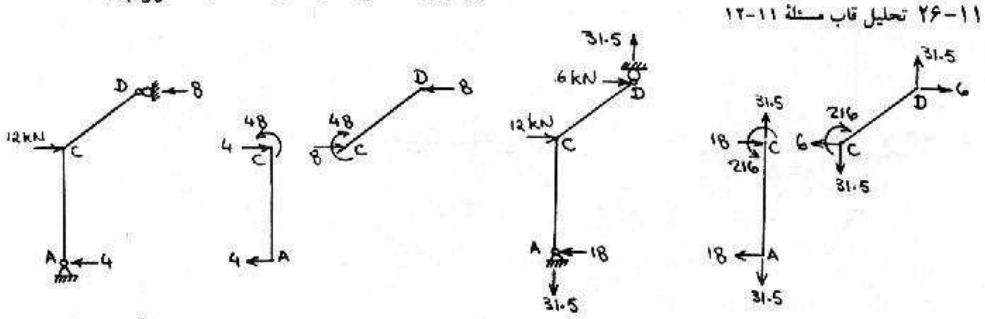
تحلیل قاب معادل تحت اثر بارگذاری متقارن

تحلیل قاب معادل تحت اثر بارگذاری متقارن معکوس



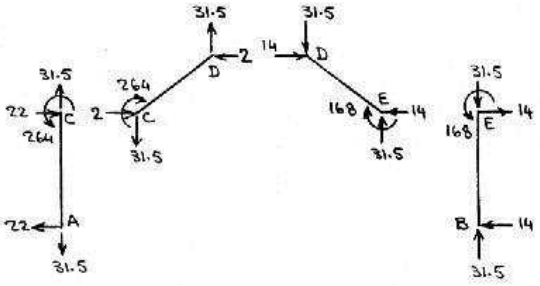
نتایج تحلیل نهایی قاب اصلی

۱۱-۲۶ تحلیل قاب مسئلهٔ ۱۱-۱۲



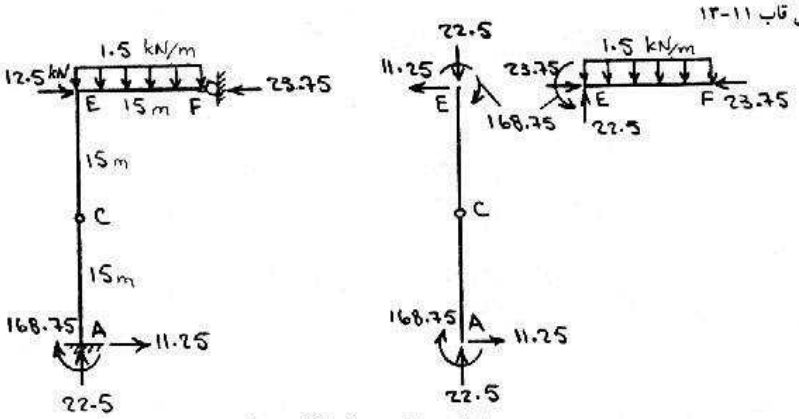
تحلیل قاب معادل تحت اثر بارگذاری متقارن

تحلیل قاب معادل تحت اثر بارگذاری متقارن معکوس

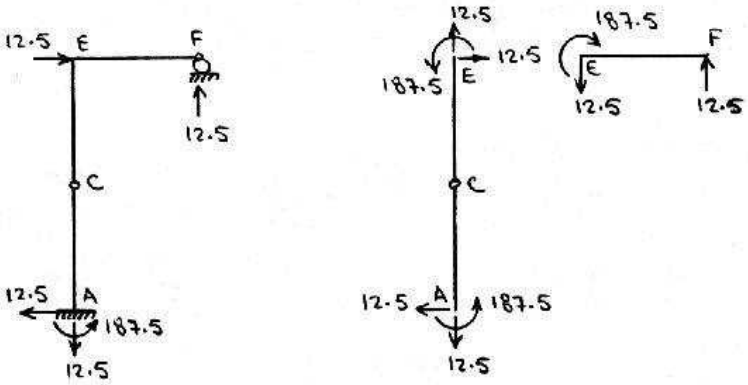


نتایج تحلیل نهایی قاب اصلی

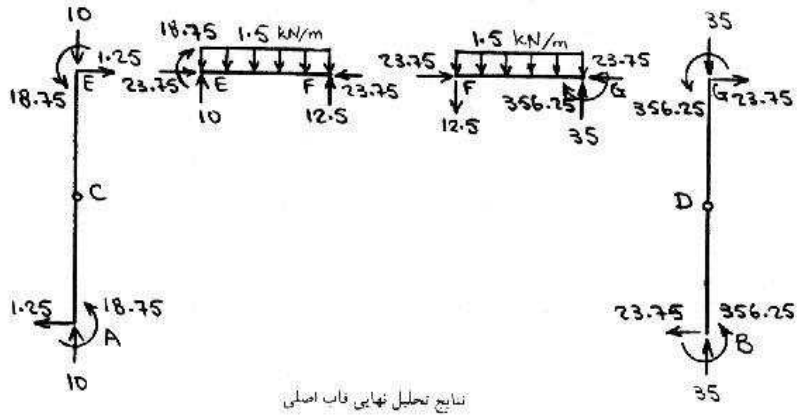
۱۱-۲۷ تحلیل قاب ۱۱-۱۳



تحلیل قاب معادل تحت اثر بارگذاری متقارن

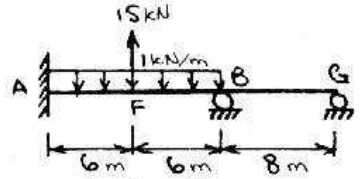


تحلیل قاب معادل تحت اثر بارگذاری متقارن معکوس



نتایج تحلیل نهایی قاب اصلی

۱۱-۲۸ تیر نشان داده شده در مسئلهٔ ۱۱-۱۴ را با توجه به ویژگی تقارن آن تحلیل کنید.



تیر معادل تحت بارگذاری متقارن معکوس

شیب - افت:

$$FEM_{AB}=-FEM_{BA}=-\frac{1(12)^2}{12}+\frac{15(12)}{8}=10/5 \quad kNm$$

$$M_{AB}=\frac{2EI}{12}\left(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB}\right)+10/5=\frac{EI}{6}\theta_B+10/5$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{12}\left(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{AB}\right)-10/5=\frac{EI}{3}\theta_B-10/5$$

$$M_{BG}=\frac{3E(2I)}{8}\theta_B=\frac{3EI}{4}\theta_B$$

$$+\circlearrowleft\sum M_B=0 \;:\; M_{BA}+M_{BG}=0 \Rightarrow \frac{13EI}{12}\theta_B-10/5=0$$

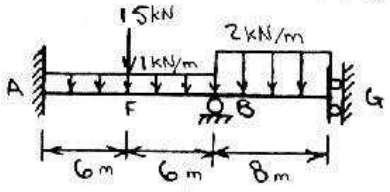
$$\theta_B=\frac{9/69}{EI}$$

$$M_{AB}=12/12 \quad kNm \quad , \quad M_{BA}=-M_{BG}=-7/27 \quad kNm$$

توزیع لنگر:

$$DF_{BA}=\frac{\left(\frac{I}{12}\right)}{\left(\frac{I}{12}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2I}{8}\right)}=0/307$$

$$DF_{BG}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2I}{8}\right)}{\left(\frac{I}{12}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2I}{8}\right)}=0/693$$



تیر معادل تحت بارگذاری متقارن

شیب - افت:

$$FEM_{BG}=-FEM_{GB}=-\frac{2(16)^2}{12}=-42/66 \quad kNm$$

$$FEM_{AB}=-FEM_{BA}=-\frac{15(12)}{8}-\frac{1(12)^2}{12}=-34/5 \quad kNm$$

$$M_{AB}=\frac{2EI}{12}\left(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB}\right)-34/5=\frac{EI}{6}\theta_B-34/5$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{12}\left(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{AB}\right)+34/5=\frac{EI}{3}\theta_B+34/5$$

$$M_{BG}=\frac{2E(2I)}{16}\left(2\theta_B-\theta_B-3\psi_{BC}\right)-42/66=\frac{EI}{4}\theta_B-42/66$$

$$+\circlearrowleft\sum M_B=0 \;:\; M_{BA}+M_{BG}=0 \Rightarrow \frac{7EI}{12}\theta_B-8/16=0$$

$$\theta_B=\frac{13/99}{EI}$$

$$M_{AB}=32/17 \quad kNm \quad , \quad M_{BA}=-M_{BG}=39/16 \quad kNm$$

توزیع لنگر:

$$DF_{BA}=\frac{\left(\frac{I}{12}\right)}{\left(\frac{I}{12}\right)+0/5\left(\frac{2I}{16}\right)}=0/571$$

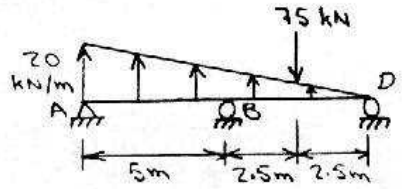
$$DF_{BG}=\frac{0/5\left(\frac{2I}{16}\right)}{\left(\frac{I}{12}\right)+0/5\left(\frac{2I}{16}\right)}=0/429$$

	AB	BA	BG	GB
		۰/۳۰۷	۰/۶۹۳	
DF				
FEM	۱۰/۵	-۱۰/۵	۰	۰
		۳/۲۳	۷/۲۷	
	۱/۶۲			
	۱۲/۱۲	-۷/۲۷	۷/۲۷	۰

لنگر خمشی نهایی در تیر اصلی:

$$M_{AB} = -۳۲/۱۷ + ۱۲/۱۲ = -۲۰/۰۵ \ kN.m \quad , \quad M_{BA} = -M_{BC} = ۳۹/۱۶ - ۷/۲۷ = ۳۱/۸۹ \ kN.m$$
$$M_{CB} = -M_{CE} = ۳۹/۱۶ + ۷/۲۷ = ۴۶/۴۳ \ kN.m \quad , \quad M_{EC} = ۳۲/۱۷ + ۱۲/۱۲ = ۴۴/۲۹ \ kN.m$$

۱۱-۲۹ تیر نشان داده شده در مسئلهٔ ۱۱-۱۵ را با توجه به ویژگی تقارن آن تحلیل کنید.



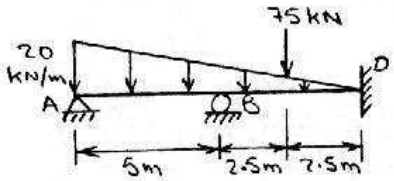
تیر معادل تحت بارگذاری متقارن معکوس

شیب - افت:

$$FEM_{AB} = \frac{۱۰(۵)^۲}{۱۲} + \frac{۱۰(۵)^۲}{۲۰} = ۳۳/۳۳ \ kN.m$$
$$FEM_{BA} = \frac{۱۰(۵)^۲}{۱۲} - \frac{۱۰(۵)^۲}{۳۰} = -۲۹/۱۶ \ kN.m$$
$$FEM_{BD} = \frac{۱۰(۵)^۲}{۲۰} - \frac{۷۵(۵)}{۸} = -۳۴/۳۸ \ kN.m$$
$$FEM_{DB} = -\frac{۱۰(۵)^۲}{۳۰} + \frac{۷۵(۵)}{۸} = ۳۸/۵۴ \ kN.m$$
$$M_{BA} = \frac{۳EI}{۵}\theta_B - ۲۹/۱۶ - \frac{۳۳/۳۳}{۲} = ۰/۶EI\theta_B - ۴۵/۸۳$$
$$M_{BD} = \frac{۳EI}{۵}\theta_B - ۳۴/۳۸ - \frac{۳۸/۵۴}{۲} = ۰/۶EI\theta_B - ۵۳/۶۵$$
$$+\circlearrowright \sum M_B = ۰ \ : \ M_{BA} + M_{BD} = ۰$$
$$۱/۲EI\theta_B - ۹۹/۴۸ = ۰ \ \Rightarrow \ \theta_B = \frac{۸۲/۹۰}{EI}$$
$$M_{BA} = -M_{BD} = ۲/۶۱ \ kN.m$$

توزیع لنگر:

$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right]}{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right]} = ۰/۵$$
$$DF_{BD} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right]}{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right] + \left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right]} = ۰/۵$$



تیر معادل تحت بارگذاری متقارن

شیب - افت:

$$FEM_{AB} = -\frac{۱۰(۵)^۲}{۱۲} - \frac{۱۰(۵)^۲}{۲۰} = -۳۳/۳۳ \ kN.m$$
$$FEM_{BA} = \frac{۱۰(۵)^۲}{۱۲} + \frac{۱۰(۵)^۲}{۳۰} = ۲۹/۱۶ \ kN.m$$
$$FEM_{BD} = -\frac{۱۰(۵)^۲}{۲۰} - \frac{۷۵(۵)}{۸} = -۵۹/۳۸ \ kN.m$$
$$FEM_{DB} = \frac{۱۰(۵)^۲}{۳۰} + \frac{۷۵(۵)}{۸} = ۵۵/۲۱ \ kN.m$$
$$M_{BA} = \frac{۳EI}{۵}\theta_B + ۲۹/۱۶ + \frac{۳۳/۳۳}{۲} = ۰/۶EI\theta_B + ۴۵/۸۳$$
$$M_{BD} = \frac{۲EI}{۵}\left[۲\theta_B + \theta_D - ۳\psi_{BD}\right] - ۵۹/۳۸ = ۰/۸EI\theta_B - ۵۹/۳۸$$
$$M_{DB} = \frac{۲EI}{۵}\left[۲\theta_D + \theta_B - ۳\psi_{BD}\right] + ۵۵/۲۱ = ۰/۴EI\theta_B + ۵۵/۲۱$$
$$+\circlearrowright \sum M_B = ۰ \ : \ M_{BA} + M_{BD} = ۰$$
$$۱/۴EI\theta_B - ۱۳/۵۵ = ۰ \ \Rightarrow \ \theta_B = \frac{۹/۶۸}{EI}$$
$$M_{BA} = -M_{BD} = ۵۱/۶۴ \ kN.m \quad , \quad M_{DB} = ۵۹/۰۸ \ kN.m$$

توزیع لنگر:

$$DF_{BA} = \frac{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right]}{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right] + \left[\frac{I}{۵}\right]} = ۰/۴۲۹$$
$$DF_{BD} = \frac{\left[\frac{I}{۵}\right]}{\left[\frac{۳}{۴}\right]\left[\frac{I}{۵}\right] + \left[\frac{I}{۵}\right]} = ۰/۵۷۱$$

	AB	BA	BD	DB
		۰/۴۲۹	۰/۵۷۱	
DF				
FEM	-۳۳/۳۳	۲۹/۱۶	-۵۹/۳۸	۵۵/۲۱
	۳۳/۳۳	۱۲/۹۶	۱۷/۲۶	
		۱۶/۶۶		۸/۶۳
		-۷/۱۴	-۹/۵۱	
				-۴/۷۵
	۰	۵۱/۶۴	-۵۱/۶۴	۵۹/۰۸

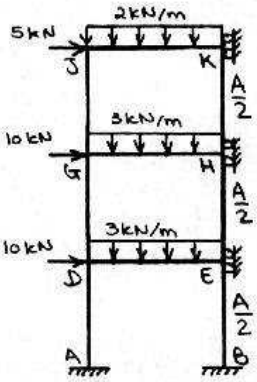
	AB	BA	BD	DB
		۰/۵	۰/۵	
DF				
FEM	۳۳/۳۳	-۲۹/۱۶	-۳۴/۳۸	۳۸/۵۴
	-۳۳/۳۳	۳۱/۷۷	۳۱/۷۷	-۳۸/۵۴
		-۱۶/۶۶	-۱۹/۲۷	
		۱۷/۹۶	۱۷/۹۶	
	۰	۳/۹۱	-۳/۹۱	۰

لنگر خمشی نهایی در تیر اصلی:

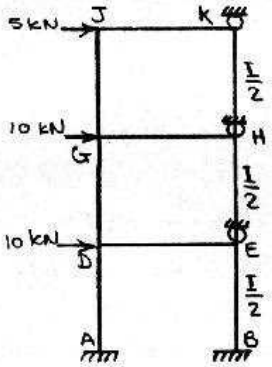
$$M_{BA} = -M_{BD} = ۵۱/۶۴ + ۳/۹۱ = ۵۵/۵۵ \quad kN.m \quad , \quad M_{DB} = -M_{DE} = ۵۹/۰۸ + ۰ = ۵۹/۰۸ \quad kN.m$$
$$M_{ED} = -M_{EF} = ۵۱/۶۴ - ۳/۹۱ = ۴۷/۷۳ \quad kN.m$$

در هر یک از مسایل ۱۱-۱۶ و ۱۱-۱۷ قاب معادل را برای هر یک از مؤلفه‌های متقارن و متقارن معکوس بارگذاری تعیین کنید.

۱۱-۳۰

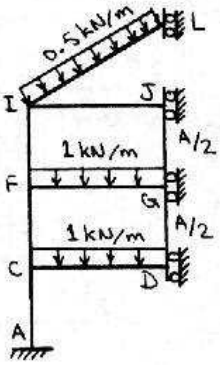


قاب معادل تحت اثر مؤلفهٔ متقارن بارگذاری

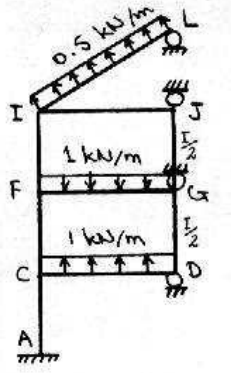


قاب معادل تحت اثر مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۱۱-۳۱

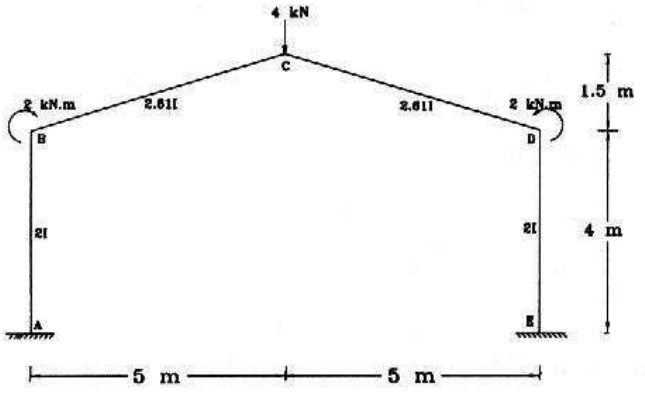


قاب معادل تحت اثر مؤلفهٔ متقارن بارگذاری

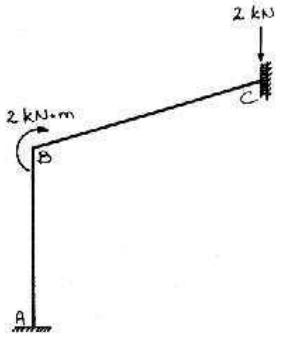


قاب معادل تحت اثر مؤلفهٔ متقارن معکوس بارگذاری

۱۱-۳۲ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش شیب - افت و روش توزیع لنگر تحلیل کرده، نمودار لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



شکل ۱۱-۳۲



قاب معادل با قاب اصلی به علت ویژگی تقارن

شیب - افت:

$$M_{AB}=\frac{2E(2I)}{4}\left(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB}\right)=EI\theta_B-3EI\psi_{AB}\quad,\quad M_{BA}=\frac{2E(2I)}{4}\left(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{AB}\right)=2EI\theta_B-3EI\psi_{AB}$$

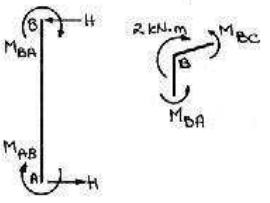
$$M_{BC}=\frac{2E(2/61I)}{5/22}\left(2\theta_B+\theta_C-3\psi_{BC}\right)=2EI\theta_B-3EI\psi_{BC}$$

$$M_{CB}=\frac{2E(2/61I)}{5/22}\left(2\theta_C+\theta_B-3\psi_{BC}\right)=EI\theta_B-3EI\psi_{BC}$$



$$+\circlearrowleft\ \sum M_B^{AB}=0\ :\ 4H-M_{AB}-M_{BA}=0$$

$$H=\frac{M_{AB}+M_{BA}}{4}=0/75EI\theta_B-1/5EI\psi_{AB}\quad(I)$$



$$+\circlearrowleft\ \sum M_A^{ABC}=0\ :\ 5/5H-2(5)-2-M_{AB}-M_{CB}=0$$

$$5/5H-M_{AB}-M_{CB}=10\quad(II)$$

با جایگزینی (I) در (II):

$$2/125EI\theta_B-5/25EI\psi_{AB}+3EI\psi_{BC}=12\quad(a)$$

$$\sum\left(y_j-y_i\right)\psi_{ij}=\left[x_n'-x_n\right]-\left[x_1'-x_1\right]\ \Rightarrow\ 4\psi_{AB}+1/5\psi_{BC}=0\quad(b)$$

$$+\circlearrowleft\ \sum M^B=0\ :\ -2+M_{BC}+M_{BA}=0\ \Rightarrow\ 4EI\theta_B-3EI\psi_{AB}-3EI\psi_{BC}=2\quad(c)$$

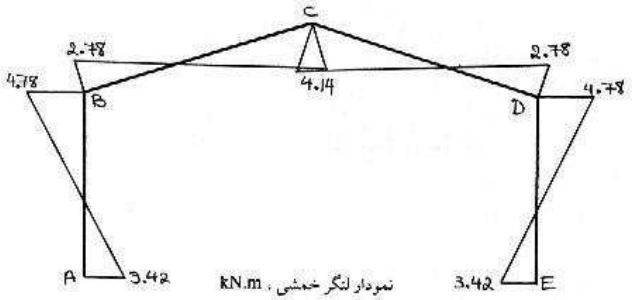
از حل همزمان دستگاه معادلات (a)، (b) و (c) مقادیر θ_B، ψ_{AB} و ψ_{BC} به دست می‌آیند.

$$\theta_B=\frac{1/39}{EI}\quad,\quad\psi_{AB}=-\frac{0/687}{EI}\quad,\quad\psi_{BC}=\frac{1/834}{EI}$$

$$M_{AB}=3/42\ \ kN.m$$
$$M_{BA}=4/78\ \ kN.m$$
$$M_{BC}=-2/78\ \ kN.m$$
$$M_{CB}=-4/14\ \ kN.m$$

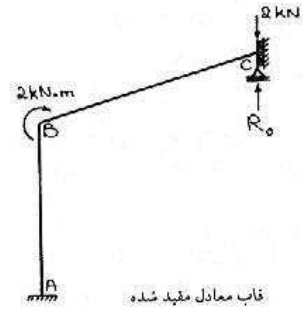
در ادامه این مسئله را با استفاده از روش توزیع لنگر مجدداً حل می‌کنیم.

$$DF_{BA}=\frac{\left[\frac{2I}{4}\right]}{\left[\frac{2I}{4}\right]+\left[\frac{2/61I}{5/22}\right]}=0/5$$



نمودار لنگر خمشی، kN.m

$$DF_{BC}=\frac{\left[\frac{۲/۶۱I}{۵/۲۲}\right]}{\left[\frac{۲I}{۴}\right]+\left[\frac{۲/۶۱I}{۵/۲۲}\right]}=۰/۵$$

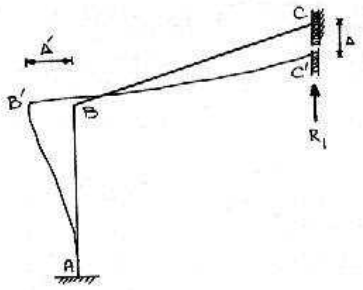


قاب معادل مقید شده

	AB	BA	لنگر خارجی	BC	CB
		۰/۵	-	۰/۵	
DF					
FBM	۰	۰	-۲	۰	۰
		۱/۰		۱/۰	
	۰/۵				۰/۵
	۰/۵	۱/۰	-۲	۱/۰	۰/۵

$$R_0=۲/۱۸۷۵\quad kN\uparrow$$

$$R_0+xR_1=0\ \Rightarrow\ -۴/۷۷x+۲/۱۸۷۵=0\ \Rightarrow\ x=۰/۴۵۸$$



قاب معادل تحت اثر تغییر مکان افقی Δ' در گره B

$$۴\psi_{AB}+۱/۵\psi_{BC}=0$$

$$FEM_{AB}=FEM_{BA}=\frac{۶E(۲I)\psi_{AB}}{۴}$$

$$FEM_{BC}=FEM_{CB}=\frac{۶E(۲/۶۱I)\psi_{BC}}{۵/۲۲}$$

اگر فرض کنیم: $FBM_{AB}=FEM_{BA}=۴/۵\ kN.m$ در این صورت:

$$FEM_{BC}=FEM_{CB}=-۱۲\quad kN.m$$

	AB	BA	BC	CB
		۰/۵	۰/۵	
DF				
FBM	۴/۵	۴/۵	-۱۲	-۱۲
		۳/۷۵	۳/۷۵	
	۱/۸۸			۱/۸۸
	۶/۳۸	۸/۲۵	-۸/۲۵	-۱۰/۱۲

$$R_1=-۴/۷۷\quad kN\quad \text{یا}\quad \vec{R}_1=۴/۷۷\quad kN\downarrow$$

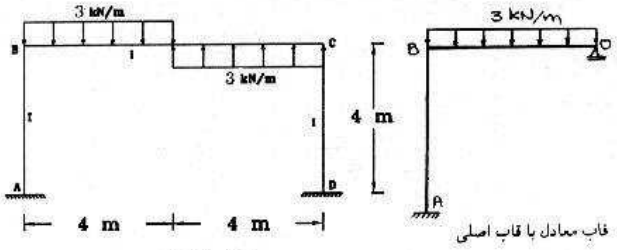
لنگر خمشی نهایی در قاب اصلی:

$$M_{AB}=۰/۵+۰/۴۵۸(۶/۳۸)=۳/۴۲\quad kN.m\ ,\ M_{BA}=۱/۰+۰/۴۵۸(۸/۲۵)=۴/۷۸\quad kN.m$$

$$M_{BC}=-۲+۱+۰/۴۵۸(-۸/۲۵)=-۴/۷۸\quad kN.m\ ,\ M_{CB}=۰/۵+۰/۴۵۸(-۱۰/۱۲)=-۴/۱۴\quad kN.m$$

۱۱-۳۳ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش شیب - افت و توزیع لنگر تحلیل کرده و نمودار لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.

شیب - افت:



قاب معادل با قاب اصلی

شکل ۱۱-۳۳

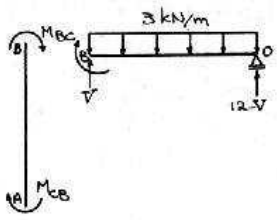
$$FEM_{BO}=-FEM_{OB}=-\frac{۳(۴)^۲}{۱۲}=-۴\quad kN.m$$

$$M_{AB}=\frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_A+\theta_B-۳\psi_{AB}\right]$$

$$M_{AB}=۰/۵EI\theta_B-۱/۵EI\psi_{AB}$$

$$M_{BA}=\frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_B+\theta_A-۳\psi_{AB}\right]$$

$$M_{BA}=EI\theta_B-۱/۵EI\psi_{AB}$$



$$M_{BC}=\frac{2EI}{4}\theta_B-4-\frac{1}{2}(4)=0/75EI\theta_B-6$$

$$+\circlearrowleft \sum M_O^{BC}=0 \;:\; -M_{BC}+3(4)(2)-4V=0 \Rightarrow V=6-\frac{M_{BC}}{4} \quad (I)$$

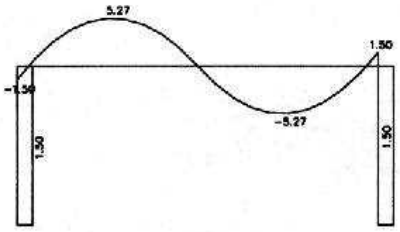
$$+\circlearrowleft \sum M_A^{ABO}=0 \;:\; (12-V)(4)-3(4)(2)-M_{AB}=0 \Rightarrow 4V+M_{AB}=24 \quad (II)$$

با جایگزینی (I) در (II) به دست می‌آید:

$$4\left[6-\frac{M_{BC}}{4}\right]+M_{AB}=24 \Rightarrow 0/25EI\theta_B+1/5EI\psi_{AB}=6 \quad (a)$$

$$+\circlearrowleft \sum M^B=0 \;:\; M_{BA}+M_{BC}=0 \Rightarrow 1/75EI\theta_B-1/5EI\psi_{AB}=6 \quad (b)$$

از حل همزمان دستگاه معادلات (a) و (b) مقادیر θ_B و ψ_{AB} به دست می‌آیند.



$$\theta_B=\frac{6}{EI} \quad , \quad \psi_{AB}=\frac{3}{EI}$$

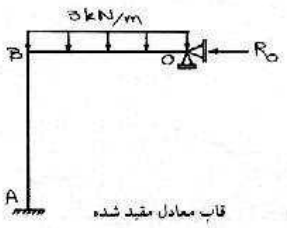
$$M_{AB}=-1/5 \;\; kN.m \;\; , \;\; M_{BA}=1/5 \;\; kN.m \;\; , \;\; M_{BO}=-1/5 \;\; kN.m$$

در ادامه این مسئله را مجدداً با استفاده از روش توزیع لنگر حل می‌کنیم.

$$DF_{BA}=\frac{\left(\frac{I}{4}\right)}{\left(\frac{I}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{I}{4}\right)}=0/571$$

$$DF_{BO}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{I}{4}\right)}{\left(\frac{I}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{I}{4}\right)}=0/429$$

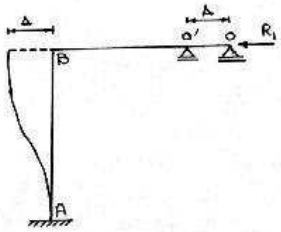
نمودار لنگر خمشی ، kN.m



قاب معادل مقید شده

	AB	BA	BO	OB
		0/571	0/429	
DF				
FEM	0	0	-4	4
		2/28	1/72	-4
	1/14		-2	
		1/14	0/86	
	0/57			
	1/71	3/42	-3/42	0

$$\vec{R_o}=1/285 \;\; kN \leftarrow$$



قاب معادل تحت اثر تغییر مکان جانبی Δ در گره B

$$FEM_{AB}=FEM_{BA}=\frac{6EI\Delta}{(4)^2}$$

$$FEM_{AB}=FEM_{BA}=3 \;\; kN.m$$

فرض می‌کنیم:

	AB	BA	BO	OB
		0/571	0/429	
DF				
FEM	3	3	0	0
		-1/71	-1/29	
	-0/86			
	2/14	1/29	-1/29	

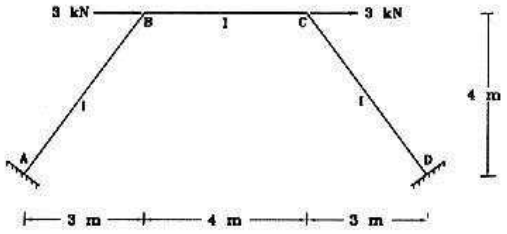
$$\vec{R_1}=0/856 \;\; kN \leftarrow$$

$$R_o+xR_1=0 \Rightarrow 1/285+0/856x=0 \Rightarrow x=-1/501$$

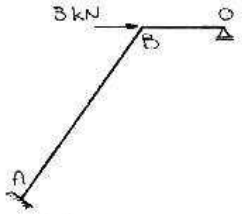
لنگر خمشی نهایی در قاب اصلی:

$$M_{AB}=1/71+(-1/501)(2/14)=-1/5 \;\; kN.m \;, \;\; M_{BA}=-M_{BC}=3/42+(-1/501)(1/29)=1/49 \;\; kN.m$$

۱۱-۳۴ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با روش شیب - افت و توزیع لنگر تحلیل کرده نمودار لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.

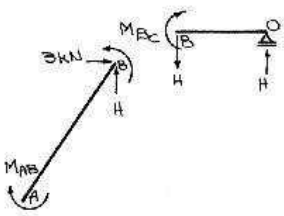


شکل ۱۱-۳۴



قاب معادل با قاب اصلی

شیب - افت:



$$M_{AB}=\frac{2EI}{5}\left(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB}\right)=0/4EI\theta_B-1/2EI\psi_{AB}$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{5}\left(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{AB}\right)=0/8EI\theta_B-1/2EI\psi_{AB}$$

$$M_{BC}=\frac{3EI}{2}\theta_B-\frac{3EI}{2}\psi_{BO}=1/5EI\theta_B-1/5EI\psi_{BO}$$

$$\sum\left[x_i-x_j\right]\psi_{ij}=\left[y'_n-y_n\right]-\left[y'_1-y_1\right]\Rightarrow 3\psi_{AB}+2\psi_{BO}=0 \quad (a)$$

$$+\circlearrowleft\sum M^B=0 \;:\; M_{BA}+M_{BC}=0$$

$$2/3EI\theta_B-1/5EI\psi_{BO}-1/2EI\psi_{AB}=0 \quad (b)$$

$$+\circlearrowleft\sum M_C^{BC}=0 \;:\; -2H+M_{BC}=0\Rightarrow H=\frac{M_{BC}}{2} \quad (I)$$

$$+\circlearrowleft\sum M_A^{AB}=0 \;:\; 3H+M_{BC}-M_{AB}-3(2)=0 \quad (II)$$

$$3/35EI\theta_B-3/75EI\psi_{BO}+1/2EI\psi_{AB}=12 \quad (c)$$

با جایگزینی رابطهٔ (I) در (II) به دست می‌آید:

از حل همزمان دستگاه معادلات (a)، (b) و (c) مقادیر θ_B، ψ_{AB} و ψ_{BC} به دست می‌آیند.

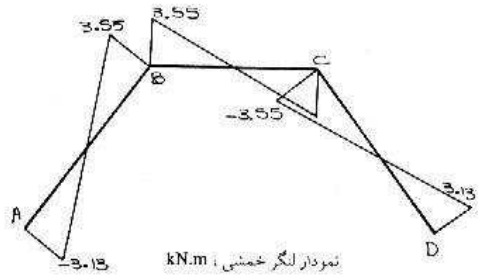
$$\theta_B=-\frac{1/03}{EI}\;,\quad \psi_{AB}=\frac{2/266}{EI}\;,\quad \psi_{BO}=-\frac{3/4}{EI}$$

$$M_{AB}=-3/13\ kN.m\;,\quad M_{BA}=-M_{BC}=-3/55\ kN.m$$

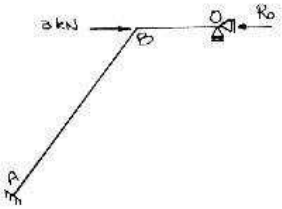
در ادامه مسئله را مجدداً با روش توزیع لنگر حل می‌کنیم.

$$DF_{BA}=\frac{\left(\frac{I}{5}\right)}{\left(\frac{I}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{I}{2}\right)}=0/348$$

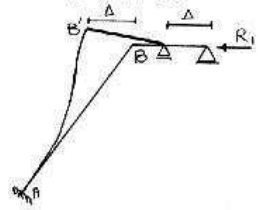
$$DF_{BO}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{I}{5}\right)}{\left(\frac{I}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{I}{5}\right)}=0/652$$



نمودار لنگر خمشی ؛ kN.m



قاب معادل مقید شده



قاب معادل تحت اثر تغییر مکان افقی Δ در B

$$3\psi_{AB}+2\psi_{BO}=0$$

$$FEM_{AB}=FEM_{BA}$$

$$FEM_{AB}=\frac{6EI\psi_{AB}}{5}$$

$$FEM_{BO}=FEM_{OB}$$

$$FEM_{BO}=\frac{6EI\psi_{BO}}{2}$$

اگر:

$$FEM_{AB}=FEM_{BA}=3/4\ \ kN.m$$

$$FEM_{BO}=FEM_{OB}=-9\ \ kN.m$$

	AB	BA	BO	OB
DF		۰/۳۴۸	۰/۶۵۲	
FEM	۰	۰	۰	۰
		۰	۰	
	۰	۰	۰	۰

$R_0 = ۳ \quad kN \leftarrow$

$R_0 + x R_1 = ۰ \Rightarrow ۳ + ۲/۶۴۸x = ۰ \Rightarrow x = -۱/۱۳۳$

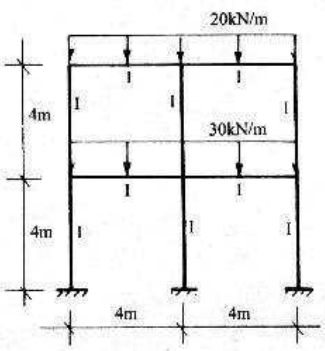
	AB	BA	BO	OB
DF		۰/۳۴۸	۰/۶۵۲	
FEM	۲/۴	۲/۴	-۹	-۹
		۲/۳۰	۴/۳۰	۹
	۱/۱۵		۴/۵	
		-۱/۵۷	-۲/۹۳	
	-۰/۷۹			
	۲/۷۶	۳/۱۳	-۳/۱۳	

$\vec{R_1} = ۲/۶۴۸ \quad kN \leftarrow$

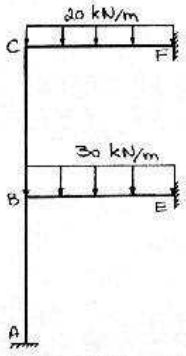
$M_{AB} = ۰ + (-۱/۱۳۳)(۲/۷۶) = -۳/۱۳ \quad kN.m \quad , \quad M_{BA} = ۰ + (-۱/۱۳۳)(۳/۱۳) = -۳/۵۵ \quad kN.m$

$M_{BC} = ۰ + (-۱/۱۳۳)(-۳/۱۳) = ۳/۵۵ \quad kN.m$

۱۱-۳۵ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش شیب - افت و توزیع لنگر تحلیل کرده، واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورید. (از اثر سختی محوری اعضا صرف نظر شود.)



شکل ۱۱-۳۵



قاب معادل با قاب اصلی

$$FEM_{BE} = -FEM_{EB} = -\frac{۳۰(۴)^۲}{۱۲} = -۴۰ \quad kN.m$$

$$FEM_{CF} = -FEM_{FC} = -\frac{۲۰(۴)^۲}{۱۲} = -۲۶/۶۶ \quad kN.m$$

$$M_{AB} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_A + \theta_B - ۳\psi_{AB}\right] = ۰/۵EI\theta_B$$

$$M_{BA} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{AB}\right] = EI\theta_B$$

$$M_{BC} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}\right] = EI\theta_B + ۰/۵EI\theta_C$$

$$M_{CB} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_C + \theta_B - ۳\psi_{BC}\right] = ۰/۵EI\theta_B + EI\theta_C$$

$$M_{BE} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_B + \theta_E - ۳\psi_{BE}\right] - ۴۰ = EI\theta_B - ۴۰$$

$$M_{EB} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_E + \theta_B - ۳\psi_{BE}\right] + ۴۰ = ۰/۵EI\theta_B + ۴۰$$

$$M_{CF} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_C + \theta_F - ۳\psi_{CF}\right] - ۲۶/۶۶ = EI\theta_C - ۲۶/۶۶$$

$$M_{FC} = \frac{۲EI}{۴}\left[۲\theta_F + \theta_C - ۳\psi_{CF}\right] + ۲۶/۶۶ = ۰/۵EI\theta_C + ۲۶/۶۶$$

$$+\circlearrowleft \sum M^B = ۰ \; : \; M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = ۰$$

$$۳EI\theta_B + ۰/۵EI\theta_C = ۴۰ \quad (I)$$

$$+\circlearrowleft \sum M^C = ۰ \; : \; M_{CB} + M_{CF} = ۰ \Rightarrow ۰/۵EI\theta_B + ۲EI\theta_C = ۲۶/۶۶ \quad (II)$$

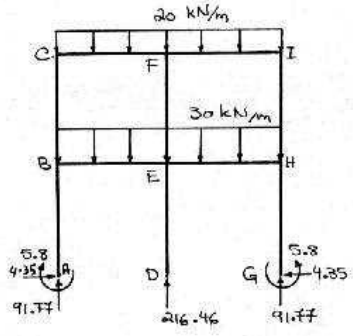
از حل همزمان دستگاه معادلات (I) و (II) به دست می‌آید:

$$\theta_B = \frac{۱۱/۶}{EI} \quad , \quad \theta_C = \frac{۱۰/۴۳}{EI}$$

$M_{AB} = ۵/۸ \quad kN.m \quad , \quad M_{BA} = ۱۱/۶ \quad kN.m \quad , \quad M_{BC} = ۱۶/۸۲ \quad kN.m$

$M_{BE} = -۲۸/۴ \quad kN.m \quad , \quad M_{EB} = ۴۵/۸ \quad kN.m \quad , \quad M_{CF} = -۱۶/۲۳ \quad kN.m$

$M_{CB} = ۱۶/۲۳ \quad kN.m \quad , \quad M_{FC} = ۳۱/۸۸ \quad kN.m$



واکنشهای تکیه‌گاهی

در ادامه مسئله را با روش توزیع لنگر حل می‌کنیم.

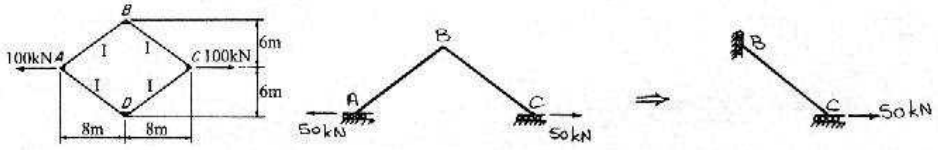
$$DF_{BA}=\frac{\left[\frac{I}{۴}\right]}{\left[\frac{I}{۲}\right]+\left[\frac{I}{۴}\right]+\left[\frac{I}{۴}\right]}=\frac{۱}{۳}\ ,\quad DF_{BE}=\frac{\left[\frac{I}{۴}\right]}{\left[\frac{I}{۲}\right]+\left[\frac{I}{۴}\right]+\left[\frac{I}{۴}\right]}=\frac{۱}{۳}\ ,\quad DF_{BC}=\frac{\left[\frac{I}{۴}\right]}{\left[\frac{I}{۲}\right]+\left[\frac{I}{۴}\right]+\left[\frac{I}{۴}\right]}=\frac{۱}{۳}$$

$$DF_{CB}=DF_{CF}=\frac{\left[\frac{I}{۴}\right]}{\left[\frac{I}{۴}\right]+\left[\frac{I}{۴}\right]}=\frac{۱}{۲}$$

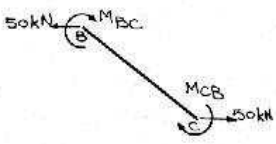
COM

AB	BA	BE	BC	CB	CF	FC	EB
DF	۱/۳	۱/۳	۱/۳	۱/۲	۱/۲		
FEM	۰	-۴۰	۰	۰	-۲۶/۶۶	۲۶/۶۶	۴۰
	۱۳/۳۳	۱۳/۳۳	۱۳/۳۳	۱۳/۳۳	۱۳/۳۳		
	۶/۶۶		۶/۶۶	۶/۶۶		۶/۶۶	۶/۶۶
	-۲/۲۲	-۲/۲۲	-۲/۲۲	-۳/۳۳	-۳/۳۳		
	-۱/۱۱		-۱/۶۶	-۱/۱۱		-۱/۶۶	-۱/۱۱
	۰/۵۵	۰/۵۵	۰/۵۵	۰/۵۶	۰/۵۶		
	۰/۲۸		۰/۲۸	۰/۲۸		۰/۲۸	۰/۲۸
	-۰/۰۹	-۰/۰۹	-۰/۰۹	-۰/۱۴	-۰/۱۴		
	-۰/۰۴		-۰/۰۷	-۰/۰۴		-۰/۰۷	-۰/۰۴
	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲		
	۰/۰۱		۰/۰۱	۰/۰۱		۰/۰۱	۰/۰۱
	۰	۰	۰	-۰/۰۱	-۰/۰۱		
لنگر نهایی	۵/۸۰	۱۱/۵۹	-۲۸/۴۱	۱۶/۸۱	۱۶/۲۳-	۳۱/۸۸	۴۵/۸۰

۱۱-۳۶ سازهٔ نشان داده شده در شکل زیر را تحلیل کرده و نیروهای داخلی را در انتهای اعضای آن تعیین کنید.



شکل ۱۱-۳۶ — سازهٔ معادل با سازهٔ اصلی — سازهٔ معادل با سازهٔ اصلی



$$M_{BC}=\frac{۲EI}{۱۰}\left[۲\theta_B+\theta_C-۳\psi_{BC}\right]=-۰/۶EI\psi_{BC}$$

$$M_{CB}=\frac{۲EI}{۱۰}\left[۲\theta_C+\theta_B-۳\psi_{BC}\right]=-۰/۶EI\psi_{BC}$$

$$+\circlearrowleft\ \sum M_B^{BC}=۰\ :\ ۵۰(۶)-M_{BC}-M_{CB}=۰\ \Rightarrow\ ۳۰۰+۱/۲EI\psi_{BC}=۰$$

$$\psi_{BC}=-\frac{۲۵۰}{EI}$$

$$M_{BC}=۱۵۰\ \ kN.m\ \ ,\ \ M_{CB}=۱۵۰\ \ kN.m$$

۱۲

ترسیم خطوط تأثیر سازه‌های نامعین

خطوط تأثیر در سازه‌های نامعین

برای ترسیم خطوط تأثیر در سازه‌های نامعین از اصل مولر - برسلاو که در فصل ششم توضیح داده شد، استفاده می‌کنیم. کاربرد این اصل در سازه‌های نامعین نیز مشابه سازه‌های معین است. در زیر برای یک تیر با دو درجهٔ آزادی، روش ترسیم خطوط تأثیر در سازه‌های نامعین به طور کلی شرح داده می‌شود.

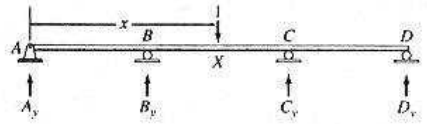
۱- درجهٔ نامعینی سازه را تعیین کرده و نیروهای داخلی یا واکنشهای تکیه‌گاهی را که به عنوان مجهول اضافی می‌خواهیم در نظر بگیریم، انتخاب می‌کنیم.

۲- نقاطی را که مقدار تابع خط تأثیر را در آنها می‌خواهیم، روی سازه انتخاب می‌کنیم.

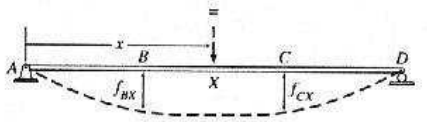
۳- برای تعیین خط تأثیر مجهولات اضافی انتخاب شده، هر مرتبه یک بار واحد را در محل نقاط انتخاب شده در مرحلهٔ ۲ قرار داده و مقدار مجهولات اضافی را با استفاده از روش سازگاری تغییر شکلها محاسبه می‌کنیم. به این ترتیب می‌توان نمودار تغییرات هر یک از مجهولات اضافی انتخاب شده را در مقابل موقعیت بار واحد ترسیم کرد.

۴- وقتی خط تأثیر مجهولات اضافی انتخاب شده، همان‌طور که در مرحلهٔ ۳ شرح داده شد به دست آمد، خط تأثیر نیروها و لنگرهای داخلی اعضا با استفاده از معادلات تعادل قابل ترسیم خواهد بود.

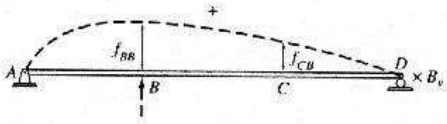
● در این فصل از نماد f_{ij} استفاده شده که معادل همان نماد δ_{ij} فصل ششم است، یعنی: f_{ij} = تغییر مکان ایجاد شده در نقطهٔ i سازه تحت اثر بار واحد در نقطهٔ j .



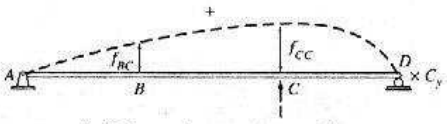
تیر نامعین اصلی



تیر اولیه تحت اثر بار واحد در نقطهٔ X



تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد در تکیه‌گاه B



تیر اولیه تحت اثر نیروی واحد در تکیه‌گاه C

تعیین طرح ظاهری خطوط تأثیر با استفاده از اصل مولر - برسلاو

۱- مقاومت یا قید متناظر با نیرو (یا لنگری) را که ترسیم خط تأثیر آن مورد نظر است، از روی سازه حذف کرده و به سازهٔ آزاد شده در محل نیرو (یا لنگر) مورد بحث، یک تغییر مکان (دوران نسبی) واحد اعمال می‌کنیم. شکل تغییر یافتهٔ سازه نشان دهندهٔ طرح ظاهری خط تأثیر متناظر با نیرو (یا لنگر) آزاد شده خواهد بود.

۱۲-۱ خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، D_y ، F_y و نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطهٔ C از تیر نشان داده شده در شکل زیر را ترسیم

کنید.

این تیر یک درجه نامعین است. واکنش تکیه‌گاهی D_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

برای ترسیم خطوط تأثیر، فاصلهٔ A تا F را به فواصل ۳ m تقسیم کرده و مقدار توابع خطوط تأثیر را در این نقاط به دست می‌آوریم.

با توجه به سازگاری تغییر شکلها:

$$\bar{f}_{DD} D_y + f_{DX} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = -\frac{f_{DX}}{\bar{f}_{DD}} \qquad (I)$$

بار واحد را در نقطهٔ D قرار داده و با استفاده از روش تیر مزدوج تغییر مکان نقاط A تا F را محاسبه می‌کنیم. با توجه به قانون ماکسول:

$$f_{DX} = f_{XD}$$

$$f_{DA} = f_{AD} = 0 \quad , \quad f_{DF} = f_{FD} = 0$$

$$f_{DB} = f_{BD} = -\frac{1}{EI}\left[\text{۷/۷۴}(3) - \left[\frac{1}{2}\right](3)(0/6)\left[\frac{3}{3}\right]\right]$$

$$f_{DB} = -\frac{\text{۲۲/۳۲ kN.m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{DC} = f_{CD} = -\frac{1}{EI}\left[\text{۷/۷۴}(6) - \left[\frac{1}{2}\right](6)(1/2)\left[\frac{6}{3}\right]\right]$$

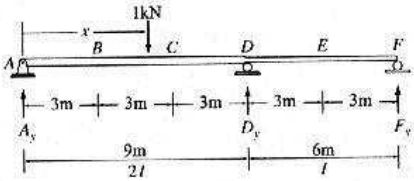
$$f_{DC} = -\frac{\text{۳۹/۲۴ kN.m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{DD} = -\frac{1}{EI}\left[\text{۷/۷۴}(9) - \left[\frac{1}{2}\right](9)(1/8)(3)\right]$$

$$f_{DD} = -\frac{\text{۴۵/۳۶ kN.m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{DE} = f_{ED} = -\frac{1}{EI}\left[\text{۱۱/۱۶}(3) - \left[\frac{1}{2}\right](3)(1/8)\left[\frac{3}{3}\right]\right]$$

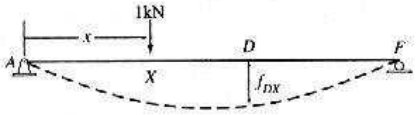
$$f_{DE} = -\frac{\text{۳۰/۷۸ kN.m}^3/\text{kN}}{EI}$$



ثابت = E

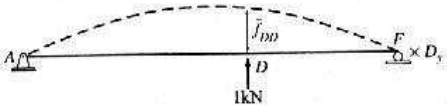
شکل ۱۲-۱

=

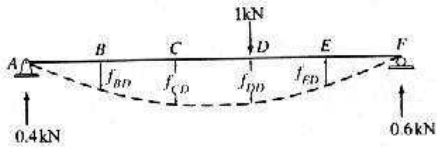


تیر اولیه تحت اثر بار واحد در نقطهٔ X

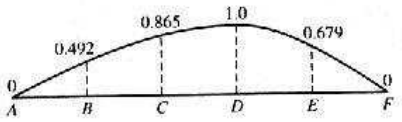
+



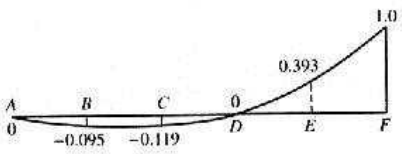
تیر اولیه تحت اثر واکنش تکیه‌گاهی D_y



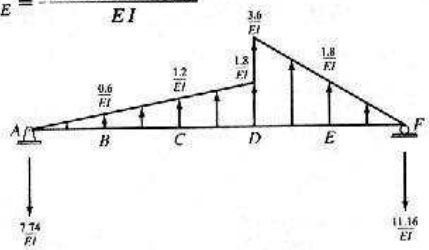
تیر اولیه تحت اثر بار واحد در نقطهٔ D



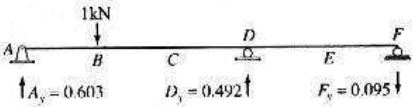
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی D_y ، kN/kN

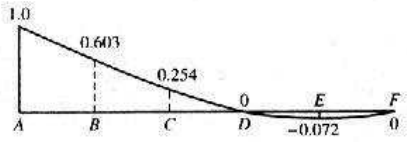


خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی F_y ، kN/kN



تیر مزدوج حالتی که بار واحد در نقطهٔ D اعمال می‌شود

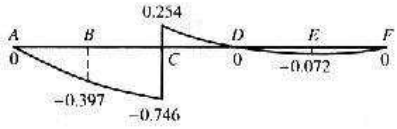




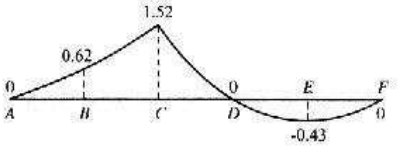
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی A_y ، kN/kN

خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی D_y از رابطهٔ (I) به دست می‌آید. برای خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y و F_y به ترتیب از معادلات تعادل $\sum M_P = 0$ (+ و $\sum F_y = 0$ ↑ + برای کل تیر استفاده می‌کنیم.

برای تعیین خط تأثیر S_C و M_C نیز می‌توان به روشی مشابه عمل کرد. در جدول زیر خلاصهٔ نتایج مربوط به محاسبهٔ مقدار توابع خط تأثیر A_y، D_y، F_y، S_C و M_C ارائه شده است.



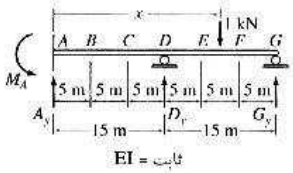
خط تأثیر S_C، kN/kN



خط تأثیر M_C، kN.m/kN

موقعیت بار واحد	مقادیر توابع خطوط تأثیر				
	D_y (kN/kN)	A_y (kN/kN)	F_y (kN/kN)	S_C (kN/kN)	M_C (kN.m/kN)
A	۰	۱/۰	۰	۰	۰
B	۰/۴۹۲	۰/۶۰۳	-۰/۰۹۵	-۰/۳۹۷	۰/۶۲
C	۰/۸۶۵	۰/۲۵۴	-۰/۱۱۹	-۰/۷۴۶ (چپ) ۰/۲۵۴ (راست)	۱/۵۲
D	۱/۰	۰	۰	۰	۰
E	۰/۶۷۹	-۰/۰۷۲	۰/۳۹۳	-۰/۰۷۲	-۰/۲۳
F	۰	۰	۱/۰	۰	۰

۲-۱۲ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی را ترسیم کنید.

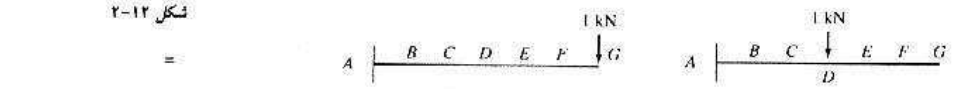


شکل ۲-۱۲

تیر مزبور دو درجه نامعین است. واکنشهای تکیه‌گاهی D_y و G_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. برای ترسیم خطوط تأثیر، فاصلهٔ A تا G را به فواصل ۵ m تقسیم کرده و مقدار توابع خطوط تأثیر را در این نقاط به دست می‌آوریم.

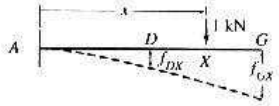
با توجه به سازگاری تغییر شکلها داریم:

$$\begin{cases} f_{DX} + \bar{f}_{DD} D_y + \bar{f}_{DG} G_y = 0 \\ f_{GX} + \bar{f}_{GD} D_y + \bar{f}_{GG} G_y = 0 \end{cases} \qquad (I)$$



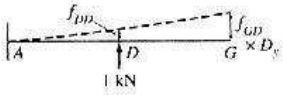
تیر اولیه تحت اثر بار واحد در نقطهٔ D — تیر اولیه تحت اثر بار واحد در نقطهٔ G

=



تیر اولیه تحت اثر بار واحد در نقطهٔ X

+



تیر اولیه تحت اثر واکنش تکیه‌گاهی D_y

با استفاده از روابط ارائه شده در پیوست (ب) کتاب، جابه جایی نقاط A تا G به دست می‌آید.

$$f_{DA} = f_{AD} = 0$$

$$f_{DB} = f_{BD} = -\frac{۱۶۶/۶۶۷\ kN.m^۳/kN}{EI} \quad , \quad f_{DC} = f_{CD} = -\frac{۵۸۳/۳۳۳\ kN.m^۳/kN}{EI}$$

$$f_{DD} = -\frac{۱۱۲۵\ kN.m^۳/kN}{EI} \quad , \quad f_{DE} = f_{ED} = -\frac{۱۶۸۷/۵\ kN.m^۳/kN}{EI}$$

$$f_{DF} = f_{FD} = -\frac{۲۲۵۰\ kN.m^۳/kN}{EI} \quad , \quad f_{DG} = f_{GD} = -\frac{۲۸۱۲/۵ kN.m^۳/kN}{EI}$$

بنابراین تغییر مکانهای رو به بالای $\bar{f}_{DD}$، $\bar{f}_{DG}$ ($\bar{f}_{GD}$) و $\bar{f}_{GG}$ نیز محاسبه شده‌اند.

$$\bar{f}_{DD} = \frac{۱۱۲۵\ kN.m^۳/kN}{EI}$$

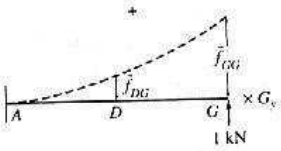
$$\bar{f}_{DG} = \bar{f}_{GD} = \frac{۲۸۱۲/۵\ kN.m^۳/kN}{EI} \quad , \quad \bar{f}_{GG} = \frac{۹۰۰۰\ kN.m^۳/kN}{EI}$$

با جایگزینی مقادیر ضرایب و حل دستگاه معادلات (I) به دست می‌آید:

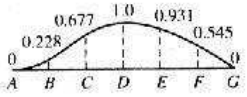
$$D_y = \frac{EI}{۱۹۶۸/۷۵}\left[-۸f_{DX} + ۲/۵f_{GX}\right] \quad , \quad G_y = \frac{EI}{۱۹۶۸/۷۵}\left[۲/۵f_{DX} - f_{GX}\right]$$

به این ترتیب با محاسبهٔ f_{DX} و f_{GX} به ازای موقعیتهای مختلف اعمال بار واحد، می‌توان خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی G_y و D_y را به دست آورد.

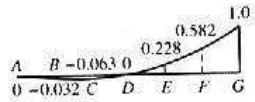
برای تعیین خطوط تأثیر M_A و A_y از روابط تعادل $\sum F_y = ۰ +\uparrow$ و $\sum M_A = ۰ +\circlearrowleft$ استفاده می‌کنیم.



تیر اولیه تحت اثر واکنش تکیه‌گاهی G_y

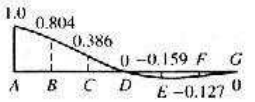


خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی D_y ، kN/kN

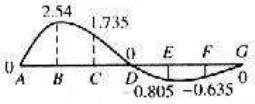


خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی G_y ، kN/kN

در جدول زیر خلاصهٔ نتایج مربوط به محاسبهٔ مقدار تابع خط تأثیر A_y ، D_y ، G_y و M_A ارائه شده است.



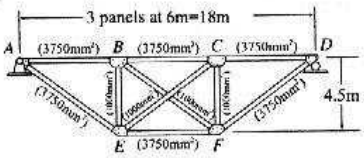
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی A_y ، kN/kN



خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی M_A (+) ، kN.m/kN

موقعیت بار واحد	مقادیر توابع خطوط تأثیر			
	D_y (kN/kN)	G_y (kN/kN)	A_y (kN/kN)	M_A (kN.m/kN)
A	۰	۰	۱/۰	۰
B	۰/۲۲۸	−۰/۰۳۲	۰/۸۰۴	۲/۵۴
C	۰/۶۷۷	−۰/۰۶۳	۰/۳۸۶	۱/۷۳۵
D	۱/۰	۰	۰	۰
E	۰/۹۳۱	۰/۲۲۸	−۰/۱۵۹	−۰/۸۰۵
F	۰/۵۴۵	۰/۵۸۲	−۰/۱۲۷	−۰/۶۳۵
G	۰	۱/۰	۰	۰

۱۲-۳ در خرپای تشان داده شده در شکل زیر، خط تأثیر نیروی داخلی اعضای BC ، BE و CE را ترسیم کنید. (بار زنده بر تار فوقانی خرپا حرکت می‌کند.)



E = ۲۰۰ GPa

شکل ۱۲-۳

خرپا یک درجه نامعین است. نیروی محوری F_{CE} عضو CE را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم.

با توجه به سازگاری تغییر شکلها:

$$f_{CE,i} + f_{CE,CE}F_{CE} = ۰ \qquad (I)$$

$$f_{CE,B} = \frac{۱}{E}\sum \frac{u_B u_{CE} L}{A} = -\frac{۱/۵۱۴۲}{E}$$

$$f_{CE,CE} = \frac{۱}{E}\sum \frac{u_{CE}^{۲} L}{A} = \frac{۹/۳۴۴}{E}$$

● شرح محاسبات در جدول انتهای حل مسئله ارائه شده است.

به این ترتیب مقدار تابع خط تأثیر F_{CE} در نقطهٔ C و سایر نقاط به دست می‌آید:

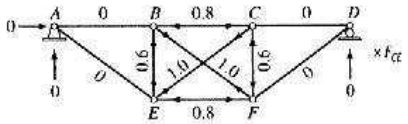
$$f_{CE,C} = \frac{۱}{E}\sum \frac{u_C u_{CE} L}{A} = \frac{۳/۶۷۴۲}{E}$$

$$F_{CE} = -\frac{f_{CE,B}}{f_{CE,CE}} = \frac{۱/۵۱۴۲}{۹/۳۴۴} = ۰/۱۶۲ \quad , \quad F_{CE} = -\frac{f_{CE,C}}{f_{CE,CE}} = -\frac{۳/۶۷۴۲}{۹/۳۴۴} = -۰/۳۹۳$$

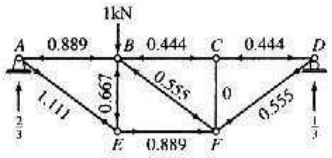
برای ترسیم خط تأثیر سایر اعضا از اصل برهم نهی استفاده می‌کنیم. برای مثال مقدار خط تأثیر F_{BC} در نقطهٔ B را می‌توان به صورت:

$$F = u_B + u_{CE} F_{CE} = -۰/۴۴۴ + (-۰/۸)(۰/۱۶۲) = -۰/۵۷۵ \quad kN/kN$$

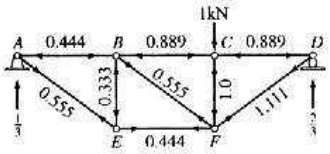
نوشت.



خرپای اولیه تحت اثر نیروی داخلی کششی واحد در عضو CE، u_{CE}

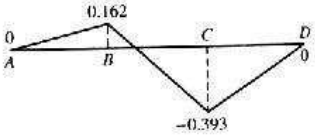


خرپای اولیه تحت اثر بار واحد در گره B، u_B

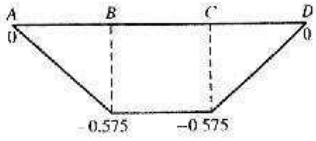


خرپای اولیه تحت اثر بار واحد در گره C، u_C

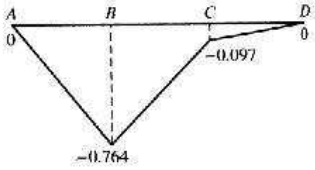
عضو	L (mm)	A (mm^2)	u_B	u_C	u_{CE}	$\frac{u_B u_{CE} L}{A}$	$\frac{u_C u_{CE} L}{A}$	$\frac{u_{CE}^2 L}{A}$
AB	۶۰۰۰	۳۷۵۰	-۰/۸۸۹	-۰/۴۴۴	۰	۰	۰	۰
BC	۶۰۰۰	۳۷۵۰	-۰/۴۴۴	-۰/۸۸۹	-۰/۸	۰/۵۶۸۳	۱/۱۳۷۹	۱/۰۲۴
CD	۶۰۰۰	۳۷۵۰	-۰/۴۴۴	-۰/۸۸۹	۰	۰	۰	۰
EF	۶۰۰۰	۳۷۵۰	۰/۸۸۹	۰/۴۴۴	-۰/۸	-۱/۱۳۷۹	-۰/۵۶۸۳	۱/۰۲۴
BE	۴۵۰۰	۲۵۰۰	-۰/۶۶۷	-۰/۳۳۳	-۰/۶	۰/۷۲۰۴	۰/۳۵۹۶	۰/۶۴۸
CF	۴۵۰۰	۲۵۰۰	۰	-۱/۰	-۰/۶	۰	۱/۰۸	۰/۶۴۸
AE	۷۵۰۰	۳۷۵۰	۱/۱۱۱	۰/۵۵۵	۰	۰	۰	۰
BF	۷۵۰۰	۲۵۰۰	-۰/۵۵۵	۰/۵۵۵	۱/۰	-۱/۶۶۵	۱/۶۶۵	۳/۰
CE	۷۵۰۰	۲۵۰۰	۰	۰	۱/۰	۰	۰	۳/۰
DF	۷۵۰۰	۳۷۵۰	۰/۵۵۵	۱/۱۱۱	۰	۰	۰	۰
					Σ	-۱/۵۱۴۲	۳/۶۷۴۲	۹/۳۴۴



خط تأثیر F_{CE}، kN/kN

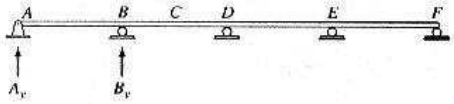


خط تأثیر F_{BC}، kN/kN

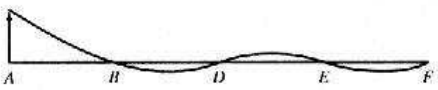


خط تأثیر F_{BE}، kN/kN

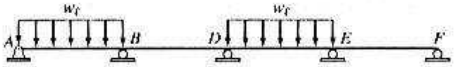
۱۲-۴ در تیر چهار دهانهٔ نشان داده شده، طرح ظاهری خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y ، B_y ، لنگر خمشی در نقطهٔ B و نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطهٔ C را ترسیم کنید.



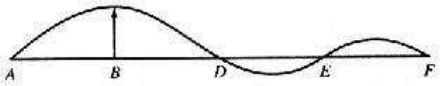
شکل ۱۲-۴



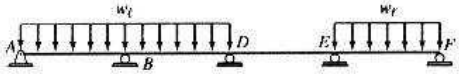
طرح ظاهری خط تأثیر A_y



ترتیب قرارگیری بار زنده برای رسیدن به حداکثر مقدار A_y



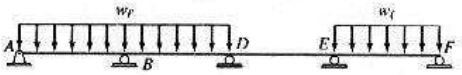
طرح ظاهری خط تأثیر B_y



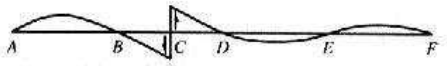
ترتیب قرارگیری بار زنده برای رسیدن به حداکثر مقدار B_y



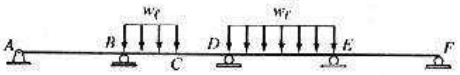
طرح ظاهری خط تأثیر M_B



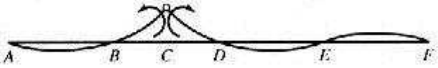
ترتیب قرارگیری بار زنده برای رسیدن به حداکثر مقدار M_B^-



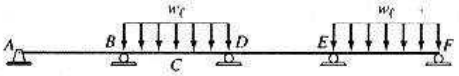
طرح ظاهری خط تأثیر S_C



ترتیب قرارگیری بار زنده برای رسیدن به حداکثر مقدار S_C^-

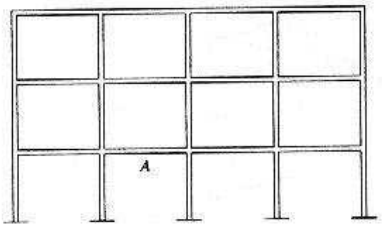


طرح ظاهری خط تأثیر M_C

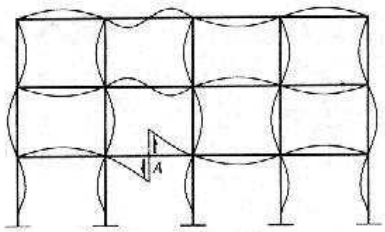


ترتیب قرارگیری بار زنده برای رسیدن به حداکثر مقدار M_C^+

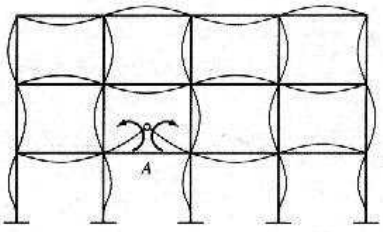
۱۲-۵ برای قاب نشان داده شده در شکل، خطوط تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی نقطهٔ A را ترسیم کرده و با توجه به آنها، ترتیب قرارگیری بار زندهٔ گستردهٔ w_ℓ را در دهانه‌های مختلف قاب چنان تعیین کنید که حداکثر لنگر خمشی مثبت و حداکثر نیروی برشی منفی در نقطهٔ A پدید آید.



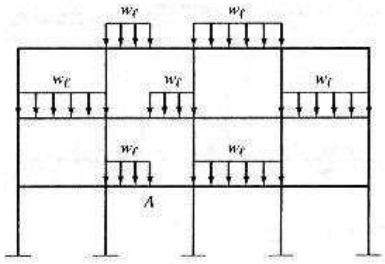
شکل ۱۲-۵



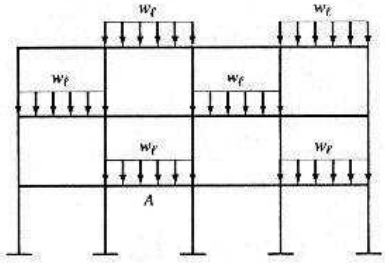
طرح ظاهری خط تأثیر S_A



طرح ظاهری خط تأثیر M_A

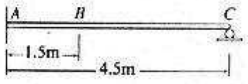


ترتیب قرارگیری بار زنده برای رسیدن به حداکثر مقدار S_A^-



ترتیب قرارگیری بار زنده برای رسیدن به حداکثر مقدار M_A^+

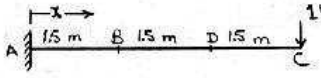
۶-۱۲ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی، نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطهٔ B را ترسیم کنید. برای محاسبهٔ مقادیر توابع خط تأثیر، فاصلهٔ AC را به تواصل ۱/۵ m تقسیم کنید. (واکنش تکیه‌گاهی C_y را به عنوان مجهول اضافی در نظر بگیرید.)



$E = ۱۴۰۰۰ \text{ MPa}$ ، $I = ۳/۹\times۱۰^{۹} \text{ mm}^۴$

شکل ۶-۱۲

از رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:



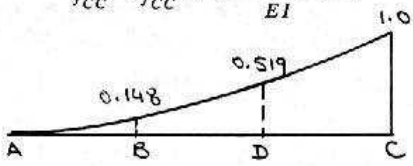
$$C_y = -\frac{f_{Cx}}{\bar{f}_{CC}} = -\frac{\bar{f}_{xC}}{\bar{f}_{CC}}$$

با استفاده از روابط پیوست (ب):

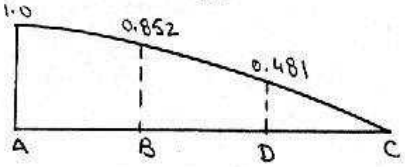
$$f_{xC} = -\frac{۱}{۶EI}\left[x^۳ - ۱۳/۵x^۲\right]$$

$$\bar{f}_{CC} = -f_{CC} = \frac{۳۰/۳۷۵\ kN.m^۳/kN}{EI}$$

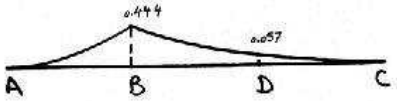
x (m)	مقادیر توابع خطوط تأثیر					
	EIf_{xc}	C_y (kN/kN)	A_y (kN/kN)	M_A (kN.m/kN)	S_B (kN/kN)	M_B (kN.m/kN)
۰	۰	-	۱/۰	۰	۰	۰
۱/۵	-۴/۵	۰/۱۴۸	۰/۸۵۲	۰/۸۳۴	-۰/۱۴۸ (L) ۰/۸۵۲ (R)	۰/۴۴۴
۳	-۱۵/۷۵	۰/۵۱۹	۰/۴۸۱	۰/۶۶۵	۰/۴۸۱	۰/۰۵۷
۴/۵	-۳۰/۳۷۵	۱/۰	۰	۰	۰	۰



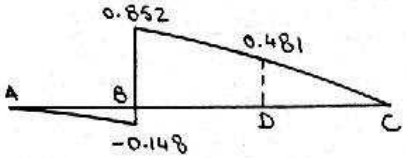
خط تأثیر C_y ، kN/kN



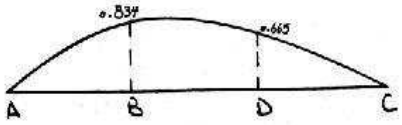
خط تأثیر A_y ، kN/kN



خط تأثیر M_B ، kN.m/kN

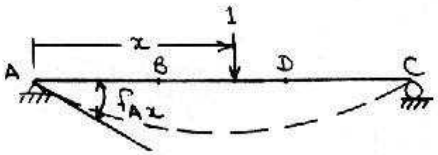


خط تأثیر S_B ، kN/kN



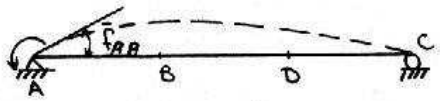
خط تأثیر M_A ، kN.m/kN (+)

۷-۱۲ با فرض این که لنگر گیرداری تکیه‌گاه A به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته شود، خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی تیر مسئلهٔ ۶-۱۲ را مجدداً ترسیم کنید.



تیر اولیه تحت اثر بار اولیه در نقطهٔ X

شکل ۷-۱۲



تیر اولیه تحت اثر لنگر واحد در محل تکیه‌گاه A

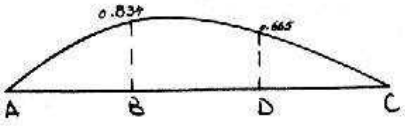
از رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

$$M_A = -\frac{f_{Ax}}{\bar{f}_{AA}}$$

با استفاده از رابطهٔ ارائه شده در پیوست (ب) داریم:

$$f_{Ax} = -\frac{1}{2EI}\left[x^3 - 13/5x^2 + 40/5x\right]$$

$$\bar{f}_{AA} = \frac{1/5\ kN.m^3/kN.m}{EI}$$

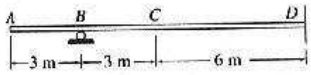


خط تأثیر M_A ، kN.m/kN (+)

x (m)	مقادیر توابع خطوط تأثیر: EIf_{Ax}	M_A (kN.m/kN)
۰	۰	۰
۱/۵	-۱/۲۵	۰/۸۳۴
۳	-۱	۰/۶۶۵
۴/۵	۰	۰

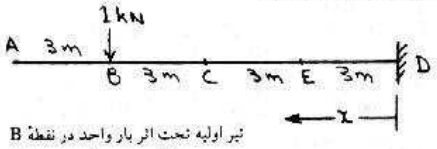
خطوط تأثیر سایر واکنشهای تکیه‌گاهی به همان شکلی است که در حل مسئلهٔ ۶-۱۲ نشان داده شده است.

۸-۱۲ برای تیر نشان داده شده، خطوط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی B_y ، نیروی برشی و لنگر خمشی نقطهٔ C را ترسیم کنید. مقدار توابع خطوط تأثیر را در فواصل ۳ m به دست آورید.



EI = ثابت

شکل ۸-۱۲



تیر اولیه تحت اثر بار واحد در نقطهٔ B

از رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

$$B_y = -\frac{f_{BX}}{\bar{f}_{BB}} = -\frac{f_{XB}}{\bar{f}_{BB}}$$

با استفاده از روابط تغییر شکل تیرها که در پیوست (ب) ارائه شده است:

در فاصلهٔ BD ($0 \le x \le 9$ m):

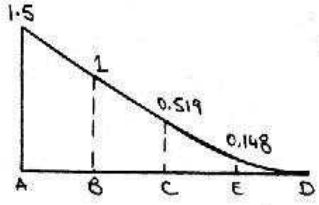
$$f_{xB} = \frac{1}{6EI}\left[x^3 - 27x^2\right]$$

x (m)	مقادیر توابع خطوط تأثیر: EIf_{xB}	B_y (kN/kN)	S_C (kN/kN)	M_C (kN.m/kN)
۰	۰	۰	۰	۰
۳	-۳۶	۰/۱۴۸	۰/۱۴۸	۰/۴۴
۶	-۱۲۶	۰/۵۱۹	-۰/۴۸۱ (L) ۰/۵۱۹ (R)	۱/۵۶
۹	-۲۴۳	۱/۰	۰	۰
۱۲	-۳۶۴/۵	۱/۵	۰/۵	-۱/۵

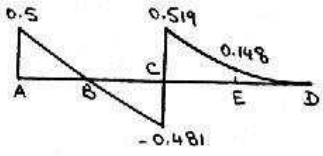
در فاصلهٔ AB ($9\ \text{m} \le x \le 12\ \text{m}$):

$$f_{xB} = \frac{۲۴۳}{۶EI}(۳ - x)$$

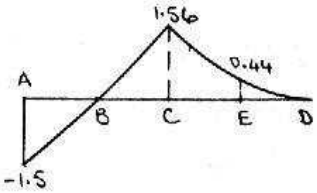
$$\bar{f}_{BB} = -f_{BB} = \frac{۲۴۳\ kN.m^{۳}/kN}{EI}$$



خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی B_y، (kN/kN)

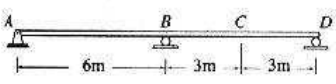


خط تأثیر S_C، kN/kN

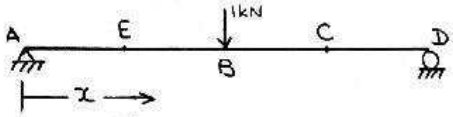


خط تأثیر M_C، kN.m/kN

۱۲-۹ خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی، نیروی برشی و لنگر خمشی نقطهٔ C از تیر نشان داده شده در شکل را ترسیم کنید. برای محاسبهٔ مقادیر توابع خط تأثیر، فاصلهٔ A تا D را به فواصل ۳ m تقسیم کنید.



EI = ثابت



تیر اولیه تحت اثر بار واحد در نقطهٔ B

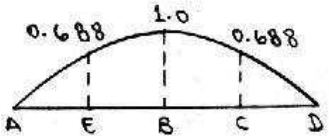
شکل ۱۲-۹

$$B_y = -\frac{f_{Bx}}{\bar{f}_{BB}} = -\frac{f_{xB}}{\bar{f}_{BB}}$$

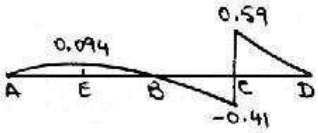
از رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

با استفاده از روابط تغییر شکل تیرها که در پیوست (ب) ارائه شده است:

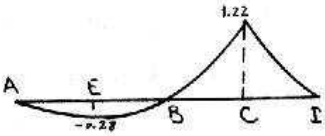
$$f_{EB} = f_{CB} = -\frac{۲۴/۷۵\ kN.m^{۳}/kN}{EI} \quad , \quad \bar{f}_{BB} = -f_{BB} = \frac{۳۶\ kN.m^{۳}/kN}{EI}$$



خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی B_y، kN/kN

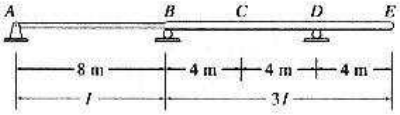


خط تأثیر S_C، kN/kN



خط تأثیر M_C، kN.m/kN

۱۲-۱۰ برای تیر نشان داده شده خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی، نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطهٔ C را ترسیم کنید. برای محاسبهٔ مقادیر توابع خط تأثیر، فاصلهٔ AE را به فواصل ۴ m تقسیم کنید.



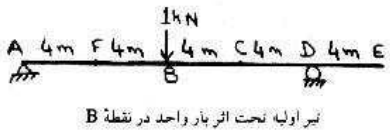
E = ثابت

شکل ۱۲-۱۰

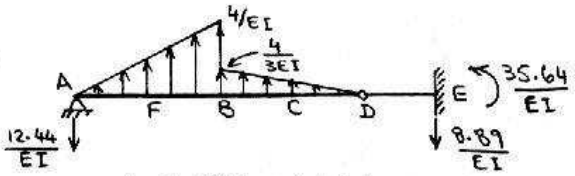
با توجه به تیر مزدوج داریم:

$$f_{BF} = f_{FB} = -\frac{۴۴/۴۳}{EI} \quad , \quad f_{BC} = f_{CB} = -\frac{۳۳/۷۲}{EI}$$

$$f_{BE} = f_{EB} = \frac{۳۵/۶۴}{EI} \quad , \quad \bar{f}_{BB} = -f_{BB} = \frac{۵۶/۸۵}{EI}$$

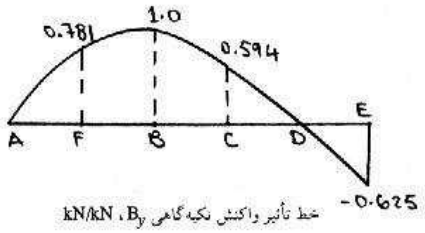


تیر اولیه تحت اثر بار واحد در نقطهٔ B

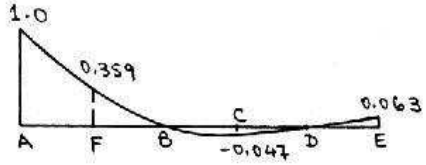


تیر مزدوج در حالتی که بار واحد در نقطهٔ B اعمال می‌شود

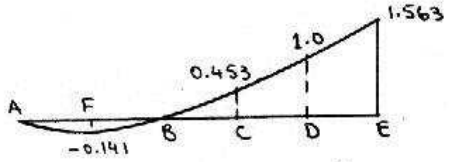
به این ترتیب به کمک رابطهٔ سازگاری: $B_y = -\frac{f_{Bi}}{\bar{f}_{BB}} = -\frac{f_{iB}}{\bar{f}_{BB}}$ می‌توان خط تأثیر B_y را ترسیم کرده و با استفاده از معادلات تعادل خط تأثیر A_y، D_y، S_C و M_C را ترسیم نمود.



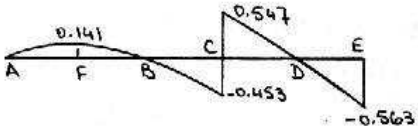
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی B_y، kN/kN



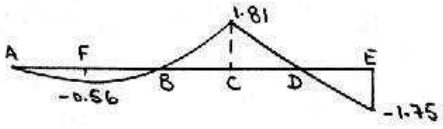
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی A_y، kN/kN



خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی D_y، kN/kN

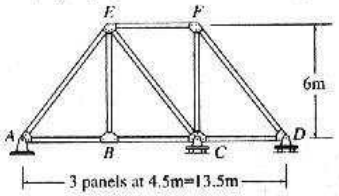


خط تأثیر S_C، kN/kN



خط تأثیر M_C، kN.m/kN

۱۲-۱۱ برای خرپای نشان داده شده در شکل، خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضای BC ، CE و EF را ترسیم کنید.



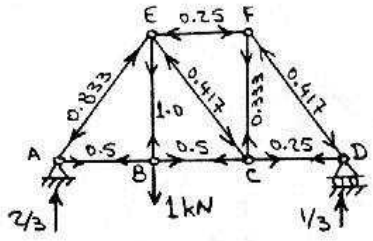
EA = ثابت

شکل ۱۲-۱۱

عضو	L (m)	u_B	u_C	$u_B u_C L$	$u_C^2 L$
AB	۴/۵	۰/۵	۰/۲۵	۰/۵۶۲۵	۰/۲۸۱۳
BC	۴/۵	۰/۵	۰/۲۵	۰/۵۶۲۵	۰/۲۸۱۳
CD	۴/۵	۰/۲۵	۰/۵	۰/۵۶۲۵	۱/۱۲۵
EF	۴/۵	-۰/۲۵	-۰/۵	۰/۵۶۲۵	۱/۱۲۵
BE	۶/۰	۱/۰	۰	۰	۰
CF	۶/۰	۰/۳۳۳	۰/۶۶۷	۱/۳۳۲۷	۲/۶۶۹۳
AE	۷/۵	-۰/۸۳۳	-۰/۴۱۷	۲/۶۰۵۲	۱/۳۰۴۲
CE	۷/۵	-۰/۴۱۷	۰/۴۱۷	-۱/۳۰۴۲	۱/۳۰۴۲
DF	۷/۵	-۰/۴۱۷	-۰/۸۳۳	۲/۶۰۵۲	۵/۲۰۴۲
			Σ	۷/۴۸۸۹	۱۳/۲۹۴۵

$$f_{BC} = f_{CB} = \frac{1}{EA}\sum u_B u_C L = \frac{۷/۴۸۸۹}{EA}$$

$$\bar{f}_{CC} = -f_{CC} = \frac{1}{EA}\sum u_C^2 L = \frac{۱۳/۲۹۴۵}{EA}$$

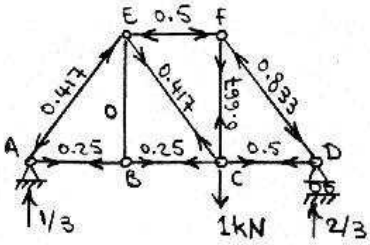


خرپای اولیه تحت اثر بار واحد در B، u_B

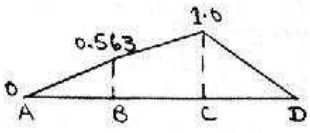
از رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها مقدار تابع خط تأثیر C_y در نقطهٔ B برابر خواهد بود با:

$$C_y = -\frac{f_{CB}}{\bar{f}_{CC}} = -\frac{f_{BC}}{\bar{f}_{CC}} = -\frac{۷/۴۸۸۹}{۱۳/۲۹۴۵} = -۰/۵۶۳ \ kN/kN \quad \text{یا} \quad ۰/۵۶۳ \ kN/kN \uparrow$$

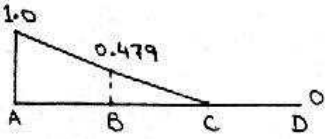
برای ترسیم خط تأثیر سایر واکنشهای تکیه‌گاهی از روابط تعادل برای کل خرپا استفاده می‌کنیم.



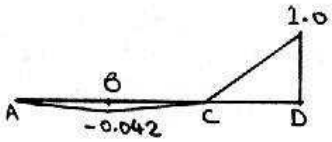
خرپای اولیه تحت اثر بار واحد در C ، u_C



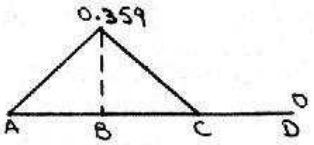
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی C_y ، kN/kN



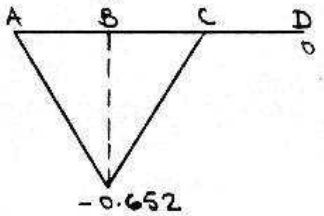
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی A_y ، kN/kN



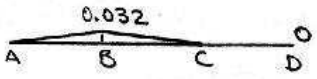
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی D_y ، kN/kN



خط تأثیر F_{BC} ، kN/kN

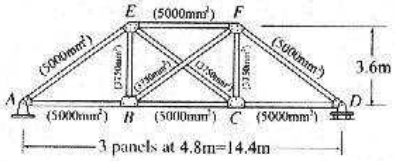


خط تأثیر F_{CE} ، kN/kN



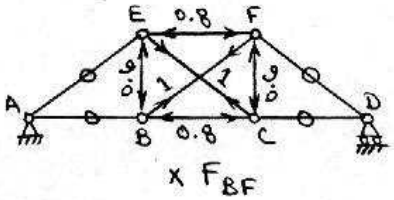
خط تأثیر F_{EF} ، kN/kN

۱۲-۱۲ خط تأثیر نیروی داخلی اعضای BC ، BF و CF را در خرپای نشان داده شده ترسیم کنید.

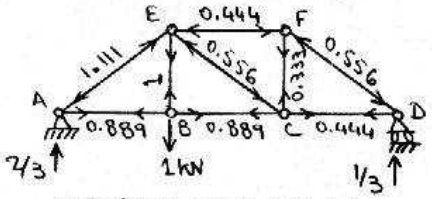


E = ۲۰۰ GPa

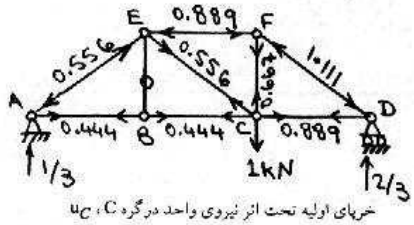
شکل ۱۲-۱۲



خرپای اولیه تحت اثر نیروی کششی واحد در عضو BF ، u_{BF}

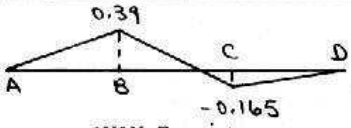


خرپای اولیه تحت اثر نیروی واحد در گره B ، u_B



خرپای اولیه تحت اثر نیروی واحد در گره C ، u_C

عضو	L (mm)	A (mm^2)	u_B	u_C	u_{BF}	$\frac{u_B u_{BF} L}{A}$	$\frac{u_C u_{BF} L}{A}$	$\frac{u_{BF}^2 L}{A}$
AB	۴۸۰۰	۵۰۰۰	۰/۸۸۹	۰/۴۴۴	۰	۰	۰	۰
BC	۴۸۰۰	۵۰۰۰	۰/۸۸۹	۰/۴۴۴	-۰/۸	-۰/۶۸۳	-۰/۳۴۱	۰/۶۱۴
CD	۴۸۰۰	۵۰۰۰	۰/۴۴۲	۰/۸۸۹	۰	۰	۰	۰
EF	۴۸۰۰	۵۰۰۰	-۰/۴۴۴	-۰/۸۸۹	-۰/۸	۰/۳۴۱	۰/۶۸۳	۰/۶۱۴
BE	۳۶۰۰	۳۷۵۰	۱/۰	۰	-۰/۶	-۰/۵۷۶	۰	۰/۳۴۶
CF	۳۶۰۰	۳۷۵۰	۰/۳۳۳	۰/۶۶۷	-۰/۶	-۰/۱۹۲	-۰/۳۸۴	۰/۳۴۶
AE	۶۰۰۰	۵۰۰۰	-۱/۱۱۱	-۰/۵۵۶	۰	۰	۰	۰
DF	۶۰۰۰	۵۰۰۰	-۰/۵۵۶	-۱/۱۱۱	۰	۰	۰	۰
CE	۶۰۰۰	۳۷۵۰	-۰/۵۵۶	۰/۵۵۶	۱	-۰/۸۸۹	۰/۸۸۹	۱/۶
BF	۶۰۰۰	۳۷۵۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱/۶
					Σ	-۱/۹۹۹	۰/۸۲۷	۵/۱۲



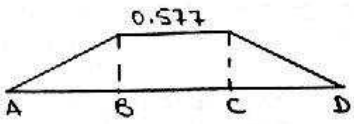
خط تأثیر F_{BF} ، kN/kN

اگر بار واحد در گره B قرار داشته باشد kN/kN

$$F_{BF} = -\frac{f_{BF,B}}{\bar{f}_{BF,BF}} = \frac{۱/۹۹۹}{۵/۱۲} = ۰/۳۹$$

$$F_{BC} = ۰/۸۸۹ - ۰/۸(۰/۳۹) = ۰/۵۷۷ \quad kN/kN$$

$$F_{CF} = ۰/۳۳۳ - ۰/۶(۰/۳۹) = ۰/۰۹۹ \quad kN/kN$$

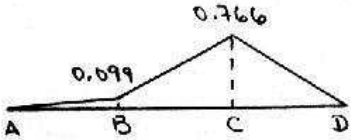


خط تأثیر F_{BC} ، kN/kN

اگر بار واحد در گره C قرار داشته باشد:

$$F_{BF} = -\frac{f_{BF,C}}{\bar{f}_{BF,BF}} = -\frac{۰/۸۲۷}{۵/۱۲}$$

$$F_{BF} = -۰/۱۶۵ \quad kN/kN$$

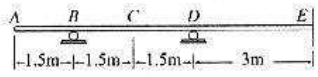


خط تأثیر F_{CF} ، kN/kN

$$F_{BC} = ۰/۴۴۴ - ۰/۸(-۰/۱۶۵) = ۰/۵۷۷ \quad kN/kN \quad , \quad F_{CF} = ۰/۶۶۷ - ۰/۶(-۰/۱۶۵) = ۰/۷۶۶ \quad kN/kN$$

۱۲-۱۳ خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی B_y ، D_y ، نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطهٔ C از تیر نشان داده شده را ترسیم کنید. برای تعیین مقادیر توابع خط تأثیر، فاصلهٔ AE را به فواصل ۱/۵ m تقسیم کنید.

با توجه به رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها:

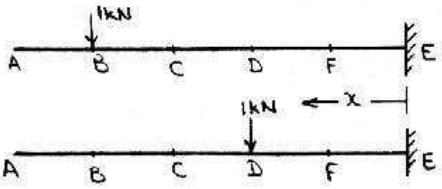


EI = ثابت

$$\begin{cases} f_{Bx} + \bar{f}_{BB} B_y + \bar{f}_{BD} D_y = ۰ \\ f_{Dx} + \bar{f}_{DB} B_y + \bar{f}_{DD} D_y = ۰ \end{cases}$$

شکل ۱۲-۱۳

با استفاده از روابط تغییر شکل تیرها که در پیوست (ب) کتاب ارائه شده است:



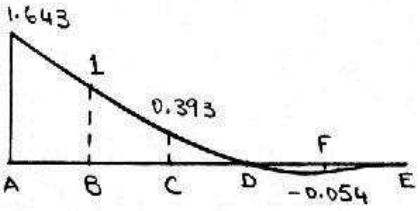
$$f_{Bx} = f_{xB} = \begin{cases} \frac{۱}{۶EI}\left[x^۳ - ۱۸x^۲\right] & : \text{در فاصلهٔ BE} \ (۰ \le x \le ۶ \text{ m}) \\ \frac{۶}{EI}(۶ - ۳x) & : \text{در فاصلهٔ AB} \ (۶ \text{ m} \le x \le ۷/۵ \text{ m}) \end{cases}$$

$$f_{Dx} = f_{xD} = \begin{cases} \frac{۱}{۶EI}\left[x^۳ - ۹x^۲\right] & : \text{در فاصلهٔ DE} \ (۰ \le x \le ۳ \text{ m}) \\ \frac{۱/۵}{EI}(۳ - ۳x) & : \text{در فاصلهٔ AD} \ (۳ \text{ m} \le x \le ۷/۵ \text{ m}) \end{cases}$$

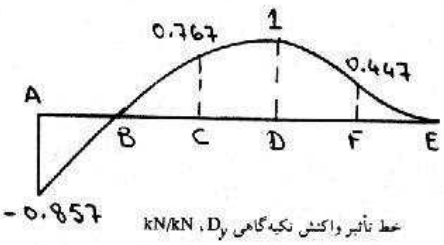
x (m)	EIf_{Bx}	EIf_{Dx}	B_y	D_y	S_C	M_C
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱/۵	-۶/۱۸۷۵	-۲/۸۱۲۵	-۰/۰۵۴	۰/۴۴۷	-۰/۰۵۴	-۰/۰۸۱
۳	-۲۲/۵	-۹/۰	۰	۱/۰	۰	۰
۴/۵	-۴۵/۵۶۲۵	-۱۵/۷۵	۰/۳۹۳	۰/۷۶۷	-۰/۶۰۷ (L)	۰/۵۹
					۰/۳۹۳ (R)	
۶	-۷۲/۰	-۲۲/۵	۱/۹	۰	۰	۰
۷/۵	-۹۹/۰	-۲۹/۲۵	۱/۶۴۳	-۰/۸۵۷	۰/۶۴۳	-۰/۵۴

$$\bar{f}_{BB} = \frac{۷۲\ kN.m^۳/kN}{EI} \quad , \quad \bar{f}_{DD} = \frac{۹\ kN.m^۳/kN}{EI}$$

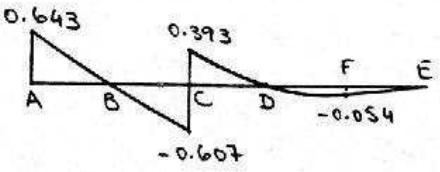
$$\bar{f}_{BD} = \bar{f}_{DB} = \frac{۲۲/۵\ kN.m^۳/kN}{EI}$$



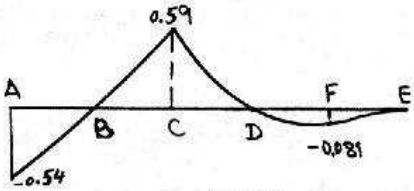
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی B_y ، kN/kN



خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی D_y ، kN/kN

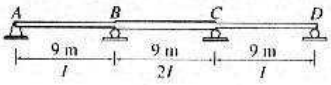


خط تأثیر S_C ، kN/kN



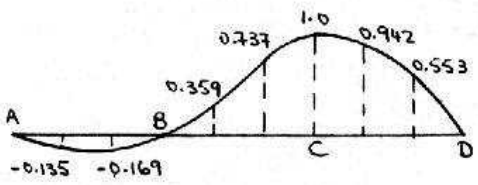
خط تأثیر M_C ، kN/kN

۱۲-۱۴ برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی را ترسیم کنید. برای تعیین مقادیر توابع خطوط تأثیر، فاصلهٔ AD را به فواصل 3 m تقسیم کنید.

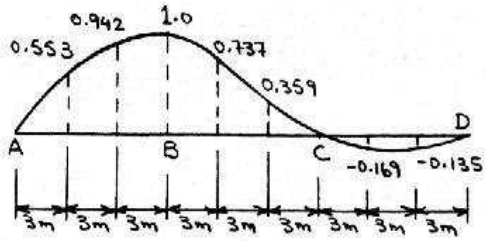


ثابت = E

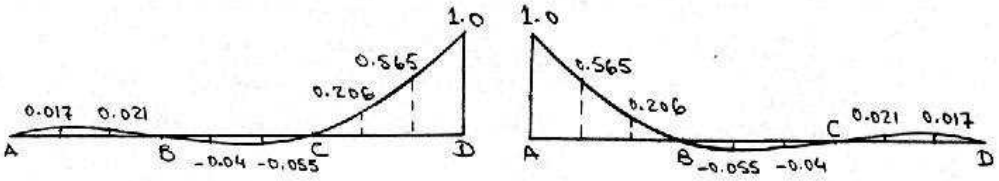
شکل ۱۲-۱۴



خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی C_y ، kN/kN



خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی B_y ، kN/kN

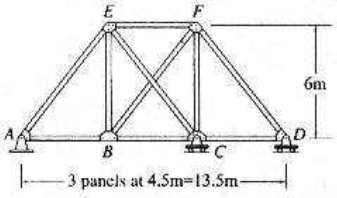


خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی A_y ، kN/kN

خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی D_y ، kN/kN

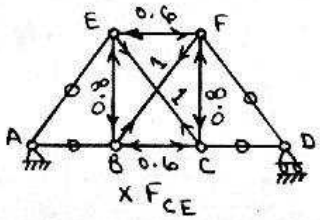
۱۲-۱۵ برای خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خطوط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروی داخلی اعضای BC ، CE و EF را ترسیم کنید.

رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها (بار واحد در گره i ام اعمال می‌شود):



EA = ثابت

شکل ۱۲-۱۵

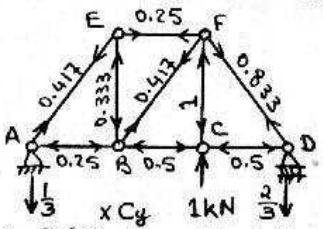


خرپای اولیه تحت اثر نیروی کششی واحد در عضو CE ، u_{CE}

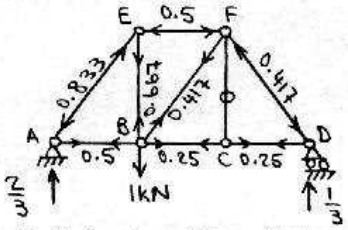
$$\begin{cases} f_{iC} + f_{CC} C_y + f_{C,CE} F_{CE} = 0 \\ f_{i,CE} + f_{C,CE} C_y + f_{CE,CE} F_{CE} = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$f_{iC} = f_{Ci} = \frac{1}{EA}\sum u_i u_C L \quad , \quad f_{C,CE} = f_{CE,C} = \frac{1}{EA}\sum u_C u_{CE} L \quad , \quad f_{i,CE} = f_{CE,i} = \frac{1}{EA}\sum u_i u_{CE} L$$

$$f_{CC} = \frac{1}{EA}\sum u_C^2 L \quad , \quad f_{CE,CE} = \frac{1}{EA}\sum u_{CE}^2 L$$

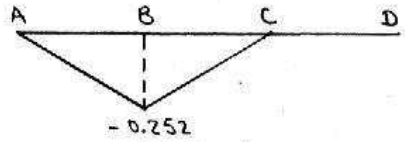


خرپای اولیه تحت اثر نیروی واحد در تکیه‌گاه C ، u_C



خرپای اولیه تحت اثر نیروی واحد در گره B ، u_B

عضو	L (m)	u_B	u_C	u_{CE}	$u_B u_C L$	$u_B u_{CE} L$	$u_C^2 L$	$u_{CE}^2 L$	$u_C u_{CE} L$
AB	۴/۵	۰/۵	-۰/۲۵	۰	-۰/۵۶۲۵	۰	۰/۲۸۱۳	۰	۰
BC	۴/۵	۰/۲۵	-۰/۵	-۰/۶	-۰/۵۶۲۵	-۰/۶۷۵	۱/۱۲۵	۱/۶۲	۱/۳۵
CD	۴/۵	۰/۲۵	-۰/۵	۰	-۰/۵۶۲۵	۰	۱/۱۲۵	۰	۰
EF	۴/۵	-۰/۵	۰/۲۵	-۰/۶	-۰/۵۶۲۵	۱/۳۵	۰/۲۸۱۳	۱/۶۲	-۰/۶۷۵
BE	۶	۰/۶۶۷	-۰/۳۳۳	-۰/۸	-۱/۳۳۲۷	-۳/۲۰۱۶	۰/۶۶۵	۳/۸۴	۱/۵۹۸۴
CF	۶	۰	-۱/۰	-۰/۸	۰	۰	۶/۰	۳/۸۴	۴/۸
AE	۷/۵	-۰/۸۳۳	۰/۴۱۷	۰	-۲/۶۰۵۲	۰	۱/۳۰۴۱	۰	۰
DF	۷/۵	-۰/۴۱۷	۰/۸۳۳	۰	-۲/۶۰۵۲	۰	۵/۲۰۴۲	۰	۰
BF	۷/۵	۰/۴۱۷	۰/۴۱۷	۱	۱/۳۰۴۱	۳/۱۲۷۵	۱/۳۰۴۱	۷/۵	۳/۱۲۷۵
CE	۷/۵	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۷/۵	۰
				Σ	-۷/۴۸۹	۰/۶۰۰۹	۱۷/۲۹	۲۵/۹۲	۱۰/۲۰۰۹

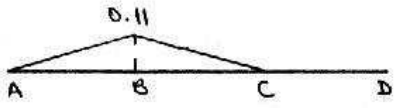


خط تأثیر F_{CE}، kN/kN

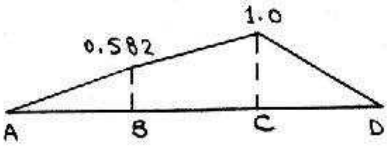
برای مثال در حالتی که بار واحد در نقطهٔ B اعمال می‌شود، دستگاه معادلات (I) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} ۱۷/۲۹C_y + ۱۰/۲۰۰۹F_{CE} = ۷/۴۸۹ \\ ۱۰/۲۰۰۹C_y + ۲۵/۹۲F_{CE} = -۰/۶۰۰۹ \end{cases}$$

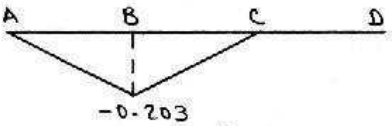
$$C_y = ۰/۵۸۲ \quad kN/kN \quad , \quad F_{CE} = -۰/۲۵۲ \quad kN/kN$$



خط تأثیر F_{BC}، kN/kN

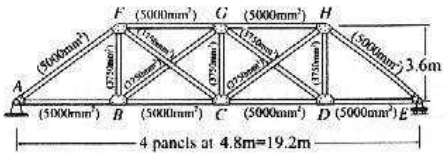


خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی C_y، kN/kN



خط تأثیر F_{EF}، kN/kN

۱۲-۱۶ برای خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خط تأثیر نیروی داخلی اعضای BG ، CD و DG را ترسیم کنید.



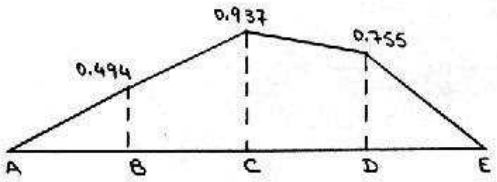
E = ۲۰۰ GPa

شکل ۱۲-۱۶

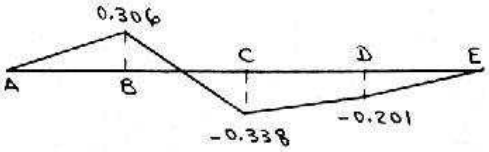
نیروی داخلی اعضای BG و DG را به عنوان مجهولات اضافی در نظر می‌گیریم. رابطهٔ سازگاری تغییر شکلها در حالتی که بار در گره i ام اعمال می‌شود، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} f_{i,BG} + f_{BG,BG}F_{BG} + f_{BG,DG}F_{DG} = ۰ \\ f_{i,DG} + f_{BG,DG}F_{BG} + f_{DG,DG}F_{DG} = ۰ \end{cases}$$

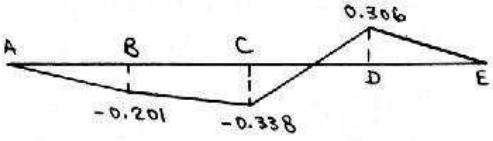
به این ترتیب می‌توان خط تأثیر نیروی داخلی اعضای BG و DG را ترسیم کرده و با استفاده از اصل بر هم نهی، خط تأثیر نیروی داخلی عضو CD نیز به دست خواهد آمد.



خط تأثیر F_{CD}، kN/kN



خط تأثیر F_{BG}، kN/kN

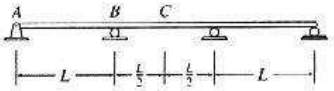


خط تأثیر F_{DG}، kN/kN

در تیرهای نشان داده شده در مسایل ۱۲-۱۷ تا ۱۲-۱۹، طرح ظاهری خط تأثیر واکنشهای تکیه‌گاهی A_y، B_y، لنگر خمشی در نقطهٔ B و برش و لنگر خمشی در نقطهٔ C را ترسیم کنید. همچنین ترتیب قرارگیری بار زندهٔ گستردهٔ w_l را در دهانه‌های مختلف چنان مشخص کنید که واکنشهای

تکیه‌گاهی A_y و B_y حداکثر مقدار رو به بالا، لنگر خمشی در B حداکثر مقدار منفی و برش در C حداکثر مقدار منفی را داشته باشند.

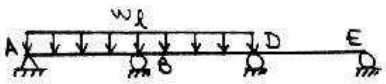
۱۷-۱۲



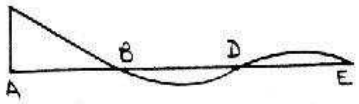
شکل ۱۲-۱۷



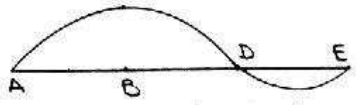
خط تأثیر M_B



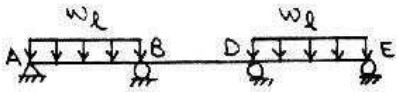
ترتیب قرارگیری بار زندهٔ wl برای رسیدن به حداکثر M_B^-



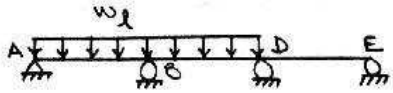
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی A_y



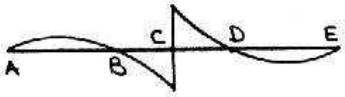
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی B_y



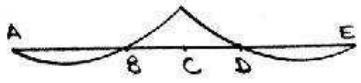
ترتیب قرارگیری بار زندهٔ wl برای رسیدن به حداکثر A_y



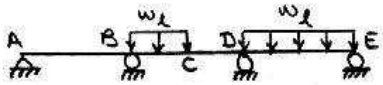
ترتیب قرارگیری بار زندهٔ wl برای رسیدن به حداکثر B_y



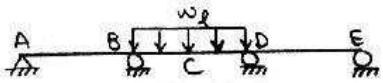
خط تأثیر S_C



خط تأثیر M_C

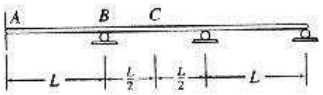


ترتیب قرارگیری بار زندهٔ wl برای رسیدن به حداکثر S_C^-



ترتیب قرارگیری بار زندهٔ wl برای رسیدن به حداکثر M_C^+

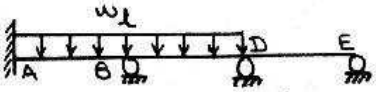
۱۸-۱۲



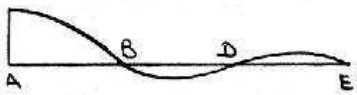
شکل ۱۲-۱۸



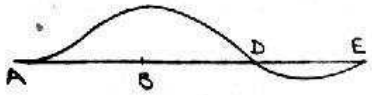
خط تأثیر M_B



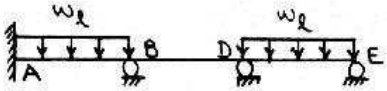
ترتیب قرارگیری بار زندهٔ wl برای رسیدن به حداکثر M_B^-



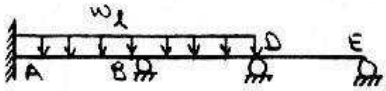
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی A_y



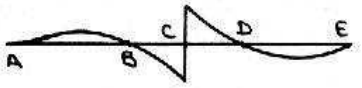
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی B_y



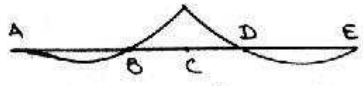
ترتیب قرارگیری بار زندهٔ w_l برای رسیدن به حداکثر A_y



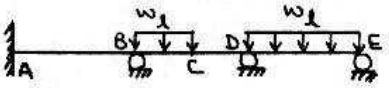
ترتیب قرارگیری بار زندهٔ w_l برای رسیدن به حداکثر B_y



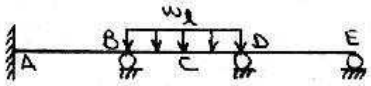
خط تأثیر S_C



خط تأثیر M_C

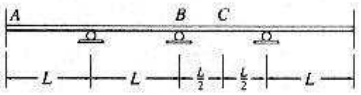


ترتیب قرارگیری بار زندهٔ w_l برای رسیدن به حداکثر S_C^-

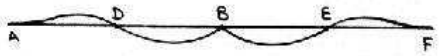


ترتیب قرارگیری بار زندهٔ w_l برای رسیدن به حداکثر M_C^+

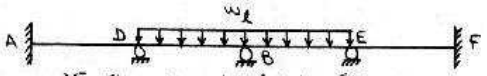
۱۲-۱۹



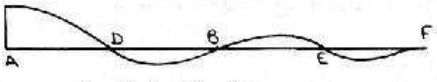
شکل ۱۲-۱۹



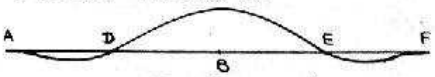
خط تأثیر M_B



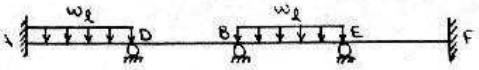
ترتیب قرارگیری بار زندهٔ w_l برای رسیدن به حداکثر M_B^-



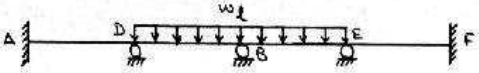
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی A_y



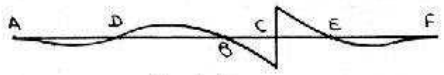
خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی B_y



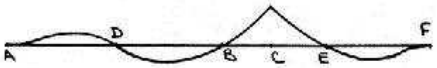
ترتیب قرارگیری بار زندهٔ w_l برای رسیدن به حداکثر A_y



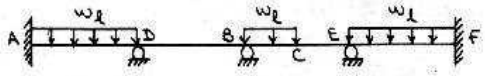
ترتیب قرارگیری بار زندهٔ w_l برای رسیدن به حداکثر B_y



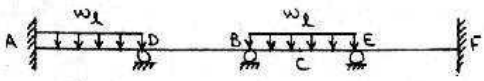
خط تأثیر S_C



خط تأثیر M_C

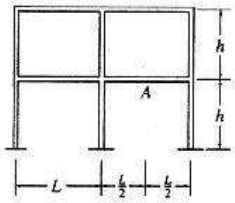


ترتیب قرارگیری بار زندهٔ w_l برای رسیدن به حداکثر S_C^-

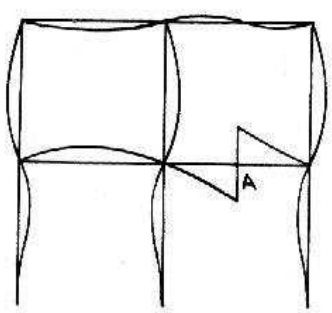


ترتیب قرارگیری بار زندهٔ w_l برای رسیدن به حداکثر M_C^-

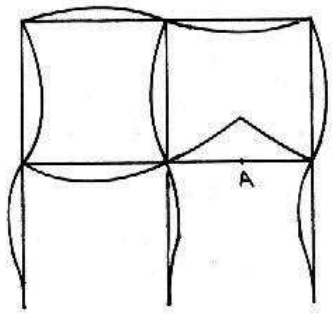
۱۲-۲۰ برای قاب نشان داده شده، خط تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطهٔ A را ترسیم کرده، ترتیب قرارگیری بار زندهٔ گستردهٔ w_l را چنان تعیین کنید که حداکثر لنگر خمشی مثبت و حداکثر نیروی برشی منفی در A پدید آید.



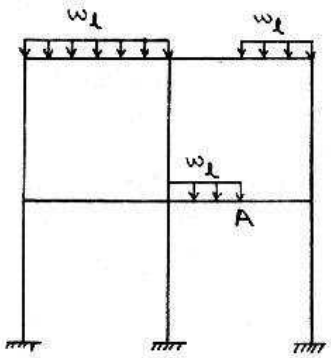
شکل ۱۲-۲۰



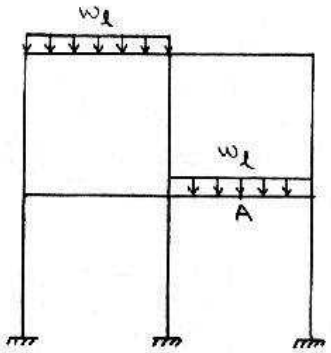
خط تأثیر S_A



خط تأثیر M_A

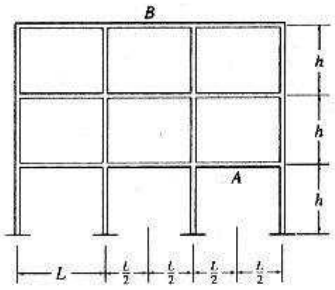


ترتیب قرارگیری بار زندهٔ w_l برای رسیدن به حداکثر خط تأثیر S_A^-

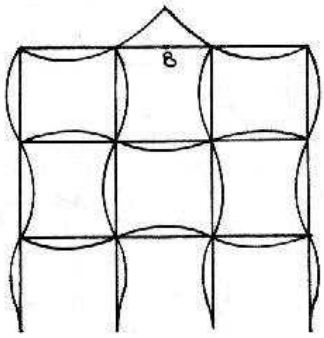


ترتیب قرارگیری بار زنده w_l برای رسیدن به حداکثر M_A^+

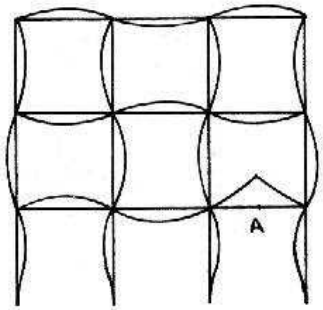
۱۲-۲۱ برای قاب نشان داده شده، ترتیب قرارگیری بار زندهٔ گستردهٔ w_l را در دهانه‌های مختلف چنان تعیین کنید که حداکثر لنگر خمشی منفی در A و حداکثر لنگر خمشی مثبت در B پدید آید.



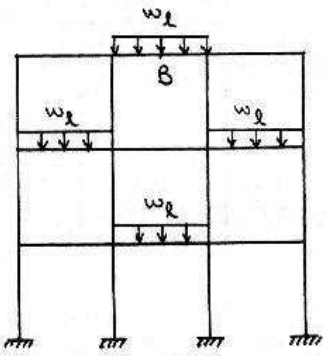
شکل ۱۲-۲۱



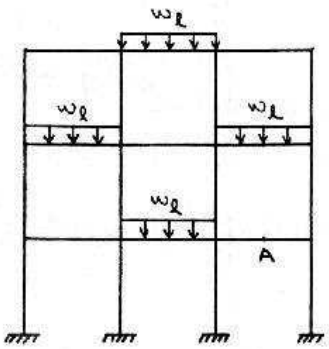
خط تأثیر M_B



خط تأثیر M_A

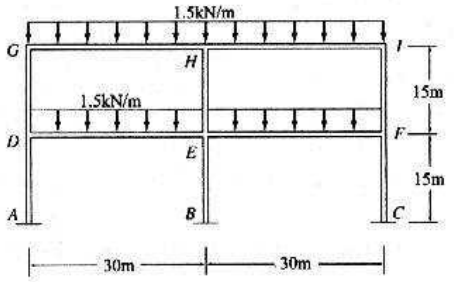


ترتیب قرارگیری بار زنده w_l برای رسیدن به حداکثر M_B^+



ترتیب قرارگیری بار زنده w_l برای رسیدن به حداکثر M_A^-

۱۳-۱ نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی تقریبی را برای تیرهای قاب نشان داده شده در شکل زیر ترسیم کنید.



شکل ۱۳-۱

۰/۸ L = ۲۴ m وسط دهانه به صورت یک تیر دو سر مفصل تحلیل می‌شود. واکنشهای تکیه‌گاهی در دو انتهای تیر ساده:

$$R=\frac{۱/۵(۲۴)}{۲}=۱۸\ \ kN$$

مقادیر لنگرهای خمشی و نیروهای برشی با در نظر گرفتن تعادل (۰/۱ L = ۳ m) بخش انتهایی دهانه قابل محاسبه است.

$$+\uparrow\sum F_y=۰\ :\ S_L-۱/۵(۳)-۱۸=۰$$

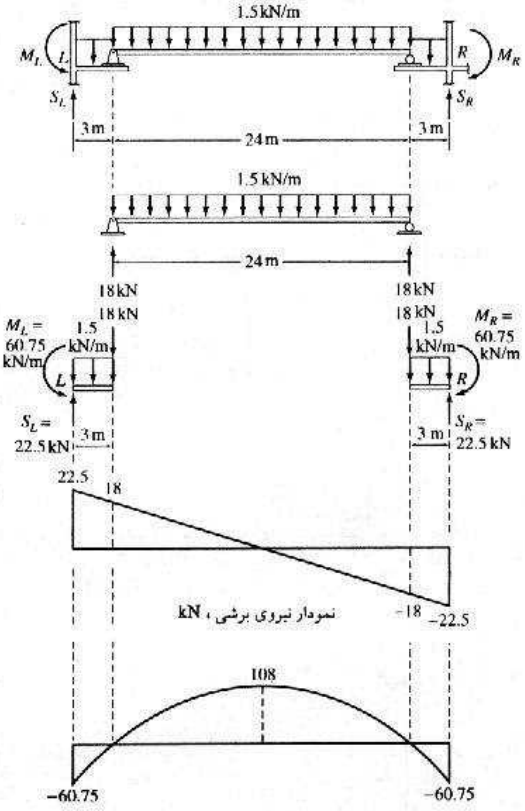
$$\blacktriangleright \vec{S}_L=۲۲/۵\ \ kN\uparrow$$

$$+\circlearrowleft\sum M_L=۰\ :\ M_L-۱/۵(۳)(۱/۵)-۱۸(۳)=۰$$

$$\blacktriangleright \vec{M}_L=۶۰/۷۵\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$

با محاسبات مشابه:

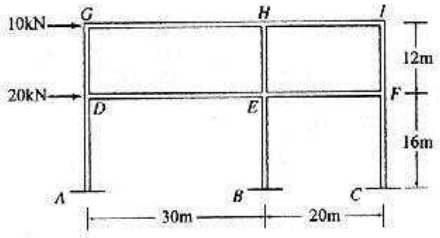
$$\blacktriangleright \vec{S}_R=۲۲/۵\ \ kN\uparrow\ ,\ \blacktriangleright \vec{M}_R=۶۰/۷۵\ \ kN.m\ \circlearrowleft$$



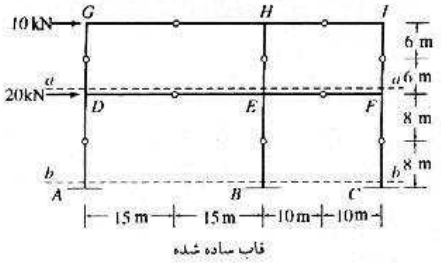
نمودار نیروی برشی ، kN

نمودار لنگر خمشی ، kN.m

۱۳-۲ با استفاده از روش پرتال قاب نشان داده شده را تحلیل کرده، نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی کلیهٔ اعضای قاب را به دست آورید.



شکل ۱۳-۲



قاب ساده شده

نیروی برشی ستونها:

با توجه به مقطع a-a:

$$\pm\rightarrow\sum F_x=۰\ :\ ۱۰-S_۲-۲S_۳-S_۴=۰\ \Rightarrow\ S_۲=۲/۵\ \ kN$$

برش پایین ستونهای طبقهٔ دوم:

$$\blacktriangleright \vec{S}_{DG}=\vec{S}_{FI}=\vec{S}_{۲}=۲/۵ \quad kN \leftarrow \quad , \quad \vec{S}_{EH}=۲\vec{S}_{۲}=۵ \quad kN \leftarrow$$

با توجه به مقطع b-b :

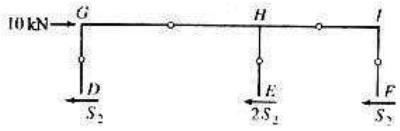
$$\blacktriangleright \vec{S}_{AD}=S_{CF}=S_{۱}=۷/۵ \quad kN \leftarrow \quad , \quad \vec{S}_{BE}=۲\vec{S}_{۱}=۱۵ \quad kN \leftarrow$$

نیروی برشی در بالای کلیهٔ ستونها نیز با نوشتن رابطهٔ $\sum F_x = ۰$ برای نمودار جسم آزاد هر ستون به دست می‌آید که البته مقدار برش در بالای هر ستون با مقدار آن در پایین ستون برابر ولی در خلاف جهت برش پایین ستون است. برای مثال: $\vec{S}_{GD}=۲/۵ \quad kN \rightarrow$

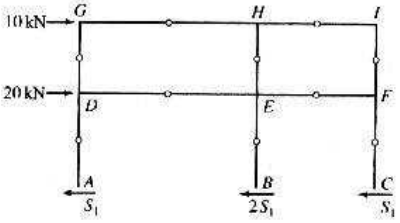
لنگر خمشی ستونها:

برای تعیین لنگر خمشی در ستونها کافی است که برش ستون در نصف ارتفاع ستون ضرب شود.

$$\vec{M}_{DG}=\vec{M}_{GD}=۲/۵\left[\frac{۱۲}{۲}\right]=۱۵ \quad kNm \;)$$



مقطع a-a

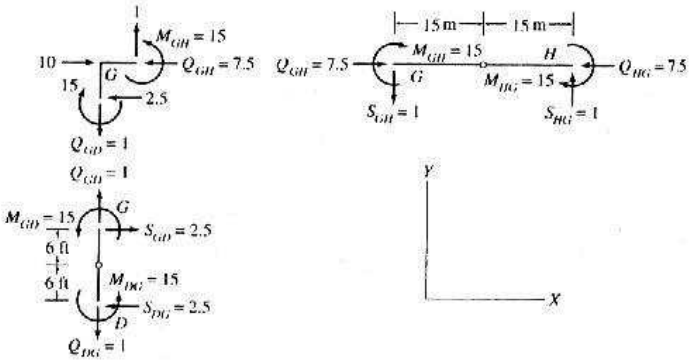


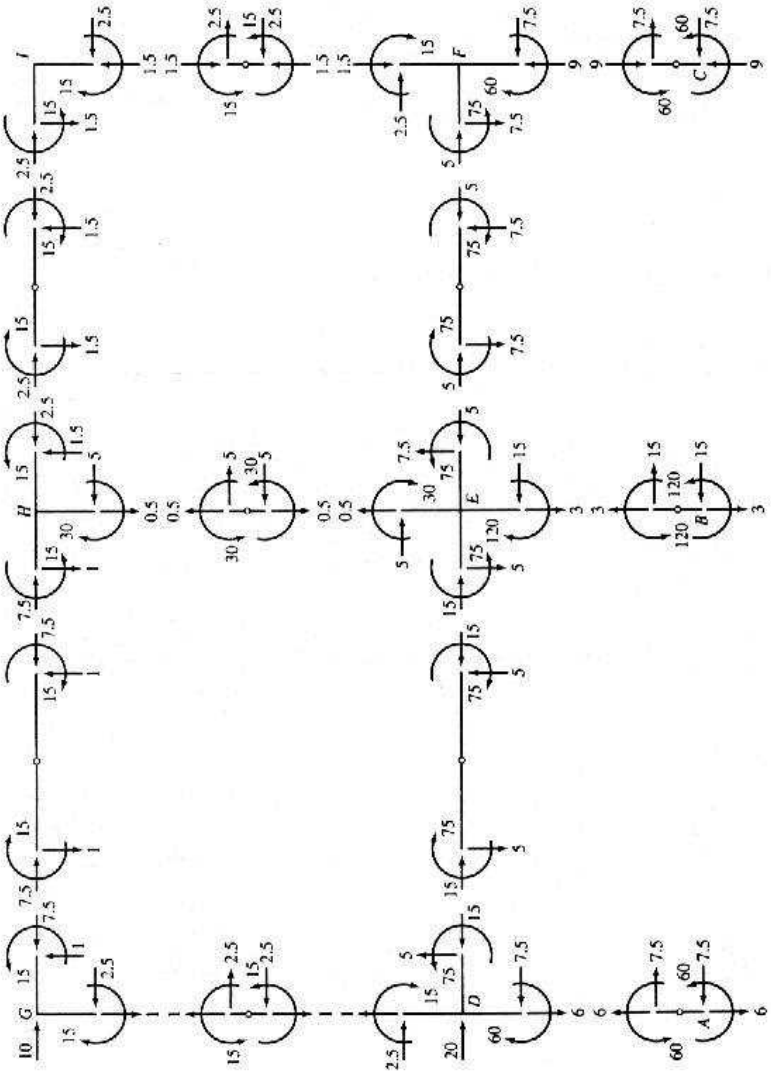
مقطع b-b

با نوشتن معادلهٔ تعادل لنگر گره‌ها، لنگرهای خمشی در انتهای تیرها به دست می‌آید. برای تعیین برش تیرها نیز لنگر خمشی یک انتهای آنها بر نصف طول تیر تقسیم می‌شود.

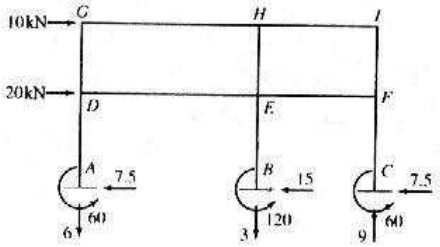
$$\vec{S}_{GH}=\frac{M_{GH}}{\left[\frac{L}{۲}\right]}=\frac{۱۵}{\left[\frac{۳۰}{۲}\right]}=۱ \quad kN \downarrow$$

با نوشتن معادلهٔ $\sum F_x = ۰$ برای گره‌ها و تیرها، مقدار نیروی محوری در تیرها به دست می‌آید. خلاصهٔ نتایج تحلیل قاب در شکل صفحهٔ بعد ارائه شده است.





نیروهای محوری و برشی و لنگرهای خمشی مؤثر در انتهای اعضا



واکنشهای تکیه‌گاهی

برای کنترل محاسبات، معادلات تعادل را برای نمودار جسم آزاد کل تیر می‌نویسیم.

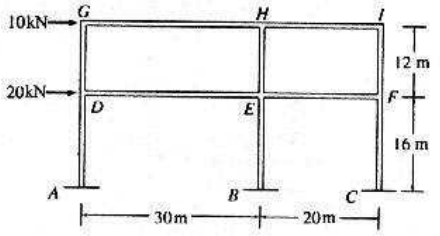
$$\pm\rightarrow \sum F_x = ۱۰ + ۲۰ - ۷/۵ - ۱۵ - ۷/۵ = ۰ \qquad O.K.$$

$$+\uparrow \sum F_y = -۶ - ۳ + ۹ = ۰ \qquad O.K.$$

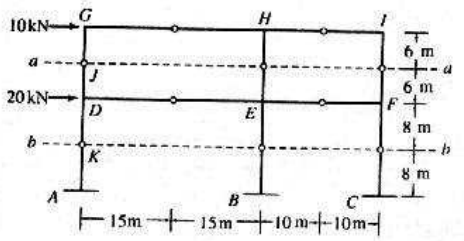
$$+\circlearrowleft \sum M_C = -۱۰(۲۸) - ۲۰(۱۶) + ۶۰ + ۶(۵۰) + ۱۲۰ + ۳(۲۰) + ۶۰ = ۰$$

$$O.K.$$

۱۳-۳ با استفاده از روش کانتیلور قاب نشان داده شده را تحلیل کرده، نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی کلیهٔ اعضای قاب را به دست آورید.



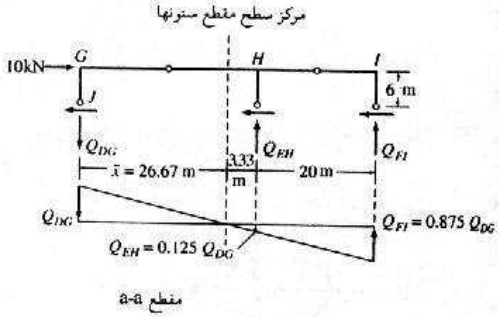
شکل ۱۳-۳



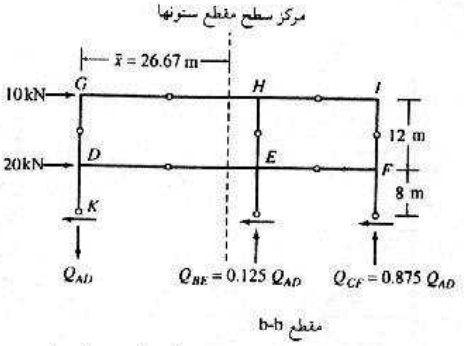
قاب ساده شده

ابتدا مرکز سطح مقطع ستونها را به دست می‌آوریم. با فرض مساوی بودن سطح مقطع ستونها:

$$\bar{x} = \frac{\sum A_x}{\sum A} = \frac{A(۰) + A(۳۰) + A(۵۰)}{۳A} = ۲۶/۶۷\,m$$



مقطع a-a

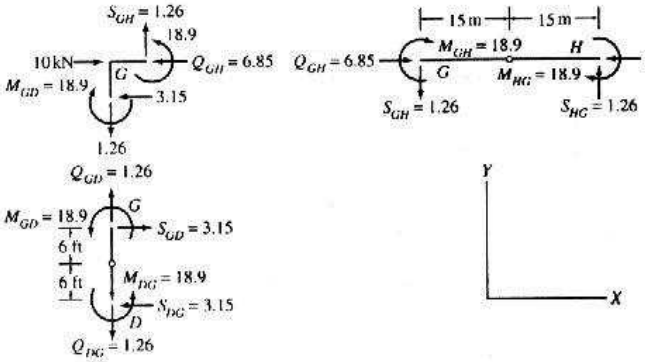


مقطع b-b

با توجه به جهت بارهای خارجی می‌توان نتیجه گرفت که ستونهای واقع بر سمت راست مرکز سطح ستونها مثل EH و FI تحت اثر نیروی فشاری و ستونهای واقع بر سمت چپ مثل DG تحت اثر نیروی کششی قرار دارند. با توجه به این که نیروی محوری ستونها به نسبت فاصلهٔ ستونها از مرکز سطح به صورت خطی تغییر می‌کند، می‌توان نیروی محوری ستونها را محاسبه کرد.

نیروی محوری ستونها:

در مقطع a-a:



$$Q_{EH} = \frac{۳/۳۳}{۲۶/۶۷} Q_{DG}$$

$$Q_{EH} = ۰/۱۲۵ Q_{DG}$$

$$Q_{FI} = \frac{۲۳/۳۳}{۲۶/۶۷} Q_{DG}$$

$$Q_{FI} = ۰/۸۷۵ Q_{DG}$$

$$+\circlearrowright \sum M_J = ۰ \quad :$$

$$-۱۰(۶) + Q_{EH}(۳۰) + Q_{FI}(۵۰) = ۰$$

$$-۶۰ + (۰/۱۲۵ Q_{DG})(۳۰) + (۰/۸۷۵ Q_{DG})(۵۰) = ۰$$

$$Q_{DG} = ۱/۲۶ \ kN$$

$$Q_{EH} = ۰/۱۲۵(۱/۲۶) = ۰/۱۶ \ kN \quad , \quad Q_{FI} = ۰/۸۷۵(۱/۲۶) = ۱/۱ \ kN$$

با روشی مشابه می‌توان نیروی محوری ستونهای طبقهٔ اول را نیز محاسبه کرد.

$$Q_{BE} = ۰/۱۲۵ Q_{AD} \quad , \quad Q_{CF} = ۰/۸۷۵ Q_{AD}$$

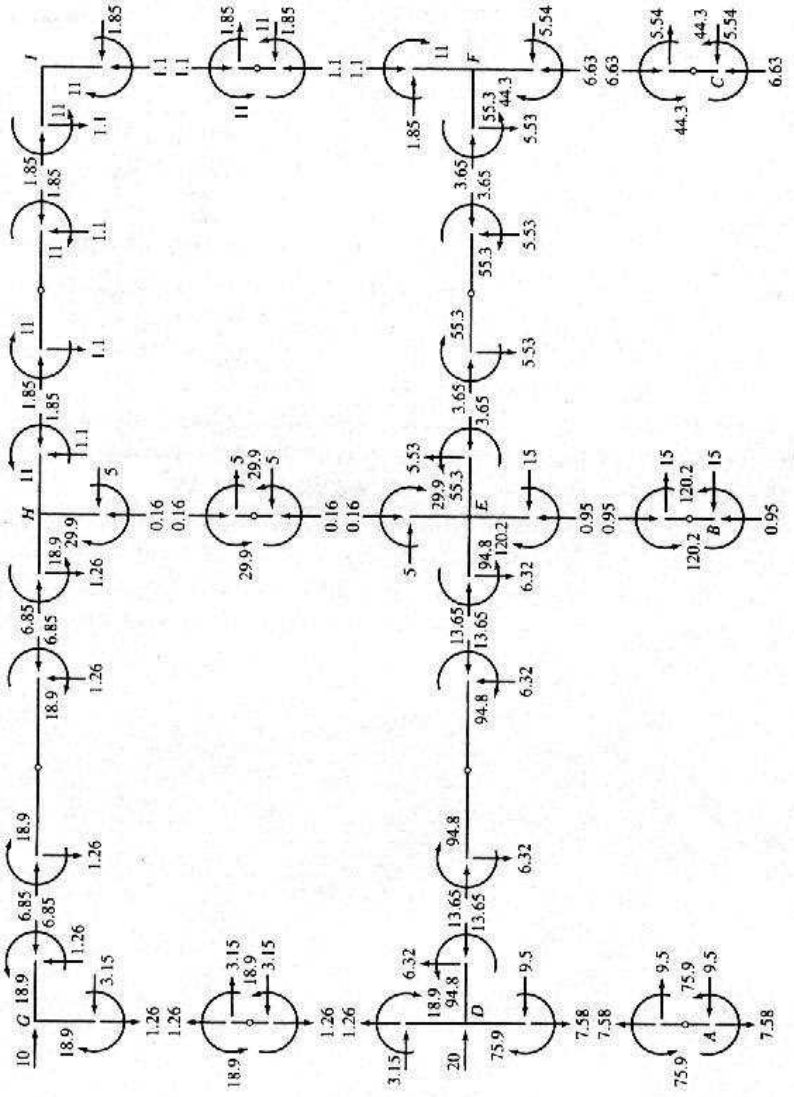
$$+\circlearrowright \sum M_K = ۰ \quad : \quad -۱۰(۲۰) - ۲۰(۸) + Q_{BE}(۳۰) + Q_{CF}(۵۰) = ۰ \quad \Rightarrow \quad -۳۶۰ + (۰/۱۲۵ Q_{AD})(۳۰) + (۰/۸۷۵ Q_{AD})(۵۰) = ۰$$

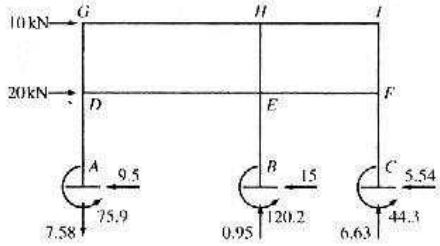
$$Q_{AD} = ۷/۵۸ \ kN \quad , \quad Q_{BE} = ۰/۱۲۵(۷/۵۸) = ۰/۹۵ \ kN \quad , \quad Q_{CF} = (۰/۸۷۵)(۷/۵۸) = ۶/۶۳ \ kN$$

برش تیرها را می‌توان با نوشتن معادلهٔ $\sum F_y = ۰$ برای گره‌های قاب به دست آورد و در ادامه با نوشتن معادلهٔ شرطی لنگر صفر حول نقطهٔ عطف تیر مقدار لنگر خمشی انتهای تیرها را به دست آورد. [برای مثال:

$$+\uparrow \sum F_y^G = ۰ \quad \Rightarrow \quad S_{GH} = ۱/۲۶ \ kN \quad , \quad \overrightarrow{M}_{GH} = ۱/۲۶(۱۵) = ۱۸/۹ \ kN.m$$

برای تعیین لنگر خمشی انتهای ستونها از معادلهٔ $\Sigma M = ۰$ برای گره‌ها استفاده کرده و برش ستونها را از تقسیم کردن لنگر خمشی آنها بر نصف ارتفاع ستون به دست می‌آوریم. خلاصهٔ نتایج تحلیل قاب در شکل صفحهٔ بعد نشان داده شده است.


نیروها و لنگرهای انتهای اعضا



واکنشهای تکیه‌گاهی

برای کنترل محاسبات، روابط تعادل را برای نمودار جسم آزاد کل قاب می‌نویسیم.

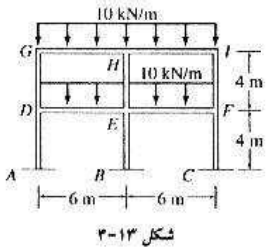
$$\pm \sum F_x = ۱۰ + ۲۰ - ۹/۵ - ۱۵ - ۵/۵۴ = -۰/۰۴ \approx ۰ \qquad O.K.$$

$$+\uparrow \sum F_y = -۷/۵۸ + ۰/۹۵ + ۶/۶۳ = ۰ \qquad O.K.$$

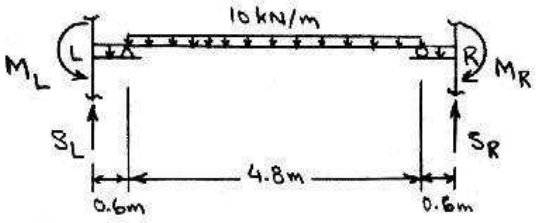
$$+\circlearrowleft \sum M_C = -۱۰(۲۸) - ۲۰(۱۶) + ۷۵/۹ + ۷/۵۸(۵۰) + ۱۲۰/۲ - ۰/۹۵(۲۰) + ۴۴/۳ = ۰/۴ \approx ۰ \qquad O.K.$$

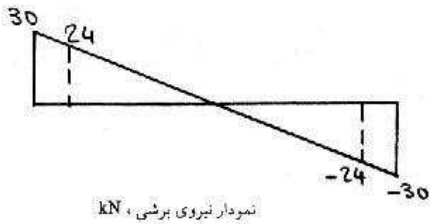
در مسایل ۱۳-۴ و ۱۳-۵ نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تقریبی را برای تیرهای قاب نشان داده شده ترسیم کنید.

۴-۱۳

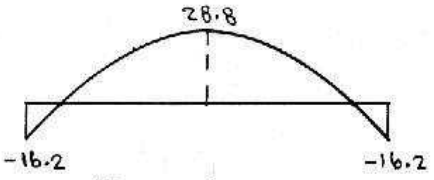


شکل ۱۳-۳

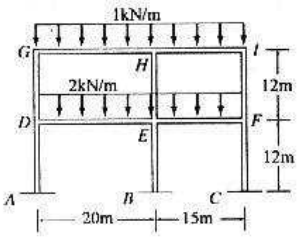




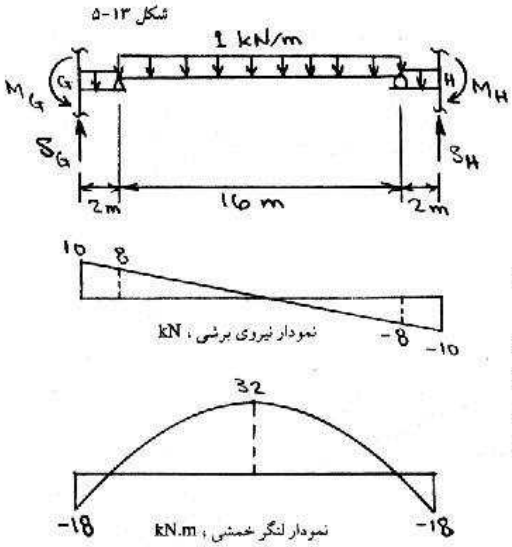
نمودار نیروی برشی، kN



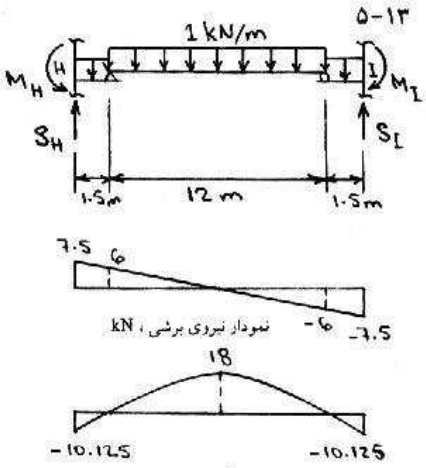
نمودار لنگر خمشی، kN.m



شکل ۱۳-۵



تیر GH



تیر HI

با توجه به این که بار وارد بر تیرهای طبقهٔ پایینی دو برابر تیرهای طبقهٔ بالایی است:

برش در تیر DE: $S_{DE} = ۲S_{GH}$

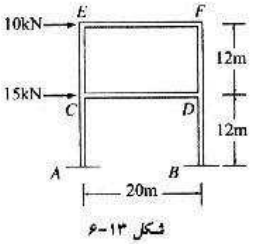
برش در تیر EF: $S_{EF} = ۲S_{HI}$

لنگر خمشی در تیر DE: $M_{DE} = ۲M_{GH}$

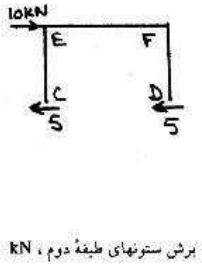
لنگر خمشی در تیر EF: $M_{EF} = ۲M_{HI}$

در مسایل ۱۳-۶ تا ۱۳-۱۰ قاب نشان داده شده را با روش پرتال تحلیل کرده و نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب را به دست آورید.

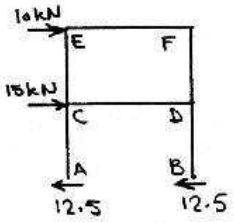
۶-۱۳



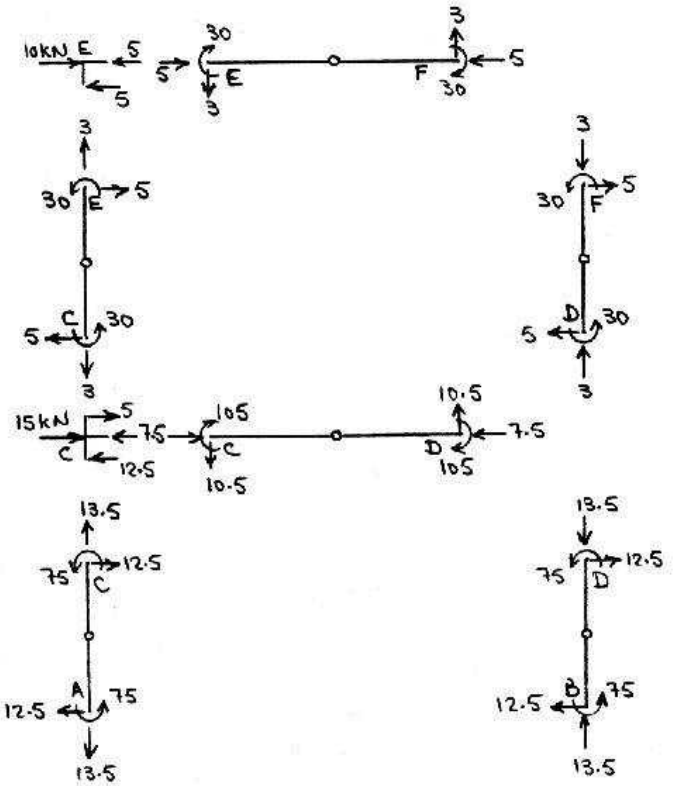
شکل ۱۳-۶



برش ستونهای طبقهٔ دوم ، kN

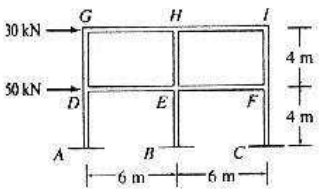


برش ستونهای طبقهٔ اول ، kN

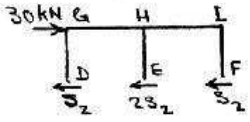


نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب

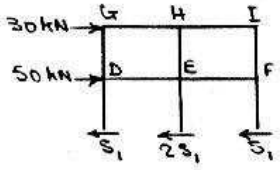
۷-۱۳



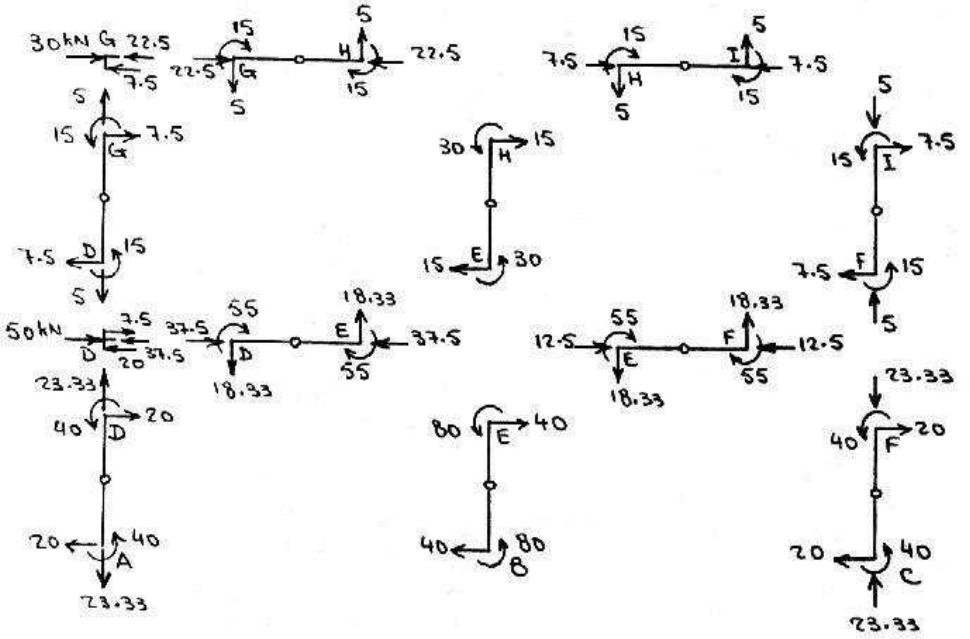
شکل ۷-۱۳



$S_2 = \frac{30}{4} = 7.5$ kN

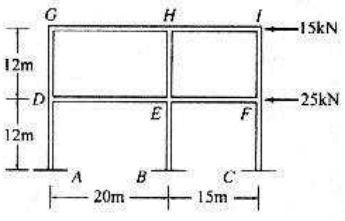


$S_1 = \frac{(50+30)}{4} = 20$ kN

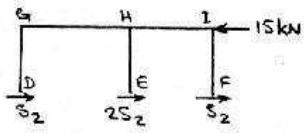


نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب

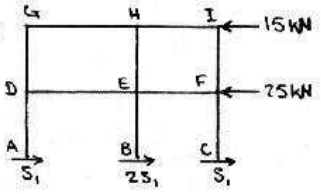
۸-۱۳



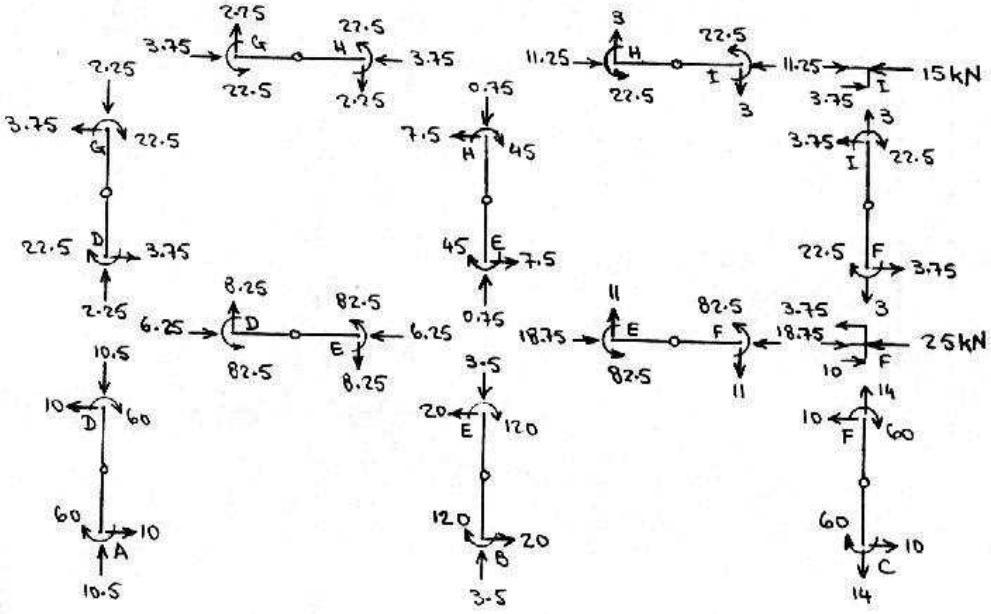
شکل ۸-۱۳



$S_2 = \frac{15}{4} = 3/75\ kN$

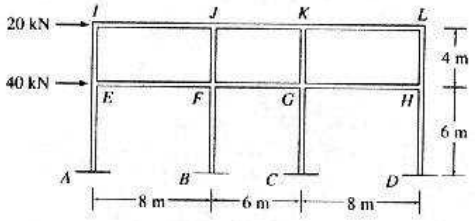


$S_1 = \frac{(15+25)}{4} = 10\ kN$

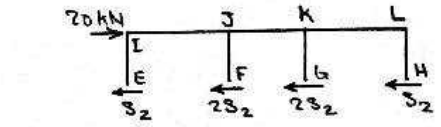


تیروی محوری، تیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب

۹-۱۳

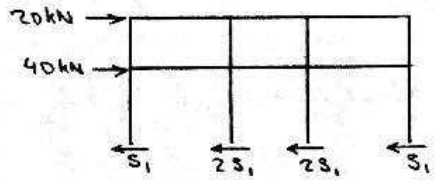


شکل ۱۳-۹



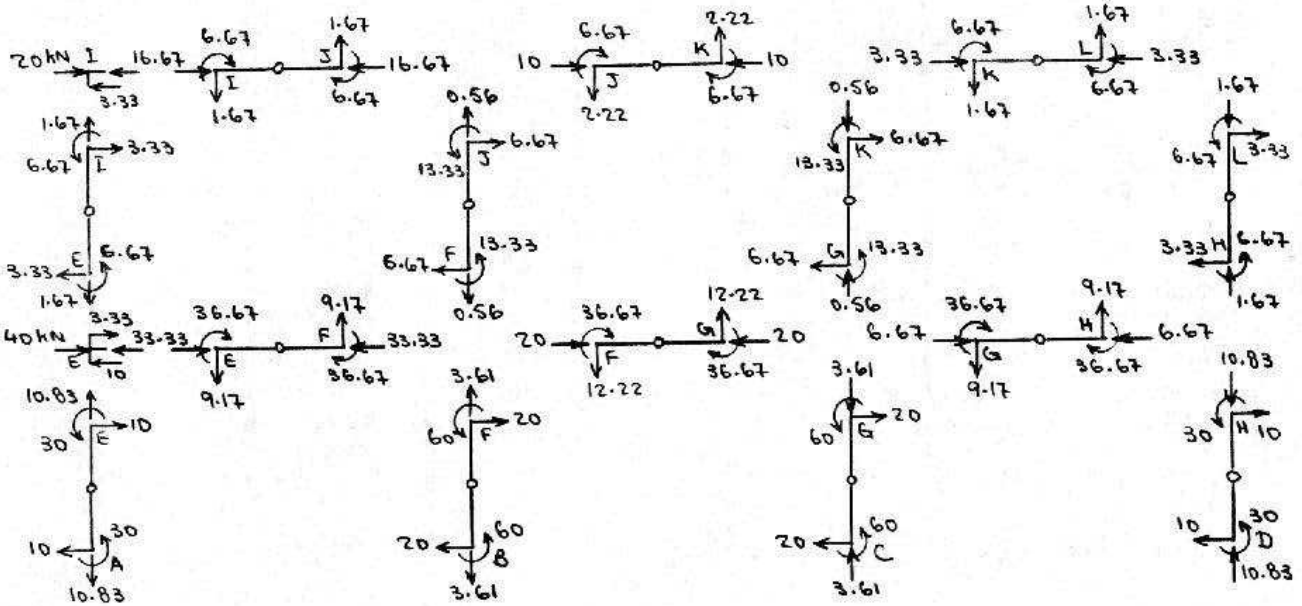
$S_2 = \frac{20}{6} = 3/33\ kN$

برش ستونهای طبقهٔ دوم ، kN



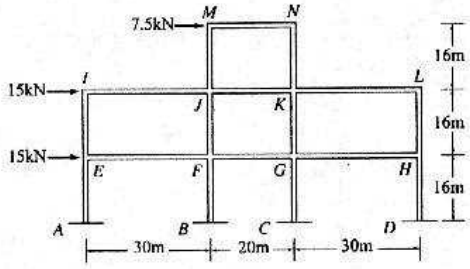
$S_1 = \frac{(20+40)}{6} = 10\ kN$

برش ستونهای طبقهٔ اول ، kN



نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب

۱۰-۱۳



شکل ۱۳-۱۰

برش در ستونها:

$$S_۳=\frac{۷/۵}{۲}=۳/۷۵\ \ kN \ \Rightarrow\ S_{JM}=S_{KN}=S_۳=۳/۷۵\ \ kN$$

$$S_۲=\frac{(۱۵+۷/۵)}{۶}=۳/۷۵\ \ kN$$

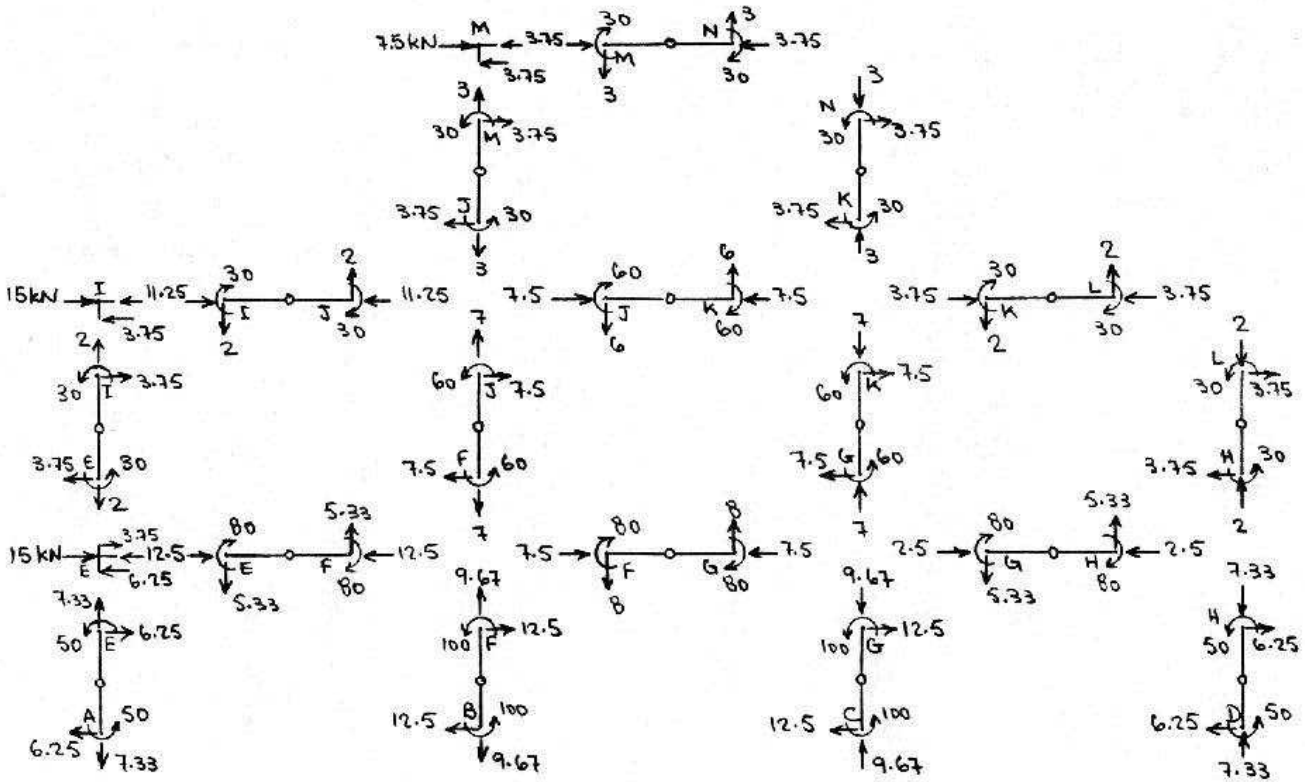
$$S_{EI}=S_{HL}=S_۲=۳/۷۵\ \ kN$$

$$S_{FJ}=S_{GK}=۲S_۲=۷/۵\ \ kN$$

$$S_۱=\frac{(۷/۵+۱۵+۱۵)}{۶}=۶/۲۵\ \ kN$$

$$S_{AE}=S_{DH}=S_۱=۶/۲۵\ \ kN$$

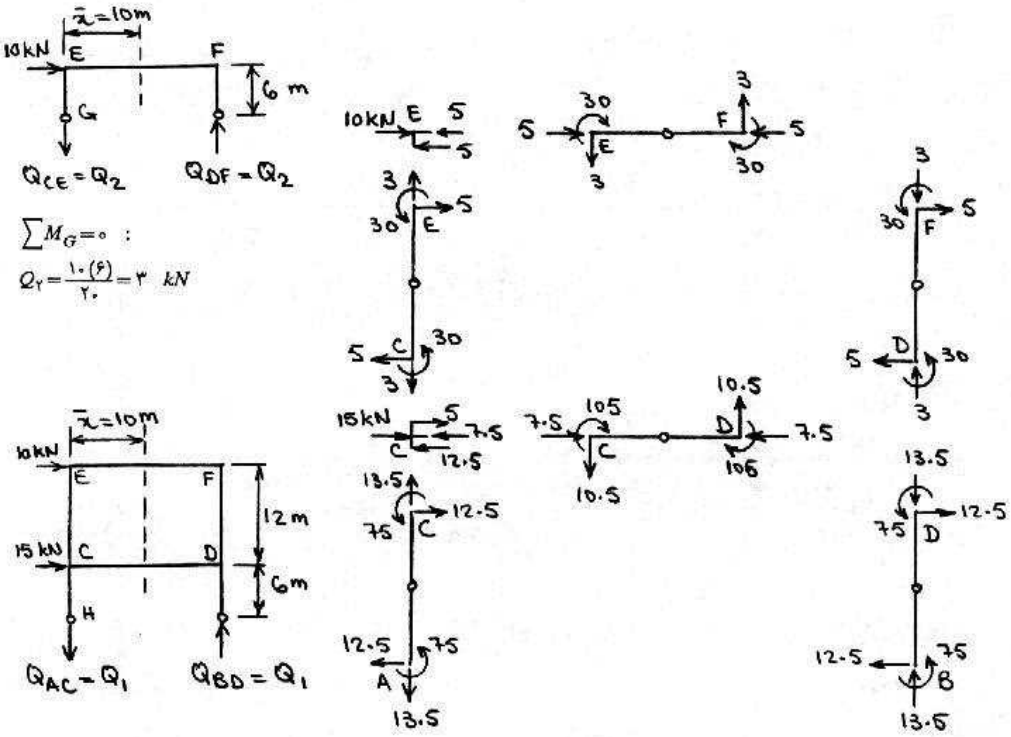
$$S_{BF}=S_{CG}=۲S_۱=۱۲/۵\ \ kN$$



نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب

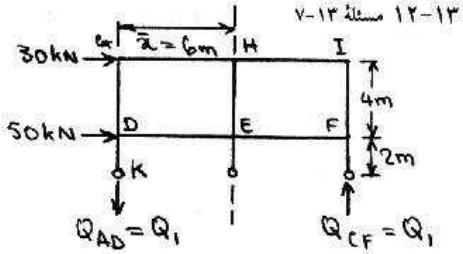
در مسایل ۱۳-۱۱ تا ۱۳-۱۵ ، قاب نشان داده شده را با روش کانتیلور مجدداً حل کرده و نیروهای محوری، برشی و لنگرهای خمشی را در انتهای اعضای قاب به دست آورید.

۱۳-۱۱ مسئلهٔ ۱۳-۶

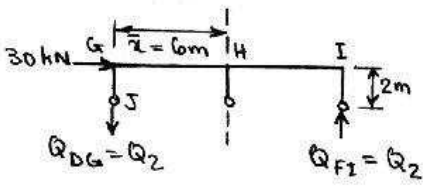


نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب

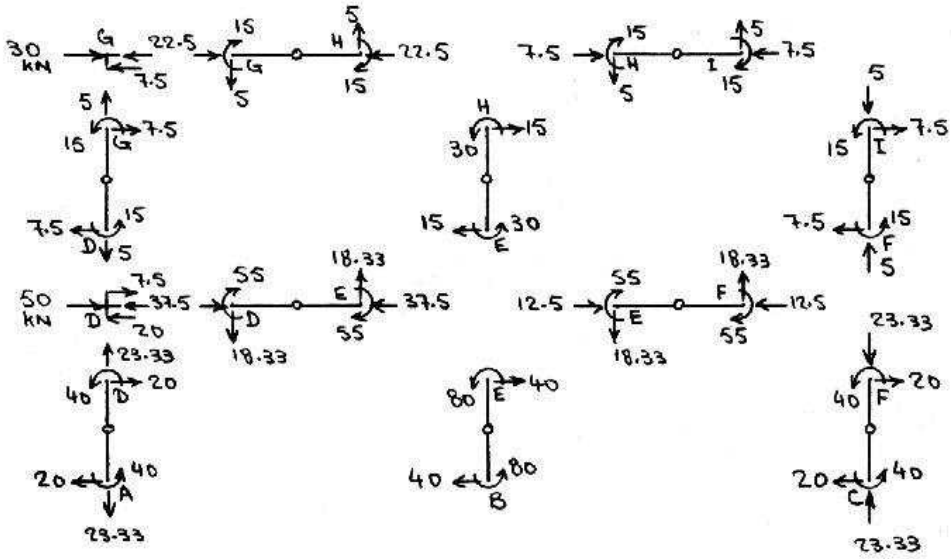
۱۲-۱۳ مسئلهٔ ۷-۱۳



$$\sum M_K = 0 \;:\; Q_1 = \frac{30(6) + 50(2)}{12} = 23/33 \;\; kN$$

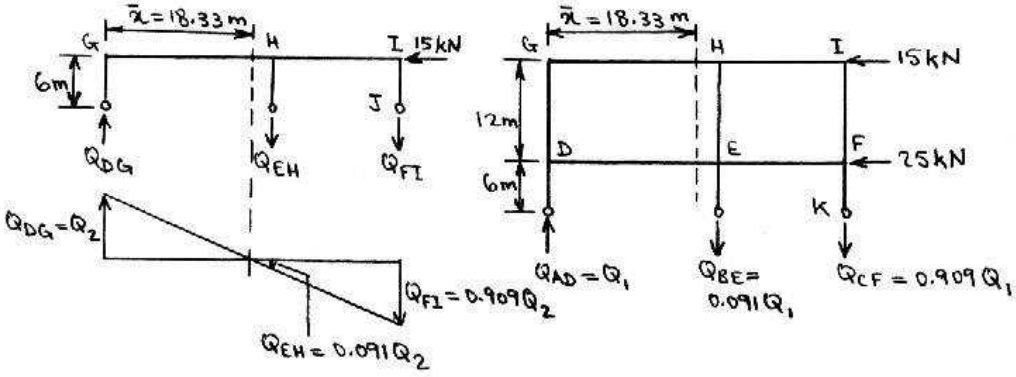


$$\sum M_J = 0 \;:\; Q_2 = \frac{30(2)}{12} = 5 \;\; kN$$



نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب

۱۳-۳ مسئلهٔ ۸-۱۳



$+\circlearrowright \sum M_J = 0$: $15(6) - Q_2(35) + 0/091 Q_2(15) = 0$

$Q_2 = 2/68$ kN

$Q_{DG} = 2/68$ kN , $Q_{EH} = 0/244$ kN

$Q_{FI} = 2/44$ kN

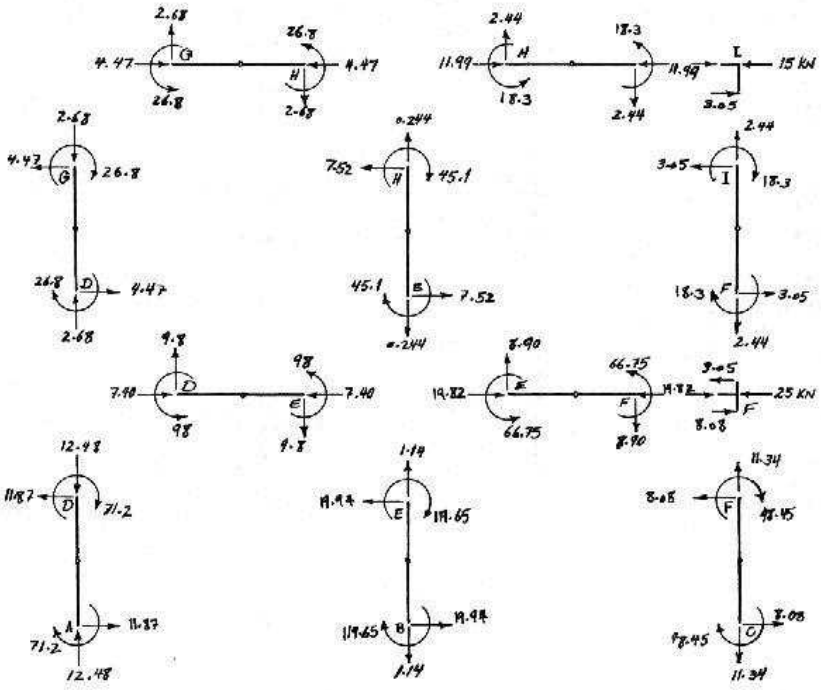
$+\circlearrowright \sum M_K = 0$:

$15\ (18) + 25(6) - Q_1(35) + 0/091 Q_1(15) = 0$

$Q_1 = 12/48$ kN

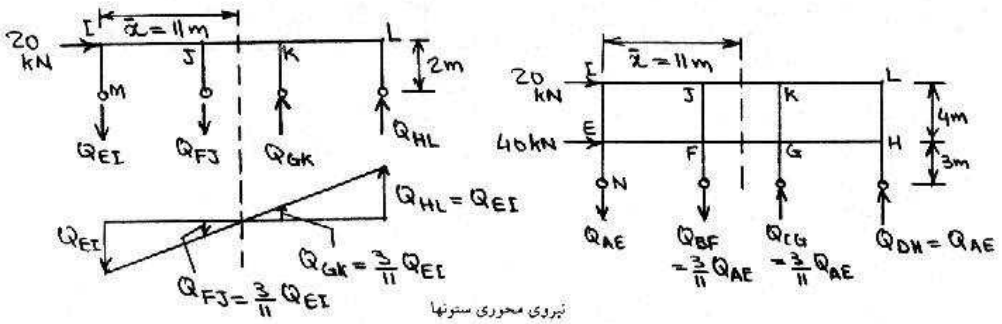
$Q_{AD} = 12/48$ kN , $Q_{BE} = 1/14$ kN

$Q_{CF} = 11/34$ kN



نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب

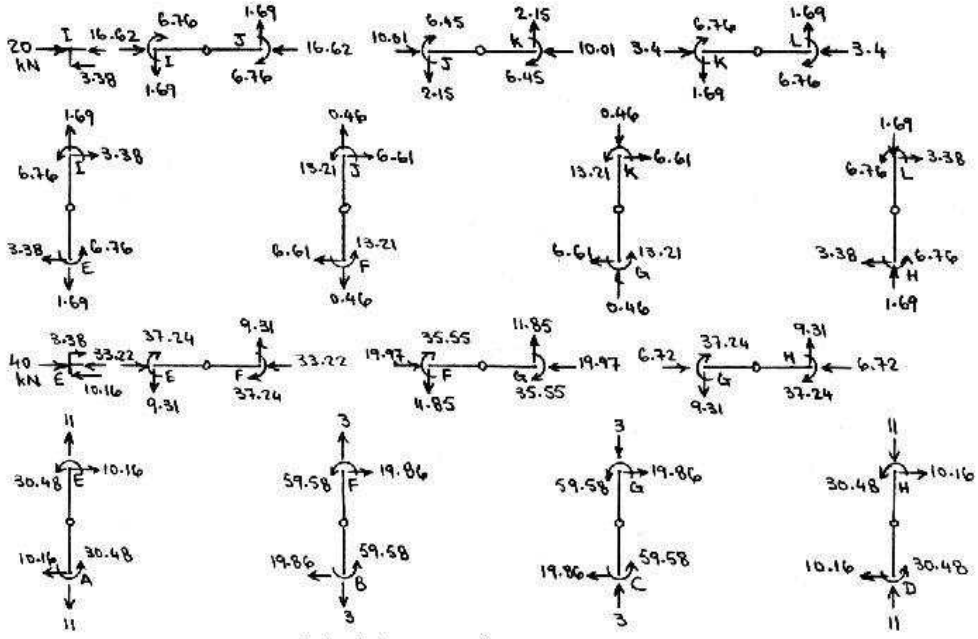
۱۴-۱۳ مسئلهٔ ۱۳-۹



نیروی محوری ستونها

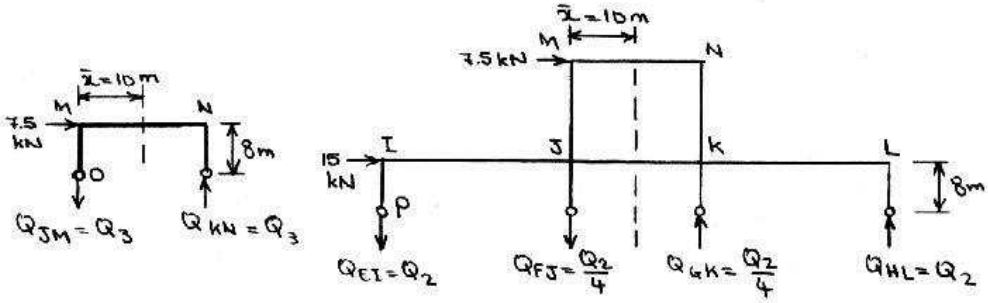
$$+\circlearrowleft \sum M_M = 0 \quad :$$
$$-۲۰(۳) - \frac{۳}{۱۱}Q_{EI}(۸) + \frac{۳}{۱۱}Q_{EI}(۱۴) + Q_{EI}(۲۲) = 0$$
$$Q_{EI} = Q_{HL} = ۱/۶۹ \quad kN$$
$$Q_{FJ} = Q_{GK} = \frac{۳}{۱۱}(۱/۶۹) = ۰/۴۶ \quad kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_N = 0 \quad :$$
$$-۲۰(۷) - ۴۰(۳) - \frac{۳}{۱۱}Q_{AE}(۸) + \frac{۳}{۱۱}Q_{AE}(۱۴) + Q_{AE}(۲۲) = 0$$
$$Q_{AE} = Q_{DH} = ۱۱ \quad kN \quad , \quad Q_{BF} = Q_{CG} = ۳ \quad kN$$



نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب

۱۳-۱۵ مسئلهٔ ۱۳-۱۰



برش ستونهای طبقهٔ سوم

برش ستونهای طبقهٔ دوم

$+\circlearrowleft \sum M_O = 0 \quad : \quad -۷/۵(۸) + Q_۲(۲۰) = 0$

$Q_۲ = ۳ \quad kN$

$Q_{JM} = Q_{KN} = ۳ \quad kN$

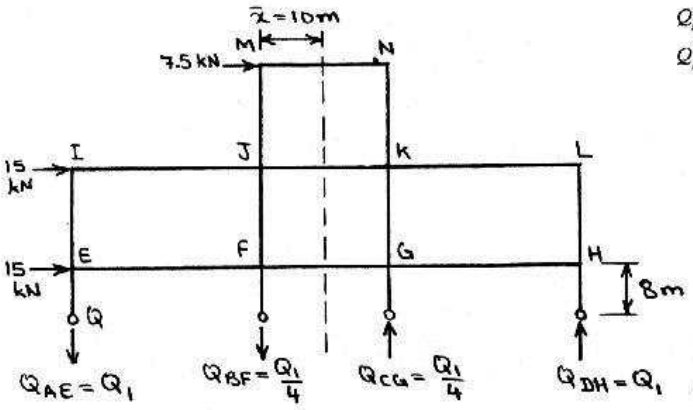
$+\circlearrowleft \sum M_P = 0 \quad :$

$-۷/۵(۲۴) - ۱۵(۸) - \frac{Q_۲}{۴}(۳۰) + \frac{Q_۲}{۴}(۵۰) + Q_۲(۸۰) = 0$

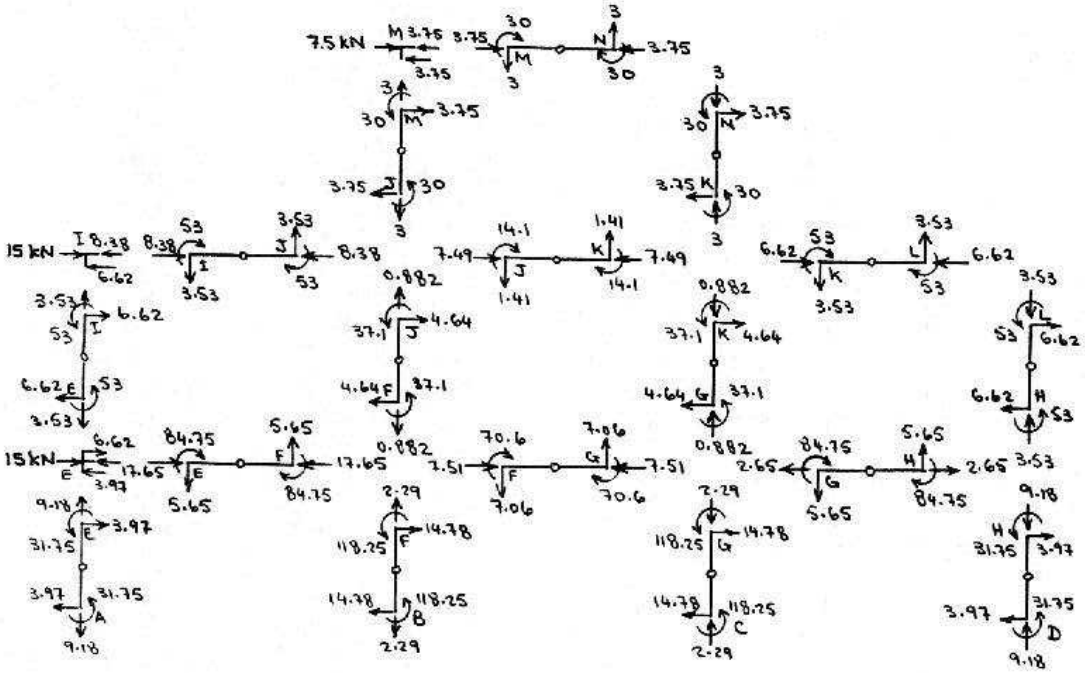
$Q_۲ = ۳/۵۳ \quad kN$

$Q_{EI} = Q_{HL} = ۳/۵۳ \quad kN$

$Q_{FJ} = Q_{GK} = ۰/۸۸۲ \quad kN$



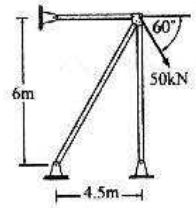
برش ستونهای طبقهٔ اول



نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای اعضای قاب

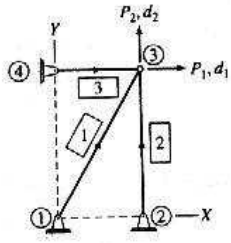
۶- واکنشهای تکیه‌گاهی را با در نظر گرفتن تعادل گره‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آوریم.

۱-۱۴ نیروهای داخلی اعضا و واکنشهای تکیه‌گاهی خرپای نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.



$E = ۲۰۰\ GPa$ ، $A = ۵۶۲۵\ mm^۲$

شکل ۱-۱۴



مدل تحلیلی خرپا

همان‌طور که از مدل تحلیلی خرپا پیدا است، فقط دو درجهٔ آزادی انتقالی d_1 و d_2 در گره ③ خرپا وجود دارد.

عضو (۱):

$$L=\sqrt{[X_۳-X_۱]^۲+[Y_۳-Y_۱]^۲}$$

$$L=\sqrt{(۴/۵-۰)^۲+(۶-۰)^۲}=۷/۵\ m$$

$$\cos\theta=\frac{X_۳-X_۱}{L}=\frac{۴/۵}{۷/۵}=۰/۶$$

$$\sin\theta=\frac{Y_۳-Y_۱}{L}=\frac{۶}{۷/۵}=۰/۸$$

$$EA=(۲۰۰)(۵۶۲۵)=۱۱۲۵۰۰۰\ kN=۱/۱۲۵\times۱۰^۶\ kN$$

$$\mathbf{K}_۱=\frac{۱/۱۲۵\times۱۰^۶}{۷/۵}\begin{bmatrix}۰/۳۶ & ۰/۴۸ & -۰/۳۶ & -۰/۴۸\\ ۰/۴۸ & ۰/۶۴ & -۰/۴۸ & -۰/۶۴\\ -۰/۳۶ & -۰/۴۸ & ۰/۳۶ & ۰/۴۸\\ -۰/۴۸ & -۰/۶۴ & ۰/۴۸ & ۰/۶۴\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{K}_۱=۱۰^۶\begin{array}{c}\\ ۰\\ ۰\\ ۱\\ ۲\end{array}\overset{\begin{array}{cccc}۰ & ۰ & ۱ & ۲\end{array}}{\begin{bmatrix}۰/۰۵۴ & ۰/۰۷۲ & -۰/۰۵۴ & -۰/۰۷۲\\ ۰/۰۷۲ & ۰/۰۹۶ & -۰/۰۷۲ & -۰/۰۹۶\\ -۰/۰۵۴ & -۰/۰۷۲ & ۰/۰۵۴ & ۰/۰۷۲\\ -۰/۰۷۲ & -۰/۰۹۶ & ۰/۰۷۲ & ۰/۰۹۶\end{bmatrix}}$$

عضو (۲):

$$L=۶\ m\ ,\ \cos\theta=\frac{X_۳-X_۲}{L}=\frac{۴/۵-۴/۵}{۶}=۰\ ,\ \sin\theta=\frac{Y_۳-Y_۲}{L}=\frac{۶-۰}{۶}=۱$$

$$\mathbf{K}_۲=\frac{۱/۱۲۵\times۱۰^۶}{۶}\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{K}_۲=۱۰^۶\begin{array}{c}\\ ۰\\ ۰\\ ۱\\ ۲\end{array}\overset{\begin{array}{cccc}۰ & ۰ & ۱ & ۲\end{array}}{\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰/۱۸۷۵ & ۰ & -۰/۱۸۷۵\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۰/۱۸۷۵ & ۰ & ۰/۱۸۷۵\end{bmatrix}}$$

عضو (۳):

$$L=۴/۵\ m\ ,\ \cos\theta=\frac{X_۳-X_۴}{L}=\frac{۴/۵-۰}{۴/۵}=۱\ ,\ \sin\theta=\frac{Y_۳-Y_۴}{L}=\frac{۶-۶}{۴/۵}=۰$$

$$\mathbf{K}_۳=\frac{۱/۱۲۵\times۱۰^۶}{۴/۵}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{K}_۳=۱۰^۶\begin{array}{c}\\ ۰\\ ۰\\ ۱\\ ۲\end{array}\overset{\begin{array}{cccc}۰ & ۰ & ۱ & ۲\end{array}}{\begin{bmatrix}۰/۲۵ & ۰ & -۰/۲۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ -۰/۲۵ & ۰ & ۰/۲۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}}$$

بردار بارهای گرهی $\mathbf{P}$:

$$P_۱=۵۰\cos۶۰^\circ=۲۵\ \ kN\ ,\ P_۲=-۵۰\sin۶۰^\circ=-۴۳/۳\ \ kN\ ,\ \mathbf{P}=\begin{bmatrix}۲۵\\ -۴۳/۳\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}=۱۰^۶\overset{\begin{array}{cc}۱ & ۲\end{array}}{\begin{bmatrix}(۰/۰۵۴+۰+۰/۲۵) & (۰/۰۷۲+۰+۰)\\ (۰/۰۷۲+۰+۰) & (۰/۰۹۶+۰/۱۸۷۵+۰)\end{bmatrix}}\begin{array}{c}۱\\ ۲\end{array}\Rightarrow\mathbf{S}=۱۰^۶\overset{\begin{array}{cc}۱ & ۲\end{array}}{\begin{bmatrix}۰/۳۰۴ & ۰/۰۷۲\\ ۰/۰۷۲ & ۰/۲۸۳۵\end{bmatrix}}\begin{array}{c}۱\\ ۲\end{array}$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{Sd}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}۲۵\\ -۴۳/۳\end{bmatrix}=۱۰^۶\begin{bmatrix}۰/۳۰۴ & ۰/۰۷۲\\ ۰/۰۷۲ & ۰/۲۸۳۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_۱\\ d_۲\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ d_۱=۰/۰۰۰۱۲۶\ m$$

$$d_۲=-۰/۰۰۰۱۸۵\ m\ \Rightarrow\ \mathbf{d}=\begin{bmatrix}۰/۰۰۰۱۲۶\\ -۰/۰۰۰۱۸۵\end{bmatrix}m$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۱):

$$\mathbf{v}_۱=\begin{bmatrix}v_۱\\ v_۲\\ v_۳\\ v_۴\end{bmatrix}\begin{array}{c}۰\\ ۰\\ ۱\\ ۲\end{array}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ d_۱\\ d_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۰/۰۰۰۱۲۶\\ -۰/۰۰۰۱۸۵\end{bmatrix}m\ ,\ \mathbf{u}_۱=\begin{bmatrix}u_۱\\ u_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۶ & ۰/۸ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰/۶ & ۰/۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۰/۰۰۰۱۲۶\\ -۰/۰۰۰۱۸۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ -۰/۰۰۰۰۷۲۴\end{bmatrix}m$$

$$\mathbf{Q}=\mathbf{ku} \;\Rightarrow\; \mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}=\frac{1/125\times10^6}{7/5}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-0/0007324\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10/86\\-10/86\end{bmatrix}\ kN \quad \blacktriangleright 10/86\ kN\ (C)$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{T}^T\mathbf{Q} \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_1=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0/6&0\\0/8&0\\0&0/6\\0&0/8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10/86\\-10/86\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6/52\\8/67\\-6/52\\-8/67\end{bmatrix}\ kN$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۲) :

$$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{bmatrix}^{0}_{0}_{1}_{2}=\begin{bmatrix}0\\0\\d_1\\d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0/0001126\\-0/0001185\end{bmatrix}m \quad , \quad \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0/0001126\\-0/0001185\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-0/0001185\end{bmatrix}m$$

$$\mathbf{Q}=\mathbf{ku} \;\Rightarrow\; \mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}=\frac{1/125\times10^6}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-0/0001185\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}33/68\\-33/68\end{bmatrix}\ kN \quad \blacktriangleright 33/68\ kN\ (C)$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{T}^T\mathbf{Q} \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_2=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}33/68\\-33/68\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\33/68\\0\\-33/68\end{bmatrix}\ kN$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۳) :

$$\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{bmatrix}^{0}_{0}_{1}_{2}=\begin{bmatrix}0\\0\\d_1\\d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0/0001126\\-0/0001185\end{bmatrix}m \quad , \quad \mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0/0001126\\-0/0001185\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0/0001126\end{bmatrix}m$$

$$\mathbf{Q}=\mathbf{ku} \;\Rightarrow\; \mathbf{Q}_3=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}=\frac{1/125\times10^6}{4/5}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0/0001126\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-31/5\\31/5\end{bmatrix}\ kN \quad \blacktriangleright 31/5\ kN\ (T)$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{T}^T\mathbf{Q} \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_3=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-31/5\\31/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-31/5\\0\\31/5\\0\end{bmatrix}\ kN$$

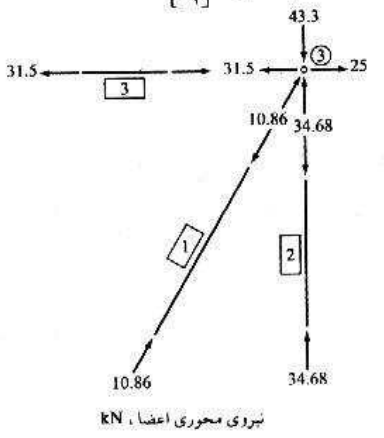
کنترل تعادل کل خرپا:

$$\pm\sum F_x=6/52-31/5+50\cos60^\circ=0/02\approx0 \qquad O.K.$$

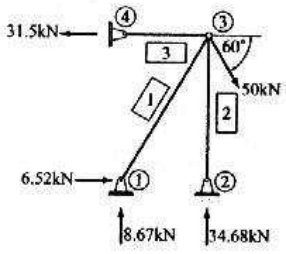
$$+\uparrow\sum F_y=8/67+33/68-50\sin60^\circ=0/04\approx0 \qquad O.K.$$

$$+\circlearrowleft\sum M_{①}=33/68(4/5)+31/5(6)-50\cos60^\circ(6)-50\sin60^\circ(4/5)$$

$$+\circlearrowleft\sum M_{①}=0/2\approx0 \qquad O.K.$$

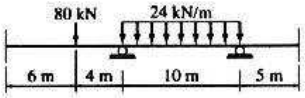


نیروی محوری اعضا ، kN



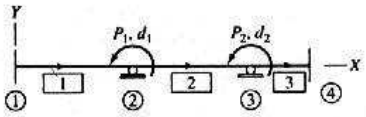
واکنشهای تکیه‌گاهی

۲-۱۴ برای تیر نشان داده شده در شکل، واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروهای انتهای اعضا را با استفاده از روش ماتریسی به دست آورید.



ثابت = EI

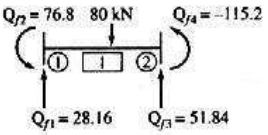
شکل ۱۳-۲



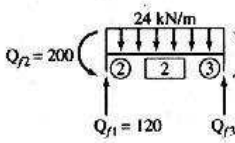
مدل تحلیلی تیر

با توجه به مدل تحلیلی، مشخص می‌شود که این تیر فقط دارای دو درجهٔ آزادی دورانی $\mathbf{d}_1$ و $\mathbf{d}_2$ است. همچنین همان‌طور که دیده می‌شود، محور x محلی اعضا و محور X کلی هم جهت‌اند، بدین جهت روابط نیرو - تغییر مکان در دستگاههای مختصات محلی و کلی یکسان خواهند بود.

عضو (۱):



$$\mathbf{K}_1=\mathbf{k}_1=EI\begin{bmatrix} ۰/۰۱۲ & ۰/۰۶ & -۰/۰۱۲ & ۰/۰۶ \\ ۰/۰۶ & ۰/۴ & -۰/۰۶ & ۰/۲ \\ -۰/۰۱۲ & -۰/۰۶ & ۰/۰۱۲ & -۰/۰۶ \\ ۰/۰۶ & ۰/۲ & -۰/۰۶ & ۰/۴ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۰\\۰\\۱\end{matrix}$$



نیروهای گیرداری انتهای اعضا

$$Q_{f2}=\frac{۸۰(۶)(۴)^2}{(۱۰)^2}=۷۶/۸\ \ kN.m\ ,\ \ Q_{f4}=-\frac{۸۰(۶)^2(۴)}{(۱۰)^2}=-۱۱۵/۲\ \ kN.m$$

با استفاده از معادلات تعادل برای نمودار جسم آزاد عضو ①، مقادیر Q_{f1} و Q_{f3} محاسبه خواهند شد.

$$+\circlearrowleft \sum M_{②}=۰\ :\ ۷۶/۸-Q_{f1}(۱۰)+۸۰(۴)-۱۱۵/۲=۰$$

$$Q_{f1}=۲۸/۱۶\ \ kN$$

$$+\uparrow \sum F_y=۰\ :\ ۲۸/۱۶-۸۰+Q_{f3}=۰\ \Rightarrow\ Q_{f3}=۵۱/۸۴\ \ kN$$

$$\mathbf{F}_{f1}=\mathbf{Q}_{f1}=\begin{bmatrix} ۲۸/۱۶ \\ ۷۶/۸ \\ ۵۱/۸۴ \\ -۱۱۵/۲ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۰\\۰\\۱\end{matrix}$$

عضو (۲):

$$\mathbf{K}_2=\mathbf{k}_2=EI\begin{bmatrix} ۰/۰۱۲ & ۰/۰۶ & -۰/۰۱۲ & ۰/۰۶ \\ ۰/۰۶ & ۰/۴ & -۰/۰۶ & ۰/۲ \\ -۰/۰۱۲ & -۰/۰۶ & ۰/۰۱۲ & -۰/۰۶ \\ ۰/۰۶ & ۰/۲ & -۰/۰۶ & ۰/۴ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۱\\۰\\۲\end{matrix}\ ,\ \ Q_{f2}=-Q_{f4}=\frac{۲۴(۱۰)^2}{۱۲}=۲۰۰\ \ kN.m$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{②}=۰\ :\ ۲۰۰-۲۴(۱۰)(۵)-۲۰۰+Q_{f3}(۱۰)=۰\ \Rightarrow\ Q_{f3}=۱۲۰\ \ kN$$

$$+\uparrow \sum F_y=۰\ :\ ۱۲۰-۲۴(۱۰)+Q_{f1}=۰\ \Rightarrow\ Q_{f1}=۱۲۰\ \ kN$$

$$\mathbf{F}_{f2}=\mathbf{Q}_{f2}=\begin{bmatrix} ۱۲۰ \\ ۲۰۰ \\ ۱۲۰ \\ -۲۰۰ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۱\\۰\\۲\end{matrix}$$

عضو (۳):

$$\mathbf{K}_3=\mathbf{k}_3=EI\begin{bmatrix} ۰/۰۹۶ & ۰/۲۴ & -۰/۰۹۶ & ۰/۲۴ \\ ۰/۲۴ & ۰/۸ & -۰/۲۴ & ۰/۴ \\ -۰/۰۹۶ & -۰/۲۴ & ۰/۰۹۶ & -۰/۲۴ \\ ۰/۲۴ & ۰/۴ & -۰/۲۴ & ۰/۸ \end{bmatrix}\begin{matrix}۲\\۰\\۰\\۰\end{matrix}\ ,\ \ \mathbf{F}_{f3}=\mathbf{Q}_{f3}=۰$$

با توجه به این که هیچ‌گونه بارگذاری گرهی نیز وجود ندارد: $\mathbf{P}=۰$.

$$\mathbf{S}=EI\begin{bmatrix} (۰/۴+۰/۴) & ۰/۲ \\ ۰/۲ & (۰/۴+۰/۸) \end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{S}=EI\begin{bmatrix} ۰/۸ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{P}_f=\begin{bmatrix} (-۱۱۵/۲+۲۰۰) \\ -۲۰۰ \end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{P}_f=\begin{bmatrix} ۸۴/۸ \\ -۲۰۰ \end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}$$

$$\mathbf{P}-\mathbf{P}_f=\mathbf{Sd}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} -۸۴/۸ \\ ۲۰۰ \end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix} ۰/۸ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ EId_1=-۱۵۴/۰۹\ \ kN.m^2$$

$$EId_2=۱۹۲/۳۵\ \ kN.m^2\ \Rightarrow\ \mathbf{d}=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix} -۱۵۴/۰۹ \\ ۱۹۲/۳۵ \end{bmatrix}\ \ kN.m^2$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۱):

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۰\\۰\\۱\end{matrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ d_1 \end{bmatrix}=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ -۱۵۴/۰۹ \end{bmatrix}\ ,\ \ \mathbf{Q}=\mathbf{ku}+\mathbf{Q}_f$$

$$\mathbf{F}_1=\mathbf{Q}_1=EI\begin{bmatrix} ۰/۰۱۲ & ۰/۰۶ & -۰/۰۱۲ & ۰/۰۶ \\ ۰/۰۶ & ۰/۴ & -۰/۰۶ & ۰/۲ \\ -۰/۰۱۲ & -۰/۰۶ & ۰/۰۱۲ & -۰/۰۶ \\ ۰/۰۶ & ۰/۲ & -۰/۰۶ & ۰/۴ \end{bmatrix}\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ -۱۵۴/۰۹ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲۸/۱۶ \\ ۷۶/۸ \\ ۵۱/۸۴ \\ -۱۱۵/۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۸/۹۱ & kN \\ ۴۵/۹۸ & kN.m \\ ۶۱/۰۹ & kN \\ -۱۷۶/۸۴ & kN.m \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۲):

$$\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}_2^{\circ}{}^{۱}{}_{\circ}=\begin{bmatrix} ۰ \\ d_1 \\ ۰ \\ d_2 \end{bmatrix}=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱۵۴/۰۹ \\ ۰ \\ ۱۹۲/۳۵ \end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{Q}=\mathbf{ku}+\mathbf{Q}_f$$

$$\mathbf{F}_2=\mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix} ۰/۰۱۲ & ۰/۰۶ & -۰/۰۱۲ & ۰/۰۶ \\ ۰/۰۶ & ۰/۴ & -۰/۰۶ & ۰/۲ \\ -۰/۰۱۲ & -۰/۰۶ & ۰/۰۱۲ & -۰/۰۶ \\ ۰/۰۶ & ۰/۲ & -۰/۰۶ & ۰/۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱۵۴/۰۹ \\ ۰ \\ ۱۹۲/۳۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱۲۰ \\ ۲۰۰ \\ ۱۲۰ \\ -۲۰۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۲۲/۳ & kN \\ ۱۷۶/۸۳ & kN.m \\ ۱۱۷/۷ & kN \\ -۱۵۳/۸۸ & kN.m \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۳):

$$\mathbf{u}_3=\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}_3^{\circ}{}^{۲}{}_{\circ}=\begin{bmatrix} d_2 \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix} ۱۹۲/۳۵ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{Q}=\mathbf{ku}+\mathbf{Q}_f$$

$$\mathbf{F}_3=\mathbf{Q}_3=\begin{bmatrix} ۰/۰۹۶ & ۰/۲۴ & -۰/۰۹۶ & ۰/۲۴ \\ ۰/۲۴ & ۰/۸ & -۰/۲۴ & ۰/۴ \\ -۰/۰۹۶ & -۰/۲۴ & ۰/۰۹۶ & -۰/۲۴ \\ ۰/۲۴ & ۰/۴ & -۰/۲۴ & ۰/۸ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۹۲/۳۵ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴۶/۱۶ & kN \\ ۱۵۳/۸۸ & kN.m \\ -۴۶/۱۶ & kN \\ ۷۶/۹۴ & kN.m \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

واکنشهای تکیه‌گاهی ① $\mathbf{R}_1$ و ② $\mathbf{R}_2$ به ترتیب همان نیروهای ابتدای عضو ۱ و انتهای عضو ۲ هستند.

$$\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix} ۱۸/۹۱ & kN \\ ۴۵/۹۸ & kN.m \end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{R}_2=\begin{bmatrix} -۴۶/۱۶ & kN \\ ۷۶/۹۴ & kN.m \end{bmatrix}$$

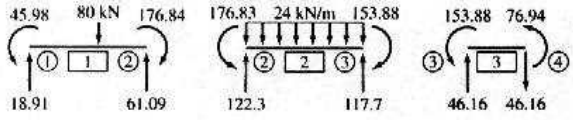
واکنشهای تکیه‌گاهی ② $\mathbf{R}_2$ جمع جبری نیمهٔ بالای بردار $\mathbf{F}_2$ و نیمهٔ پایین بردار $\mathbf{F}_1$ است و واکنش تکیه‌گاهی ③ $\mathbf{R}_3$ جمع جبری نیمهٔ بالای بردار $\mathbf{F}_3$ و نیمهٔ پایین بردار $\mathbf{F}_2$ است.

$$\mathbf{R}_2=\begin{bmatrix} ۶۱/۰۹ \\ -۱۷۶/۸۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱۲۲/۳ \\ ۱۷۶/۸۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۸۳/۳۹ & kN \\ -۰/۰۱\approx ۰ \end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{R}_3=\begin{bmatrix} ۱۱۷/۷ \\ -۱۵۳/۸۸ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴۶/۱۶ \\ ۱۵۳/۸۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۶۳/۸۶ & kN \\ ۰ \end{bmatrix}$$

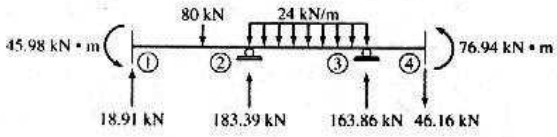
کنترل تعادل کل تیر:

$$+\uparrow \sum F_y = ۱۸/۹۱ - ۸۰ + ۱۸۳/۳۹ - ۲۴(۱۰) + ۱۶۳/۸۶ - ۴۶/۱۶ = ۰ \quad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{②} = ۴۵/۹۸ - ۱۸/۹۱(۲۵) + ۸۰(۱۹) - ۱۸۳/۳۹(۱۵) + ۲۴(۱۰)(۱۰) - ۱۶۳/۸۶(۵) + ۷۶/۹۴ = ۰/۰۲\approx ۰ \quad O.K.$$

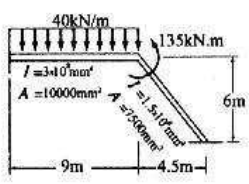


نیروهای انتهای اعضای تیر



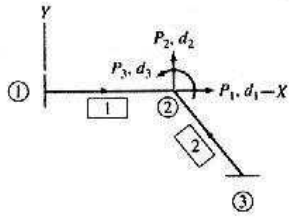
واکنشهای تکیه‌گاهی

۱۴-۳ واکنشهای تکیه‌گاهی و نیروهای انتهای اعضای قاب نشان داده شده را با استفاده از روش ماتریسی به دست آورید.

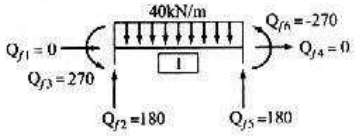


E = ۲۰۰ GPa

شکل ۱۲-۳



مدل تحلیلی قاب



نیروهای گیرداری انتهای اعضا

عضو (۱):

$$Q_{f3}=-Q_{f6}=\frac{۴۰(۹)^{۲}}{۱۲}=۲۷۰\quad kN.m$$

$$Q_{f2}=Q_{f5}=۱۸۰\quad kN$$

$$EI=۲۰۰(۳\times۱۰^{۸})=۶\times۱۰^{۱۰}\ kN.mm^{۲}=۶۰۰۰۰\ kN.m^{۲}\ ,\ EA=۲۰۰(۱۰۰۰۰)=۲\times۱۰^{۶}\ kN$$

$$\mathbf{K}_{۱}=\mathbf{k}_{۱}=\begin{array}{c}\begin{matrix}۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۳\end{matrix}\\\left[\begin{array}{cccccc}۲۲۲۲۲۲/۲۲ & ۰ & ۰ & -۲۲۲۲۲۲/۲۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۹۸۷/۶۵ & ۴۴۴۴/۴۴ & ۰ & -۹۸۷/۶۵ & ۴۴۴۴/۴۴\\ ۰ & ۴۴۴۴/۴۴ & ۲۶۶۶۶/۶۷ & ۰ & -۴۴۴۴/۴۴ & ۱۳۳۳۳/۳۳\\ -۲۲۲۲۲۲/۲۲ & ۰ & ۰ & ۲۲۲۲۲۲/۲۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۹۸۷/۶۵ & -۴۴۴۴/۴۴ & ۰ & ۹۸۷/۶۵ & -۴۴۴۴/۴۴\\ ۰ & ۴۴۴۴/۴۴ & ۱۳۳۳۳/۳۳ & ۰ & -۴۴۴۴/۴۴ & ۲۶۶۶۶/۶۷\end{array}\right]\begin{matrix}۰\\۰\\۰\\۱\\۲\\۳\end{matrix}\end{array}\ ,\ \mathbf{F}_{f۱}=\mathbf{Q}_{f۱}=\begin{bmatrix}۰\\۱۸۰\\۲۷۰\\۰\\۱۸۰\\-۲۷۰\end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۰\\۰\\۱\\۲\\۳\end{matrix}$$

عضو (۲):

$$EI=۲۰۰(۱/۵\times۱۰^{۸})=۳۰۰۰۰\ \ kN.m^{۲}\ ,\ \ EA=۲۰۰(۷۵۰۰)=۱/۵\times۱۰^{۶}\ \ kN$$

$$L=۷/۵\ m$$

$$\cos\theta=\frac{X_{۲}-X_{۳}}{L}=\frac{۹-۱۳/۵}{۷/۵}=-۰/۶\ ,\ \sin\theta=\frac{Y_{۲}-Y_{۳}}{L}=\frac{۶-۰}{۷/۵}=۰/۸\ ,\ \mathbf{T}_{۲}=\begin{bmatrix}-۰/۶ & ۰/۸ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ -۰/۸ & -۰/۶ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & -۰/۶ & ۰/۸ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & -۰/۸ & -۰/۶ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{۲}=\begin{bmatrix}۲۰۰۰۰۰ & ۰ & ۰ & -۲۰۰۰۰۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۸۵۳/۳۳ & ۳۲۰۰ & ۰ & -۸۵۳/۳۳ & ۳۲۰۰\\ ۰ & ۳۲۰۰ & ۱۶۰۰۰ & ۰ & -۳۲۰۰ & ۸۰۰۰\\ -۲۰۰۰۰۰ & ۰ & ۰ & ۲۰۰۰۰۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۸۵۳/۳۳ & -۳۲۰۰ & ۰ & ۸۵۳/۳۳ & -۳۲۰۰\\ ۰ & ۳۲۰۰ & ۸۰۰۰ & ۰ & -۳۲۰۰ & ۱۶۰۰۰\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{T}^{T}\mathbf{k}\mathbf{T}\Rightarrow\mathbf{K}_{۲}=\begin{array}{c}\begin{matrix}۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۳\end{matrix}\\\left[\begin{array}{cccccc}۷۲۵۴۶/۱۳ & -۹۵۵۹۰/۴۰ & -۲۵۶۰ & -۷۲۵۴۶/۱۳ & ۹۵۵۹۰/۴۰ & -۲۵۶۰\\ -۹۵۵۹۰/۴۰ & ۱۲۸۰۳۷/۲ & -۱۹۲۰ & ۹۵۵۹۰/۴۰ & -۱۲۸۳۰۷/۲ & -۱۹۲۰\\ -۲۵۶۰ & -۱۹۲۰ & ۱۶۰۰۰ & ۲۵۶۰ & ۱۹۲۰ & ۸۰۰۰\\ -۷۲۵۴۶/۱۳ & ۹۵۵۹۰/۴۰ & ۲۵۶۰ & ۷۲۵۴۶/۱۳ & -۹۵۵۹۰/۴۰ & ۲۵۶۰\\ ۹۵۵۹۰/۴۰ & -۱۲۸۳۰۷/۲ & ۱۹۲۰ & -۹۵۵۹۰/۴۰ & ۱۲۸۳۰۷/۲ & ۱۹۲۰\\ -۲۵۶۰ & -۱۹۲۰ & ۸۰۰۰ & ۲۵۶۰ & ۱۹۲۰ & ۱۶۰۰۰\end{array}\right]\begin{matrix}۰\\۰\\۰\\۱\\۲\\۳\end{matrix}\end{array}$$

بردار بارهای گرهی:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}۰\\۰\\۱۳۵\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}=\begin{array}{c}\begin{matrix}۱ & ۲ & ۳\end{matrix}\\\begin{bmatrix}(۲۲۲۲۲۲/۲۲+۷۲۵۴۶/۱۳) & -۹۵۵۹۰/۴۰ & ۲۵۶۰\\ -۹۵۵۹۰/۴۰ & (۹۸۷/۶۵+۱۲۸۳۰۷/۲) & (۱۹۲۰-۴۴۴۴/۴۴)\\ ۲۵۶۰ & (۱۹۲۰-۴۴۴۴/۴۴) & (۱۶۰۰۰+۲۶۶۶۶/۶۷)\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\\۳\end{matrix}\end{array}$$

$$\mathbf{S}=\begin{matrix}\\ ۱\\ ۲\\ ۳\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}۱ & ۲ & ۳\end{matrix}\\ \begin{bmatrix} ۲۹۴۷۶۸/۳۵ & -۹۵۵۹۰/۴ & ۲۵۶۰ \\ -۹۵۵۹۰/۴ & ۱۲۹۲۹۴/۸۵ & -۲۵۲۴/۴۴ \\ ۲۵۶۰ & -۲۵۲۴/۴۴ & ۴۲۶۶۶/۶۷ \end{bmatrix}\end{matrix}$$

$$\mathbf{P}_f=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۸۰ \\ -۲۷۰ \end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\ ۲\\ ۳\end{matrix}\quad,\quad \mathbf{P}-\mathbf{P}_f=\mathbf{Sd}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱۳۵ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۸۰ \\ -۲۷۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۹۴۷۶۸/۳۵ & -۹۵۵۹۰/۴ & ۲۵۶۰ \\ -۹۵۵۹۰/۴ & ۱۲۹۲۹۴/۸۵ & -۲۵۲۴/۴۴ \\ ۲۵۶۰ & -۲۵۲۴/۴۴ & ۴۲۶۶۶/۶۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_۱ \\ d_۲ \\ d_۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱۸۰ \\ ۴۰۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۹۴۷۶۸/۳۵ & -۹۵۵۹۰/۴ & ۲۵۶۰ \\ -۹۵۵۹۰/۴ & ۱۲۹۲۹۴/۸۵ & -۲۵۲۴/۴۴ \\ ۲۵۶۰ & -۲۵۲۴/۴۴ & ۴۲۶۶۶/۶۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_۱ \\ d_۲ \\ d_۳ \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{d}=\begin{bmatrix} -۰/۰۰۰۶۲۳۰۳\,m \\ -۰/۰۰۱۶۶۸۶\,m \\ ۰/۰۰۹۴۳۰۸\,rad \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۱):

$$\mathbf{u}_۱=\mathbf{v}_۱=\begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \\ v_۴ \\ v_۵ \\ v_۶ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\ ۰\\ ۰\\ ۱\\ ۲\\ ۳\end{matrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ d_۱ \\ d_۲ \\ d_۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ -۰/۰۰۰۶۲۳۰۳\,m \\ -۰/۰۰۱۶۶۸۶\,m \\ ۰/۰۰۹۴۳۰۸\,rad \end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{Q}=\mathbf{ku}+\mathbf{Q}_f\ \Rightarrow\ \mathbf{F}_۱=\mathbf{Q}_۱=\begin{bmatrix} ۱۳۸/۴۵\ kN \\ ۲۲۳/۵۶\ kN \\ ۴۰۳/۱۶\ kN.m \\ -۱۳۸/۴۵\ kN \\ ۱۳۶/۴۴\ kN \\ -۱۱/۱\ kN.m \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۲):

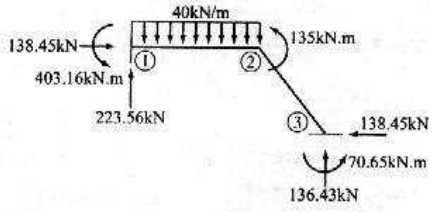
$$\mathbf{v}_۲=\begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \\ v_۴ \\ v_۵ \\ v_۶ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\ ۰\\ ۰\\ ۱\\ ۲\\ ۳\end{matrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ d_۱ \\ d_۲ \\ d_۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ -۰/۰۰۰۶۲۳۰۳\,m \\ -۰/۰۰۱۶۶۸۶\,m \\ ۰/۰۰۹۴۳۰۸\,rad \end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{F}=\mathbf{kv}+\mathbf{F}_f\ \Rightarrow\ \mathbf{F}_۲=\begin{bmatrix} -۱۳۸/۴۵\ kN \\ ۱۳۶/۴۳\ kN \\ ۷۰/۶۵\ kN.m \\ ۱۳۸/۴۵\ kN \\ -۱۳۶/۴۳\ kN \\ ۱۴۶/۰۹\ kN.m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}=\mathbf{TF}\ \Rightarrow\ \mathbf{Q}_۲=\begin{bmatrix} -۰/۶ & ۰/۸ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۰/۸ & -۰/۶ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۰/۶ & ۰/۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۰/۸ & -۰/۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱۳۸/۴۵ \\ ۱۳۶/۴۳ \\ ۷۰/۶۵ \\ ۱۳۸/۴۵ \\ -۱۳۶/۴۳ \\ ۱۴۶/۰۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۹۲/۲۱\ kN \\ ۲۸/۹۰\ kN \\ ۷۰/۶۵\ kN.m \\ -۱۹۲/۲۱\ kN \\ -۲۸/۹۰\ kN \\ ۱۴۶/۰۹\ kN.m \end{bmatrix}$$

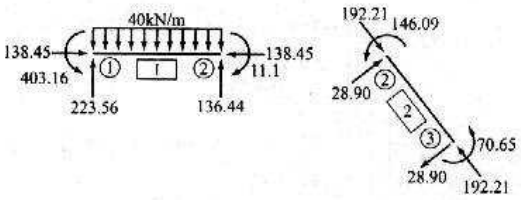
محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

واکنشهای تکیه‌گاهی $R_{①}$ و $R_{②}$ برابر نیمهٔ بالایی بردار نیروها $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ هستند.

$$\mathbf{R}_{①}=\begin{bmatrix} ۱۳۸/۴۵\ kN \\ ۲۲۳/۵۶\ kN \\ ۴۰۳/۱۶\ kN.m \end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{R}_{②}=\begin{bmatrix} -۱۳۸/۴۵\ kN \\ ۱۳۶/۴۳\ kN \\ ۷۰/۶۵\ kN.m \end{bmatrix}$$



واکنشهای تکیه‌گاهی



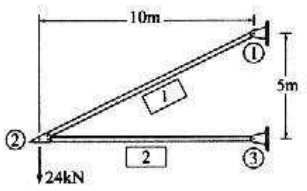
نیروهای انتهای اعضای قاب

کنترل تعادل کل قاب:

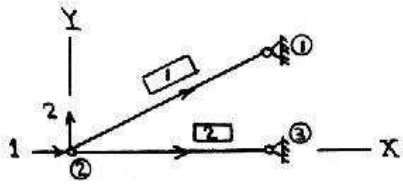
$$\pm\rightarrow \sum F_x = ۱۳۸/۴۵ - ۱۳۸/۴۵ = ۰ \quad O.K. \quad , \quad +\uparrow \sum F_y = ۱۳۶/۴۳ + ۲۲۳/۵۶ - ۴۰(۹) = -۰/۰۱ \approx ۰ \quad O.K.$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{①} = ۷۰/۶۵ + ۴۰۳/۱۶ + ۱۳۵ - ۴۰(۹)(۴/۵) + ۱۳۶/۴۳(۱۳/۵) - ۱۳۸/۴۵(۶) = -۰/۰۸ \approx ۰ \quad O.K.$$

۴-۱۴ خرپای نشان داده شده در شکل زیر را با روش ماتریسی تحلیل کرده، نیروی داخلی کلیهٔ اعضا و واکنشهای تکیه‌گاهی آن را به دست آورید.



EA = ثابت



مدل تحلیلی خرپا

شکل ۴-۱۲

عضو (۱):

$$L = ۱۱/۱۸ m$$

$$\cos\theta = \frac{X_۱ - X_۲}{L} = ۰/۸۹۴ \quad , \quad \sin\theta = \frac{Y_۱ - Y_۲}{L} = ۰/۴۴۷$$

$$\mathbf{K}_۱ = EA \begin{bmatrix} ۰/۰۷۱۵ & ۰/۰۳۵۷ & -۰/۰۷۱۵ & -۰/۰۳۵۷ \\ & ۰/۰۱۷۹ & -۰/۰۳۵۷ & -۰/۰۱۷۹ \\ \text{sym} & & ۰/۰۷۱۵ & ۰/۰۳۵۷ \\ & & & ۰/۰۱۷۹ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ ۰ \end{matrix}$$

عضو (۲):

$$L = ۱۰ m$$

$$\cos\theta = \frac{X_۲ - X_۲}{L} = ۱ \quad , \quad \sin\theta = \frac{Y_۲ - Y_۲}{L} = ۰$$

$$\mathbf{K}_۲ = EA \begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰ & -۰/۱ & ۰ \\ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \text{sym} & & ۰/۱ & ۰ \\ & & & ۰ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ ۰ \end{matrix}$$

$$\mathbf{S} = EA \begin{bmatrix} (۰/۰۷۱۵ + ۰/۱) & ۰/۰۳۵۷ \\ ۰/۰۳۷۵ & ۰/۰۱۷۹ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix} = EA \begin{bmatrix} ۰/۱۷۱۵ & ۰/۰۳۵۷ \\ ۰/۰۳۵۷ & ۰/۰۱۷۹ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix} \quad , \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲۴ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix} \quad kN$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۱۷۱۵ & ۰/۰۳۵۷ \\ ۰/۰۳۵۷ & ۰/۰۱۷۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_۱ \\ d_۲ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = \frac{۱}{EA} \begin{bmatrix} ۴۷۷/۲۶ \\ -۲۲۹۲/۳ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۱):

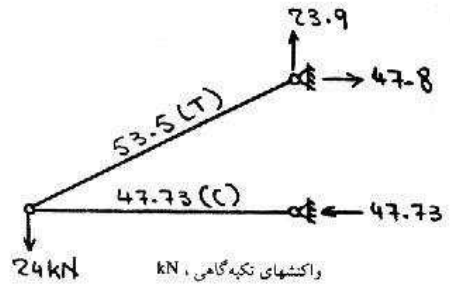
$$\mathbf{v}_۱ = \frac{۱}{EA} \begin{bmatrix} ۴۷۷/۲۶ \\ -۲۲۹۲/۳ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ ۰ \end{matrix} \quad , \quad \mathbf{u}_۱ = \mathbf{T}_۱ \mathbf{v}_۱ = \begin{bmatrix} ۰/۸۹۴ & ۰/۴۴۷ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۸۹۴ & ۰/۴۴۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۴۷۷/۲۶}{EA} \\ \frac{-۲۲۹۲/۳}{EA} \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \frac{۱}{EA} \begin{bmatrix} -۵۹۸ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_۱ = \mathbf{k}_۱ \mathbf{u}_۱ = \frac{EA}{۱۱/۱۸} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \frac{۱}{EA} \begin{bmatrix} -۵۹۸ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵۳/۵ \\ ۵۳/۵ \end{bmatrix} \quad kN \quad , \quad \mathbf{F}_۱ = \mathbf{T}_۱^T \mathbf{Q}_۱ = \begin{bmatrix} ۰/۸۹۴ & ۰ \\ ۰/۴۴۷ & ۰ \\ ۰ & ۰/۸۹۴ \\ ۰ & ۰/۴۴۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۵۳/۵ \\ ۵۳/۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴۷/۸ \\ -۲۳/۹ \\ ۴۷/۸ \\ ۲۳/۹ \end{bmatrix} \quad kN$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۲):

$$\mathbf{v}_۱ = \frac{۱}{EA} \begin{bmatrix} ۴۷۷/۲۶ \\ -۲۲۹۲/۳ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ ۰ \end{matrix} \quad , \quad \mathbf{u}_۱ = \mathbf{T}_۱ \mathbf{v}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۴۷۷/۲۶}{EA} \\ \frac{-۲۲۹۲/۳}{EA} \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \frac{۱}{EA} \begin{bmatrix} ۴۷۷/۲۶ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

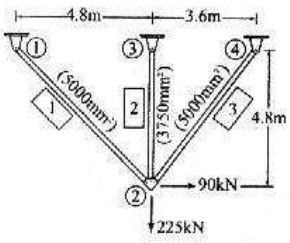
$$\mathbf{Q}_2=\mathbf{k}_2\mathbf{u}_2=\frac{EA}{10}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\frac{1}{EA}\begin{bmatrix}47.26\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47.73\\-47.73\end{bmatrix}\ kN\ ,\quad \mathbf{F}_2=\mathbf{T}_2^T\mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}47.73\\-47.73\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47.73\\0\\-47.73\\0\end{bmatrix}\ kN$$



واکنشهای تکیه‌گاهی ، kN

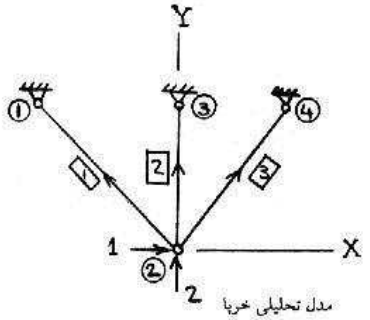
خرپاهای نشان داده شده در مسایل ۱۴-۵ و ۱۴-۶ را با استفاده از روش ماتریسی تحلیل کرده، نیروهای داخلی اعضا و واکنشهای تکیه‌گاهی آنها را به دست آورید.

۵-۱۴



E = ۷۰ GPa

شکل ۱۴-۵



مدل تحلیلی خرپا

عضو (۱) : $L=6/788\ m$, $EA=350000\ kN$, $\cos\theta=-0/707$, $\sin\theta=0/707$

عضو (۲) : $L=4/8\ m$, $EA=262500\ kN$, $\cos\theta=0$, $\sin\theta=1$

عضو (۳) : $L=6/0\ m$, $EA=350000\ kN$, $\cos\theta=0/6$, $\sin\theta=0/8$

عضو (۱):
$$\mathbf{K}_1=25780/3\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\&1&1&-1\\&\text{sym}&1&-1\\&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\0\\0\end{matrix}$$

عضو (۲):
$$\mathbf{K}_2=54687/5\begin{bmatrix}0&0&0&0\\&1&0&-1\\&\text{sym}&0&0\\&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\0\\0\end{matrix}$$

عضو (۳):
$$\mathbf{K}_3=58333/3\begin{bmatrix}0/36&0/48&-0/36&-0/48\\&0/64&-0/48&-0/64\\&\text{sym}&0/36&0/48\\&&&0/64\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\0\\0\end{matrix}$$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}(25780/8+21000)&(-25780/8+28000)\\(28000-25780/8)&(25780/8+54687/5+37333/3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46780/8&22319/2\\22319/2&117801/6\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\ ,\quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}90\\-225\end{bmatrix}\ kN$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{S}\mathbf{d}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}90\\-225\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46780/8&22319/2\\22319/2&117801/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{d}=\begin{bmatrix}0/00202\\-0/00195\end{bmatrix}m$$

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0/00202\\-0/00195\\0\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\0\\0\end{matrix}m$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی اعضا:

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{T}_1\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-۰/۷۰۷ & ۰/۷۰۷ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۰/۷۰۷ & ۰/۷۰۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۰۰۲۰۲\\ -۰/۰۰۱۹۵\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۰/۰۰۲۸۱\\ ۰\end{bmatrix}m$$

$$\mathbf{Q}_1=\mathbf{k}_1\mathbf{u}_1=\frac{۳۵۰۰۰۰}{۶/۷۸۸}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۰/۰۰۲۸۱\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۴۴/۹\\ ۱۴۴/۹\end{bmatrix}\ kN$$

$$\mathbf{F}_1=\mathbf{T}_1^T\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix}-۰/۷۰۷ & ۰\\ ۰/۷۰۷ & ۰\\ ۰ & -۰/۷۰۷\\ ۰ & ۰/۷۰۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱۴۴/۹\\ ۱۴۴/۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰۲/۴۴\\ -۱۰۲/۴۴\\ -۱۰۲/۴۴\\ ۱۰۲/۴۴\end{bmatrix}\ kN$$

$$\mathbf{u}_2=\mathbf{T}_2\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۰۰۲۰۲\\ -۰/۰۰۱۹۵\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۰/۰۰۱۹۵\\ ۰\end{bmatrix}m$$

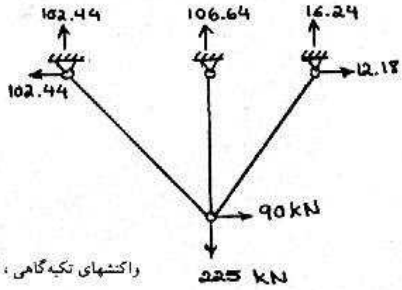
$$\mathbf{Q}_2=\mathbf{k}_2\mathbf{u}_2=\frac{۲۶۲۵۰۰}{۴/۸}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۰/۰۰۱۹۵\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۰۶/۶۴\\ ۱۰۶/۶۴\end{bmatrix}\ kN$$

$$\mathbf{F}_2=\mathbf{T}_2^T\mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۱ & ۰\\ ۰ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱۰۶/۶۴\\ ۱۰۶/۶۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ -۱۰۶/۶۴\\ ۰\\ ۱۰۶/۶۴\end{bmatrix}\ kN$$

$$\mathbf{u}_3=\mathbf{T}_3\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}۰/۶ & ۰/۸ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰/۶ & ۰/۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۰۰۲۰۲\\ -۰/۰۰۱۹۵\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۰/۰۰۰۳۴۸\\ ۰\end{bmatrix}m$$

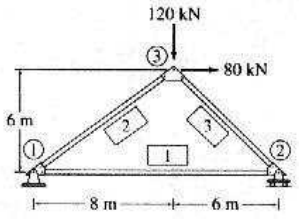
$$\mathbf{Q}_3=\mathbf{k}_3\mathbf{u}_3=\frac{۳۵۰۰۰۰}{۶}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۰/۰۰۰۳۴۸\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲۰/۳\\ ۲۰/۳\end{bmatrix}\ kN$$

$$\mathbf{F}_3=\mathbf{T}_3^T\mathbf{Q}_3=\begin{bmatrix}۰/۶ & ۰\\ ۰/۸ & ۰\\ ۰ & ۰/۶\\ ۰ & ۰/۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲۰/۳\\ ۲۰/۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۲/۱۸\\ -۱۶/۲۴\\ ۱۲/۱۸\\ ۱۶/۲۴\end{bmatrix}\ kN$$



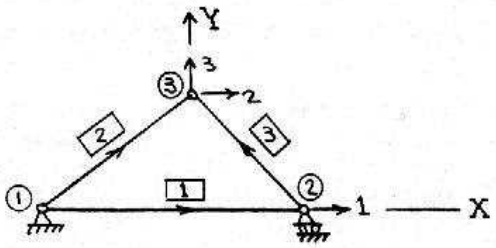
واکنشهای تکیه‌گاهی ، kN

۶-۱۴



EA = ثابت

شکل ۶-۱۴



مدل تحلیلی خرپا

عضو (۱):

$$L=14\,m\ ,\ \cos\theta=1\ ,\ \sin\theta=0$$

$$\mathbf{K}_1=\frac{EA}{14}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix}\quad\begin{matrix}0&0&1&0\end{matrix}$$

عضو (۲):

$$L=10\,m\ ,\ \cos\theta=0.8\ ,\ \sin\theta=0.6$$

$$\mathbf{K}_2=\frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ 0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 \end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\2\\3\end{matrix}\quad\begin{matrix}0&0&2&3\end{matrix}$$

عضو (۳):

$$L=8/485\,m\ ,\ \cos\theta=-0.707\ ,\ \sin\theta=0.707$$

$$\mathbf{K}_3=\frac{EA}{16/97}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\0\\2\\3\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&0&2&3\end{matrix}$$

بردار بارهای گرهی:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 \\ 80 \\ -120 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\quad kN$$

$$\mathbf{S}=EA\begin{bmatrix} (0.0714+0.059) & -0.0583 & 0.0583 \\ -0.0583 & (0.64+0.089) & (0.48-0.0583) \\ 0.0583 & (0.48-0.0583) & (0.36+0.0583) \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&2&3\end{matrix}$$

$$=EA\begin{bmatrix} 0.1304 & -0.0583 & 0.0583 \\ -0.0583 & 0.1229 & -0.0993 \\ 0.0583 & -0.0993 & 0.0493 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&2&3\end{matrix}$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{Sd}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \\ -120 \end{bmatrix}=EA\begin{bmatrix} 0.1304 & -0.0583 & 0.0583 \\ -0.0583 & 0.1229 & -0.0993 \\ 0.0583 & -0.0993 & 0.0493 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{d}=\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 1439 \\ 1161 \\ -2024 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۱):

$$\mathbf{v}_1=\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1439 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix}\ ,\quad \mathbf{u}_1=\mathbf{T}_1\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1439 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 1439 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1=\mathbf{k}_1\mathbf{u}_1=\frac{EA}{14}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 1439 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -102.8 \\ 102.8 \end{bmatrix}\ kN\ ,\quad \mathbf{F}_1=\mathbf{T}_1^T\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -102.8 \\ 102.8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -102.8 \\ 0 \\ 102.8 \\ 0 \end{bmatrix}\ kN$$

نیروهای انتهایی عضو (۲):

$$\mathbf{v}_2=\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1161 \\ -2024 \end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\2\\3\end{matrix}\ ,\quad \mathbf{u}_2=\mathbf{T}_2\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1161 \\ -2024 \end{bmatrix}=\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ -2856 \end{bmatrix}$$

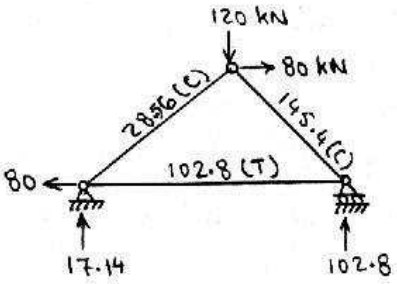
$$\mathbf{Q}_2=\mathbf{k}_2\mathbf{u}_2=\frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ -2856 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 28.56 \\ -28.56 \end{bmatrix}\ kN\ ,\quad \mathbf{F}_2=\mathbf{T}_2^T\mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 0 & 0.8 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28.56 \\ -28.56 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22.85 \\ 17.14 \\ -22.85 \\ -17.14 \end{bmatrix}\ kN$$

نیروهای انتهایی عضو (۳):

$$\mathbf{v}_3=\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 1439 \\ 0 \\ 1161 \\ -2024 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\0\\2\\3\end{matrix}\ ,\quad \mathbf{u}_3=\mathbf{T}_3\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 0.707 \end{bmatrix}\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 1439 \\ 0 \\ 1161 \\ -2024 \end{bmatrix}=\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} -1017.4 \\ -2251.8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_3=\mathbf{k}_3\mathbf{u}_3=\frac{EA}{8/485}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{EA}\begin{bmatrix} -1017.4 \\ -2251.8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 145.4 \\ -145.4 \end{bmatrix}\ kN$$

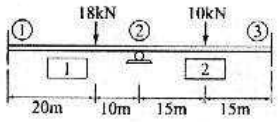
$$\mathbf{F}_3=\mathbf{T}_3^T\mathbf{Q}_3=\begin{bmatrix} -0.707 & 0 \\ 0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & 0.707 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 145.4 \\ -145.4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -102.8 \\ 102.8 \\ -102.8 \\ 102.8 \end{bmatrix}\ kN$$



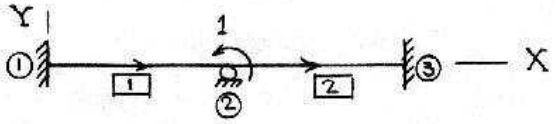
واکنشهای تکیه‌گاهی : kN

تیرهای نشان داده شده در مسایل ۱۴-۷ تا ۱۴-۹ را با استفاده از روش ماتریسی تحلیل کرده و واکنشهای تکیه‌گاهی آنها را به دست آورید.

۷-۱۴



ثابت = EI



مدل تحلیلی تیر

شکل ۱۴-۷

عضو (۱) :

$$\mathbf{K}_1=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12^{\circ} & 18^{\circ} & -12^{\circ} & 18^{1} & \circ \\ & 36^{\circ}\circ & -18^{\circ} & 18^{\circ}\circ & \circ \\ & \text{sym} & & 12 & -18^{\circ} & \circ \\ & & & & 36^{\circ}\circ & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{F}_{f1}=\mathbf{Q}_{f1}=\begin{bmatrix} 4/67 \\ 4^{\circ} \\ 13/33 \\ -8^{\circ} \end{bmatrix} \begin{matrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 1 \end{matrix}$$

عضو (۲) :

$$\mathbf{K}_2=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12^{\circ} & 18^{1} & -12^{\circ} & 18^{\circ} & \circ \\ & 36^{\circ}\circ & -18^{\circ} & 18^{\circ}\circ & 1 \\ & \text{sym} & & 12 & -18^{\circ} & \circ \\ & & & & 36^{\circ}\circ & \circ \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{F}_{f2}=\mathbf{Q}_{f2}=\begin{bmatrix} 5 \\ 37/5 \\ 5 \\ -37/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \circ \\ 1 \\ \circ \\ \circ \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}_f=\begin{bmatrix} 37/5 & -8^{\circ} \end{bmatrix}^{1}_{1}=\begin{bmatrix} -42/5 \end{bmatrix}^{1}_{1} \quad , \quad \mathbf{S}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 36^{\circ}\circ^{1}+36^{\circ}\circ \end{bmatrix}^{1}_{1}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 72^{1}\circ \end{bmatrix}^{1}_{1} \quad , \quad -\mathbf{P}_f=\mathbf{Sd} \Rightarrow \mathbf{d}=\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 0/005903 \end{bmatrix}$$

نیروهای انتهای عضو (۱) :

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1=\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 0/005903 \end{bmatrix} \begin{matrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 1 \end{matrix} \quad , \quad \mathbf{F}_1=\mathbf{Q}_1=\mathbf{K}_1\mathbf{u}_1+\mathbf{Q}_{f1}=\begin{bmatrix} 5/73 & kN \\ 50/6 & kN.m \\ 12/27 & kN \\ -58/8 & kN.m \end{bmatrix}$$

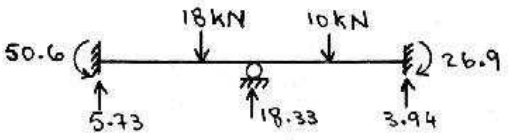
نیروهای انتهای عضو (۲) :

$$\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2=\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} \circ \\ 0/005903 \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} \begin{matrix} \circ \\ 1 \\ \circ \\ \circ \end{matrix} \quad , \quad \mathbf{F}_2=\mathbf{Q}_2=\mathbf{K}_2\mathbf{u}_2+\mathbf{Q}_{f2}=\begin{bmatrix} 6/06 & kN \\ 58/8 & kN.m \\ 3/94 & kN \\ -26/9 & kN.m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{①}=\mathbf{F}_1 \text{ نیمهٔ بالای بردار } =\begin{bmatrix} 5/73 & kN \\ 50/6 & kN.m \end{bmatrix}$$

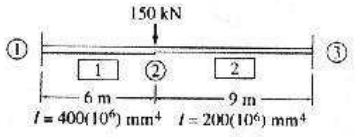
$$\mathbf{R}_{②}=\mathbf{F}_{۱}\text{ نیمهٔ بالای بردار }+\mathbf{F}_{۲}\text{ نیمهٔ پایین بردار }=\begin{bmatrix}۱۲/۲۷\\-۵۸/۸\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶/۰۶\\+۵۸/۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۸/۳۳ & kN\\ ۰ & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{③}=\mathbf{F}_{۲}\text{ نیمهٔ پایین بردار }=\begin{bmatrix}۳/۹۴ & kN\\ -۲۶/۹ & kN.m\end{bmatrix}$$

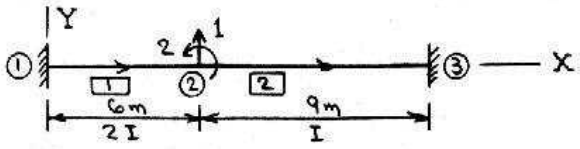


واکنشهای تکیه‌گاهی

۸-۱۴



شکل ۸-۱۴



مدل تحلیلی تیر

عضو (۱):

$$\mathbf{K}_{۱}=EI\begin{bmatrix}۰/۱۱۱ & ۰/۳۳۳ & -۰/۱۱۱ & ۰/۳۳۳\\ & ۱/۳۳۳ & -۰/۳۳۳ & ۰/۶۶۷\\ \text{sym} & & ۰/۱۱۱ & -۰/۳۳۳\\ & & & ۱/۳۳۳\end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۰\\۱\\۲\end{matrix}$$

عضو (۲):

$$\mathbf{K}_{۲}=EI\begin{bmatrix}۰/۰۱۶۵ & ۰/۰۷۴۱ & -۰/۰۱۶۵ & ۰/۰۷۴۱\\ & ۰/۴۴۴ & -۰/۰۷۴۱ & ۰/۲۲۲\\ \text{sym} & & ۰/۰۱۶۵ & -۰/۰۷۴۱\\ & & & ۰/۴۴۴\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\\۰\\۰\end{matrix}$$

$$\mathbf{S}=EI\begin{bmatrix}(۰/۱۱۱+۰/۰۱۶۵) & (-۰/۳۳۳+۰/۰۷۴۱)\\ (۰/۰۷۴۱-۰/۳۳۳) & (۱/۳۳۳+۰/۴۴۴)\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}=EI\begin{bmatrix}۰/۱۲۷۵ & -۰/۲۵۸۹\\ -۰/۲۵۸۹ & ۱/۷۷۷\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}-۱۵۰\\ ۰\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{Sd}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}-۱۵۰\\ ۰\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}۰/۱۲۷۵ & -۰/۲۵۸۹\\ -۰/۲۵۸۹ & ۱/۷۷۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{۱}\\ d_{۲}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{d}=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix}-۱۶۷۱\\ -۲۴۳/۴\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهای عضو (۱):

$$\mathbf{u}_{۱}=\mathbf{v}_{۱}=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ -۱۶۷۱\\ -۲۴۳/۴\end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۰\\۱\\۲\end{matrix},\qquad \mathbf{F}_{۱}=\mathbf{Q}_{۱}=\mathbf{K}_{۱}\mathbf{u}_{۱}=\begin{bmatrix}۱۰۴/۴ & kN\\ ۳۹۴ & kN.m\\ -۱۰۴/۴ & kN\\ ۲۳۲ & kN.m\end{bmatrix}$$

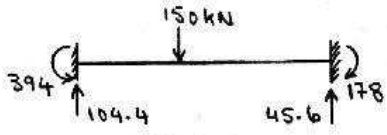
محاسبهٔ نیروهای انتهای عضو (۲):

$$\mathbf{u}_{۲}=\mathbf{v}_{۲}=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix}-۱۶۷۱\\ -۲۴۳/۴\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\\۰\\۰\end{matrix},\qquad \mathbf{F}_{۲}=\mathbf{Q}_{۲}=\mathbf{K}_{۲}\mathbf{u}_{۲}=\begin{bmatrix}-۴۵/۶ & kN\\ -۲۳۲ & kN.m\\ ۴۵/۶ & kN\\ -۱۷۸ & kN.m\end{bmatrix}$$

تعیین واکنشهای تکیه‌گاهی:

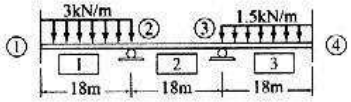
$$\mathbf{R}_{①}=\mathbf{F}_{۱}\text{ نیمهٔ بالای بردار }=\begin{bmatrix}۱۰۴/۴ & kN\\ ۳۹۴ & kN.m\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{②}=\mathbf{F}_{۲}\text{ نیمهٔ پایین بردار }=\begin{bmatrix}۴۵/۶ & kN\\ -۱۷۸ & kN.m\end{bmatrix}$$



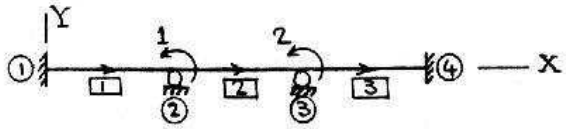
واکنشهای تکیه‌گاهی

۹-۱۴



EI = ثابت

شکل ۹-۱۴



مدل تحلیلی تیر

عضو (۱):

$$\mathbf{K}_1=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} ۱۲ & ۱۰۸ & -۱۲ & ۱۰۸ \\ & ۱۲۹۶ & -۱۰۸ & ۶۴۸ \\ & \text{sym} & ۱۲ & -۱۰۸ \\ & & & ۱۲۹۶ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۰\\۰\\۱\end{matrix}, \quad \mathbf{F}_{f_1}=\mathbf{Q}_{f_1}=\begin{bmatrix} ۲۷ \\ ۸۱ \\ ۲۷ \\ -۸۱ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۰\\۰\\۱\end{matrix}$$

عضو (۲):

$$\mathbf{K}_2=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} ۱۲ & ۱۰۸ & -۱۲ & ۱۰۸ \\ & ۱۲۹۶ & -۱۰۸ & ۶۴۸ \\ & \text{sym} & ۱۲ & -۱۰۸ \\ & & & ۱۲۹۶ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۱\\۰\\۲\end{matrix}$$

ماتریس سختی (S) کل سازه:

$$\mathbf{S}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (۱۲۹۶+۱۲۹۶) & ۶۴۸ \\ ۶۴۸ & (۱۲۹۶+۱۲۹۶) \end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} ۲۵۹۲ & ۶۴۸ \\ ۶۴۸ & ۲۵۹۲ \end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}$$

عضو (۳):

$$\mathbf{K}_3=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} ۱۲ & ۱۰۸ & -۱۲ & ۱۰۸ \\ & ۱۲۹۶ & -۱۰۸ & ۶۴۸ \\ & \text{sym} & ۱۲ & -۱۰۸ \\ & & & ۱۲۹۶ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۲\\۰\\۰\end{matrix}, \quad \mathbf{F}_{f_2}=\mathbf{Q}_{f_2}=\begin{bmatrix} ۱۳/۵ \\ ۴۰/۵ \\ ۱۳/۵ \\ -۴۰/۵ \end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۲\\۰\\۰\end{matrix}$$

بردار نیروهای گیرداری ($\mathbf{P}_f$):

$$\mathbf{P}_f=\begin{bmatrix} -۸۱ \\ ۴۰/۵ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}=۰$$

$$\mathbf{P}-\mathbf{P}_f=\mathbf{Sd} \Rightarrow -\begin{bmatrix} -۸۱ \\ ۴۰/۵ \end{bmatrix}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} ۲۵۹۲ & ۶۴۸ \\ ۶۴۸ & ۲۵۹۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{d}=\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} ۰/۰۳۷۵ \\ -۰/۰۲۵ \end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی اعضا:

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1=\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰/۰۳۷۵ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2=\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰/۰۳۷۵ \\ ۰ \\ -۰/۰۲۵ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3=\mathbf{v}_4=\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} ۰ \\ -۰/۰۲۵ \\ ۰ \\ • \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}=\mathbf{Ku}+\mathbf{Q}_f$$

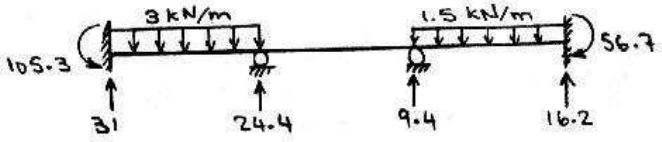
$$\mathbf{F}_1=\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix} ۳۱/۰ & kN \\ ۱۰۵/۳ & kN.m \\ ۲۳ & kN \\ -۳۲/۴ & kN.m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2=\mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix} ۱/۴ & kN \\ ۳۲/۴ & kN.m \\ -۱/۴ & kN \\ -۸/۱ & kN.m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_3=\mathbf{Q}_3=\begin{bmatrix} ۱۰/۸ & kN \\ ۸/۱ & kN.m \\ ۱۶/۲ & kN \\ -۵۶/۷ & kN.m \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

$$\mathbf{R}_①=\mathbf{F}_1=\text{نیمهٔ بالای بردار}=\begin{bmatrix} ۳۱/۰ & kN \\ ۱۰۵/۳ & kN.m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_②=\mathbf{F}_1=\text{نیمهٔ پایین بردار}+\text{نیمهٔ بالای بردار}\ \mathbf{F}_2=\begin{bmatrix} ۲۳ \\ -۳۲/۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱/۴ \\ -۳۲/۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۴/۴ & kN \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_③=\mathbf{F}_3=\text{نیمهٔ پایین بردار}\ \mathbf{F}_2+\text{نیمهٔ بالای بردار}=\begin{bmatrix} -۱/۴ \\ -۸/۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱۰/۸ \\ ۸/۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹/۴ & kN \\ ۰ \end{bmatrix}$$

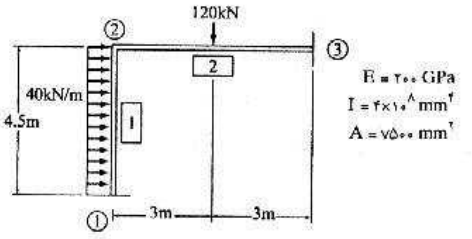
$$\mathbf{R}_④=\mathbf{F}_4=\text{نیمهٔ پایین بردار}=\begin{bmatrix} ۱۶/۲ & kN \\ -۵۶/۷ & kN.m \end{bmatrix}$$



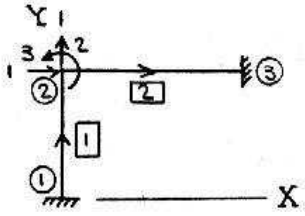
واکنشهای تکیه‌گاهی

در مسایل ۱۴-۱۰ تا ۱۴-۱۲ قاب نشان داده شده را با روش ماتریسی تحلیل کرده، نیروهای انتهای اعضا و واکنشهای تکیه‌گاهی را به دست آورید.

۱۴-۱۰



شکل ۱۴-۱۰



مدل تحلیلی قاب

عضو (۱):

$$L = ۴/۵\,m \quad , \quad \cos\theta = ۰ \quad , \quad \sin\theta = ۱$$

$$\mathbf{T}_۱ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Q}_{f_۱} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۹۰ \\ ۶۷/۵ \\ ۰ \\ ۹۰ \\ -۶۷/۵ \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{F}_{f_۱} = \mathbf{T}_۱^T \mathbf{Q}_{f_۱} = \begin{bmatrix} -۹۰ \\ ۰ \\ ۶۷/۵ \\ -۹۰ \\ ۰ \\ -۶۷/۵ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_۱ = EI \begin{bmatrix} ۴/۱۶۶۷ & ۰ & ۰ & -۴/۱۶۶۷ & ۰ & ۰ \\ & ۰/۱۳۱۷ & ۰/۲۹۶۳ & ۰ & -۰/۱۳۱۷ & ۰/۲۹۶۳ \\ & & ۰/۸۸۸۹ & ۰ & -۰/۲۹۶۳ & ۰/۴۴۴۴ \\ & \text{sym} & & ۴/۱۶۶۷ & ۰ & ۰ \\ & & & & ۰/۱۳۱۷ & -۰/۲۹۶۳ \\ & & & & & ۰/۸۸۸۹ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_۱ = \mathbf{T}_۱^T \mathbf{k} \mathbf{T}_۱ = EI \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰/۱۳۱۷ & ۰ & -۰/۲۹۶۳ & -۰/۱۳۱۷ & ۰ & -۰/۲۹۶۳ \\ & ۴/۱۶۶۷ & ۰ & ۰ & -۴/۱۶۶۷ & ۰ \\ & & ۰/۸۸۸۹ & ۰/۲۹۶۳ & ۰ & ۰/۴۴۴۴ \\ & & & ۰/۱۳۱۷ & ۰ & ۰/۲۹۶۳ \\ & \text{sym} & & & ۴/۱۶۶۷ & ۰ \\ & & & & & ۰/۸۸۸۹ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{matrix}$$

عضو (۲):

$$L = ۶\,m \quad , \quad \cos\theta = ۱ \quad , \quad \sin\theta = ۰$$

$$\mathbf{k}_۲ = \mathbf{K}_۲ = EI \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳/۱۲۵ & ۰ & ۰ & -۳/۱۲۵ & ۰ & ۰ \\ & ۰/۰۵۵۵ & ۰/۱۶۶۷ & ۰ & -۰/۰۵۵۵ & ۰/۱۶۶۷ \\ & & ۰/۶۶۶۷ & ۰ & -۰/۱۶۶۷ & ۰/۳۳۳۳ \\ & \text{sym} & & ۳/۱۲۵ & ۰ & ۰ \\ & & & & ۰/۰۵۵۵ & -۰/۱۶۶۷ \\ & & & & & ۰/۶۶۶۷ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{matrix}$$

$$\mathbf{F}_{f_۲} = \mathbf{Q}_{f_۲} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۶۰ \\ ۹۰ \\ ۰ \\ ۶۰ \\ -۹۰ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{matrix}$$

$$\mathbf{S}=EI\begin{bmatrix}(۳/۱۲۵+۰/۱۳۱۷) & ۰ & ۰/۲۹۶۳\\ ۰ & (۴/۱۶۶۷+۰/۰۵۵۵) & ۰/۱۶۶۷\\ ۰/۲۹۶۳ & ۰/۱۶۶۷ & (۰/۸۸۸۹+۰/۶۶۶۷)\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\\۳\end{matrix}=EI\begin{bmatrix}۳/۲۵۶۷ & ۰ & ۰/۲۹۶۳\\ ۰ & ۴/۲۲۲۲ & ۰/۱۶۶۷\\ ۰/۲۹۶۳ & ۰/۱۶۶۷ & ۱/۵۵۵۶\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\\۳\end{matrix}$$

$$\mathbf{P}_f=\begin{bmatrix}-۹۰\\ ۶۰\\ (۹۰-۶۷/۵)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹۰\\ ۶۰\\ ۲۲/۵\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}-\mathbf{P}_f=\mathbf{Sd}\ \Rightarrow\ -\begin{bmatrix}-۹۰\\ ۶۰\\ ۲۲/۵\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}۳/۲۵۶۷ & ۰ & ۰/۲۹۶۳\\ ۰ & ۴/۲۲۲۲ & ۰/۱۶۶۷\\ ۰/۲۹۶۳ & ۰/۱۶۶۷ & ۱/۵۵۵۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_۱\\ d_۲\\ d_۳\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{d}=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix}۲۹/۳۲۸\\ -۱۳/۴۷۶\\ -۱۸/۶۰۶\end{bmatrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۱) :

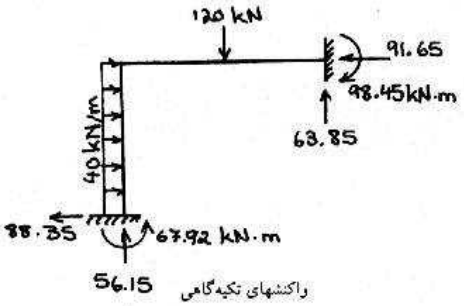
$$\mathbf{v}_۱=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\\ ۲۹/۳۲۸\\ -۱۳/۴۷۶\\ -۱۸/۶۰۶\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\\ ۱\\ ۲\\ ۳\end{matrix},\quad \mathbf{u}_۱=\mathbf{T}_۱\mathbf{v}_۱=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\\ -۱۳/۴۷۶\\ -۲۹/۳۲۸\\ -۱۸/۶۰۶\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}_۱=\mathbf{k}_۱\mathbf{u}_۱+\mathbf{Q}_{f۱}=\begin{bmatrix}۵۶/۱۵\ kN\\ ۸۸/۳۵\ kN\\ ۶۷/۹۲\ kN.m\\ -۵۶/۱۵\ kN\\ ۹۱/۶۵\ kN\\ -۷۵/۳۵\ kN.m\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_۱=\mathbf{T}_۱^T\mathbf{Q}_۱=\begin{bmatrix}-۸۸/۳۵\ kN\\ ۵۶/۱۵\ kN\\ ۶۷/۹۲\ kN.m\\ -۹۱/۶۵\ kN\\ -۵۶/۱۵\ kN\\ -۷۵/۳۵\ kN.m\end{bmatrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۲) :

$$\mathbf{u}_۲=\mathbf{v}_۲=\frac{۱}{EI}\begin{bmatrix}۲۹/۳۲۸\\ -۱۳/۴۷۶\\ -۱۸/۶۰۶\\ ۰\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_۲=\mathbf{Q}_۲=\mathbf{k}_۲\mathbf{u}_۲+\mathbf{Q}_{f۲}=\begin{bmatrix}۹۱/۶۵\ kN\\ ۵۶/۱۵\ kN\\ ۷۵/۳۵\ kN.m\\ -۹۱/۶۵\ kN\\ ۶۳/۸۵\ kN\\ -۹۸/۴۵\ kN.m\end{bmatrix}$$

محاسبهٔ واکنشهای تکیه‌گاهی:

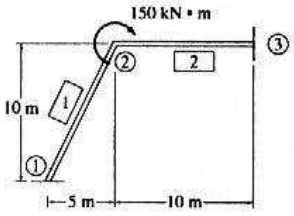


واکنشهای تکیه‌گاهی

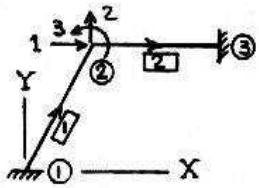
$$\mathbf{R}_{①}=\mathbf{F}_۱\ \text{نیمهٔ بالای بردار}=\begin{bmatrix}-۸۸/۳۵\ kN\\ ۵۶/۱۵\ kN\\ ۶۷/۹۲\ kN.m\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{②}=\mathbf{F}_۲\ \text{نیمهٔ پایین بردار}=\begin{bmatrix}-۹۱/۶۵\ kN\\ ۶۳/۸۵\ kN\\ -۹۸/۴۵\ kN.m\end{bmatrix}$$

۱۱-۱۴



شکل ۱۲-۱۱



مدل تحلیلی قاب

عضو (۱): $L = ۱۱/۱۸\ m$

$\cos\theta = ۰/۴۴۷$

$\sin\theta = ۰/۸۹۴$

عضو (۲): $L = ۱۰\ m$

$\cos\theta = ۱\ ,\ \sin\theta = ۰$

عضو (۱):

$$\mathbf{T}_۱ = \begin{bmatrix} ۰/۴۴۷ & ۰/۸۹۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۰/۸۹۴ & ۰/۴۴۷ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۴۴۷ & ۰/۸۹۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۰/۸۹۴ & ۰/۴۴۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_۱ = \begin{bmatrix} ۷۱۵۵۶ & ۰ & ۰ & -۷۱۵۵۶ & ۰ & ۰ \\ & ۶۸۷ & ۳۸۴۰ & ۰ & -۶۸۷ & ۳۸۴۰ \\ & & ۲۸۶۲۳ & ۰ & -۳۸۴۰ & ۱۴۳۱۱ \\ & & & ۷۱۵۵۶ & ۰ & ۰ \\ & & \text{sym} & & ۶۸۷ & -۳۸۴۰ \\ & & & & & ۲۸۶۲۳ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_۱ = \mathbf{T}_۱^T \mathbf{k}_۱ \mathbf{T}_۱ = \begin{array}{c} \begin{matrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} ۱۴۸۴۷ & ۲۸۳۲۰ & -۳۴۳۳ & -۱۴۸۴۷ & -۲۸۳۲۰ & -۳۴۳۳ \\ & ۵۷۳۲۷ & ۱۷۱۶ & -۲۸۳۲۰ & -۵۷۳۲۷ & ۱۷۱۶ \\ & & ۲۸۶۲۳ & ۳۴۳۳ & -۱۷۱۶ & ۱۴۳۱۱ \\ & \text{sym} & & ۱۴۸۴۷ & ۲۸۳۲۰ & ۳۴۳۳ \\ & & & & ۵۷۳۲۷ & -۱۷۱۶ \\ & & & & & ۲۸۶۲۳ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{matrix} \end{array}$$

عضو (۲):

$$\mathbf{k}_۲ = \mathbf{K}_۲ = \begin{array}{c} \begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} ۸۰۰۰۰ & ۰ & ۰ & -۸۰۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ & ۹۶۰ & ۴۸۰۰ & ۰ & -۹۶۰ & ۴۸۰۰ \\ & & ۳۲۰۰۰ & ۰ & -۴۸۰۰ & ۱۶۰۰۰ \\ & & & ۸۰۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ & & \text{sym} & & ۹۶۰ & -۴۸۰۰ \\ & & & & & ۳۲۰۰۰ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{matrix} \end{array}$$

سرهم‌بندی ماتریس سختی $\mathbf{S}$ کل سازه:

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} (۱۴۸۴۷+۸۰۰۰۰) & ۲۸۳۲۰ & ۳۴۳۳ \\ ۲۸۳۲۰ & (۵۷۳۲۷+۹۶۰) & (۴۸۰۰-۱۷۱۶) \\ ۳۴۳۳ & (۴۸۰۰-۱۷۱۶) & (۲۸۶۲۳+۳۲۰۰۰) \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{matrix} \end{array}$$

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} ۹۴۸۴۷ & ۲۸۳۲۰ & ۳۴۳۳ \\ ۲۸۳۲۰ & ۵۸۲۸۷ & ۳۰۸۴ \\ ۳۴۳۳ & ۳۰۸۴ & ۶۰۶۲۳ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ -۱۵۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_f = \mathbf{S}\mathbf{d} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ -۱۵۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹۴۸۴۷ & ۲۸۳۲۰ & ۳۴۳۳ \\ ۲۸۳۲۰ & ۵۸۲۸۷ & ۳۰۸۴ \\ ۳۴۳۳ & ۳۰۸۴ & ۶۰۶۲۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_۱ \\ d_۲ \\ d_۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{d} = ۱۰^{-۴} \begin{bmatrix} ۰/۵۹۲۴\ m \\ ۱/۰۲۵۹\ m \\ -۲۴/۸۲۹\ rad \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۱):

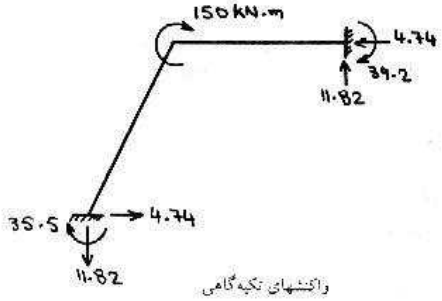
$$\mathbf{v}_۱ = ۱۰^{-۴} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰/۵۹۲۴ \\ ۱/۰۲۵۹ \\ -۲۴/۸۲۹ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{u}_۱ = \mathbf{T}_۱^T \mathbf{v}_۱ = ۱۰^{-۴} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱/۱۸۲ \\ -۰/۰۷۱۰۳ \\ -۲۴/۸۲۹ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_۱ = \mathbf{k}_۱ \mathbf{u}_۱ + \mathbf{Q}_{f۱} = \begin{bmatrix} -۸/۴۶\ kN \\ -۹/۵۳\ kN \\ -۳۵/۵\ kN.m \\ ۸/۴۶\ kN \\ ۹/۵۳\ kN \\ -۷۱\ kN.m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_1=\mathbf{T}_1^T\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix} ۴/۷۴ & kN \\ -۱۱/۸۲ & kN \\ -۳۵/۵ & kN.m \\ -۴/۷۴ & kN \\ ۱۱/۸۲ & kN \\ -۷۱ & kN.m \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۲):

$$\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2=۱۰^{-۴}\begin{bmatrix} -/۵۹۲۴ \\ ۱/۰۲۵۹ \\ -۲۴/۸۲۹ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_2=\mathbf{Q}_2=\mathbf{k}_2\mathbf{u}_2+\mathbf{Q}_{f2}=\begin{bmatrix} ۴/۷۴ & kN \\ -۱۱/۸۲ & kN \\ -۷۹ & kN.m \\ -۴/۷۴ & kN \\ ۱۱/۸۲ & kN \\ -۳۹/۲ & kN.m \end{bmatrix}$$

تعیین واکنشهای تکیه‌گاهی:

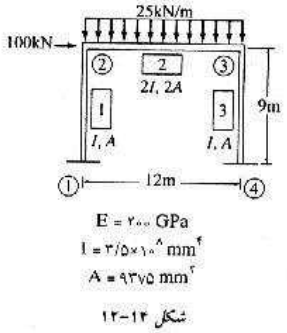


واکنشهای تکیه‌گاهی

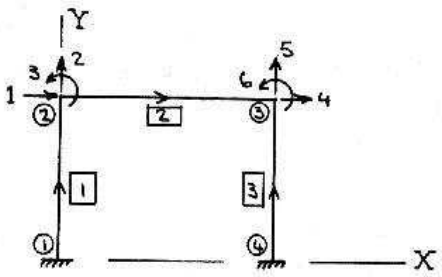
$$\mathbf{R}_①=\mathbf{F}_1\text{ نیمهٔ بالای بردار}=\begin{bmatrix} ۴/۷۴ & kN \\ -۱۱/۸۲ & kN \\ -۳۵/۵ & kN.m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_②=\mathbf{F}_2\text{ نیمهٔ پایین بردار}=\begin{bmatrix} -۴/۷۴ & kN \\ ۱۱/۸۲ & kN \\ -۳۹/۲ & kN.m \end{bmatrix}$$

۱۲-۱۴



شکل ۱۲-۱۴



مدل تحلیلی قاب

اعضای (۱) و (۳): $L=۹\,m$

$\cos\theta=۰\quad,\quad \sin\theta=۱$

عضو (۲): $L=۱۲\,m$

$\cos\theta=۱\quad,\quad \sin\theta=۰$

اعضای (۱) و (۳):

$$\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_3=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} ۲۹۷/۶۲ & ۰ & ۰ & -۲۹۷/۶۲ & ۰ & ۰ \\ & ۱/۶۴۶ & ۷/۴۰۷ & ۰ & ۱/۶۴۶ & ۷/۴۰۷ \\ & & ۴۴/۴۴۴ & ۰ & -۷/۴۰۷ & ۲۲/۲۲۲ \\ & & & ۲۹۷/۶۲ & ۰ & ۰ \\ & \text{sym} & & & ۱/۶۴۶ & -۷/۴۰۷ \\ & & & & & ۴۴/۴۴۴ \end{bmatrix},\quad \mathbf{T}_1=\mathbf{T}_3=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

عضو (۳) ⟶ ۰ ۰ ۰ ۴ ۵ ۶

عضو (۱) ⟶ ۰ ۰ ۰ ۱ ۲ ۳

$$\mathbf{K}=\mathbf{T}^{T}\,\mathbf{kT}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{K}_{۱}=\mathbf{K}_{۳}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} ۱/۶۴۶ & ۰ & -۷/۴۰۷ & -۱/۶۴۶ & ۰ & -۷/۴۰۷ & ۰\\ & ۲۹۷/۶۲ & ۰ & ۰ & -۲۹۷/۶۲ & ۰ & ۰\\ & & ۴۴/۴۴۴ & ۷/۴۰۷ & ۰ & ۲۲/۲۲۲ & ۰\\ & & & ۱/۶۴۶ & ۰ & ۷/۴۰۷ & ۱\\ & & \text{sym} & & ۲۹۷/۶۲ & ۰ & ۲\\ & & & & & ۴۴/۴۴۴ & ۳\end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۰\\۰\\۴\\۵\\۶\end{matrix}$$

عضو (۲):

$$\mathbf{k}_{۲}=\mathbf{K}_{۲}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} ۴۴۶/۴۳ & ۰ & ۰ & -۴۴۶/۴۳ & ۰ & ۰\\ & ۱/۳۸۹ & ۸/۳۳۳ & ۰ & -۱/۳۸۹ & ۸/۳۳۳\\ & & ۶۶/۶۶۷ & ۰ & -۸/۳۳۳ & ۳۳/۳۳۳\\ & & \text{sym} & ۴۴۶/۴۳ & ۰ & ۰\\ & & & & ۱/۳۸۹ & -۸/۳۳۳\\ & & & & & ۶۶/۶۶۷\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\end{matrix}\quad ,\quad \mathbf{F}_{f۲}=\mathbf{Q}_{f۲}=\begin{bmatrix}۰\\۱۵۰\\۳۰۰\\۰\\۱۵۰\\-۳۰۰\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\end{matrix}$$

$$\mathbf{S}=\mathrm{EI}\,(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} (۴۴۶/۴۳+۱/۶۴۶) & ۰ & ۷/۴۰۷ & -۴۴۶/۴۳ & ۰ & ۰\\ & (۱/۳۸۹+۲۹۷/۶۲) & ۸/۳۳۳ & ۰ & -۱/۳۸۹ & ۸/۳۳۳\\ & & (۶۶/۶۶۷+۴۴/۴۴۴) & ۰ & -۸/۳۳۳ & ۳۳/۳۳۳\\ & & \text{sym} & (۴۴۶/۴۳+۱/۶۴۶) & ۰ & ۷/۴۰۷\\ & & & & (۱/۳۸۹+۲۹۷/۶۲) & -۸/۳۳۳\\ & & & & & (۶۶/۶۶۷+۴۴/۴۴۴)\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\end{matrix}$$

$$\mathbf{S}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} ۴۴۸/۷۶ & ۰ & ۷/۴۰۷ & -۴۴۶/۴۳ & ۰ & ۰\\ & ۲۹۹/۰۰۹ & ۸/۳۳۳ & ۰ & -۱/۳۸۹ & ۸/۳۳۳\\ & & ۱۱۱/۱۱۱ & ۰ & -۸/۳۳۳ & ۳۳/۳۳۳\\ & & \text{sym} & ۴۴۸/۰۷۶ & ۰ & ۷/۴۰۷\\ & & & & ۲۹۹/۰۰۹ & -۸/۳۳۳\\ & & & & & ۱۱۱/۱۱۱\end{bmatrix}\quad ,\quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}۱۰۰\\۰\\۰\\۰\\۰\\۰\end{bmatrix}\quad ,\quad \mathbf{P}_{f}=\mathbf{F}_{f۲}\,,\ \mathbf{P}-\mathbf{P}_{f}=\begin{bmatrix}۱۰۰\\-۱۵۰\\-۳۰۰\\۰\\-۱۵۰\\۳۰۰\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\end{matrix}$$

$$\mathbf{P}-\mathbf{P}_{f}=\mathbf{Sd}\quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}۱۰۰\\-۱۵۰\\-۳۰۰\\۰\\-۱۵۰\\۳۰۰\end{bmatrix}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} ۴۴۸/۰۷۶ & ۰ & ۷/۴۰۷ & -۴۴۶/۴۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲۹۹/۰۰۹ & ۸/۳۳۳ & ۰ & -۱/۳۸۹ & ۸/۳۳۳\\ ۷/۴۰۷ & ۸/۳۳۳ & ۱۱۱/۱۱۱ & ۰ & -۸/۳۳۳ & ۳۳/۳۳۳\\ -۴۴۶/۴۳ & ۰ & ۰ & ۴۴۸/۰۷۶ & ۰ & ۷/۴۰۷\\ ۰ & -۱/۳۸۹ & -۸/۳۳۳ & ۰ & ۲۹۹/۰۰۹ & -۸/۳۳۳\\ ۰ & ۸/۳۳۳ & ۳۳/۳۳۳ & ۷/۴۰۷ & -۸/۳۳۳ & ۱۱۱/۱۱۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{۱}\\d_{۲}\\d_{۳}\\d_{۴}\\d_{۵}\\d_{۶}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}=\frac{۱}{EI(۱۰^{-۲})}\begin{bmatrix}۳۹/۶۵۳۴\\-۰/۳۹۰۷\\-۵/۹۰۷۴\\۳۹/۴۷۷۶\\-۰/۶۱۷۳\\۱/۸۲۳۵\end{bmatrix}\begin{matrix}۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\end{matrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۱):

$$\mathbf{v}_1=\frac{1}{EI(10^{-2})}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\39/6534\\-0/3907\\-5/9074\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\1\\2\\3\end{matrix},\quad \mathbf{u}_1=\mathbf{T}_1\mathbf{v}_1=\frac{1}{EI(10^{-2})}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-0/3907\\-39/6534\\-5/9074\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}_1=\mathbf{k}_1\mathbf{u}_1+\mathbf{Q}_{f1}=\begin{bmatrix}116/28\ kN\\21/51\ kN\\162/44\ kN.m\\-116/28\ kN\\-21/51\ kN\\31/18\ kN.m\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_1=\mathbf{T}_1^T\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix}-21/51\ kN\\116/28\ kN\\162/44\ kN.m\\21/51\ kN\\-116/28\ kN\\31/18\ kN.m\end{bmatrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۲):

$$\mathbf{v}_2=\frac{1}{EI(10^{-2})}\begin{bmatrix}39/6534\\-0/3907\\-5/9074\\39/4776\\-0/6173\\1/8235\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix},\quad \mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2=\frac{1}{EI(10^{-2})}\begin{bmatrix}39/6534\\-0/3907\\-5/9074\\39/4776\\-0/6173\\1/8235\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}_2=\mathbf{k}_2\mathbf{u}_2+\mathbf{Q}_{f2}=\begin{bmatrix}78/49\ kN\\116/28\ kN\\-31/17\ kN.m\\-78/49\ kN\\183/72\ kN\\-373/46\ kN.m\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2=\mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix}78/49\ kN\\116/28\ kN\\-31/17\ kN.m\\-78/49\ kN\\183/72\ kN\\-373/46\ kN.m\end{bmatrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۳):

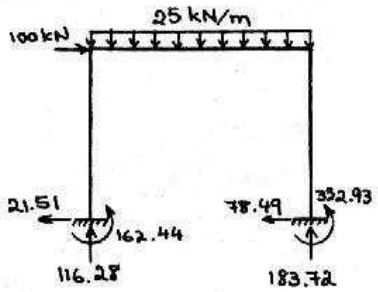
$$\mathbf{v}_3=\frac{1}{EI(10^{-2})}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\39/4776\\-0/6173\\1/8235\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_3=\mathbf{T}_3\mathbf{v}_3=\frac{1}{EI(10^{-2})}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-0/6173\\-39/4776\\1/8235\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}_3=\mathbf{k}_3\mathbf{u}_3+\mathbf{Q}_{f3}=\begin{bmatrix}183/72\ kN\\78/49\ kN\\332/93\ kN.m\\-183/72\ kN\\-78/49\ kN\\373/45\ kN.m\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_3=\mathbf{T}_3^T\mathbf{Q}_3=\begin{bmatrix}-78/49\ kN\\183/72\ kN\\332/93\ kN.m\\78/49\ kN\\-183/72\ kN\\373/45\ kN.m\end{bmatrix}$$

تعیین واکنشهای تکیه‌گاهی:

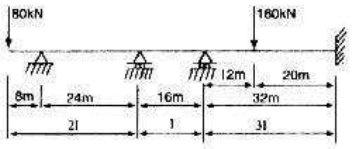
$$\mathbf{R}_{①}=\mathbf{F}_1\text{ نیمهٔ بالای بردار}=\begin{bmatrix}-21/51\ kN\\116/28\ kN\\162/44\ kN.m\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{②}=\mathbf{F}_3\text{ نیمهٔ بالای بردار}=\begin{bmatrix}-78/49\ kN\\183/72\ kN\\332/93\ kN.m\end{bmatrix}$$

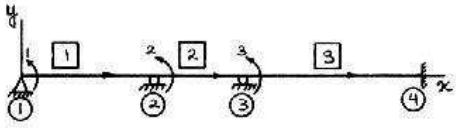


واکنشهای تکیه‌گاهی

۱۴-۱۳ تیر نشان داده شده در شکل زیر را با روش ماتریسی تحلیل کرده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را ترسیم کنید.



شکل ۱۴-۱۳



مدل تحلیلی تیر

عضو (۱):

$$\mathbf{K}_1 = EI(10^{-3})\begin{bmatrix} 20/833 & -1/736 & 20/833 & 1/736 \\ & 166/67 & -20/833 & 333/33 \\ & & 1/736 & -20/833 \\ \text{sym} & & & 333/33 \end{bmatrix}\begin{matrix}0\\1\\0\\2\end{matrix}$$

$$\mathbf{F}_{f_1} = \mathbf{Q}_{f1} = \mathbf{0}$$

عضو (۲):

$$\mathbf{K}_2 = EI(10^{-3})\begin{bmatrix} 23/438 & -2/929 & 23/438 & 2/929 \\ & 250 & -23/438 & 125 \\ & & 23/438 & -23/438 \\ \text{sym} & & & 2/929 \end{bmatrix}\begin{matrix}3\\0\\2\\0\end{matrix}$$

$$\mathbf{F}_{f_2} = \mathbf{Q}_{f2} = \mathbf{0}$$

عضو (۳):

$$\mathbf{K}_3 = EI(10^{-3})\begin{bmatrix} 1/098 & 17/578 & -1/098 & 17/578 \\ & 375 & -17/578 & 187/5 \\ & & 1/098 & -17/578 \\ \text{sym} & & & 375 \end{bmatrix}\begin{matrix}0\\3\\0\\0\end{matrix}$$

$$\mathbf{F}_{f3} = \mathbf{Q}_{f3} = \begin{bmatrix} 109/38 \\ 750 \\ 50/62 \\ -450 \end{bmatrix}\begin{matrix}0\\3\\0\\0\end{matrix}$$

سرهم‌بندی ماتریس سختی $\mathbf{S}$ کل سازه:

$$\mathbf{S} = EI(10^{-3})\begin{bmatrix} 333/33 & 166/67 & 0 \\ & (250+333/33) & 125 \\ \text{sym} & & (250+375) \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$$

$$\mathbf{P}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 750 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = EI(10^{-3})\begin{bmatrix} 333/33 & 166/67 & 0 \\ & 583/33 & 125 \\ \text{sym} & & 625 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 640 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}, \quad \mathbf{P} - \mathbf{P}_f = \mathbf{Sd}$$

$$\begin{bmatrix} 640 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333/33 & 166/67 & 0 \\ & 583/33 & 125 \\ \text{sym} & & 625 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{d} = \frac{1}{EI(10^{-3})}\begin{bmatrix} 2/099 \\ -0/358 \\ -1/1284 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$$

محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۱):

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \frac{1}{EI(10^{-3})}\begin{bmatrix} 0 \\ 2/099 \\ 0 \\ -0/358 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{Q}_{f1} = \begin{bmatrix} 36/27 & kN \\ 640 & kN.m \\ -36/27 & kN \\ 230/51 & kN.m \end{bmatrix}$$

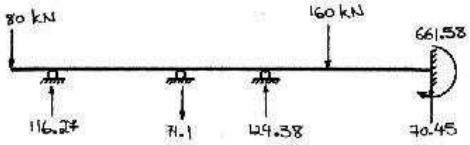
محاسبهٔ نیروهای انتهایی عضو (۲):

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 = \frac{1}{EI(10^{-3})}\begin{bmatrix} 0 \\ -0/358 \\ 0 \\ -1/1284 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{Q}_2 = \mathbf{K}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{Q}_{f2} = \begin{bmatrix} -34/83 & kN \\ -230/5 & kN.m \\ 34/83 & kN \\ -326/75 & kN.m \end{bmatrix}$$

نیروهای انتهایی عضو (۳):

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 = \frac{1}{EI(10^{-3})}\begin{bmatrix} 0 \\ -1/1284 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \mathbf{Q}_3 = \mathbf{K}_3\mathbf{u}_3 + \mathbf{Q}_{f3} = \begin{bmatrix} 89/55 & kN \\ 326/85 & kN.m \\ 70/45 & kN \\ -661/58 & kN.m \end{bmatrix}$$



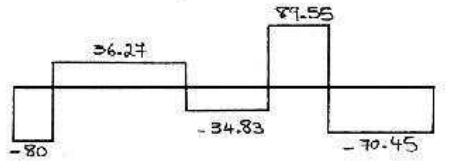
واکنشهای تکیه‌گاهی

$$\mathbf{R}_{①}=\mathbf{F}_{۱}\ \text{نیمهٔ بالای بردار}=\begin{bmatrix}۱۱۶/۲۷ & kN\\ ۶۴۰ & kN.m\end{bmatrix}$$

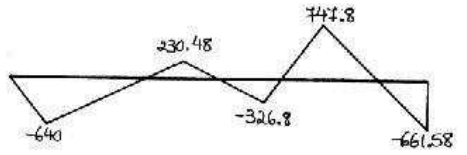
$$\mathbf{R}_{②}=\mathbf{F}_{۱}\ \text{نیمهٔ بالای بردار}+\mathbf{F}_{۲}\ \text{نیمهٔ پایین بردار}=\begin{bmatrix}-۷۱/۱ & kN\\ ۰/۰۱\approx ۰\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{③}=\mathbf{F}_{۲}\ \text{نیمهٔ بالای بردار}+\mathbf{F}_{۳}\ \text{نیمهٔ پایین بردار}=\begin{bmatrix}۱۲۴/۳۸ & kN\\ ۰\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{⑤}=\mathbf{F}_{۳}\ \text{نیمهٔ پایین بردار}=\begin{bmatrix}۷۰/۴۵ & kN\\ -۶۶۱/۵۸ & kN.m\end{bmatrix}$$

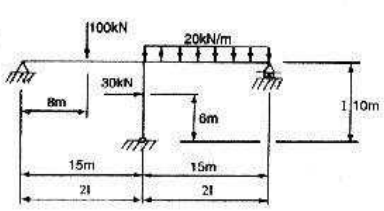


نمودار نیروی برشی، kN

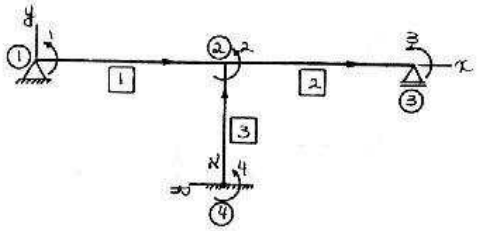


نمودار لنگر خمشی، kN.m

۱۴-۱۴ قاب نشان داده شده در شکل زیر را با روش ماتریسی تحلیل کرده، نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی آن را ترسیم کنید.



شکل ۱۴-۱۴



مدل تحلیلی قاب

عضو (۱):

$$\mathbf{k}_{۱}=\mathbf{K}_{۱}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix}۰/۷۱۱ & ۵/۳۳۳ & -۰/۷۱۱ & ۵/۳۳۳\\ & ۵۳/۳۳۳ & -۵/۳۳۳ & ۲۶/۶۶۷\\ & \text{sym} & ۰/۷۱۱ & -۵/۳۳۳\\ & & & ۵۳/۳۳۳\end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۱\\۰\\۲\end{matrix}\quad\begin{matrix}۰&۱&۰&۲\end{matrix}$$

$$\mathbf{F}_{f۱}=\mathbf{Q}_{f۱}=\begin{bmatrix}۴۵/۰۱\\ ۱۷۴/۲۲\\ ۵۴/۹۹\\ -۱۹۹/۱۱\end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۱\\۰\\۲\end{matrix}$$

عضو (۲):

$$\mathbf{k}_{۲}=\mathbf{K}_{۲}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix}۰/۷۱۱ & ۵/۳۳۳ & -۰/۷۱۱ & ۵/۳۳۳\\ & ۵۳/۳۳۳ & -۵/۳۳۳ & ۲۶/۶۶۷\\ & \text{sym} & ۰/۷۱۱ & -۵/۳۳۳\\ & & & ۵۳/۳۳۳\end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۲\\۰\\۳\end{matrix}\quad\begin{matrix}۰&۲&۰&۳\end{matrix}$$

$$\mathbf{F}_{f۲}=\mathbf{Q}_{f۲}=\begin{bmatrix}۱۵۰\\ ۳۷۵\\ ۱۵۰\\ -۳۷۵\end{bmatrix}\begin{matrix}۰\\۲\\۰\\۳\end{matrix}$$

عضو (۳) :

$$\mathbf{k}_{۳}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} ۱/۲ & ۶/۰ & -۱/۲ & ۶/۰ \\ & ۴۰/۰ & -۶/۰ & ۲۰/۰ \\ & \text{sym} & ۱/۲ & -۶/۰ \\ & & & ۴۰/۰ \end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}_{f۳}=\begin{bmatrix} ۱۰/۵۶ \\ ۲۸/۸ \\ ۱۹/۴۴ \\ -۴۳/۲ \end{bmatrix},\quad \mathbf{T}_{۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{۳}=\mathbf{T}_{۳}^{T}\mathbf{k}_{۳}\mathbf{T}_{۳}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} ۱/۲ & ۶/۰ & -۱/۲ & ۶/۰ \\ & ۴۰/۰ & -۶/۰ & ۲۰/۰ \\ & \text{sym} & ۱/۲ & -۶/۰ \\ & & & ۴۰/۰ \end{bmatrix}^{۳}_{۴}_{۱}_{۲},\quad \mathbf{F}_{f۳}=\mathbf{T}_{۳}^{T}\mathbf{Q}_{f۳}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲۸/۸ \\ ۰ \\ -۴۳/۲ \end{bmatrix}^{۳}_{۴}_{۱}_{۲}$$

$$\mathbf{S}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} ۵۳/۳۳۳ & ۲۶/۶۶۷ & ۰ & ۰ \\ ۲۶/۶۶۷ & (۵۳/۳۳۳\times۲+۴۰) & ۲۶/۶۶۷ & ۲۰ \\ ۰ & ۲۶/۶۶۷ & ۵۳/۳۳۳ & ۰ \\ ۰ & ۲۰ & ۰ & ۴۰ \end{bmatrix}^{۱}_{۲}_{۳}_{۴}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} ۵۳/۳۳۳ & ۲۶/۶۶۷ & ۰ & ۰ \\ & ۱۴۶/۶۶۶ & ۲۶/۶۶۷ & ۲۰ \\ & \text{sym} & ۵۳/۳۳۳ & ۰ \\ & & & ۴۰ \end{bmatrix}^{۱}_{۲}_{۳}_{۴}$$

$$\mathbf{P}_{f}=\begin{bmatrix} ۱۷۴/۲۲ \\ ۳۷۵-۱۹۹/۱۱ \\ -۴۳/۲ \\ -۳۷۵ \\ ۲۸/۸ \end{bmatrix}^{۱}_{۲}_{۳}=\begin{bmatrix} ۱۷۴/۲۲ \\ ۱۳۲/۶۹ \\ -۳۷۵ \\ ۲۸/۸ \end{bmatrix}^{۱}_{۲}_{۳}_{۴}$$

$$\mathbf{P}-\mathbf{P}_{f}=\mathbf{S}\mathbf{d}\ \Rightarrow\ -\begin{bmatrix} ۱۷۴/۲۲ \\ ۱۳۲/۶۹ \\ -۳۷۵ \\ ۲۸/۵ \end{bmatrix}=EI(۱۰^{-۲})\begin{bmatrix} ۵۳/۳۳۳ & ۲۶/۶۶۷ & ۰ & ۰ \\ ۲۶/۶۶۷ & ۱۴۶/۶۶۶ & ۲۶/۶۶۷ & ۲۰ \\ ۰ & ۲۶/۶۶۷ & ۵۳/۳۳۳ & ۰ \\ ۰ & ۲۰ & ۰ & ۴۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{۱} \\ d_{۲} \\ d_{۳} \\ d_{۴} \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{d}=\frac{۱}{EI(۱۰^{-۲})}\begin{bmatrix} -۲/۲۷۲۶ \\ -۱/۹۸۸۰ \\ ۸/۰۲۵۳ \\ ۰/۲۷۴۰ \end{bmatrix}^{۱}_{۲}_{۳}_{۴}$$

نیروهای انتهایی عضو (۱) :

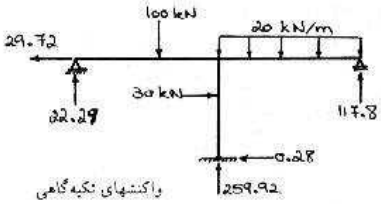
$$\mathbf{Q}_{۱}=\mathbf{k}_{۱}\mathbf{u}_{۱}+\mathbf{Q}_{f۱},\quad \mathbf{u}_{۱}=\frac{۱}{EI(۱۰^{-۲})}\begin{bmatrix} ۰ \\ -۲/۲۷۲۶ \\ ۰ \\ -۱/۹۸۸ \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{F}_{۱}=\mathbf{Q}_{۱}=\begin{bmatrix} ۲۲/۲۹ & kN \\ ۰ & \\ ۷۷/۷۱ & kN \\ -۳۶۵/۷۴ & kN.m \end{bmatrix}$$

نیروهای انتهایی عضو (۲) :

$$\mathbf{Q}_{۲}=\mathbf{k}_{۲}\mathbf{u}_{۲}+\mathbf{Q}_{f۲},\quad \mathbf{u}_{۲}=\frac{۱}{EI(۱۰^{-۲})}\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱/۹۸۸ \\ ۰ \\ ۸/۰۲۵۳ \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{F}_{۲}=\mathbf{Q}_{۲}=\begin{bmatrix} ۱۸۲/۲ & kN \\ ۴۸۲/۹۸ & kN.m \\ ۱۱۷/۸ & kN \\ ۰ & \end{bmatrix}$$

نیروهای انتهایی عضو (۳) :

$$\mathbf{Q}_{۳}=\mathbf{k}_{۳}\mathbf{u}_{۳}+\mathbf{Q}_{f۳},\quad \mathbf{u}_{۳}=\frac{۱}{EI(۱۰^{-۲})}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰/۲۷۴۰ \\ ۰ \\ -۱/۹۸۸۰ \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{Q}_{۳}=\begin{bmatrix} ۰/۲۸ & kN \\ ۰ & \\ ۲۹/۷۲ & kN \\ -۱۱۷/۲۴ & kN.m \end{bmatrix}$$



واکنشهای تکیه‌گاهی